Cibele de Almeida Souza

A DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL NO ENSINO SUPERIOR

Mestrado em Educação Matemática

PUC/SP
São Paulo
2002

Cibele de Almeida Souza

A DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL NO ENSINO SUPERIOR

Mestrado em Educação Matemática

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de MESTRE em Educação Matemática, sob a orientação do Prof. Dr. Saddo Ag Almouloud.

PUC/SP
São Paulo
2002

BANCA EXAMINADORA

_____

_____

_____

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta dissertação por processos fotocopiadores ou eletrônicos.
Assinatura:_____Local e Data:_____

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador, Prof. Dr. Saddo Ag Almouloud, pela confiança que depositou em mim, pelo incentivo e pelas sugestões, sempre pertinentes.

À Profª. Drª. Dione Lucchesi de Carvalho e ao Prof. Dr. Benedito Antonio da Silva, por aceitarem fazer parte da banca examinadora e por suas valiosas sugestões.

Ao Prof. Armando Traldi Jr., por ter observado a aplicação da seqüência didática e pelo seu interesse e incentivo durante o desenvolvimento deste trabalho.

À direção das Faculdades de Administração de Empresas e de Comunicação da Fundação Armando Álvares Penteado, particularmente aos Diretores, Prof. Henrique Vailati Neto e Prof. Rubens Fernandes Jr., e aos Chefes de Departamento, Prof. Antonio Carlos Cappabianco e Profª. Elenice Rampazzo, por permitirem que as seqüências piloto e final se realizassem com os alunos da Instituição.

Aos alunos dos cursos de Administração de Empresas e de Comunicação, por terem realizado as seqüências.

À minha irmã, Flávia Maria Souza Morsa, pelas traduções da língua inglesa para a portuguesa e pela redação do abstract.

À minha mãe, Maria Enide de Almeida Souza, pela infra-estrutura, apoio, incentivo e compreensão durante todo o tempo em que estive envolvida neste trabalho.

RESUMO

Em vista do destaque da distribuição binomial de probabilidades na Estatística e de algumas dificuldades conhecidas no processo de ensino-aprendizagem de Probabilidade, desenvolvemos este trabalho com os objetivos de conhecer melhor alguns aspectos da própria distribuição binomial e de suas relações com outras distribuições de probabilidades, traçar um breve panorama de pesquisas já realizadas sobre o ensino-aprendizagem de Probabilidade e elaborar uma seqüência didática que favoreça a apreensão da distribuição binomial.

Para atingir esse último objetivo, baseamo-nos no panorama citado e em alguns constructos da Didática da Matemática, entre os quais a dialética ferramenta-objeto, de acordo com Régine Douady e o uso de mais de um registro de representação, de acordo com Raymond Duval.

A seqüência didática foi realizada por alunos que cursam Administração de Empresas, curso cujo principal enfoque, no geral, não é matemático.

O desenvolvimento do trabalho evidenciou, além de algumas dificuldades enfrentadas pelos alunos, questões que não puderam ser aqui tratadas. Essas questões indicam, a nosso ver, temas para futuras pesquisas sobre ensino-aprendizagem de Probabilidade.

Dentre as conclusões da nossa pesquisa, destacamos a constatação de que o uso da distribuição binomial de probabilidades pelos alunos se deu mais pela força de um contrato didático do que pela efetiva apreensão do conteúdo.

ABSTRACT

By the evidence of binomial distribution of probabilities in Statistics and some known difficulties in teaching and learning process of Probability, we developed this work to learn more about some aspects of binomial distribution and its relation to other probability distributions, to trace a short view of performed researches about teaching and learning Probability and to organize a didactical sequence that supports the understanding of binomial distribution.

To achieve this last aim, we based ourselves on this mentioned view and on some constructs of Mathematics teaching, between them the tool-object dialetic, in accordance with Régine Douady and the use of more than one register of representation, in accordance with Raymond Duval.

The didactical sequence was realized by Business Administration students, university study that, in general, is not focused in Mathematics.

This work development made evident, beyond some difficulties faced by the students, questions that couldn't be solved here. These questions indicate, as we see, aim of future research about teaching and lerning Probability.

Our research showed, among other conclusions, that the use of binomial distribution, by the students, occurred more because of didactic contract than for effective understanding of content.

ÍNDICE

Introdução, 1

Capítulo I – Justificativa, Objetivos, Problemática, Quadro Teórico, Hipóteses e Metodologia, 3

1. Justificativa, 4
2. Problemática, 6
3. Objetivos, 8
4. Quadro Teórico, 9
   4.1. Quadros e Mudanças de Quadros, 9
   4.2. Dialética Ferramenta-Objeto, 9
   4.3. Contrato Didático, 11
   4.4. Tratamento dos Erros, 11
   4.5. Linguagem e Registros de Representação, 13
5. Hipóteses, 16
6. Metodologia, 16

Capítulo II - Estudo do Objeto Matemático, 18

1. Variável Aleatória, 19
2. Distribuição de Probabilidades, 20
3. A Distribuição de Bernoulli, 22
4. A Distribuição Binomial, 23
5. A Distribuição Hipergeométrica e sua Aproximação pela Binomial, 25
6. A Distribuição de Poisson e a Aproximação da Binomial, 27
7. A Distribuição Normal e a Aproximação da Binomial, 29
8. Síntese, 33

Capítulo III - Breve Panorama de Resultados de Pesquisas sobre o Ensino e a Aprendizagem de Probabilidade, 34

1. Concepções dos Alunos sobre Probabilidade, 35

1.1. Concepções Gerais, 35
1.2. Concepções sobre Aleatoriedade e Evento, 36
1.3. Concepções sobre Probabilidade de um Evento, 37
2. A Representatividade, a Disponibilidade e a Equiprobabilidade, 37
3. Dificuldades e Obstáculos, 40
3.1. Obstáculo “Uniformiste”, 40
3.2. Dificuldades devido à Independência de Experimentos Aleatórios, 40
3.3. Dificuldades devido à Aleatoriedade, 41
3.4. Dificuldades Didáticas, 43
3.5. Dificuldades Matemáticas, 43
3.6. Dificuldades devido às Concepções dos Alunos, 43
3.7. Outras Dificuldades, 44
3.8. Síntese, 44
4. Outros Fenômenos Observados em Pesquisas, 45
4.1. Contexto e Vocabulário, 45
4.2. O Sentido das Palavras, 47
4.3. Enunciados de Problemas e de Exercícios, 47
4.4. O Comportamento de Vieses de acordo com a Idade, 49
5. Algumas Propostas de Soluções, 49
6. A Árvore de Probabilidades, 54
7. Aproveitamento das Questões Levantadas, 61

Capítulo IV – A Seqüência Piloto, 63
1. Panorama dos Alunos e Objetivos, 64
2. A Seqüência Piloto, 65
3. Conclusões, 76

Capítulo V - A Seqüência Didática e o Pós-teste, 78
1. A Seqüência Didática, 79
1.1. Objetivos, 79
1.2. O Dispositivo Experimental, 79
1.3. Justificativas, 80

1.4. A Experimentação com Relação ao Quadro Teórico, 81
1.5. Panorama dos Alunos e Condições da Experimentação, 82
1.6. As Situações Propostas, 84
1.7. Análise a Priori das Situações, 84
1.8. A Experimentação, 101
1.9. Resultados da Experimentação, 102
1.10. Análise Qualitativa dos Resultados da Experimentação, 105
2. O Pós-teste, 115
2.1. Análise a Priori do Pós-teste, 116
2.2. Análise dos Resultados do Pós-teste, 117
3. Conclusões, 118

Capítulo VI – Considerações Finais, 120
1. Os Resultados da Experimentação em relação aos Fundamentos da Pesquisa, 121
2. Respostas às Questões da Pesquisa, 125
3. Sugestões de Novos Trabalhos, 127

Bibliografia, 129

Anexos, 133
1. A Tabela da Distribuição Normal Padronizada, 134
2. A Seqüência Piloto, 136
3. A Seqüência Didática, 139
4. O Pós-teste, 143

INTRODUÇÃO

A idéia de desenvolver um trabalho que nos ajudasse a conhecer melhor as dificuldades dos alunos na disciplina Estatística num curso superior surgiu da nossa própria experiência como professora de Estatística em cursos de Administração de Empresas e de Comunicação.

A cada semestre letivo, observávamos que, apesar de encontrarmos novos alunos, as dificuldades deles eram, de modo geral, as mesmas. Isso nos incentivou a procurar pesquisas nas quais houvesse referências a essas dificuldades, e, lendo esses trabalhos, decidimos desenvolver nossa dissertação de mestrado sobre o tema Estatística.

Dentre os vários conteúdos da disciplina, optamos por trabalhar com a distribuição binomial de probabilidades, pela sua importância na Estatística.

O objetivo principal do nosso trabalho é elaborar uma seqüência didática que favoreça a apreensão da distribuição binomial. Além desse, temos por objetivos traçar um panorama sucinto de pesquisas já realizadas sobre o ensino-aprendizagem de Probabilidade e conhecer melhor alguns aspectos da própria distribuição e de suas relações com outras distribuições de probabilidades.

No Capítulo I apresentamos a justificativa, os objetivos, a problemática e as hipóteses do nosso trabalho. Quais são as dificuldades que os alunos enfrentam na distribuição binomial? Quais são os fenômenos de ensino-aprendizagem que interferem em sua compreensão? Será que os alunos realmente dominam os conceitos necessários para o estudo da distribuição binomial? Em que medida possíveis falhas em conteúdos anteriores serão foco de dificuldades hoje? Como minimizar essas falhas, se elas existirem? Será isso suficiente para a compreensão da distribuição binomial? Ainda nesse capítulo colocamos os fundamentos teóricos que utilizamos na elaboração da seqüência didática, dentre os quais a dialética ferramenta-objeto, os registros de representação e o contrato didático, além da metodologia empregada no desenvolvimento do trabalho. Com base no quadro teórico descrito nesse capítulo, levantamos a hipótese de que é necessário que se construa uma seqüência didática

para a aprendizagem da distribuição binomial que considere os constructos citados, além da precisão na linguagem natural utilizada e as já conhecidas dificuldades dos alunos.

No Capítulo II realizamos um estudo da distribuição binomial e de suas relações com outras distribuições de probabilidades: distribuição hipergeométrica, de Poisson e normal.

No Capítulo III desenvolvemos um breve panorama de pesquisas sobre o ensino-aprendizagem de Probabilidade, a fim de destacar concepções e dificuldades dos alunos. Existem pesquisas que tratam da maneira pela qual dificuldades dos alunos já conhecidas podem ser transpostas. Procuramos, na seqüência didática elaborada, considerar alguns dos aspectos comentados nesse capítulo.

No Capítulo IV apresentamos uma seqüência piloto sobre distribuição binomial aplicada a alunos de um curso de Comunicação, com o objetivo de detectar o procedimento deles e possíveis dúvidas causadas pela maneira como foi formulada. A análise dos resultados levantou erros cometidos pelos alunos e indicou mudanças na seqüência didática final que elaboramos.

No Capítulo V descrevemos a seqüência didática, seus objetivos e justificativas, sua aplicação a alunos de um curso de Administração de Empresas e os resultados. Apresentamos também o pós-teste, realizado por oito dos dez alunos que trabalharam na seqüência didática, e os resultados.

No Capítulo VI estão as conclusões finais do trabalho. Relacionamos os resultados da experimentação aos fundamentos da pesquisa, colocados nos Capítulos I e III e respondemos às questões colocadas na problemática (Capítulo I). Durante o desenvolvimento do nosso trabalho, surgiram questões que não puderam ser nele tratadas, apesar de se relacionarem com o tema. Sugerimos, no final desse capítulo, que essas questões sejam temas de novos trabalhos sobre o ensino-aprendizagem de Probabilidade.

CAPÍTULO I

JUSTIFICATIVA, OBJETIVOS, PROBLEMÁTICA, QUADRO TEÓRICO, HIPÓTESES E METODOLOGIA

O objetivo deste capítulo é apresentar nossa justificativa para o desenvolvimento do presente trabalho, seus objetivos, problemática e hipóteses. Colocamos aqui ainda os fundamentos teóricos nos quais nos baseamos e a metodologia adotada.

1. Justificativa

A distribuição de probabilidades binomial é bastante utilizada pelos usuários da Estatística[1], pois por meio dela podemos estudar variáveis nas quais aparecem categorias nominais. Por exemplo, ao observarmos o sexo de um indivíduo, percebemos que existem as categorias feminino e masculino. Já aqui podemos notar uma das dificuldades comuns dos alunos: imaginar que sempre que tivermos dois resultados possíveis do experimento aleatório, a probabilidade de cada um deles é igual a 0,5. Essa dificuldade é um caso particular do viés da equiprobabilidade, segundo o qual todos os possíveis resultados de um experimento aleatório têm a mesma probabilidade. Diversos autores, entre eles Rouan (1991) e Lecoutre & Fischbein (1998), fizeram pesquisas sobre esse aspecto, tanto de modo geral como na distribuição binomial. Parzysz (1997) e Girard (1997) observaram o fenômeno particularmente na distribuição binomial.

Outro aspecto que merece destaque é a importância, na Estatística, das relações entre a distribuição binomial e outras distribuições. A distribuição hipergeométrica pode ser aproximada pela binomial; a binomial, por sua vez, pode ser aproximada pela distribuição de Poisson ou pela distribuição normal, utilizada para variáveis contínuas[2]. Existem casos nos quais a distribuição teoricamente correta a aplicar é a binomial, mas ela fornece resultados muitos próximos de quando utilizamos a distribuição normal. É possível que, se o aluno não tiver domínio da distribuição binomial, venha a ter dificuldades quando estiver trabalhando com a distribuição normal. Percebemos, analisando alguns livros didáticos, que não há

[1] Entendemos por usuário da Estatística o indivíduo que faz um curso superior no qual ela é a única ou uma das poucas disciplinas com conteúdo matemático.
[2]Capítulo II.

preocupação em verificar o conhecimento que o aluno tem da distribuição binomial quando se trabalha com a normal e sua aproximação para a binomial. Com uma seqüência didática específica para a distribuição binomial, tentamos ajudar o aluno a compreendê-la.

Deve ser também analisada a maneira como a distribuição binomial é colocada nos livros didáticos destinados ao Ensino Superior. Não podemos pensar que a existência dos livros, ou até mesmo sua indicação pelos professores, garanta que os alunos os utilizem. Entrevistas realizadas com alguns de nossos alunos evidenciaram que, às vezes, eles procuram os livros porque não encontraram o professor a tempo de tirar suas dúvidas. Que critérios os alunos afirmam usar para escolher um livro? Escolhem aquele que o professor indicou, ou aquele que está disponível na biblioteca, ou ainda aquele que eles têm em casa ou tomam emprestado de alguém.

Fizemos uma breve análise de alguns livros – Barbetta (1999), Bussab & Morettin (1987), Stevenson (1986) e Triola (1998) – e destacamos alguns aspectos que justificam um trabalho específico com a distribuição binomial.

Em primeiro lugar, notamos que, de modo geral, os autores não se preocupam com a linguagem utilizada nos livros. Por vezes, a linguagem usada é técnica. Os trabalhos de Maury (1984) e Coutinho (1994), entre outros, mostraram que uma das dificuldades enfrentadas pelos alunos na aprendizagem de Probabilidade é o vocabulário utilizado. Por outro lado, muitas vezes, os enunciados são confusos. As imprecisões relatadas por Dantal e Raymondaud (1997) são comuns nos livros didáticos, principalmente nos exercícios propostos.

Além disso, percebemos que os livros não fazem um estudo completo de Probabilidade antes da apresentação da distribuição binomial. Em alguns, o estudo de Probabilidade é superficial; em outros, não se dá a devida importância às distribuições de probabilidades. Imaginamos que essas lacunas propiciem o aparecimento daquilo que Girard (1997) chamou de obstáculos matemáticos:

dificuldades em conceito matemáticos, por vezes anteriores ao objeto de estudo no momento, que acabam por interferir na aprendizagem dele.

Finalmente, alguns livros utilizam a árvore de probabilidades, mas não da maneira como Parzysz (1993) faz, detalhando sua construção, explicitando suas regras, o alcance e as limitações do seu uso. Quando existe, o uso da árvore é tido como conhecido, isto é, diagramas de árvore são colocados em diversos contextos (contagem, probabilidade condicional, distribuição binomial) mas não se comenta como construí-las ou utilizá-las. Imaginamos que dessa maneira o aluno não será capaz de perceber a utilidade dela e com isso poderá não usá-la como ferramenta na resolução de problemas.

Nossa experiência como professora de Estatística nos levou a perceber que a compreensão e o uso da distribuição binomial não acontecem sem que dificuldades apareçam para os alunos. Esse fato, aliado às pesquisas que conhecemos sobre o ensino e a aprendizagem de Probabilidade, nas quais algumas vezes nos deparamos com a distribuição binomial, nos levou a decidir por olhar de maneira mais próxima como se realizam o ensino e a aprendizagem da distribuição binomial, particularmente para alunos usuários da Estatística.

2. Problemática

Nossa prática docente, e também a de colegas, das quais tomamos conhecimento em reuniões realizadas na instituição onde atuamos como professores de Estatística, nos fez perceber que, no início, quando a distribuição binomial é usada para resolver problemas com pequeno número de repetições do experimento, os alunos costumam considerá-la difícil de identificar, de utilizar e desnecessária. Conforme vão tomando contato com situações nas quais os experimentos são repetidos um número maior de vezes, começam a perceber a utilidade dela e alguns poucos passam até a considerá-la fácil, pois percebem que essas situações vão-se tornando quase impossíveis de serem resolvidas sem conhecimento específico.

Quais são as dificuldades que os alunos enfrentam na distribuição binomial? Quais são os fenômenos de ensino-aprendizagem que interferem em sua compreensão?

Os trabalhos analisados no Capítulo III nos deram algumas respostas a essas questões. Entre outras, destacamos aqui o problema da equiprobabilidade na distribuição binomial (como existem apenas duas possibilidades de resultado no experimento aleatório, o aluno imagina que ambas têm probabilidade igual a 0,5), as dificuldades dos alunos em identificar um número decimal ou uma fração como probabilidade e a dificuldade em operar com porcentagens.

Baseados na análise dos trabalhos do Capítulo III e nos constructos apresentados no quadro teórico (Capítulo I, 4), pretendemos responder à nossa questão de pesquisa: será que uma seqüência didática que se utiliza da dialética ferramenta-objeto, de mais de um registro de representação, da ruptura do contrato didático vigente e considera ainda as já conhecidas dificuldades dos alunos é suficiente para que eles compreendam e utilizem corretamente a distribuição binomial de probabilidades?

Construímos a seqüência didática usando alguns conceitos que os alunos já devem dominar no ponto em que estão: árvore de probabilidades, distribuição de probabilidades, cálculo da probabilidade de um evento simples e cálculo da probabilidade da intersecção de eventos independentes.

Novas questões surgem aqui. Será que os alunos realmente dominam os conceitos necessários para o estudo da distribuição binomial? Em que medida possíveis falhas em conteúdos anteriores serão foco de dificuldades hoje? Como minimizar essas falhas, se elas existirem? Será isso suficiente para a compreensão da distribuição binomial?

A seqüência procura também considerar algumas dificuldades inerentes ao estudo de Probabilidade, tais como:

- a escolha de um modelo adequado, que mostre suas relações com a prática, com o real;

- a interpretação do que é observado e sua tradução matemática coerente com algum modelo, considerando aqui os problemas com as linguagens natural e simbólica e com o vocabulário técnico de Probabilidade;

- o tratamento necessário de análise combinatória, que por si só é uma dificuldade.

Consideramos também algumas concepções dos alunos, como, por exemplo, sobre a aleatoriedade e o acaso, com o objetivo de fazer com que eles superem dificuldades anteriores ao estudo da distribuição binomial. Foram, ainda, considerados possíveis fenômenos geradores de obstáculos, no sentido de tentar ultrapassá-los. Um exemplo: tentamos não contribuir com a idéia da equiprobabilidade em experimentos aleatórios com dois resultados possíveis.

3. Objetivos

Temos por objetivos:

- estudar brevemente a distribuição binomial e as relações com as distribuições hipergeométrica, de Poisson e normal;

- traçar um panorama sucinto de algumas pesquisas já realizadas sobre o ensino e a aprendizagem de Probabilidade;

- elaborar uma seqüência didática que favoreça:

  - identificar uma variável binomial;

  - entender o funcionamento da distribuição binomial;

  - utilizar a distribuição binomial quando necessário;

  - tornar menos intuitivas as concepções a respeito de Probabilidade;

- aperfeiçoar o uso da linguagem técnica de Probabilidade e das transformações necessárias entre as linguagens natural e simbólica.

4. Quadro Teórico

A realização de uma seqüência didática que se utiliza do jogo de quadros, da dialética ferramenta-objeto, de diferentes registros de representação e de diversos exemplos de aplicação ajuda na aprendizagem da distribuição binomial. Diversos trabalhos, entre eles os de Douady (1986) e Duval (1993), já mostraram a utilidade desses constructos.

Na seqüência construída, esses constructos devem favorecer que o aluno construa, ele próprio, a distribuição binomial, percebendo como é formulada e o que significam os elementos que a compõem. Esperamos que daí surja a compreensão dos casos nos quais a distribuição pode ser utilizada.

4.1. Quadros e Mudanças de Quadros

De acordo com Douady (1986, p.11),

> Um quadro é constituído dos objetos de um ramo da Matemática, das relações entre os objetos, de suas formulações eventualmente diversas e das imagens mentais associadas a esses objetos e suas relações.

Particularmente sobre a mudança de quadros, Douady (1986) afirma que sua importância reside no fato de que com ela é possível usar técnicas e ferramentas que não apareciam na formulação original e olhar de uma outra maneira para as dificuldades encontradas.

4.2. Dialética Ferramenta-Objeto

Um conceito matemático é uma ferramenta quando é usado para resolver um problema. Uma mesma ferramenta pode ser usada em vários problemas e um mesmo problema pode utilizar várias ferramentas. Um aluno em atividade matemática pode

usar uma ferramenta de modo implícito (quando ele usa noções sem saber explicitá-las, ou fazendo-o apenas num contexto particular) ou explícito (quando ele usa as noções e sabe justificar). Por outro lado, um conceito matemático é um objeto quando é o próprio objeto de estudo. Nas palavras de Douady (1986), um conceito matemático é objeto quando é

> o objeto cultural tendo seu lugar num edifício maior que é o saber sábio num dado momento, reconhecido socialmente. (Douady, 1986, p.9).

A dialética ferramenta-objeto é um processo para que os alunos resolvam um problema escolhido pelo professor a qual passa pelas seguintes fases:

- antigo: os alunos usam conceitos matemáticos como ferramentas explícitas para resolver parte do problema;
- pesquisa: encontrando dificuldades na resolução do problema, os alunos pesquisam novas maneiras para solucioná-lo. O professor pode usar mudanças de quadros para que os alunos encontrem novas soluções;
- explicitação: os alunos mostram e discutem suas resoluções;
- institucionalização: o professor expõe os novos conhecimentos que eram objetivo da dialética. Com isso, o que era ferramenta (implícita) passa a ser objeto;
- familiarização–reinvestimento: os alunos resolvem exercícios propostos pelo professor empregando as noções institucionalizadas;
- novo problema: o professor pede que o aluno resolva um problema que, embora contenha as noções institucionalizadas, é mais complexo.

No início da seqüência que elaboramos, foi dado um problema que deveria ser resolvido, pelo menos em parte, usando conhecimentos que os alunos já tinham, ou seja, utilizando conceitos matemáticos como ferramentas explícitas. A árvore de probabilidades desempenhou ali o papel de favorecedor para que os alunos encontrassem novas maneiras de resolver o problema. Eles exibiram e discutiram as soluções encontradas. Em certos momentos, houve institucionalizações, feitas pelo

pesquisador. O que foi institucionalizado? O papel da combinação na distribuição binomial e a própria fórmula da distribuição. Os alunos foram, em seguida, solicitados a resolver exercícios que contemplavam os tópicos institucionalizados e, depois, no que denominamos pós-teste, tentaram resolver um problema mais complexo, cuja solução se dava pela distribuição binomial.

4.3. Contrato Didático

O contrato didático definido por Brousseau (1983) é uma relação estabelecida entre o professor e os alunos, implícita, na maior parte, no que diz respeito ao conhecimento matemático visado, que determina quais são as responsabilidades de cada uma das partes. Os indivíduos que realizaram a seqüência, os quais eram, na ocasião, alunos da pesquisadora num curso de Administração de Empresas, estavam acostumados a ter aulas expositivas tradicionais, com realização de exercícios para fixação. Nossa seqüência, baseada na dialética ferramenta-objeto, possibilitou ao aluno trabalhar sem que o professor fizesse intervenções expositivas a todo instante. Nossa expectativa era que isso favorecesse uma quebra do contrato didático, que é o que de fato nos interessa, pois os alunos atuaram de uma maneira diferente daquela com a qual estavam acostumados. A quebra do contrato é necessária para que aconteça um salto no desenvolvimento do aluno, isto é, para que ele seja capaz de superar suas próprias dificuldades e prosseguir rumo à aquisição do conhecimento.

4.4. Tratamento dos Erros

Imaginamos que um trabalho inicial que considere as concepções básicas sobre Probabilidade ajude a superar possíveis dificuldades, procurando evitar com isso que sejam elas as causas de dificuldades em conceitos mais elaborados. Algumas pesquisas comentadas no Capítulo III destacam diversas dificuldades dos alunos e até obstáculos. Segundo Brousseau (1983), os erros que manifestam um obstáculo[3] são

[3] Artigue (1990) apresenta as características dos obstáculos, levantadas pelo próprio Brousseau. Entre elas, destacamos aquela na qual o obstáculo é considerado um conhecimento, e não uma dificuldade ou uma falta de conhecimento, porém um conhecimento que produz respostas corretas em determinado

persistentes. Eles voltam a aparecer muito depois de o indivíduo ter rejeitado aquele modelo que, conscientemente, ele sabe não ser mais útil. A ultrapassagem de um obstáculo exige um trabalho específico de interações repetidas com o objeto matemático em estudo. Nesse trabalho, muitas vezes é preciso mudar a linguagem ou reestruturar os modelos utilizados. O engano sobre a equiprobabilidade, por exemplo, pode ser transposto com atividades adequadas. Se utilizamos um contexto no qual temos dois resultados, mas com probabilidades diferentes de 0,5, o aluno percebe que nem sempre os resultados são equiprováveis.

Artigue (1990) afirma que apesar de a análise histórica ajudar a identificar os "nós de resistência" da aprendizagem, ela não pode, por si só, ser a prova de determinado obstáculo existente nos alunos de hoje. Mesmo que se constate a origem histórica de um obstáculo, podemos perceber que muitas vezes ele vem reforçado por um obstáculo de outra origem, geralmente didática. D'Alambert, em 1760, num contexto compatível com o atual jogo de "cara ou coroa", imaginava que qualquer evento ocorreria duas ou três vezes consecutivas muito raramente e nunca cem vezes consecutivas. Percebemos que ele teve dificuldade em observar a independência de experimentos aleatórios sucessivos. Não seria fora de propósito imaginarmos que nossos alunos também tenham essa dificuldade. O conhecimento desse fato pode nos indicar que devemos ajudar os alunos a perceber a independência de experimentos.

É possível que existam "nós" no ensino atual que funcionam como funcionavam os obstáculos epistemológicos no desenvolvimento da Matemática, mas sem que seja possível atribuir-lhes o estatuto de obstáculo histórico. Para Artigue (1990), é necessário que, além da identificação dos próprios obstáculos na história, sejam identificados também os processos que os produzem.

No artigo citado, Artigue (1990) comenta os trabalhos de Viennot[4] sobre os obstáculos epistemológicos na Física e em conclusão coloca que o que caracteriza o especialista em Matemática não é exatamente a ultrapassagem de um obstáculo, mas

---

contexto e respostas falsas fora desse contexto. Mas esse conhecimento resiste às contradições frente às quais é colocado e não é logo abandonado. Continua a se manifestar inoportuna e insistentemente.

[4] Em seu texto, Michèle Artigue nos fornece as referências a seguir:

> a possibilidade de funcionar em diferentes registros e, em alguns desses registros, chegar a controlar o obstáculo. (Artigue, 1990, p. 258).

Ora, isso nos leva a imaginar que um modo de tentar ultrapassar os obstáculos é justamente dar ao aluno condições de ter um comportamento semelhante ao do especialista, estimulando que ele trabalhe em diversos registros. Procuramos, na seqüência que elaboramos, considerar esse aspecto.

4.5. Linguagem e Registros de Representação

É possível que um trabalho detalhado e insistente no que diz respeito ao uso da linguagem natural e às transformações dela em linguagem simbólica proporcione ao aluno o aperfeiçoamento de seu desempenho na resolução de problemas de Probabilidade, de modo geral, e, em particular, naqueles de distribuição binomial. Para que as transformações entre linguagens ocorram, devemos nos preocupar com a própria linguagem e também com os diferentes registros de representação que serão utilizados nas transformações.

Segundo Duval (1993), os objetos matemáticos não são diretamente acessíveis à nossa percepção, sendo, então, necessária uma representação. Ela possibilita a comunicação. Além disso, para o autor, a coordenação entre vários registros de representação é uma condição necessária para que o objeto matemático não seja confundido com sua representação e também para que ele possa ser reconhecido em cada uma das suas representações. Um dos aspectos a destacar nesse ponto é que qualquer que seja a representação de um objeto matemático, ela será parcial, isto é, explicará alguns aspectos do que representa. Assim, transitando por mais de um registro, o aluno tem compreensão mais ampla do objeto. Duval (1993) escreve, também, que a compreensão de um conteúdo depende da coordenação de, no mínimo, dois registros. Percebe-se essa coordenação pela rapidez e pela espontaneidade com

---

VIENNOT L. 1988. *Obstacle épistémologique et raisonnements en physique: tendance au contournement des conflits chez les enseignants*, Communication au Colloque international: Construction des savoirs – Obstacles et conflits, Montréal.

VIENNOT L. 1988. *Tendance à la reduction fonctionelle: obstacle au savoir scientifique et objet de consensus*, Communication au Colloque international: Construction des savoirs – Obstacles et conflits, Montréal.

que convertemos um registro em outro; na maioria dos alunos, ainda de acordo com Duval (1993), a conversão não é espontânea.

Podemos ter vários registros num mesmo quadro e um mesmo registro pode ser utilizado em vários quadros. No quadro probabilístico, ou seja, naquele constituído dos objetos e das relações que dizem respeito à Probabilidade, os enunciados geralmente são dados no registro da linguagem natural, mas a resolução pode utilizar o registro simbólico (fórmulas), o de tabelas ou o de árvores. O mesmo registro em linguagem natural pode ser utilizado simultaneamente no domínio da realidade, no quadro probabilístico ou no estatístico (constituído pelos objetos e pelas relações que dizem respeito à Estatística: é mais amplo que o quadro probabilístico).

Montar uma árvore de probabilidades com base num enunciado em linguagem natural, por exemplo, é uma conversão de registros e pode, segundo Duval (1993), trazer dificuldades.

As relações entre sentidos, quadros e registros são complementares. Por exemplo: para trabalhar com uma árvore, é preciso saber multiplicar números reais, mas não é preciso saber o que eles representam: probabilidades, freqüências ou qualquer outra coisa. Porém, por que nas árvores temos que efetuar a multiplicação dos números e não a adição? A resposta não está no registro das árvores, e sim no quadro probabilístico (ou no estatístico).

Duval (1995c) coloca a importância da transposição dos obstáculos que deve ocorrer para que se tenha uma unidade cognitiva dos registros de linguagem natural e formal. Na conversão de um termo de linguagem natural para linguagem formal, esses obstáculos aparecem de maneira óbvia. Por exemplo, em Probabilidade, é comum que os alunos não consigam, sem um trabalho específico, perceber que, em linguagem formal, a expressão da linguagem natural “pelo menos um” representa a união de eventos. Às vezes uma representação intermediária se faz necessária, e Duval (1995c) afirma que ela só desempenhará bem sua função se não pertencer a nenhum dos registros para os quais serve de ponte, ou seja, nem à linguagem natural nem à formal. Ora, é esse o caso que temos quando trabalhamos com a árvore de

probabilidades na distribuição binomial: ela não faz parte da linguagem natural, nem da formal em Probabilidade, mas possibilita que o aluno faça as pontes necessárias entre uma e outra.

Escreve Duval (1993, p.63):

> A linguagem natural deve ser considerada ao mesmo tempo como um registro de partida e como um registro de chegada. Mas, e é este o ponto importante, essa conversão interna não se faz diretamente, ela passa por representações intermediárias não discursivas.

Sobre a compreensão de textos, o autor comentou que ela depende também dos conhecimentos do indivíduo sobre o que é tratado no texto. É em parte a partir desses conhecimentos que o indivíduo vai compreender o texto, independentemente do que nele esteja explícito.

Particularmente no que diz respeito aos problemas "matematizáveis", os enunciados são redigidos de modo que se aplique um determinado tratamento matemático num ambiente econômico ou social. O enunciado deve fornecer todas as informações necessárias para a determinação do tratamento que deve ser aplicado à situação. Por exemplo, se o enunciado versa sobre união de eventos, o tratamento aplicado será uma operação de adição; se fala em número de itens com certa característica numa amostra, esse número deverá ser convertido numa proporção para que seja utilizado em Probabilidade. Mesmo quando o conteúdo matemático está adquirido, o enunciado cria dificuldades importantes[5]. É preciso, então, variar os enunciados sem, porém, permitir que essa variação mude o tratamento a ser aplicado.

5. Hipóteses

[5] Capítulo III, 4.3.

Considerando nosso quadro teórico, levantamos a hipótese de que é necessário que se construa uma seqüência didática para a aprendizagem da distribuição binomial que considere os seguintes pontos:

- a dialética ferramenta-objeto, que possibilita ao aluno utilizar a distribuição como ferramenta e como objeto;

- a utilização de mais de um registro de representação, o que propicia uma compreensão mais ampla do objeto matemático e também o jogo de quadros. Especificamente, usamos os registros da linguagem natural e da formal, as árvores de probabilidades, registros numéricos e fórmulas. Esses registros inserem-se em diversos quadros, a saber: estatístico, probabilístico, numérico, algébrico;

- a precisão na linguagem natural, tanto no sentido de compreensão do texto como do contexto por parte do aluno;

- a ruptura do contrato didático, uma vez que os alunos, no seu curso, têm aulas expositivas, com realização de exercícios para fixação, e serão agora solicitados a resolver problemas sem uma pré-exposição por parte da professora/pesquisadora e sem que ela interfira a todo instante;

- os obstáculos, com o objetivo de tentar ultrapassá-los.

6. Metodologia

Em primeiro lugar, fizemos um breve estudo de alguns conceitos da Didática da Matemática e também de algumas pesquisas sobre o ensino e a aprendizagem de Probabilidade. Das pesquisas, identificamos uma série de concepções, dificuldades e maneiras de tentar superá-las, que estão no Capítulo III. Considerando isso e nossos objetivos, formamos a base da seqüência didática construída.

Em seguida elaboramos uma seqüência piloto para conhecermos como os alunos (usuários da Estatística) agiriam durante a realização da seqüência e que tipo

de dificuldades poderiam surgir, tanto devido a problemas de linguagem, como de organização ou de resolução. A aplicação dessa seqüência e a análise dos resultados, colocadas no Capítulo IV, nos fizeram voltar a pensar em uma série de questões e elaborá-la novamente, originando a seqüência didática final.

A seqüência final foi aplicada a alunos usuários da Estatística. A produção dos alunos foi acompanhada pela pesquisadora e por um observador, gravada, recolhida e analisada, e a confrontação dos resultados com a análise a priori possibilitou que chegássemos às conclusões, colocadas no Capítulo VI. Foi aplicado um pós-teste, composto de um problema que devia ser resolvido usando a distribuição binomial, que possibilitou verificar o alcance da seqüência elaborada.

Consideramos necessário neste ponto realizar um estudo do objeto matemático em questão, a distribuição binomial, para melhor compreender a seqüência construída e também a seqüência piloto por nós aplicada em março de 2000 (Capítulo IV). Fazemos então, no Capítulo II, o estudo da distribuição binomial de probabilidades.

CAPÍTULO II

ESTUDO DO OBJETO MATEMÁTICO

Neste capítulo, realizamos o estudo da distribuição binomial de probabilidades. A própria distribuição está inserida num contexto mais amplo de objetos estatísticos por dois motivos: o primeiro é que é necessária a compreensão de alguns tópicos anteriores a ela – variável aleatória, distribuição de probabilidades e distribuição de Bernoulli – para que ela mesma seja bem compreendida. O segundo é que, estudando outras distribuições de probabilidades – distribuições hipergeométrica, de Poisson, e suas aproximações com a binomial, entrando, inclusive, no estudo de variáveis contínuas (distribuição normal e a aproximação da binomial pela normal), percebemos a importância da distribuição binomial e a necessidade de sua compreensão para o prosseguimento dos estudos em Estatística.

Embora façamos, neste capítulo, um levantamento mais amplo em relação às distribuições de probabilidades e suas relações com a distribuição binomial, nossa seqüência didática trabalha apenas com essa última.

Variável Aleatória

Uma variável aleatória associa um número a cada resultado de um experimento aleatório. Se forem associados apenas números inteiros aos resultados, dizemos que a variável aleatória é discreta. Por exemplo, suponhamos que existam, numa urna, oito bolas, das quais três são brancas (B) e as outras vermelhas (V). Extraindo-se duas bolas dessa urna, os resultados possíveis são: BB, BV, VB e VV. Podemos definir a seguinte variável aleatória discreta: número de bolas brancas na extração de duas bolas dessa urna. Denotamos essa variável por X e seus possíveis valores, a saber: 0,1 e 2, por x.

Dantal (1997) apresenta a noção de variável aleatória a seus alunos da seguinte forma:

> Consideremos uma experiência real, que podemos repetir em condições semelhantes um grande número de vezes, e cujo resultado que se observa é ao mesmo tempo aleatório e mensurável. Modelizaremos essa situação como experiência aleatória. A cada evento elementar podemos associar sua medida. O resultado, aleatório e mensurável, que nós vamos observar, é agora chamado

uma “variável aleatória associada ao experimento aleatório.”(Dantal, 1997, p.293).

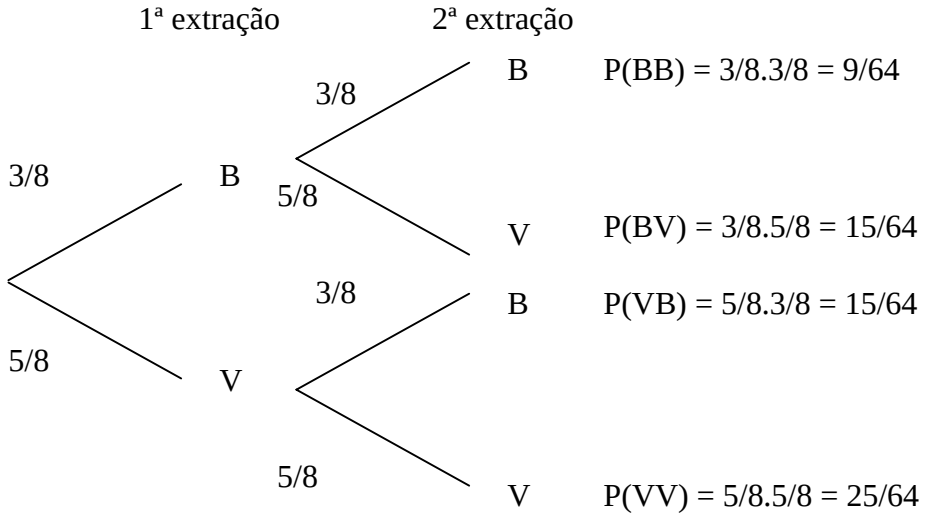
2. Distribuição de Probabilidades

Uma distribuição de probabilidades associa, a cada ponto do espaço amostral de um experimento aleatório, sua respectiva probabilidade. Analisemos o exemplo dado no item anterior. O espaço amostral do experimento é $\Omega = \{0,1,2\}$ e suas respectivas probabilidades são 25/64, 15/32 e 9/64, supondo que as extrações das bolas sejam feitas com reposição. Podemos representar essa distribuição de probabilidades da seguinte maneira:

x	*P(X=x)*
0	25/64
1	15/32
2	9/64
Total	1

Uma vez que na distribuição de probabilidades são considerados todos os pontos do espaço amostral, a soma das suas respectivas probabilidades é 1.

Mas como calculamos os valores das probabilidades colocados nessa representação? Uma das maneiras de fazê-lo é utilizando a árvore de probabilidades.



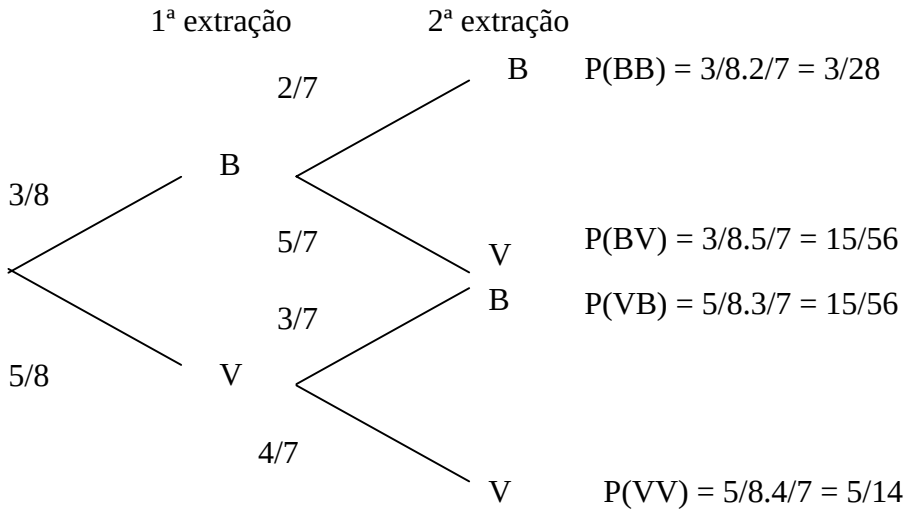
Temos:

P(X = 0) = P(VV) = 25/64;

P(X = 1) = P(BV) + P(VB) = 15/32;

P(X = 2) = P(BB) = 9/64.

Podemos construir, também, a distribuição de probabilidades da variável aleatória Y: número de bolas brancas em duas extrações sem reposição. Os valores possíveis da variável são os mesmos: 0, 1 e 2 . Os cálculos das probabilidades de cada um desses possíveis valores podem ser feitos utilizando a árvore de probabilidades.



Temos:

P(Y = 0) = P(VV) = 5/14;

P(Y = 1) = P(BV) + P(VB) = 15/28;

P(Y = 2) = P(BB) = 3/28.

A distribuição de probabilidades da variável Y é:

y	$P(Y=y)$
0	5/14
1	15/28
2	3/28
Total	1

Muitas situações se repetem na prática e, tendo por base as distribuições de probabilidades das variáveis aleatórias, alguns modelos, que se adaptam a essas situações, são, na Estatística, mais estudados que outros, menos utilizados. Dentre esses modelos, destacamos aqui o de Bernoulli e o binomial.

3. A Distribuição de Bernoulli

Alguns experimentos aleatórios apresentam apenas dois pontos no seu espaço amostral. Em outras palavras, o elemento observado apresenta ou não certa característica. Por exemplo, no lançamento de uma moeda, aparece cara ou não; no lançamento de um dado, aparece face par ou não; uma pessoa tem olhos verdes ou não; na urna do exemplo já comentado, a bola extraída é branca ou não. Estamos interessados na ocorrência de um *sucesso* (cara, face par, olhos verdes, bola branca) ou de um *fracasso* (coroa, face ímpar, olhos de outras cores, bola vermelha). Podemos associar a essas situações uma variável aleatória que assumirá o valor 1 se ocorrer o sucesso, e o valor 0 se ocorrer o fracasso. O experimento é denominado *ensaio de Bernoulli* e a variável a ele associada, variável de Bernoulli. Sua distribuição de probabilidades pode ser assim representada:

x	$P(X=x)$
0	$1-p$
1	p
Total	1

Voltando ao exemplo da urna com três bolas brancas e cinco vermelhas, podemos identificar, na extração de uma bola, o sucesso como bola branca ($x = 1$) e

o fracasso como bola vermelha (x = 0). Temos então uma variável de Bernoulli e sua distribuição de probabilidades é dada por:

x	$P(X=x)$
0	5/8
1	3/8
Total	1

4. A Distribuição Binomial

Grangé (1997, p.370) assim apresenta a distribuição binomial:

> Um experimento aleatório tendo dois resultados possíveis é um ensaio de Bernoulli. Usaremos a notação S para sucesso e F para fracasso para os eventos elementares associados a esses resultados e eles têm probabilidade respectiva p e q = 1-p.
> Consideremos o experimento que consiste em repetir n vezes esse ensaio e nos interessemos pela variável aleatória X: número de ocorrências do evento S. Obteremos então para X a lei binomial ou distribuição binomial.

Uma variável binomial é definida por uma repetição independente de ensaios de Bernoulli. Temos por resultado uma sucessão de sucessos e fracassos. Voltando ao exemplo da urna, identificando a extração de uma bola branca como sucesso, temos: SS, SF, FS ou FF.

Utilizando a distribuição binomial, somos capazes de calcular a probabilidade de o sucesso ocorrer determinado número de vezes, dentre todas as repetições dos ensaios de Bernoulli, através da seguinte fórmula:

$$P(X = x) = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}$$

onde n é o número de vezes que o ensaio é repetido, x é o número de sucessos e p é a probabilidade de sucesso no ensaio de Bernoulli.

Notamos, na fórmula da distribuição binomial, o uso de diversos conceitos matemáticos e de Probabilidade: fatorial, eventos complementares, intersecção de eventos, fórmula da combinação[6], etc.

Podemos trabalhar também com a árvore de probabilidades, conforme foi feito no item 2 deste capítulo, mas a utilização da árvore fica muito trabalhosa quando o número de repetições de ensaios é grande. Daí a utilidade da fórmula da distribuição binomial. Além disso, nem sempre nos interessamos por toda a distribuição da variável, mas pelo cálculo de apenas um evento. Por exemplo, na urna, podemos nos interessar somente por P(X = 1). É menos trabalhoso fazer o cálculo com a fórmula do que com a árvore.

Por que o uso da árvore, então? Porque ela possibilita a compreensão da construção do espaço amostral do experimento, do cálculo da probabilidade de cada um dos seus pontos e das diferentes maneiras de se obter os valores de X, como, por exemplo, no caso de X = 1 na urna (BV ou VB). Acreditamos que, a partir do momento em que nos certificamos de que o aluno compreende esses tópicos, devemos dar início a um trabalho de mudança de registros, passando da árvore à fórmula, para que o aluno possa utilizar a última nos casos em que ela se aplicar com a mesma compreensão que ele apresentava quando utilizava a árvore de probabilidades.

Muitas são as situações nas quais podemos utilizar a distribuição binomial. Por exemplo, lançamentos sucessivos de moeda, estudos sobre o sexo de indivíduos, sobre peças defeituosas numa produção, sobre melhoria de desempenho de indivíduos após um curso específico, ou ainda sobre acertos de questões ao acaso em testes de múltipla escolha. Na verdade, utilizamos alguns desses exemplos na nossa seqüência didática, e, no Capítulo V, fazemos uma análise detalhada dessas situações.

---

[6] A fórmula da combinação é: $C_{n,x} = \dfrac{n!}{x!(n-x)!}$

Procuramos destacar, por meio dos exemplos citados, a aplicação da distribuição binomial em situações nas quais usamos categorias nominais e a variedade de conhecimentos mobilizados – conceitos básicos de Probabilidade tais como experimento aleatório, espaço amostral, eventos, cálculo de probabilidades de eventos simples – além do conceito estatístico de dados discretos. Uma vez que a distribuição binomial utiliza todos esses conceitos, talvez os alunos que apresentem dificuldades nesses pontos possam apresentar nela também.

Analisamos agora outras distribuições de probabilidade e suas relações com a binomial.

5. A Distribuição Hipergeométrica e sua Aproximação pela Binomial

Numa população de *N* elementos, *r* dentre eles têm o atributo A e os outros não o têm. Se extrairmos uma amostra de tamanho *n* dessa população, sem reposição, ou seja, com probabilidades de sucesso diferentes a cada repetição do experimento - a cada extração de um elemento da população - a distribuição de probabilidades da variável aleatória *X*: número de itens com o atributo A na amostra será hipergeométrica e sua fórmula dada por:

$$P(X = k) = \frac{C_{r,k}.C_{N-r,n-k}}{C_{N,n}}, 0 \leq k \leq \min(r, n)$$

$$obs: C_{a,b} = \frac{a!}{b!(a-b)!}$$

Eis um exemplo clássico de utilização da distribuição hipergeométrica:

Num lote de dez peças, seis são defeituosas. Se extrairmos simultaneamente quatro peças desse lote, qual é a probabilidade de duas delas serem defeituosas?

Identificamos nesse exemplo $N = 10$, $r = 6$, $n = 4$ e $k = 2$. A probabilidade solicitada é:

$$P(X = 2) = \frac{C_{6,2}.C_{10-6,4-2}}{C_{10,4}} = \frac{6!}{2!.4!}.\frac{4!}{2!2!}.\frac{4!.6!}{10!} = 0{,}4286$$

Observamos que, no enunciado, é a palavra "simultaneamente" que nos leva a perceber que a extração da amostra é feita sem reposição, o que impede o uso da distribuição binomial por causa da dependência das repetições.

Porém, quando *N* é grande, os valores obtidos pelas distribuições binomial e hipergeométrica são aproximadamente iguais, permitindo o uso da primeira no lugar da última. Intuitivamente, essa aproximação pode ser explicada assim: se *N* é grande, a diferença na probabilidade de ocorrência do atributo de interesse, com ou sem reposição, é mínima.

Mas esse é um aspecto que foge do modelo matemático. Ele surge da experiência do estatístico no uso de um modelo ou de outro. Então, o problema que os alunos enfrentam é: a partir de que valor *N* é considerado grande? Se essa informação não é explicitada (e não costuma ser), como o aluno pode saber se deve usar a distribuição hipergeométrica ou a sua aproximação pela binomial? Alguns livros didáticos por nós analisados[7] colocam exercícios nos quais esse tipo de informação não aparece explicitamente. Alguns exercícios são resolvidos usando a binomial, outros a hipergeométrica (quando se trata de um exercício proposto, podemos perceber pela resposta – quando há – qual foi a distribuição utilizada). Está feita a confusão na cabeça dos alunos. Por que usar a binomial aqui e a hipergeométrica ali se os enunciados dão o mesmo tipo de informação?

Segundo Meyer (1983), a aproximação da hipergeométrica pela binomial será boa se $n/N \leq 0{,}1$. Para utilizá-la, devemos fazer, na distribuição binomial, $p = r/N$.

Exemplo:

Um lote de 100 peças tem 20 defeituosas. Numa amostra de 10 peças, qual é a probabilidade de 2 serem defeituosas?

[7] Barbetta (1999), Bussab & Morettin (1987), Stevenson (1986) e Triola (1998).

Temos: N = 100, n = 10, r = 20 e x = 2. Como n/N = 10/100 = 0,1, vamos utilizar a aproximação pela binomial, fazendo $p = r/N$ = 20/100 = 0,2.

$P(X = 2) = C_{10,2}.(0,2)^2.(0,8)^8 = 0,3020$

Se o problema fosse resolvido usando a distribuição hipergeométrica, o resultado seria 0,3182.

6. A Distribuição de Poisson e a Aproximação da Binomial

A distribuição de Poisson é utilizada em situações nas quais uma variável aleatória discreta ocorre num intervalo de tempo ou espaço. Exemplos clássicos: número de chamadas telefônicas (variável aleatória discreta) recebidas por uma central de recados por minuto; número de defeitos (variável aleatória discreta) existentes em certo tecido por metro.

Um exemplo:

Se, em média, certo tecido tem 0,5 defeito por metro, qual é a probabilidade de encontrarmos dois defeitos em cinco metros do tecido?

Esse exemplo pode ser resolvido por meio da fórmula da distribuição de Poisson:

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda t}.\lambda t^k}{k!}, k = 0,1,2,...$$

Temos:

k é o número de ocorrências da variável aleatória discreta;

e é a base dos logaritmos naturais (e = 2,7183);

λ é a taxa média de ocorrência da variável aleatória discreta por unidade de tempo ou espaço;

t é o número de unidades de tempo ou espaço.

No exemplo, identificamos: $k = 2$, $\lambda = 0{,}5$ e t = 5.

Então:

$$P(X = 2) = \frac{e^{-0,5.5}.(0,5.5)^2}{2!} = 0{,}2565$$

Em determinadas circunstâncias, a distribuição de Poisson oferece uma boa aproximação da distribuição binomial. Segundo Bussab e Morettin (1987), a aproximação é boa quando, na distribuição binomial, *n* (número de repetições independentes do experimento) é grande, *p* (probabilidade de ocorrência do sucesso) é pequeno e $n.p \leq 7$. Aqui também temos dificuldades em saber o que é *n* grande e o que é *p* pequeno, mas, ao menos, temos uma indicação quanto à magnitude do produto *n.p*, apesar de não ser discutido pelos autores o porquê do número 7.

Para utilizar Poisson como aproximação da binomial, basta fazer, na fórmula de Poisson, $\lambda.t = n.p$.

Aqui está um exemplo:

Uma fábrica de copos apresenta 0,1% de produtos defeituosos. Num dia em que forem produzidos 500 copos, qual será a probabilidade de quatro deles apresentarem defeitos?

Temos aqui um processo binomial com $n = 500$ e $p = 0{,}001$, e devemos calcular P(X = 4).

Como $n.p = 500.0{,}001 = 0{,}5 < 7$, usaremos a distribuição de Poisson para obter um resultado aproximado de P(X = 4), com $k = 4$ e $\lambda.t = 0{,}5$.

$$P(X = 4) = \frac{e^{-0,5}.(0,5)^4}{4!} = 0{,}0016$$

Apenas para efeito de avaliação da aproximação, esse resultado difere do valor calculado usando a distribuição binomial a partir da quinta casa decimal (0,0015795 por Poisson e 0,0015665 pela binomial).

7. A Distribuição Normal e a Aproximação da Binomial

Nos modelos teóricos utilizados para calcular probabilidades de variáveis aleatórias contínuas, a probabilidade de a variável *X* assumir valores entre dois pontos quaisquer *a* e *b* é dada pela área sob a curva que representa a variável entre esses mesmos pontos (Fig. 1).

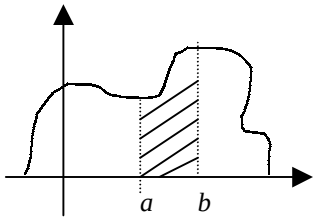


Fig. 1

Por outro lado, a integral de uma função entre os pontos *a* e *b* é igual à área entre *a* e *b*. Assim,

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

A função *f(x)* denomina-se função densidade de probabilidade e a área total sob a curva que a representa é igual a 1.

A distribuição normal é um dos modelos usados para variáveis contínuas. A Fig.2 mostra a curva que representa uma variável aleatória *X* cuja distribuição é normal:

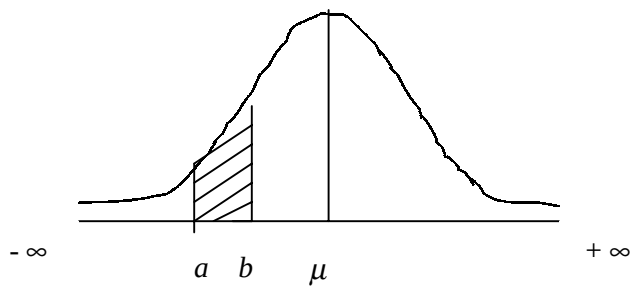


Fig. 2

Sua função densidade de probabilidade é:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}, -\infty \leq x \leq +\infty$$

onde μ é a média e σ o desvio padrão da distribuição.

Observando a Fig. 2, percebemos que existe simetria em relação à média da distribuição e que quanto maior o afastamento em relação a ela, pelo eixo horizontal, menores são as freqüências. Como a variável aleatória é contínua, P(X = a) = 0; pela simetria em relação à média da distribuição, P($X \geq \mu$) = P($X \leq \mu$) = 0,5; a distribuição normal é definida pela sua média e pelo seu desvio padrão; finalmente, pode-se utilizar a seguinte notação: X ~ N(μ,σ) – a variável aleatória X segue a distribuição normal com média μ e desvio padrão σ.

O cálculo de probabilidades de uma variável cuja distribuição é normal não é feito de maneira simples, pois requer o uso da integral de sua função densidade de probabilidade. Podemos não nos deparar com esse problema, no entanto, se conhecermos a distribuição normal padronizada.

Existe uma tabela de valores de áreas para Z ~ N(0,1)[8]. Essa distribuição normal é conhecida como distribuição normal padronizada e por meio dela é possível calcular probabilidades para qualquer variável aleatória normal, sendo suficiente para

isso que a variável X seja padronizada, o que quer dizer que ela será "transformada" na variável Z. Assim, cada valor x de X tem seu correspondente valor z em Z. A padronização é dada por:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

Tendo determinado o valor de z, o cálculo da probabilidade será feito usando a tabela de áreas de Z.

Aqui vai um exemplo:

Certo país recebe imigrantes cujas idades variam segundo uma distribuição normal de média 30 anos e desvio padrão 4 anos. Que porcentagem de imigrantes tem entre 30 e 35 anos? E mais de 33 anos?

Temos $X \sim N(30,4)$. Devemos calcular $P(30 \leq X \leq 35)$ e $P(X \geq 33)$.

$$P(30 \leq X \leq 35) = P\left(\frac{30-30}{4} \leq Z \leq \frac{35-30}{4}\right) = P(0 \leq Z \leq 1{,}25) = 0{,}3944$$
$$P(X \geq 33) = P\left(Z \geq \frac{33-30}{4}\right) = P(Z \geq 0{,}75) = 0{,}5 - 0{,}2734 = 0{,}2266$$

Aproximadamente 39% dos imigrantes têm entre 30 e 35 anos e 23% mais de 33.

Fizemos essa breve apresentação da distribuição normal, pois a binomial, centro de nosso trabalho, é muitas vezes aproximada por ela. Vejamos como se dá essa aproximação.

Seja uma distribuição binomial com n repetições e probabilidade de sucesso p. Ela será bem aproximada por uma distribuição normal de média $n.p$ e desvio padrão $[n.p.(1-p)]^{1/2}$. A justificativa formal dessa aproximação é feita pelo teorema do limite

[8] Anexos.

central[9]. Como regra prática para decidir se a aproximação será boa, Stevenson (1986) sugere que a probabilidade de sucesso p seja próxima a 0,5 e, ainda, que $\min(n.p, n.(1-p)) \geq 5$.

Vamos a um exemplo:

Certa marca de refrigerante detém 40% do mercado consumidor de uma cidade. Entre 20 consumidores, qual é a probabilidade de três deles consumirem a marca de refrigerante?

Seja X: número de indivíduos que consome o refrigerante. X é uma variável aleatória binomial com $n = 20$ e $p = 0{,}4$. Devemos calcular $P(X = 3)$.

A aproximação pela distribuição normal será boa, já que $p = 0{,}4$ está próximo de 0,5 e $n.p = 20.0{,}4 = 8 > 5$ (notemos que $n.(1-p) = 20.0{,}6 = 12$).

$\mu = n.p = 20.0{,}4 = 8$; $\sigma = [n.p.(1-p)]^{1/2} = (20.0{,}4.0{,}6)^{1/2} = 2{,}2$. Assim, teremos $Y \sim N(8;2{,}2)$.

Numa distribuição contínua, $P(Y = 3) = 0$; portanto, devemos calcular $P(2{,}5 \leq Y \leq 3{,}5)$, de acordo com Stevenson (1986) e Bussab e Morettin (1987) (Fig. 4).

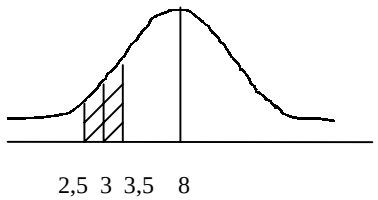


Fig. 4

$$P(X = 3) \cong P(2{,}5 \leq Y \leq 3{,}5) = P\left(\frac{2{,}5-8}{2{,}2} \leq Z \leq \frac{3{,}5-8}{2{,}2}\right) = P\big(-2{,}5 \leq Z \leq -2{,}05)\big) =$$
$$= 0{,}4938 - 0{,}4798 = 0{,}014$$

[9] Para informações sobre esse teorema, ver Bussab e Morettin (1987, p.198).

Para que possamos avaliar a aproximação, o resultado desse exemplo, usando a distribuição binomial, é 0,012.

8. Síntese

O estudo da distribuição binomial e das outras distribuições que a ela se relacionam reforça a importância dela. Uma distribuição hipergeométrica pode ser aproximada pela binomial; por sua vez, uma distribuição binomial pode ser aproximada pela de Poisson ou pela normal. Consideramos, portanto, fundamental a compreensão da distribuição binomial de probabilidades.

Nossa seqüência didática não aborda todas essas relações, apenas a distribuição binomial. Assim, levantamos como sugestões para novos trabalhos as discussões colocadas neste capítulo sobre quando cada uma das distribuições deve ser utilizada, como saber se uma aproximação pode ser feita ou ainda dificuldades que podem aparecer especificamente nas outras distribuições (por exemplo, expoente negativo na distribuição de Poisson).

No Capítulo III, comentamos algumas pesquisas sobre o ensino e a aprendizagem de Probabilidade, com o objetivo de verificar quais são as concepções dos alunos, que tipos de obstáculos já foram detectados e de que maneira podemos contorná-los.

CAPÍTULO III

BREVE PANORAMA DE RESULTADOS DE PESQUISAS SOBRE O ENSINO E A APRENDIZAGEM DE PROBABILIDADE

Neste capítulo, comentamos alguns trabalhos sobre o ensino e a aprendizagem de Probabilidade, realizados por diversos autores. Nosso objetivo foi utilizar alguns dos resultados já existentes na elaboração da nossa seqüência. Os trabalhos analisados versam, no que diz respeito à Probabilidade, sobre as concepções dos alunos, suas dificuldades e as maneiras como essas últimas podem ser transpostas.

1. Concepções dos Alunos sobre Probabilidade

1.1. Concepções Gerais

Coutinho (1994), Shaughnessy (1992), Lecoutre & Fischbein (1998) e Léon (1998) realizaram pesquisas sobre as concepções de alunos sobre Probabilidade.

Coutinho (1994) analisou as concepções sobre Probabilidade em alunos brasileiros do primeiro ano de um curso superior e também em alunos franceses do Ensino Médio. O objetivo do trabalho era introduzir o conceito de probabilidade por uma visão freqüentista.

Para o trabalho de Coutinho (1994), Michel Henry elaborou um questionário com o objetivo de conhecer as concepções dos alunos sobre acaso e probabilidade. Coutinho aplicou o questionário e trouxe algumas conclusões a respeito das concepções prévias dos alunos sobre esse tema:

- “ao acaso” significa “sem intervenção” e “sem poder prever o resultado”;
- na falta de informações explícitas, todos os eventos são equiprováveis;
- os alunos não levam em consideração a proporção de elementos em dado experimento, se o acaso estiver envolvido;
- os alunos não deram a devida atenção a palavras importantes para a compreensão do enunciado, como, por exemplo, às palavras “ao acaso” e “aleatório”, talvez por desconhecerem seus significados.

Shaughnessy (1992) realizou um levantamento de pesquisas sobre as concepções das pessoas em Probabilidade e Estatística. Não há, no texto, especificações sobre a idade ou a instrução das pessoas pesquisadas. Nesse levantamento, o autor comentou alguns resultados obtidos nas pesquisas. Por exemplo, muitos indivíduos acreditam que após uma sucessão de caras é mais provável que apareçam coroas. Parece que, mesmo em pequenas amostras, as pessoas acreditam que os resultados devem ser representativos da população. Algumas pesquisas mostraram que existem pessoas que não têm o conceito de evento aleatório como um resultado entre os vários possíveis dentro de uma experimentação que possa ser repetida. Finalmente, destacamos o que o autor chamou de negligência quanto ao tamanho da amostra. Indivíduos que não (ou muito pouco) estudaram Estatística não percebem a diferença entre se obter duas caras em três lançamentos de moeda e 200 caras em 300 lançamentos. Não percebem que eventos extremos são mais fáceis de ocorrer em pequenas amostras.

Lecoutre & Fischbein (1998) pesquisaram alunos franceses e israelenses, com idades entre 11 e 17 anos e do primeiro ano de Psicologia. Os autores também observaram, nos alunos pesquisados, a negligência quanto ao tamanho da amostra.

Léon (1998) conduziu um estudo com o objetivo de conhecer as concepções de alunos de curso superior de Matemática, quando eles iniciam o curso de Probabilidade e Estatística, sobre azar, aleatoriedade, experimento aleatório e probabilidade. Concluiu que mesmo alunos que têm formação matemática avançada apresentam dificuldades no que diz respeito a esses conceitos.

1.2. Concepções sobre Aleatoriedade e Evento

Dantal (1997) fez um estudo com alunos franceses do Ensino Médio para descobrir as concepções que eles tinham sobre experimento aleatório, evento e probabilidade de um evento. Alguns alunos responderam que um experimento aleatório é um experimento no qual o resultado não pode ser previsto. Por outras

respostas, ficou claro que os alunos concebem o experimento aleatório como não confiável, uma vez que seu resultado varia o tempo todo.

O autor percebeu, pelas respostas dadas, que o fato de atribuir as palavras "experimento aleatório" ao domínio do real faz com que, numa dada experiência aleatória, tudo possa ser aleatório: as hipóteses, o desenrolar da experiência, os resultados; percebeu, ainda, que o sentido dado pelos alunos à palavra aleatório coloca o problema do estatuto da aleatoriedade quando eles a vêem pela primeira vez num curso de Matemática. Até então, os matemáticos deram-lhes resultados seguros, provados, demonstrados pelos teoremas.

Sobre evento, alguns alunos disseram que ele é um dos possíveis resultados de um experimento aleatório. Outros responderam que o evento é o próprio experimento, outros que é o resultado desejado, outros, ainda, que é um momento do experimento.

1.3. Concepções sobre Probabilidade de um Evento

Sobre probabilidade de um evento, Girard (1997) relata algumas respostas dadas por alunos: probabilidade é o número de vezes que o evento ocorre no experimento aleatório; é o cálculo do acaso; é o número de casos possíveis; é um resultado que pode ser calculado se um certo número de experimentos é realizado.

2. A Representatividade, a Disponibilidade e a Equiprobabilidade

Analisando os erros e as dificuldades dos indivíduos no que diz respeito à Probabilidade, Godino, Bernabéu e Castellanos (1996) afirmam que diversas pesquisas mostram que a maioria dos alunos ingressa no Ensino Superior sem conhecimento básico de Probabilidade e com idéias erradas, muitas vezes intuitivas. O tipo de ensino desenvolvido no Ensino Superior, normalmente baseado em

conjuntos, espaços amostrais e variáveis aleatórias[10], provavelmente não ajuda o aluno a superar seus erros, sendo necessária então uma metodologia experimental. Os autores colocam alguns tipos ou causas de erros observados nos alunos:

- representatividade: diz-se que um indivíduo usa a representatividade quando estima a probabilidade de um evento baseando-se na população da qual ele é extraído. Por exemplo, consideremos o seguinte problema: a probabilidade de, num nascimento, a criança ser menino é 0,5. Qual é a probabilidade de que, entre seis nascimentos, três sejam meninas? O indivíduo que responde 0,5 considera que este valor é representativo do número de meninas em ensaios repetidos. Esse indivíduo talvez não perceba a mudança no valor da probabilidade que acarreta o fato de serem seis repetições de experimentos independentes, com duas possibilidades de resultado, ou seja, de aparecer nesse exemplo a distribuição de probabilidades binomial. Para ilustrar a representatividade, Tversky e Kahneman (1984) utilizam o seguinte exemplo:

  > Steve é muito reservado e introvertido, sempre serviçal, mas com pouco interesse nas pessoas e no mundo real. Com um caráter tranqüilo e regrado, necessita de ordem e de estrutura. É muito meticuloso. (Tversky e Kahneman, 1984, p.170).

  Se uma lista com várias profissões é oferecida às pessoas e se pede que elas avaliem a probabilidade de Steve ser de uma delas, elas o fazem pela semelhança entre a personalidade de Steve e a do estereótipo da profissão. Supondo que na lista aparece agricultor, vendedor, piloto de avião, bibliotecário e médico, quando solicitadas a avaliar a probabilidade de Steve ser, por exemplo, bibliotecário, as pessoas julgam a semelhança entre a personalidade dele e o estereótipo de bibliotecário, ou seja, avaliam a probabilidade pela representatividade que a personalidade de Steve tem do bibliotecário.

- disponibilidade: consiste em estimar a probabilidade de um evento conforme a facilidade que se tenha de lembrar ou de construir exemplos desse evento. Em outras palavras, o indivíduo imagina que aquilo que é mais fácil de lembrar é mais

[10] Capítulo II, 1.

provável. Exemplo: deve-se selecionar comitês a partir de um grupo de dez pessoas (cada pessoa pode participar de mais de um comitê). Existem mais comitês diferentes formados por oito pessoas, por duas pessoas, ou existe o mesmo número de comitês formados por oito e por duas pessoas? Os indivíduos tendem a dizer que existem mais comitês diferentes formado por duas pessoas, porque parece mais difícil formar comitês de oito pessoas. Esse fenômeno também foi observado por Tversky & Kahneman (1984) e por Shaughnessy (1992).

Tversky & Kahneman (1984) comentam que esses fenômenos não aparecem apenas em indivíduos sem instrução estatística. Indivíduos com instrução estatística também podem apresentar esses fenômenos quando lidam com problemas muito difíceis ou com os quais não estão acostumados.

Rouan (1991) apresentou um seminário sobre as concepções dos alunos de 16 a 18 anos, sobre azar e probabilidade, na Universidade de Québec. Observando fenômenos sociais associados às noções de azar e de probabilidade e analisando trabalhos sobre esses temas, o autor percebeu diversas concepções por ele consideradas erradas, algumas sobre o azar, outras sobre probabilidade e outras sobre a mistura das características das duas noções. Essas concepções foram levantadas por meio de um questionário e de entrevistas com alunos de 18 e 19 anos, separados em dois grupos: um tinha tido ensino sobre Probabilidade (de nível pré-universitário) e o outro não. Dentre outras, foram observadas as seguintes concepções:

- <u>equiprobabilidade:</u> liga a equiprobabilidade à ignorância que cerca os fenômenos casuais, distribuída igualmente sobre os diferentes resultados possíveis. O autor salienta que nessa concepção os resultados possíveis são julgados equiprováveis mesmo sem o conhecimento de todos eles. Em outras palavras, mesmo que não se conheçam todos os possíveis resultados de dado fenômeno, eles são julgados como tendo probabilidades iguais;

- <u>representatividade da população:</u> os resultados são julgados mais prováveis conforme é maior sua representatividade da população, fenômeno também

observado por Godino, Bernabéu e Castellanos (1996). Rouan (1991) observou que a representatividade e a equiprobabilidade podem aparecer juntas;

- representatividade do processo de azar: os julgamentos probabilísticos dos alunos se baseiam em algumas características do processo de azar que não correspondem ao que ocorre. Por exemplo, ao imaginar que, num jogo do tipo Sena, a seqüência 12, 13, 14, 15, 16, 17 não é tão provável quanto qualquer outra. O autor concluiu que esse tipo de representatividade parece mais resistente que aquela da população, isto é, essa última parece mais influenciada pelo ensino que a outra.

Lecoutre & Fischbein (1998) também observaram os vieses da representatividade, da equiprobabilidade e da disponibilidade.

3. Dificuldades e Obstáculos

3.1. Obstáculo "Uniformiste"

Parzysz (1997) trata da questão dos obstáculos. Destaca um obstáculo que denomina "uniformiste". Consiste em considerar implicitamente e *a priori* que os eventos elementares são equiprováveis. Com isso, para muitos alunos, existe uma chance em duas de chover amanhã. Girard (1997) observou que esse fato ocorre com freqüência quando existem apenas duas possibilidades de resultado. Parzysz (1997) comenta que é preciso ter uma confrontação com o real que mostre a não-equiprobabilidade dos eventos, e que seja capaz de criar um desequilíbrio cognitivo no aluno, que lhe possibilite perceber a necessidade de encontrar um modelo a que se adapte melhor. Assim, uma tentativa didática coerente deve integrar as concepções iniciais dos alunos e os obstáculos epistemológicos conhecidos.

3.2. Dificuldades devido à Independência de Experimentos Aleatórios

Henry (1994) coloca que a principal fonte de obstáculos para os alunos é a introdução da noção de probabilidade, que se choca com as concepções pré-

construídas, erradas ou mesmo contraditórias. Idéias erradas aparecem na história. Jean Le Rond D'Alambert questionou-se, em seu tempo (1760), sobre a atitude a adotar numa série de caras ou coroas que mostrava uma forte proporção de coroas. D'Alambert refutou a independência de duas jogadas consecutivas; ao contrário, imaginou que a ocorrência de uma repetição produzia mais provavelmente a realização de um evento diferente.

3.3. Dificuldades devido à Aleatoriedade

Segundo Henry (1994), a compreensão da noção de experimento aleatório não é espontânea nos alunos. Numa classe de terminale F[11] da academia de Besançon, em um pré-teste realizado em janeiro de 1993, a maioria das respostas mostrou que a incerteza recai sobre o desenvolvimento da experiência e não sobre seus resultados. Por algumas respostas pareceu que o aluno não sabia se a experiência efetivamente funcionaria. O autor escreve, no artigo, que as respostas, de modo geral, eram assim:

> uma experiência aleatória é uma experiência a qual não se sabe, de antemão, se vai funcionar. Por exemplo uma prova de Matemática. (Henry, 1994, p. 92).

Henry e Henry (1992) propuseram um teste individual aos alunos com o objetivo de levantar suas concepções espontâneas. Na primeira questão, era apresentado ao aluno um quadro no qual apareciam os números sorteados num jogo do tipo Loto. Perguntava-se se a informação era útil para um próximo jogo: vinte e sete disseram não e quatro, sim; desses, todos disseram que jogariam nos números mais freqüentes. Esse é um exemplo das dificuldades enfrentadas pelos alunos.

Esses mesmos autores colocam que o conceito de probabilidade pressupõe que estejam adquiridos o de experiência aleatória e o de evento. De fato, probabilidade do que, se não se sabe o que é evento? Como identificar um evento, se não soubermos o que é uma experiência aleatória e, mais, o que é um espaço amostral?

Eles afirmam ainda que, estando o experimento aleatório ligado ao acaso, encontraremos dificuldades filosóficas e obstáculos epistemológicos.

Quando, pela primeira vez, os alunos vão tratar matematicamente fenômenos aleatórios, é preciso desenvolver um trabalho de base sobre a noção de acaso e sobre os obstáculos epistemológicos que estão ligados a ela, para que seja possível fazer a passagem da percepção empírica à abordagem científica. Esses obstáculos se revelam no estudo das hesitações históricas dos Bernoulli, de Laplace, de D'Alambert, de Poincaré. Os professores de Matemática devem conhecer as dificuldades vividas por esses matemáticos do passado, dificuldades que poderão aparecer nos alunos no desenvolvimento das etapas de aquisição dos conceitos.

Girard (1997) fez uma análise do tipo de obstáculos encontrados no ensino-aprendizagem de Probabilidade. Como obstáculo epistemológico, colocou o fato de que não é simples definir o acaso. É preciso supor, de antemão, que ele exista. E essa existência não é uma evidência para todos os indivíduos. Segundo o autor, definir probabilidade não é mais simples. É também preciso admitir sua existência antecipadamente.

Depois de ler um texto de Laplace e outro de Poincaré, perguntou-se a alguns alunos o seguinte:

> Entre as três frases seguintes, qual é a que mais corresponde à sua idéia?
> a) o acaso é apenas a conseqüência da nossa ignorância;
> b) o acaso dissimula a ordem divina;
> c) o acaso constitui o universo na ordem em que o vemos. (Girard, 1997, p.216).

Muitos escolheram a alternativa a), mostrando claramente seu determinismo. Argumentaram que tudo necessita de uma causa. Outros escolheram c), acreditando que o acaso existe nas próprias coisas e que não se pode saber ou calcular tudo. E alguns escolheram b)! Percebemos então que é preciso planejar atividades antes de abordar a probabilidade, para mostrar que as coisas não são sempre certas e que em qualquer fenômeno existe uma certa variabilidade.

3.4. Dificuldades Didáticas

[11] Corresponde ao 3º ano do Ensino Médio da área de Humanas.

Girard (1997) considera algumas questões como obstáculos didáticos: como definir probabilidade? A abordagem freqüentista é a mais natural, a mais "rigorosa"? Essa definição só se aplica a eventos que podem ser repetidos.

Uma segunda definição, mais natural à primeira vista, baseia-se nos princípios de simetria. Um dado regular de seis faces dá a cada uma 1/6 de probabilidade de aparecer, por uma questão de simetria. Mas como saber se o dado pode ser considerado regular sem fazer um grande número de lançamentos e verificar se cada face aparece aproximadamente com freqüência 1/6? A esse respeito, Faria (2000) afirma que não importa se dados regulares existem ou não. É suficiente que a *" idéia"* de *"dado ideal"* exista.

3.5. Dificuldades Matemáticas

Existem ainda dificuldades matemáticas, como, por exemplo, o trabalho com porcentagens ou conjuntos. Coutinho (1994) e Figueiredo (2000) observaram esse tipo de dificuldade em seus trabalhos sobre Probabilidade. Girard (1997) classifica-as como obstáculos matemáticos, ou seja, são dificuldades que giram em torno de conceitos matemáticos. As probabilidades podem ser somadas? Multiplicadas? Há ainda as dificuldades de linguagem (o que significam "um", "apenas um", "não mais que um") e de Lógica Matemática (a negação de nenhum não é todos).

3.6. Dificuldades devido às Concepções dos Alunos

Girard (1997) destaca alguns obstáculos devido às concepções dos alunos: se, numa repetição de experimentos aleatórios, um evento não acontece há muito tempo, deve então acontecer agora. Por outro lado, contraditoriamente, se acontece muito, então deve continuar a acontecer. Essas concepções são incompatíveis entre si, e não aparecem num mesmo indivíduo, a não ser quando se trata de um jogo do tipo Loto: existem números nos quais devemos jogar, pois nunca saem; e outros nos quais devemos apostar pois saem sempre! Nesse caso, existem indivíduos que apresentam essas duas concepções contraditórias. Será que isso ocorre porque, no raciocínio

dessas pessoas, essas duas concepções, aplicadas a uma mesma rodada do jogo, aumentam suas chances de ganho? Tversky e Kahneman (1984) escrevem que concepções errôneas sobre o azar não são exclusivas de indivíduos sem instrução estatística. Um trabalho sobre intuições estatísticas de psicólogos com ampla experiência em pesquisas, conduzido pelos autores e publicado em 1971, revelou idéias erradas sobre o azar. Os autores comentam que as pessoas (erroneamente) tendem a pensar que o azar se corrige a si mesmo, de modo que um desvio em um sentido forçosamente conduz a um desvio no sentido oposto a fim de haver equilíbrio.

3.7. Outras Dificuldades

Para Girard (1997), a maneira como as palavras são usadas na vida cotidiana também podem causar obstáculos. O que significa, para um aluno, a palavra "média"? A relação "uma vez em dez"? Godino, Bernabéu e Castellanos (1996) também comentaram sobre os problemas causados pela linguagem. Tversky e Kahneman (1983) escrevem:

> Sabe-se que conectivos (por exemplo *e, ou, se*) são usados com freqüência na linguagem natural de maneira divergente de suas definições lógicas. (Tversky e Kahneman, 1983, p. 302).

Finalmente, Girard (1997) classifica como obstáculo psicológico o fato de que as pessoas têm a tendência a, inconscientemente, dar maior valor a probabilidades de eventos cujas conseqüências sejam importantes, não interessando se positivas ou negativas.

3.8. Síntese

Girard (1997) conclui que essas dificuldades existem, pois o acaso é difícil de apreender, mais que a Geometria, por exemplo. Não é por acaso (!) que, historicamente, o estudo de Probabilidade se iniciou tão depois do estudo da Geometria! Por outro lado, sabemos que a Geometria foi necessária na vida das pessoas muito antes do que a Probabilidade, razão pela qual acreditamos que o

desenvolvimento daquela tenha se realizado antes desta. Imaginamos porém que essa questão requer um estudo profundo, que não cabe neste trabalho.

4. Outros Fenômenos Observados em Pesquisas

4.1. Contexto e Vocabulário

Maury (1984) trabalhou com alunos de 15-16 anos com o objetivo de compilar e analisar informações sobre aquisições espontâneas de alunos no período que antecede os primeiros contatos com o ensino de Estatística e de Probabilidade. Observou como o contexto e o vocabulário utilizados na apresentação dos problemas aos alunos interferem na ação deles.

Quanto ao vocabulário, Maury (1984) considera que a transmissão (palavra usada pela autora) na escola se dá pela intermediação da linguagem e que algumas dificuldades devem ser atribuídas a ela. Quanto ao contexto, problemas com a mesma estrutura de resolução podem originar dificuldades e procedimentos diferentes, conforme o contexto no qual é apresentado.

Os contextos apresentados foram bolas em sacos, de duas cores diferentes, e roleta dividida em partes iguais, coloridas com duas cores diferentes. O contexto das bolas é discreto, o da roleta é contínuo; a roleta apresenta setores de cores diferentes dispostos seqüencialmente, o que não acontece com as bolas; os setores da roleta constituem partes de um todo, não ocorrendo o mesmo no contexto das bolas. Esses diferentes contextos mobilizam, segundo Maury (1984), concepções diversas no que diz respeito à quantificação da probabilidade. A autora concluiu que várias concepções espontâneas sobre probabilidade num mesmo aluno foram melhor evidenciadas com as bolas que com a roleta.

Quanto ao vocabulário, foram utilizados o vocabulário corrente e outro mais técnico, próximo ao utilizado em Probabilidade. O vocabulário influenciou a atuação

dos alunos, tendo sido o desempenho melhor com o vocabulário corrente do que com o técnico.

As respostas dadas pelos alunos foram classificadas em três grupos no que diz respeito aos argumentos por eles apresentados:

- as respostas justas: os argumentos apresentados eram pertinentes;

  exemplo: Num saco S_1 há uma bola azul e quatro vermelhas. Num saco S_2 há três azuis e seis vermelhas. Qual dos sacos deve ser escolhido para que seja mais provável obter uma bola azul? Um aluno respondeu que escolheria o saco S_2, pois a chance de tirar uma bola azul era maior. Essa resposta foi considerada justa.

- as falsas: os argumentos não eram pertinentes;

  exemplo: no mesmo problema, um aluno respondeu que escolheria o saco S_2, pois ele continha mais bolas azuis do que o saco S_1. Essa resposta foi considerada falsa.

- as mistas: havia um argumento pertinente e um não-pertinente.

  exemplo: Num saco S_1 há três bolas azuis e nove vermelhas. Num saco S_2 há duas azuis e seis vermelhas. Qual dos sacos deve ser escolhido para que seja mais provável obter uma bola azul? Um aluno respondeu que a proporção de bolas azuis e vermelhas era a mesma em S_1 e em S_2. Entretanto, tendo sido dada a quantidade de bolas azuis, ele escolheria o saco S_1. Essa resposta foi considerada mista.

O impacto produzido pelo contexto na argumentação, tanto nos argumentos pertinentes quanto nos não-pertinentes, foi intenso. Isso evidencia que problemas probabilisticamente equivalentes não o são necessariamente sob o ponto de vista cognitivo. Permite pensar, também, que os alunos possuem vários modelos probabilísticos espontâneos cuja mobilização depende também do contexto.

Da mesma forma, Coutinho (1994) observou que o vocabulário e o contexto influenciam as respostas dadas.

4.2. O Sentido das Palavras

Em sua tese de doutorado, Totohasina (1992) coloca que uma pesquisa de 1991, de Fischbein, mostrou que a maioria dos alunos (de idades entre 4 e 14 anos) não distingue o sentido dos termos "evento certo", "evento impossível", "evento possível", "evento raro": existe confusão entre "evento certo" e "evento possível", os alunos tomam um pelo outro; tomam ainda um "evento muito freqüente" por um "evento certo"; tomam um "evento raro" por um "evento impossível". Ainda a respeito dos sentidos das palavras, Godino, Bernabéu e Castellanos (1996) colocam que a linguagem pode causar problemas para os alunos uma vez que diversas palavras são usadas para expressar probabilidade e essas palavras, usadas em situações diversas, nem sempre exprimem o mesmo grau de probabilidade.

Totohasina (1992) coloca ainda que, no caso discreto, a confusão entre independência de eventos e eventos disjuntos pode ser a origem de várias respostas erradas e que isso pode ser explicado pelo fato de que, na linguagem cotidiana, "independência" subentende "separação", sinônimo de "disjunção".

4.3. Enunciados de Problemas e de Exercícios

Dantal e Raymondaud (1997) escreveram um artigo que tinha por objetivo evidenciar as principais dificuldades encontradas na utilização da noção de probabilidade, seja na concepção e redação de exercícios e problemas, seja na solução proposta para alguns exercícios. Para isso, os autores analisaram quatro obras escolares usadas no première S[12]. Conseguiram evidenciar as causas de alguns obstáculos didáticos encontrados com muita freqüência, como, por exemplo, a confusão entre o modelo de distribuição de probabilidades a utilizar e a realidade ou a

[12] Corresponde ao 2º ano do Ensino Médio da área de Exatas.

imprecisão na descrição da experiência aleatória, que causa dificuldades na escolha da distribuição adequada.

Dentre os enunciados analisados, destacamos dois, por serem de distribuição binomial, e os comentários feitos pelos autores sobre possíveis dificuldades.

Enunciado 1:

> Em cem pessoas entrevistadas, cinco responderam "não" a uma questão colocada, as outras responderam "sim".
> Qual é a probabilidade de que, em cinco pessoas interrogadas, exatamente duas tenham respondido "não"? (Dantal e Raymondaud, 1997, p.401).

Os comentários dos autores:

- falou-se em probabilidade, mas existe uma experiência aleatória? Se as cinco pessoas fizerem parte das cem, as respostas são conhecidas, a menos que elas sejam anônimas. Se esse for o caso, tomam-se cinco pessoas ao acaso, isto é, de maneira equiprovável, e pergunta-se se elas responderam "sim" ou "não" à questão colocada;

- essa experiência pode ser modelizada por um esquema de Bernoulli? A rigor não, pois, se a mesma pessoa não é interrogada duas vezes, então os cinco ensaios não são independentes. O correto, no caso, seria o modelo hipergeométrico[13]. Conforme a precisão requerida, os resultados por um ou outro modelo são bastante parecidos. É preciso, então, colocar no enunciado se a modelização por um esquema de Bernoulli é aceita ou não.

Enunciado 2:

> 5% dos homens são daltônicos. Qual é a probabilidade de que em cem homens escolhidos ao acaso, cinco sejam daltônicos? (Dantal e Raymondaud, 1997, p.402).

Os comentários dos autores:

[13] Capítulo II, 5.

- não está claro, no enunciado, que a freqüência relativa deve ser tomada como probabilidade de ocorrência do evento;

- não está explícita a maneira segundo a qual a amostra será extraída: como saber se os ensaios são independentes?

Percebemos, por esses dois exemplos, que é preciso que os enunciados dos problemas sejam bem escritos, de modo que o aluno não tenha dúvidas sobre a maneira como a experiência aleatória é conduzida para que ele possa escolher a distribuição adequada.

4.4. O Comportamento de Vieses de acordo com a Idade

Lecoutre & Fischbein (1998) apresentaram uma pesquisa feita com alunos franceses e israelenses, de idade variando de 10 a 17 anos, e com estudantes do primeiro ano de Psicologia. Tinham por objetivo verificar o comportamento de vieses em concepções intuitivas em Probabilidade de acordo com a idade dos indivíduos. Entre outros, observaram o efeito do "récence" (negativo ou positivo): consiste em, por exemplo, se num jogo de cara ou coroa, aparecem três caras em seguida, o indivíduo imaginar que é mais provável aparecer coroa na próxima (negativo); ao contrário, se aparecem três caras em seguida, o sujeito imaginar que na próxima aparecerá também cara (positivo). O efeito positivo raramente aparece, em qualquer idade; o negativo diminui com a idade; as justificativas às respostas colocadas pelos alunos mostram uma ligação do efeito "récence" com o viés da representatividade (uma seqüência irregular representa melhor o acaso do que uma regular).

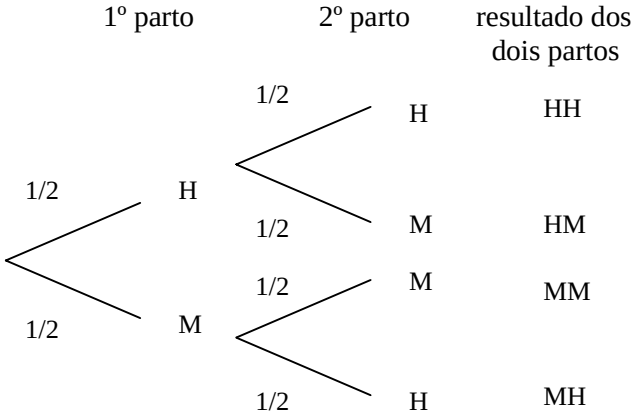
5. Algumas Propostas de Soluções

Godino, Bernabéu e Castellanos (1996) sugerem atividades para o desenvolvimento de diversos conceitos da Probabilidade e da Estatística. As atividades são apresentadas em duas partes: na primeira, estão os problemas que devem ser resolvidos pelos alunos; na segunda, há orientações gerais para os

professores, tais como resumo e finalidade dos problemas, a que alunos se destinam, material necessário, planejamento, comentários sobre a atividade e conteúdos implícitos. Segue um exemplo:

<u>Problema a resolver:</u> menino ou menina?

> Ao estudar as estatísticas de nascimento de um certo país, observamos que, aproximadamente, metade dos recém-nascidos é menino e a outra metade menina.
>
> a) Esta manhã um médico fará dois partos. Qual destas alternativas você considera mais provável:
>
> - os dois recém-nascidos serão meninos;
> - os dois serão meninas;
> - será um menino e uma menina.
>
> Utilize o seguinte diagrama para calcular as probabilidades:



> b) Escreva todos os resultados que podem ocorrer se, ao invés de dois, forem três partos.(Godino, Bernabéu e Castellanos, 1996, p.113).

A seguir vêm as orientações que os autores denominam metodológicas: a que alunos se destina, material necessário, sugestões de outros exemplos que poderiam ampliar o alcance da atividade e os conteúdos implícitos (ensaios de Bernoulli, árvore de probabilidades, distribuição binomial e outros).

Parece-nos que essa atividade é bastante apropriada ao estudo da distribuição binomial de probabilidades. A independência dos eventos, a probabilidade de sucesso constante nas repetições do experimento e a existência de dois resultados complementares garantem que a variável aleatória estudada segue a distribuição binomial. A utilização da árvore de probabilidades possibilita que o aluno construa o espaço amostral em questão. Porém , em nossa prática docente, já ocorreu que o fato

de ser usada uma probabilidade de sucesso igual a 0,5 induziu o aluno a acreditar que, numa distribuição binomial, a citada probabilidade só pode assumir esse valor. Esse fato foi também comentado por Girard (1997) e por Parzysz (1997). Assim, imaginamos que é interessante mudar o valor dessa probabilidade, conforme fez Figueiredo (2000).

Percebemos também, no exemplo, que a conversão do registro na linguagem natural para a linguagem simbólica utilizada na árvore já foi feito e entregue ao aluno. Será que isso não é fonte de dificuldade para ele? Isto é, será que isso não acaba por ser uma dificuldade a mais quando ele mesmo tiver que fazer essa passagem? Por outro lado, pode um trabalho prévio sobre a árvore de probabilidades amenizar as possíveis dificuldades? Não faz parte dos objetivos do nosso trabalho tratar especificamente das dificuldades de conversão de linguagem na árvore de probabilidades, nem o tipo de abordagem que poderia ser feito para considerar esse aspecto.

Em sua dissertação de mestrado, Figueiredo (2000) tinha por objetivo introduzir o conceito de probabilidade condicional para alunos de dois cursos superiores: Licenciatura em Matemática e Ciência da Computação. O trabalho teve por base uma engenharia didática e a teoria dos registros de representação de Duval. Como ferramentas, foram utilizadas a árvore de probabilidades e a tabela de contingência. A seqüência foi realizada por duplas de alunos. O trabalho foi realizado em quatro sessões, e o número de duplas variou de 10 a 16. Algumas das conclusões da autora foram:

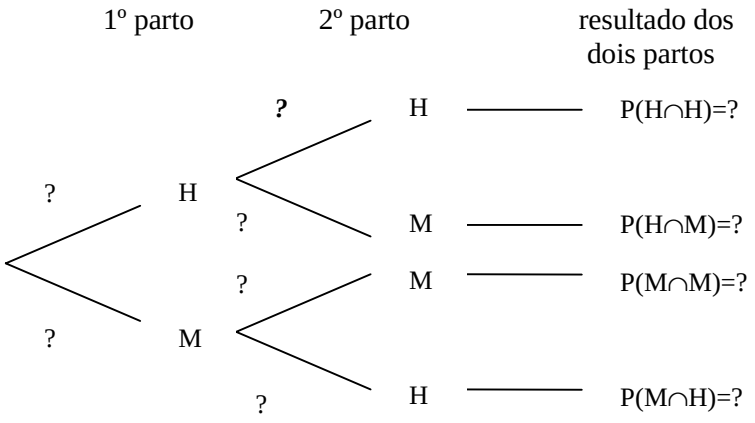
- os alunos não dominam o formalismo matemático necessário para indicar as operações feitas e os resultados dos problemas;
- alguns alunos têm dificuldades para entender um enunciado, pois não compreendem o contexto no qual ele está inserido;
- muitos alunos têm dificuldades em operar com porcentagens, apesar de preferirem colocá-las como resposta de um problema, ao invés de utilizarem uma fração ou

um número decimal. Parece que isso ocorre porque eles compreendem melhor uma porcentagem como probabilidade do que uma fração ou um número decimal, mesmo que as operações sejam consideradas mais fáceis com esses dois últimos registros;

- a autora percebeu que, conforme as atividades se sucediam, os alunos utilizavam de maneira mais eficiente a linguagem natural, a linguagem simbólica e as ferramentas árvore de probabilidades e tabela de contingência.

Uma vez que em nosso trabalho também utilizamos a árvore de probabilidades como uma ferramenta para a introdução da distribuição binomial, interessou-nos particularmente uma das atividades desenvolvidas na seqüência e seus resultados, pois é uma atividade na qual a distribuição binomial se faz presente. Essa atividade é uma adaptação daquela apresentada por Godino, Bernabéu e Castellanos (1996). Este é o trecho que mais nos interessou:

> Ao estudar o número de natalidade de uma certa cidade do Brasil, observamos que a probabilidade de nascer um homem é de 40% e de nascer uma mulher é de 60%.
>
> a) Em uma determinada manhã um médico irá fazer dois partos. Qual dos eventos abaixo você considera que é o mais provável?
>
> - Os dois recém-nascidos são homens;
> - Os dois recém-nascidos são meninas;
> - Um recém-nascido é homem e outro mulher.
>
> b) Utilize o seguinte diagrama para responder às questões a seguir:



> (na árvore acima, assinalamos uma interrogação (***?***), que significa a probabilidade de nascer um homem no segundo parto, sabendo ter sido homem no primeiro)
> Substitua as interrogações acima pelas suas respectivas probabilidades.
> c) Pense novamente na questão a). Você mantém sua resposta? (Figueiredo, 2000, p. 153).

Antes de colocar os resultados e as conclusões da atividade, destacamos duas importantes diferenças entre a atividade de Godino, Bernabéu e Castellanos (1996) e essa:

- a probabilidade de nascer um homem é diferente de 0,5, e esse fato possibilita que o aluno não entre pelo caminho da equiprobabilidade;

- as interrogações que aparecem na árvore, e que devem ser substituídas pelas probabilidades, possibilitam que o aluno trabalhe um pouco com a conversão da linguagem natural para a simbólica.

Das 16 duplas que realizaram a atividade, 12 erraram o item a), considerando o evento "os dois recém-nascidos são meninas" o mais provável. A autora acredita que esse erro se deve ao fato de que, na atividade proposta, a probabilidade de nascer mulher é maior que a de nascer homem.

No item c), apenas duas das duplas que erraram o item a) mudaram suas respostas, justificando sua reformulação pela observação da árvore de probabilidades, por meio da qual perceberam que existe mais chance de nascerem sexos iguais do que diferentes. Dentre as duplas que mantiveram a resposta, as justificativas levaram a autora a notar que os alunos não perceberam que, utilizando a árvore, o cálculo da probabilidade de nascimento de sexos diferentes envolveria a soma de dois ramos da árvore ($P(H \cap M)$ e $P(M \cap H)$).

Finalmente a autora ressalta o cuidado que os professores devem ter ao utilizar uma árvore de probabilidades como ferramenta na resolução de problema, com o objetivo de evitar a criação de um obstáculo didático que leve o aluno a não mais utilizar essa ferramenta.

> Há ocasiões em que é melhor optar por uma ou outra representação e deve caber ao professor saber trabalhá-la bem, de modo que não crie qualquer tipo de obstáculo didático para o aluno, na aprendizagem, fazendo com que este não queira dela se utilizar. Como por exemplo, resolver um problema de probabilidade com muitos eventos utilizando a árvore de probabilidades como ferramenta. Esta situação levará à construção de uma árvore "cheia de galhos" (...), ele poderá facilmente se perder no meio de tantas ramificações, (...) (Figueiredo, (2000), p.74).

6. A Árvore de Probabilidades

Totohasina (1994) coloca, num contexto de probabilidade condicional, que

> a exploração de uma árvore de probabilidades, que sugere uma percepção seqüencial de eventos, desempenha um papel ao mesmo tempo *descritivo* e *heurístico* para o que concerne a resolução do presente problema: (...). (Totohasina, 1994, p. 113).

Bernabéu (1999) também ressalta a utilidade e a importância do uso do diagrama de árvore, já que ele possibilita visualizar a composição de um experimento composto. Por meio dele, o encadeamento de eventos elementares como parte de um evento mais complexo fica claro.

Conforme veremos a seguir, também Parzysz (1993) utiliza a árvore de probabilidades, particularmente no contexto da distribuição binomial.

Apesar de Ortiz, Batanero, Serrano e Cañizares (2000) terem constatado que o uso do diagrama de árvore é muito raro em alguns livros didáticos por eles analisados, sabemos que, em Probabilidade, eles são utilizados como ilustração, com regras implícitas, como uma ferramenta implícita[14].

O que Parzysz (1993) pretende é conferir–lhe estatuto de ferramenta explícita, destacando um pequeno número de regras de utilização, relacionadas com a situação estudada, a fim de que o sentido probabilista não se perca. O autor trabalha com experimentos repetidos, incluindo situações de distribuição binomial, propondo o uso da árvore de probabilidades, ferramenta que lhe parece bem adaptada à situação

[14] Capítulo I, 4.2.

tratada. Valida a árvore como ferramenta de resolução de problemas, explicita regras de utilização e indica seu alcance e seus limites.

No artigo, o autor propõe um cenário que possibilita um jogo de quadros e que pode ser recriado e aplicado em classe.

Para situar esse cenário, o autor faz um paralelo entre árvore de probabilidades e "figura" (ou, melhor dizendo, desenho) de Geometria no espaço e afirma que uma representação gráfica pode ser utilizada como um instrumento técnico de resolução. É o caso da árvore de probabilidades.

No caso da Geometria, podemos, sobre o desenho, fazer as construções que favorecerão acessar as conjecturas e que ajudarão na demonstração. É necessário que as regras sejam bem conhecidas, para que não façamos mau uso da ferramenta.

Também na Probabilidade, o emprego da árvore segundo regras precisas pode facilitar a formulação de conjecturas e o entendimento de conceitos.

O autor analisa então a utilização da árvore de possibilidades para visualizar os resultados possíveis de lançamentos sucessivos de uma moeda. A árvore é utilizada como ilustração da situação.

Primeiro caso: moeda não-viciada, lançada duas vezes.

Este fato (moeda não-viciada) traduz-se implicitamente por "tem-se uma chance em duas de obter cara (ou coroa)". Representando cara por C e coroa por K, temos:

- no primeiro lançamento: duas possibilidades, de mesma chance, C e K, que são representadas por dois ramos saindo do mesmo ponto;

- no segundo lançamento: o mesmo esquema se reproduz, a partir de cada uma das duas situações obtidas no primeiro lançamento (Fig. 1).

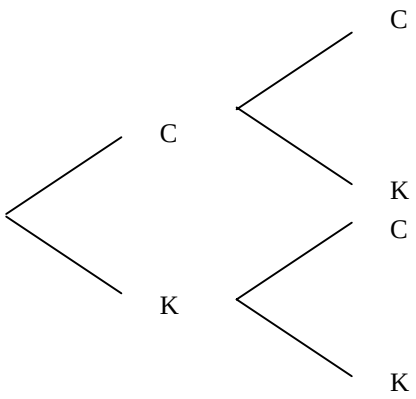


Fig. 1

A árvore é construída de acordo com as seguintes regras:

- a construção se faz da esquerda para a direita (o gráfico é orientado);
- um nó representa, ao mesmo tempo, um resultado de uma prova e a partida da prova seguinte (exceto os últimos nós da direita).

Quanto às regras de uso, são formuladas assim:

R1: caminha-se sobre a árvore apenas da esquerda para a direita;

R2: os ramos que partem de um mesmo nó têm, todos, a mesma probabilidade.

Deduz-se daí a equiprobabilidade dos quatro resultados (CC, CK, KC e KK) ao fim das duas provas, o que nos possibilita responder às questões: qual é a probabilidade de se obter duas caras? Duas coroas? Uma cara e uma coroa? A decomposição desses eventos em eventos elementares, visualizados na árvore, permite compreender que eles não têm a mesma probabilidade.

Nesse ponto, o autor destaca que a pertinência desse modelo gráfico está ligada à equiprobabilidade e à multiplicação de eventos repetidos. Além disso, as regras de utilização têm sentido probabilista.

Segundo caso: um estudo estatístico mostrou que existem duas vezes mais chance de obter cara que coroa, isto é, a moeda é viciada.

O autor usa aqui uma adaptação da árvore anterior: trocando a dicotomia C, K pela tricotomia C, C, K, as regras R1 e R2 continuam válidas. Obtém-se então a árvore da Fig. 2:

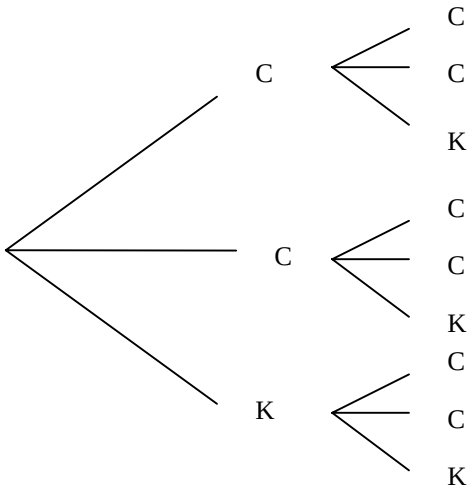


Fig. 2

Temos:

- quatro chances, em nove, de se obter duas caras;
- quatro chances, em nove, de se obter uma cara e uma coroa;
- uma chance, em nove, de se obter duas coroas.

Vemos que, agora, o problema se coloca em termos de probabilidade, o que será analisado a seguir.

Terceiro caso: aqui, o estudo estatístico conduziu a atribuir 53 chances, em cem, de se obter cara.

A adaptação feita no segundo caso não é prática aqui, pois seria preciso subdividir por cem cada ramo (nota-se aqui o papel da variável didática “valor

numérico da probabilidade de se obter cara”). No entanto, pode-se ainda fazer uma adaptação, trocando R2 por:

R’2: cada ramo ligando dois nós sucessivos é afetado pela probabilidade de passar do primeiro ao segundo. Em outras palavras, essa regra significa que a probabilidade de aparecer cara no segundo grupo de ramos da árvore continua sendo 0,53 (Fig.3).

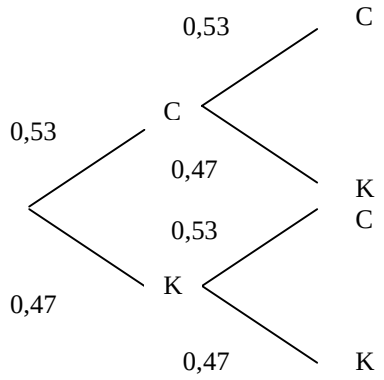


Fig. 3

Como conseqüência imediata, tem-se que a soma das probabilidades que saem de um mesmo nó é igual a um. Essa conseqüência possibilita completar a árvore, ou seja, determinar probabilidades desconhecidas. O problema agora é que cada extremidade tem uma probabilidade diferente. Qual é então a probabilidade de cada uma das quatro seqüências? Voltamos ao segundo caso (já adaptado a esta nova árvore) para ilustrar a criação de uma nova regra, que responde à questão colocada:

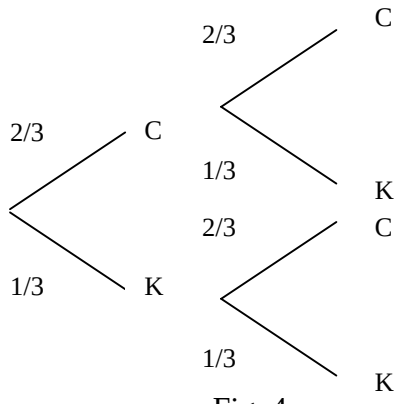


Fig. 4

Comparando as figuras 2 e 4, podemos definir uma nova regra de utilização, a qual pode ser aplicada à situação da Fig. 3:

R3: a probabilidade de cada seqüência é o produto das probabilidades de cada ramo que a compõe.

Finalmente, obtemos o esquema final da Fig. 5, no qual p é a probabilidade de obter cara, $q = 1-p$ é a probabilidade de obter coroa e, entre parênteses, a probabilidade de cada uma das quatro seqüências:

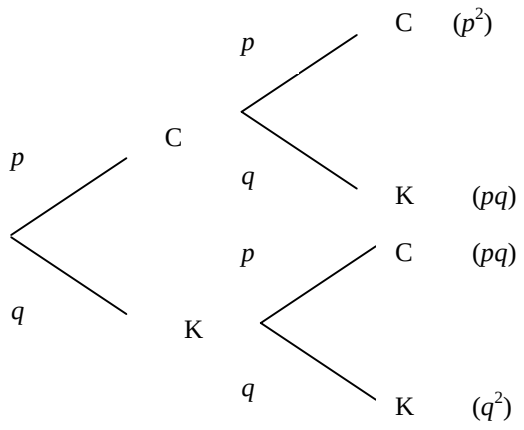


Fig. 5

Esse esquema pode ser facilmente generalizado para o caso de n lançamentos sucessivos.

Ainda: o problema de se obter uma cara e uma coroa em dois lançamentos, já abordado no segundo caso, conduz a outra regra de utilização da árvore:

R4: a probabilidade de um evento correspondente a várias seqüências da árvore é a soma das probabilidades correspondentes a cada uma das seqüências.

O autor espera que essa visão e esse uso da árvore dêem sentido às propriedades importantes da Probabilidade, diminuindo a confusão entre produto e soma de probabilidades, freqüentemente observada nos alunos.

Se o interesse, no exemplo, for pela variável aleatória "número de caras obtidas ao fim de n lançamentos sucessivos da moeda", podemos reconhecer uma

situação que é associada à lei binomial. Assim, esse esquema de árvore pode ser utilizado para definir a lei binomial.

A seguir, um modo de fazê-lo:

Considerando uma árvore construída com n lançamentos da moeda, ela terá 2^n seqüências. Cada uma dessas seqüências tem uma probabilidade do tipo $p^r q^{n-r}$, na qual r é o número de caras obtidas nos n lançamentos. Fixado r, teremos $C_{n,r}$ seqüências com probabilidade $p^r q^{n-r}$.

Teremos então:

$$P(X = r) = C_{n,r}\, p^r q^{n-r}$$

Foi essa linha de desenvolvimento da fórmula da distribuição binomial que usamos em nossa seqüência didática.

O autor conclui o artigo com a afirmação de que os casos expostos mostram que, no caso de experimentos repetidos, a árvore de probabilidades apresenta um interesse bem maior que o de apenas ilustrar a situação, tanto no que diz respeito ao acesso às noções como no que contribui a dar sentido ou a resolver problemas.

Chama atenção, no entanto, para o fato de que a árvore não deve substituir as próprias noções. O que importa é que o aluno apreenda a ferramenta conceitual e não apenas a ferramenta gráfica. É indispensável que o aluno passe pelo estágio "material" da construção das árvores, mas é também indispensável que ele o ultrapasse e que reconheça o alcance e os limites dessa ferramenta. Em resumo, o aluno deve utilizá-la da maneira mais eficaz possível, sem, porém, considerar que ela é a única solução de um problema, ou ainda, que ela é solução para todos os problemas.

7. Aproveitamento das Questões Levantadas

Em nosso trabalho, procuramos tomar especial cuidado com os vieses da representatividade, da disponibilidade e da equiprobabilidade. Imaginamos que atividades sobre análise combinatória (em especial combinação) possibilitem evitar os dois primeiros vieses nos alunos. Essas atividades podem ser desenvolvidas junto com aquelas dirigidas especificamente à distribuição binomial. O importante é que o aluno perceba as possíveis combinações existentes e como pode ser difícil contá-las uma a uma, daí o uso da fórmula da combinação na distribuição binomial. Quanto à equiprobabilidade, pensamos que usar valores de probabilidades diferentes de 0,5 seja suficiente para evitar que o aluno imagine que a probabilidade de ocorrência dos eventos, quando existem apenas duas possibilidades, seja sempre 0,5.

Consideramos, também, as dificuldades colocadas em relação à linguagem e ao contexto, procurando escrever enunciados corretos, precisos e claros, em contextos conhecidos dos alunos. Nossa intenção com isso é evitar que dificuldades devido a contextos desconhecidos ou complicados prejudiquem a compreensão da distribuição binomial. Ainda, insistindo com os alunos na importância da escrita formal e desenvolvendo atividades nas quais ela é solicitada, estaremos contribuindo para o aspecto da conversão da linguagem natural na simbólica.

Finalmente, seguindo as orientações e os exemplos de Parzysz (1993), Godino, Bernabéu e Castellanos (1996) e Figueiredo (2000), parte de nossa seqüência é baseada na árvore de probabilidades. Assim, de acordo com Parzysz (1993), utilizamos as regras de construção da árvore de probabilidades, destacando aspectos tais como o motivo pelo qual multiplicamos probabilidades ao longo dos ramos ou somamos as de ramos diferentes; de Godino, Bernabéu e Castellanos (1996) destacamos as noções de disponibilidade, representatividade e o uso da árvore de probabilidades no contexto da distribuição binomial; finalmente, de Figueiredo (2000), destacamos, além do próprio uso da árvore, a preocupação em evitar o viés da equiprobabilidade.

Agora podemos apresentar a seqüência piloto por nós aplicada e a seqüência final elaborada durante nosso trabalho. Como a seqüência piloto também nos mostrou

caminhos para a construção da seqüência final, optamos por apresentar a primeira no próximo capítulo e a última no Capítulo V.

CAPÍTULO IV

A SEQÜÊNCIA PILOTO

Apresentamos, neste capítulo, uma seqüência piloto por nós aplicada e as conclusões às quais pudemos chegar após a análise da produção dos alunos.

1. Panorama dos Alunos e Objetivos

Uma seqüência piloto sobre a distribuição de probabilidades binomial foi aplicada em quatro turmas do terceiro semestre do curso de Publicidade e Propaganda de uma faculdade particular da cidade de São Paulo em março de 2000, na disciplina Estatística II. Duas das turmas eram do curso diurno e duas do noturno. O número de duplas variou de 8 a 15.

Os alunos que realizaram a seqüência eram, na época, alunos da pesquisadora. Porém o estudo das noções de Probabilidade necessárias à realização do teste (eventos, cálculos de probabilidades de eventos simples, intersecção de eventos, independência de eventos, entre outros) foi feito no semestre anterior, com outro professor. Também no semestre anterior foi realizado o estudo da árvore de probabilidades. A pesquisadora não teve acesso à maneira como esse estudo foi conduzido. Considerou apenas que ele existiu, uma vez que fazia parte do programa da disciplina Estatística I.

A seqüência piloto tinha por objetivo detectar o procedimento dos alunos e possíveis dúvidas causadas pela maneira como ela foi formulada. Em outras palavras, nosso objetivo era detectar possíveis problemas de interpretação de enunciados, de utilização da árvore de probabilidades, de cálculos de probabilidades de intersecções de eventos, de independência de eventos. A análise da produção dos alunos permitiu que chegássemos a algumas conclusões relativas aos tópicos citados e também a alguns erros cometidos pelos alunos.

A seguir está a seqüência aplicada e sua análise didática.

A Seqüência Piloto

Uma moeda é viciada, de modo que, ao ser lançada, a probabilidade de sair cara é 0,25. Você pode indicar cara por C e coroa por K.

Questão I:

Qual é a probabilidade de sair coroa no lançamento dessa moeda?

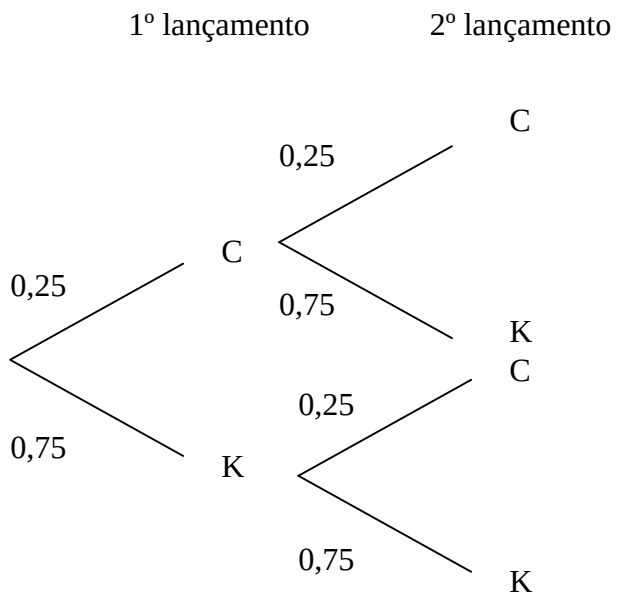
- Objetivo: cálculo da probabilidade de um sucesso, de modo implícito.
- Solução: P(K) = 1 – P(C) = 1 – 0,25 = 0,75
- Análise didática: o lançamento de uma moeda foi o experimento escolhido, pois ele se adapta ao modelo binomial e não cria problemas de compreensão do contexto por ser bem conhecido dos alunos. Além disso, foi escolhida uma moeda viciada para que a probabilidade de sucesso fosse diferente de 0,5. Caso contrário, alguns alunos poderiam imaginar que essa probabilidade é sempre 0,5, uma vez que só existem duas possibilidades de resultado, conforme observado por Girard (1997). Para resolver essa questão, o aluno deve saber calcular a probabilidade de um evento simples a partir do seu complementar.

Questão II:

1) Se essa moeda for lançada duas vezes, qual é a probabilidade de sair uma cara e uma coroa? Resolva a questão utilizando a árvore de probabilidades.

- Objetivo: utilizar a árvore de probabilidades como ferramenta implícita na resolução de um problema binomial.

- Solução:



P(uma cara e uma coroa) = P(CK) + P(KC) = 0,25.0,75 + 0,75.0,25 = 0,375

- Análise didática: o uso da árvore de probabilidades é pedido, pois acreditamos que ela favorece a percepção das diferentes maneiras de se obter o resultado desejado. É preciso que o aluno saiba construir a árvore de probabilidades, além de saber calcular as probabilidades de intersecção de eventos independentes e da união de eventos por meio dela.

2) Se uma moeda for lançada duas vezes, quantas combinações existem de uma cara e uma coroa?

- Objetivo: favorecer que o aluno perceba que ele deve escolher na árvore tantos ramos quantos são os modos de se obter o resultado desejado.

- Solução: $C_{2,1} = 2$

- Análise didática: o aluno deve ter noções de análise combinatória para resolver essa questão.

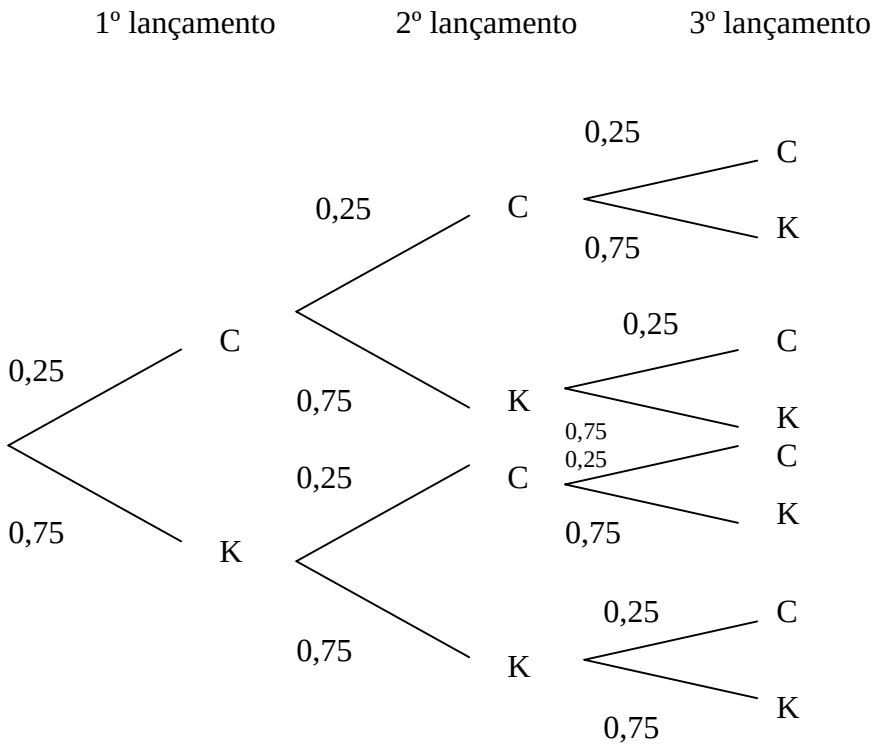
Questão III:

1) Se a moeda viciada for lançada três vezes, qual é a probabilidade de saírem:

a) três caras? Resolva a questão utilizando a árvore de probabilidades;

- <u>Objetivo</u>: utilizar a árvore de probabilidades como ferramenta implícita na resolução de um problema binomial.

- <u>Solução</u>:



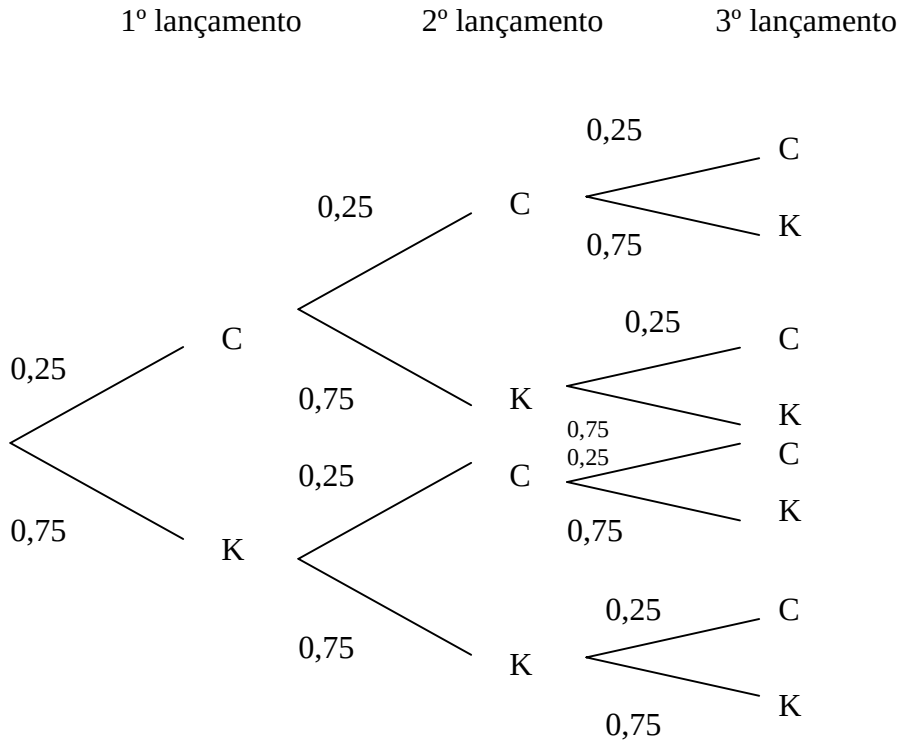
$$P(\text{três caras}) = P(CCC) = 0{,}25.0{,}25.0{,}25 = 0{,}015625$$

- <u>Análise didática</u>: aumentamos o número de repetições do experimento para possibilitar que o aluno comece a perceber que quanto maior é esse número mais trabalhoso vai-se tornando o uso da árvore.

b) duas coroas e uma cara? Resolva a questão utilizando a árvore de probabilidades.

- <u>Objetivo</u>: utilizar a árvore de probabilidades como ferramenta implícita na resolução de um problema binomial.

- Solução:



P(duas coroas e uma cara) = P(CKK ou KCK ou KKC)

=

= 0,25.0,75.0,75 + 0,75.0,25.0,75 + 0,75.0,75.0,25 = 0,421875

- Análise didática: escolhemos, nessa questão, o evento "duas coroas e uma cara" para ajudar o aluno a perceber os diversos ramos da árvore que devem ser considerados.

2) Se uma moeda for lançada três vezes, quantas combinações existem de:

a) três caras?

- Objetivo: favorecer ao aluno a percepção de que ele escolhe na árvore tantos ramos quantos são os modos de se obter o resultado desejado.

- Solução: $C_{3,3} = 1$

- Análise didática: o aluno deve ter noções de análise combinatória para resolver essa questão.

b) duas coroas e uma cara?

- Objetivo: favorecer ao aluno a percepção de que ele escolhe na árvore tantos ramos quantos são os modos de se obter o resultado desejado.

- Solução: $C_{3,2} = 3$

- Análise didática: o aluno deve ter noções de análise combinatória para resolver essa questão. Esperamos que, aliada ao uso da árvore, essa questão ajude o aluno a perceber que o número de coroas (*sucesso*) somado ao número de caras (*fracasso*) resulta no número de lançamentos da moeda (*repetições do experimento*)

Questão IV:

1) Se a moeda viciada for lançada quatro vezes, qual é a probabilidade de saírem:

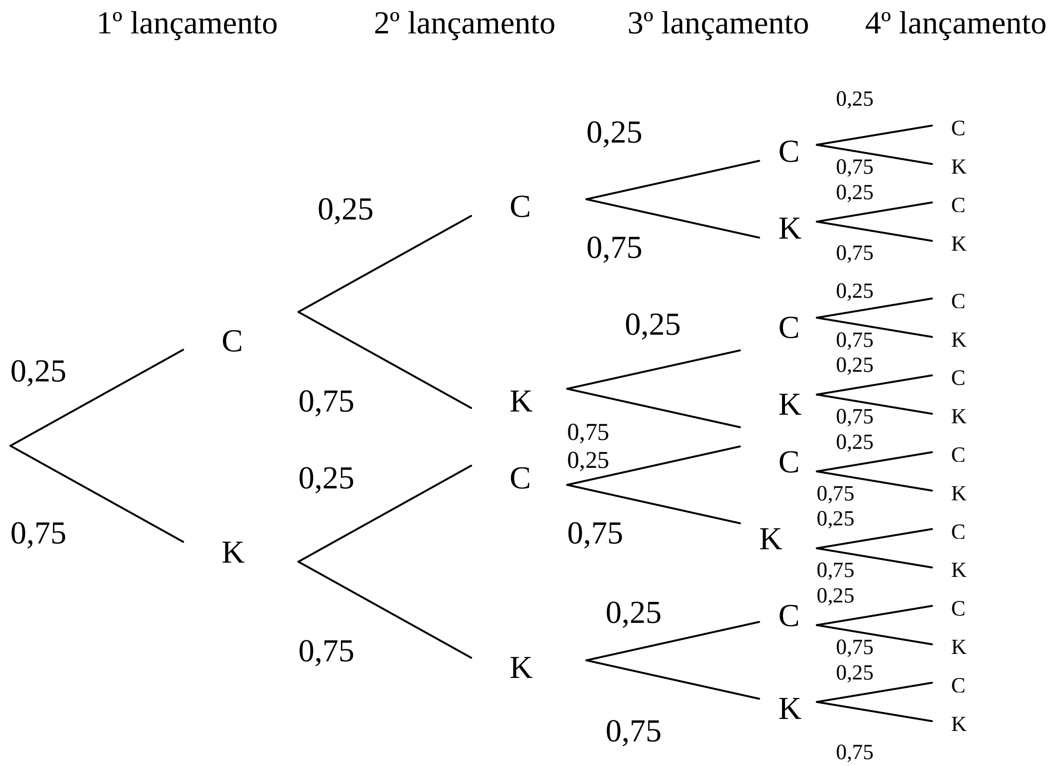
a) duas caras e duas coroas? Resolva a questão utilizando a árvore de probabilidades;

b) três caras e uma coroa? Resolva a questão utilizando a árvore de probabilidades;

c) quatro coroas? Resolva a questão utilizando a árvore de probabilidades.

- Objetivo: ajudar o aluno a perceber a relação entre o número de sucessos que se deseja obter e o número de combinações possíveis em cada caso, além da crescente dificuldade de resolução através da árvore, à medida que o número de repetições do experimento aumenta.

- <u>Solução</u>:



a) P(duas caras e duas coroas) =

= P(CCKK) + P(CKCK) + P(CKKC) + P(KCCK) + P(KCKC) + P(KKCC) =

= 0,25.0,25.075.0,75+0,25.0,75.0,25.0,75+0,25.0,75.0,75.0,25+0,75.0,25.0,25.0,75+0,75.0,25.0,75.0,25+0,75.0,75.0,25. 0,25 =

= 0,0352 + 0,0352 + 0,0352 + 0,0352 + 0,0352 + 0,0352 = 0,2109

b) P(3 caras e uma coroa) = P(CCCK) + P(CCKC) + P(CKCC) + P(KCCC) =

= 0,25.0,25.0,25.0,75 + 0,25.0,25.0,75.0,25 + 0,25.0,75.0,25.0,25 + 0,75.0,25.0,25.0,25 =

= 0,0117 + 0,0117 + 0,0117 + 0,0117 = 0,0469

c) P(4 coroas) = P(KKKK) = 0,75.0,75.0,75.0,75 = 0,3164

- <u>Análise didática</u>: em cada item dessa questão, a quantidade de caras e coroas é diferente para ajudar a evidenciar a relação entre o número de sucessos, o de fracassos e o de repetições do experimento; esperamos, também, que o aluno perceba que a árvore vai-se tornando cada vez mais trabalhosa conforme o número de repetições aumenta, e comece a pensar em outro modo de solucionar a questão.

2) Se uma moeda for lançada quatro vezes, quantas combinações existem de:

a) duas caras e duas coroas?

b) três caras e uma coroa?

c) quatro coroas?

- Objetivo: comparação entre o número de combinações em cada item da questão e o número de ramos que foram selecionados na árvore.

- Solução:

a) $C_{4,2} = 6$

b) $C_{4,3} = 4$

c) $C_{4,0} = 1$

- Análise didática: colocamos, nessa questão, três itens, com número de sucessos diferentes em cada um deles, para ajudar o aluno a perceber que o número de combinações equivale ao número de ramos selecionados na árvore.

Questão V:

1) Em cada uma das questões anteriores, qual a relação existente entre o número de combinações e o número de vezes em que uma parcela igual é somada?

- Objetivo: destacar elementos importantes na fórmula da binomial.

- Solução: o número de vezes em que uma parcela é somada é igual ao número de combinações.

- Análise didática: nesse item, esperamos que o aluno perceba que o número de vezes em que ele soma uma parcela é o valor da combinação.

2) Em cada uma das questões anteriores, qual a relação existente entre as parcelas somadas, no que diz respeito ao seu valor numérico ?

- Objetivo: destacar elementos importantes na fórmula binomial.
- Solução: os valores numéricos das parcelas somadas são iguais.
- Análise didática: nesse item, esperamos que o aluno perceba que as parcelas têm todas o mesmo valor.

3) Refaça ***1a)***,***1b)*** e ***1c)*** da ***Questão IV*** utilizando as relações que você acabou de perceber.

- Objetivo: iniciar a construção da fórmula da distribuição binomial.
- Solução:

1a) P(duas caras e duas coroas) = 6.0,25.0,25.075.0,75 = 6.0,0352 = 0,2109

1b) P(3 caras e uma coroa) = 4.0,25.0,25.0,25.0,75 = 4.0,0117 = 0,0469

1c) P(4 coroas) = 1.0,75.0,75.0,75.0,75 = 1.0,3164 = 0,3164

- Análise didática: o aluno deve saber generalizar e construir fórmulas.

Questão VI:

Suponha, agora, que você chame, no lançamento de uma moeda, cara de sucesso e coroa de fracasso.

1) Quantos sucessos existem em ***1a)*** da ***Questão IV*** ? E em ***1b)***? E em ***1c)***?

2) Quantos fracassos existem na questão ***1a)*** da ***Questão IV*** ? E na questão ***1b)***? E na ***1c)***?

3) Qual a relação existente entre o número de sucessos, o número de fracassos e o número de lançamentos da moeda em ***1a)*** da ***Questão IV***? E em ***1b)***? E em ***1c)***?

- Objetivo: induzir à construção da fórmula da distribuição binomial.

- Solução:

1) Existem dois sucessos em ***1a)***, três em ***1b)*** e nenhum em ***1c)***.

2) Existem dois fracassos em ***1a)***, um em ***1b)*** e quatro em ***1c)***.

3) Em todos os itens, o número de lançamentos da moeda é a soma do número de sucessos com o de fracassos.

- Análise didática: o aluno deve saber generalizar e construir fórmulas.

4) Retome ***3)*** da ***Questão V*** e escreva-a novamente usando potenciação no lugar de produtos de fatores iguais. Compare os resultados com aqueles obtidos em ***1)*** da ***Questão IV***.

- Objetivo: induzir à construção da fórmula da distribuição binomial.

- Solução:

1a) P(duas caras e duas coroas) = $6.0{,}25^2.075^2 = 0{,}2109$

1b) P(3 caras e uma coroa) = $4.0{,}25^3.0{,}75^1 = 0{,}0469$

1c) P(4 coroas) = $1.0{,}75^4 = 0{,}3164$

Os resultados são iguais aos obtidos em ***1)*** da ***Questão IV***.

- Análise didática: o aluno deve saber generalizar e construir fórmulas. Esperamos, ainda, que o aluno perceba que escreveu a solução da questão de um modo bem mais resumido do que havia feito em ***1)*** da ***Questão IV***.

5) Chame o número de lançamentos de n, o número de sucessos de x e o número de fracassos de $(n-x)$; chame a probabilidade de um sucesso em um lançamento de p e a probabilidade de um fracasso em um lançamento de $(1-p)$; reveja as

informações de ***1)***, ***2)*** e ***3)*** da ***Questão VI***. Lembre-se de que o número de combinações de *n* elementos tomados de *x* em *x* é dado por:

$$\frac{n!}{x!(n-x)!}$$

Baseado nessas informações, escreva novamente ***4)*** da ***Questão VI***, substituindo os valores pelas notações aqui colocadas.

- Objetivo: induzir à construção da fórmula da distribuição binomial.

- Solução:

1a) P(duas caras e duas coroas) = $6.0{,}25^2.075^2 = C_{n,x}.p^x.(1-p)^{(n-x)}$

1b) P(3 caras e uma coroa) = $4.0{,}25^3.0{,}75^1 = C_{n,x}.p^x.(1-p)^{(n-x)}$

1c) P(4 coroas) = $1.0{,}75^4 = C_{n,x}.p^x.(1-p)^{(n-x)}$

- Análise didática: o aluno deve saber generalizar e construir fórmulas. Esperamos, ainda, que o aluno chegue a essa questão entendendo o caminho que percorreu para construir a fórmula. Particularmente neste último item, existe a mudança do registro numérico para o registro de fórmulas.

6) Usando a fórmula que você acabou de descobrir, calcule a probabilidade de saírem quatro caras se a moeda viciada for lançada dez vezes.

- Objetivo: favorecer que o aluno perceba a utilidade do uso da fórmula da distribuição binomial.

- Solução: $P(X = 4) = C_{10,4}.(0{,}25)^4.(0{,}75)^6 = 0{,}146$

- Análise didática: escolhemos um número alto (dez) de repetições do experimento para desencorajar o uso da árvore de probabilidades.

Questão VII:

1) Os sucessivos lançamentos da moeda são independentes?

2) A cada lançamento, quantas possibilidades de resultado existem? Elas podem ocorrer ao mesmo tempo?

3) A probabilidade de ocorrer um sucesso, a cada lançamento, se mantém constante?

- Objetivo: destacar as características de uma variável binomial.

- Solução:

1) Sim.

2) Existem apenas duas possibilidades de resultado, as quais não podem ocorrer ao mesmo tempo.

3) Sim.

- Análise didática: o aluno deve, nessa questão, saber o que são repetições de experimento independentes.

Após o término da ***Questão VII*** foi feita a institucionalização da distribuição binomial, quando foram ressaltadas as condições necessárias para sua aplicação, sua fórmula e os elementos que a compõem.

Os indivíduos que realizaram a seqüência eram alunos da pesquisadora na ocasião. As aulas eram expositivas, com exercícios para fixação dos conteúdos, realizados alguns pela professora, a título de exemplos, outros pelos próprios alunos. Houve, então, uma quebra de contrato quando os alunos receberam apenas a folha de atividades e a instrução: “podem começar a fazer”.

Conclusões

Os alunos presentes na ocasião da aplicação da seqüência piloto foram colocados totalmente à vontade quanto à possibilidade de não-realização da atividade, uma vez que se tratava de uma atividade extracurricular e que não seria considerada na avaliação deles no curso. Eles se mostraram satisfeitos por realizarem uma atividade desse tipo, ao invés de apenas ouvir explicações.

Algumas duplas calcularam uma probabilidade em atividades nas quais era solicitado o cálculo do número de combinações. Não foi possível detectar por que a confusão foi feita.

Apareceram dificuldades com união e intersecção de eventos, simplificação de frações, interpretação dos enunciados e ainda dificuldades em relação a cálculos. Por exemplo, algumas duplas fizeram o seguinte cálculo: 0,25.0,75 + 0,25.0,75 = 1+1 = 2. O mais interessante não é o erro na conta em si, mas o fato de que eles não perceberam que o resultado não podia ser maior que um, uma vez que calculavam o valor de uma probabilidade. Por trás do erro no cálculo, revela-se uma dificuldade de natureza probabilística. Isso nos levou a colocar, na seqüência final, questões que envolvessem a complementaridade de eventos, esperando que com isso os alunos percebessem que o valor máximo de uma probabilidade é um.

Várias duplas imaginaram que, no lançamento de duas moedas, para calcular a probabilidade de sair uma cara e uma coroa, bastava considerar o caso cara/coroa, não levando em conta o caso coroa/cara. Não foi possível esclarecer com as duplas se a dificuldade veio de suas concepções sobre Probabilidade ou se algum ponto no desenvolvimento da seqüência os induziu a imaginar que era necessário que a ordem fosse cara/coroa. De qualquer maneira, isso nos alertou a colocar, na seqüência final, um contexto no qual a importância da ordem dos resultados ficasse clara, como, por exemplo, a primeira, que trata de um aluno que acerta ou erra questões.

Apenas uma dupla chegou ao final da atividade. Várias duplas faziam logo de início alguns cálculos de uma maneira que seria pedida numa atividade posterior.

Concluímos então que alguns itens colocados na seqüência são desnecessários. Os alunos realizam essas etapas naturalmente. Apareceram dificuldades nas interpretações de alguns enunciados. Por esse motivo, na seqüência final, procuramos redigir enunciados mais precisos quanto ao que era solicitado. Além disso, reduzimos o número de questões e ampliamos o tempo de aplicação.

Imaginamos, após a análise da produção dos alunos, e, também, observando que apenas uma dupla chegou ao final, que essa seqüência talvez não seja a mais apropriada para introduzir a distribuição binomial. Na verdade, a ***Questão VI***, que é justamente a atividade que converte o registro da árvore no registro da fórmula, causou muita confusão entre os alunos: eles não conseguiam entender por que na atividade se pediam determinados passos, a onde deveriam chegar, e acabavam não conseguindo resolvê-la. Acreditamos que seja necessária mais de uma institucionalização no decorrer da seqüência e não apenas uma no final, como estava previsto aqui. Pensamos, então, em institucionalizar a fórmula da combinação e a própria fórmula da distribuição binomial. Acreditamos que, sozinhos, os alunos não conseguirão chegar a elas.

Na seqüência didática final elaborada, que é apresentada no próximo capítulo, procuramos considerar, além dos resultados desta seqüência piloto, nossos fundamentos teóricos, colocados no Capítulo I, e ainda as pesquisas estudadas sobre o ensino e a aprendizagem de Probabilidade (Capítulo III).

CAPÍTULO V

A SEQÜÊNCIA DIDÁTICA E O PÓS-TESTE

Neste capítulo apresentamos a seqüência didática, seus objetivos, justificativas, sua aplicação e os resultados. Apresentamos também o pós-teste e os resultados obtidos.

1. A Seqüência Didática

1.1. Objetivos

A seqüência didática elaborada objetiva:

- que o aluno seja capaz de identificar uma variável binomial e usar a distribuição binomial quando necessária;
- que o aluno entenda como funciona a distribuição binomial, ou seja, que ele perceba a construção da fórmula da distribuição;
- que o aluno aperfeiçoe as concepções sobre Probabilidade;
- que o aluno aprimore o uso da linguagem simbólica em Probabilidade;
- que o aluno perceba as conversões necessárias entre as linguagens natural e simbólica e que seja capaz de fazê-las.

1.2. O Dispositivo Experimental

Nossa seqüência é composta de seis questões, todas versando sobre a distribuição binomial de probabilidades. Os alunos foram agrupados em duplas para a resolução da seqüência. Eles a resolveram na própria folha na qual foi impressa e devolveram-na ao final da experimentação. Foi permitido o uso de calculadora. A experimentação realizou-se em duas sessões de cem minutos cada.

Houve um observador na experimentação que, juntamente com a pesquisadora, esteve atento à resolução e às reações dos alunos. Ambos anotaram

observações as quais foram utilizadas na análise dos resultados. O observador não tirou dúvidas, nem indicou soluções aos alunos e coube à pesquisadora decidir se havia necessidade de uma intervenção para uma possível correção de rota dos trabalhos. As sessões foram gravadas em áudio.

Os alunos que tomaram parte da experimentação eram, na ocasião, alunos regulares e voluntários da pesquisadora. Por esse motivo, informamos a eles, de início, a natureza do trabalho que seria desenvolvido e a não-utilização dos resultados nas avaliações da pesquisadora como professora.

1.3. Justificativas

Uma das primeiras dificuldades que aparecem nos alunos é imaginar que a probabilidade de ocorrer sucesso na distribuição binomial é 0,5. Um outro problema é a falta de apresentações suficientemente claras do tópico nos livros didáticos: existem problemas de linguagem, de falhas no trabalho com tópicos anteriores (por exemplo, distribuição de probabilidades), geralmente a utilidade da árvore de probabilidades não é destacada e, ainda, quando se passa para os tópicos seguintes, como, por exemplo, a distribuição normal e sua aproximação da binomial, os livros não costumam questionar se o leitor realmente domina os tópicos passados.

Julgamos, portanto, importante desenvolver um trabalho específico para o ensino e a aprendizagem da distribuição binomial, razão pela qual elaboramos uma seqüência didática que:

- utiliza a distribuição como ferramenta de resolução e como objeto de estudo; para isso, utilizamos a dialética ferramenta-objeto, de acordo com Douady (1986);
- utiliza mais de um registro de representação e o jogo de quadros;
- procura ser precisa na linguagem natural, para compreensão dos enunciados e dos contextos nos quais as situações se inserem;
- rompe com o contrato didático existente;

- procura observar possíveis dificuldades e obstáculos, com o objetivo de tentar ultrapassá-los.

1.4. A Experimentação com Relação ao Quadro Teórico

Os alunos com os quais trabalhamos já possuíam conhecimentos de Probabilidade e do uso da árvore de probabilidades. Consideramos, então, que não era necessário um trabalho específico sobre esse tema, mas que talvez fosse necessário lembrar alguns pontos, principalmente no que diz respeito ao uso da árvore. Sobre ela, utilizamos as indicações de Parzysz (1993). Usamos também a mesma linha de desenvolvimento da fórmula da distribuição binomial que esse autor utilizou[15].

Consideramos, ainda, que a utilização da árvore já possibilita que o aluno evite os vieses da representatividade e da disponibilidade, uma vez que na árvore aparecem claramente todas as possíveis combinações do evento de interesse. Em apenas uma, das seis atividades propostas, usamos probabilidade de sucesso 0,5, para evitar o viés da equiprobabilidade.

Dois aspectos ainda foram considerados na seqüência, com base nos trabalhos de Maury (1984) e Coutinho (1994): o contexto e o vocabulário. No que diz respeito ao contexto, procuramos utilizar aqueles com os quais os alunos estavam acostumados, seja por serem comuns na Matemática, seja por fazerem parte de suas vidas pessoais, estudantis ou até profissionais, no caso de alunos que já trabalham. Quanto ao vocabulário, além de procurarmos usar palavras que não causassem problemas de interpretação, insistimos nas transformações da linguagem natural na simbólica. Por exemplo, o aluno devia ser capaz de transformar “exatamente um” em “$X = 1$”; “não mais que dois” em “$X \leq 2$”; devia ainda perceber que “não mais que um” sucesso em cinco repetições de um experimento envolve a união de eventos, ou seja, “$X = 0$ ou $X = 1$”. Essas transformações de linguagens têm, por trás delas,

[15] Capítulo III, 6.

mudanças de registros de representação. Registros diferentes também foram utilizados quando o aluno passou da escrita da árvore para a da fórmula.

Utilizamos mais de um quadro na seqüência elaborada. Por exemplo, a construção e utilização de uma árvore se faz no quadro probabilístico, enquanto a fórmula da distribuição binomial e sua solução se insere no quadro algébrico.

Tivemos a preocupação de colocar valores altos de repetições do experimento para forçar o aluno a deixar de usar a árvore. Apesar de considerarmos que ela é um excelente instrumento para a introdução da distribuição binomial, imaginamos que o aluno não pode depender exclusivamente dela para solucionar um problema. Assim, nossa intenção era que, após a introdução do tópico, o aluno passasse a utilizar a fórmula.

Ressaltamos, ainda, a utilização da dialética ferramenta-objeto. A distribuição binomial foi usada no início da seqüência de modo implícito; depois, ela foi institucionalizada, após o que foi feita a familiarização com o objeto de estudo. Foi realizado um pós-teste, que foi a aplicação da distribuição num novo contexto, como finalização da dialética.

Enfim, com o objetivo de favorecer a compreensão do objeto de estudo pelo aluno, procuramos construir uma seqüência que considerasse algumas questões indicadas em nossas leituras, como, por exemplo, o viés da equiprobabilidade e o uso da árvore de probabilidades.

1.5. Panorama dos Alunos e Condições da Experimentação

A experimentação aconteceu numa faculdade particular da cidade de São Paulo, com alunos voluntários da pesquisadora que cursavam o segundo semestre de Administração de Empresas, inclusive a disciplina Estatística I. Participaram da atividade dez alunos, sendo seis do sexo masculino e quatro do feminino, com idades que variavam de 17 a 22 anos. No Ensino Médio, seis deles estudaram em escolas particulares da cidade de São Paulo, dois em escolas particulares do interior do

Estado de São Paulo, um em escola particular do interior do estado de Minas Gerais e um iniciou o Ensino Médio numa escola particular da cidade de São Paulo e terminou numa pública. Três dos alunos trabalham, quatro estudam no período da manhã e os outros, à noite. Apenas um dos alunos afirmou já ter tido Estatística no Ensino Médio; todos os outros afirmaram que estão estudando a disciplina pela primeira vez. Todos os alunos são da classe A, segundo critério da ABA/ABIPEME[16] de 1991.

A experimentação aconteceu fora dos horários regulares de aula. Os alunos receberam a seqüência impressa e a resolução foi feita na própria folha. O material que eles utilizaram foi lápis ou caneta e calculadora. Não foi permitida a consulta a livros ou apostilas e a pesquisadora funcionou como mediadora, decidindo o tipo de dúvida que poderia esclarecer com o aluno.

Todos os alunos devolveram a seqüência ao término da experimentação, nas condições em que estavam, mesmo que tivessem deixado de fazer uma ou mais questões.

Como já foi colocado, os alunos voluntários cursavam no momento da aplicação da seqüência a disciplina Estatística I com a pesquisadora, e já haviam estudado Probabilidade. Assim, os alunos já tinham tido contato com a árvore de probabilidades, com a independência de eventos, com eventos complementares e com cálculos de probabilidades da união e da intersecção de eventos. Nossa seqüência, então, tomou como adquiridos esses conceitos e não foi prevista nenhuma retomada desses conteúdos antes ou durante a realização da seqüência. Previu-se apenas a retomada de noções de análise combinatória.

[16] ABA - Associação Brasileira de Anunciantes.
ABIPEME - Associação Brasileira de Pesquisa de Mercado.

1.6. As Situações Propostas

Em nossa seqüência destacam-se basicamente três fases. A primeira é a fase de apresentação da distribuição binomial. A segunda, de aprofundamento. Finalmente, a terceira é a fase de familiarização com a distribuição.

- <u>apresentação:</u> as questões ***1)*** e ***2)*** apresentaram a distribuição binomial. Foi destacado o uso da árvore de probabilidades para a percepção do funcionamento da distribuição e sua ligação com combinação. Já na questão ***2)*** a distribuição foi institucionalizada.

- <u>aprofundamento:</u> nas questões ***3)*** e ***4)***, foram introduzidos novos elementos, que modificam alguma ação na busca da solução, com o objetivo de aprofundar o conhecimento do aluno. Tomamos cuidado para que esses novos elementos não excluíssem uns aos outros. Introduzimos, por exemplo, na questão ***3)***, o uso de eventos complementares. Na questão ***4)***, enfatizamos o espaço amostral do número de sucessos em *n* repetições do experimento, porém sem deixar de colocar o uso de eventos complementares.

- <u>familiarização:</u> as questões ***5)*** e ***6)*** tinham por objetivo familiarizar o aluno com a distribuição e apresentar novos contextos de aplicação.

1.7. Análise a Priori das Situações

1) Um professor pede a seus alunos que respondam a duas questões do tipo V ou F. Um dos alunos, Pedro, responde as questões ao acaso.

a) É mais provável que:

i) Pedro acerte as duas questões;

ii) Pedro erre as duas questões;

iii) Pedro acerte apenas uma das questões;

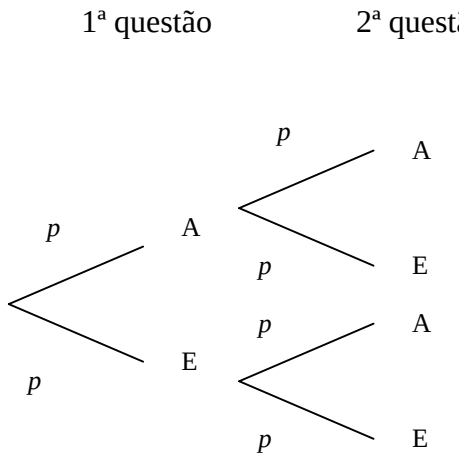
iv) as alternativas ***i)***, ***ii)*** e ***iii)*** são igualmente prováveis.

- <u>Objetivo:</u> verificar se o aluno constrói o espaço amostral do experimento, mesmo que não o escreva, e se percebe a equiprobabilidade dos eventos.

- <u>Solução:</u> a alternativa correta é ***iii)***.

- <u>Análise didática:</u> a atividade pode ser feita usando diretamente o espaço amostral equiprovável Ω = {AA, AE, EA, EE}. É possível, porém, que o aluno imagine que, no espaço amostral, AE e EA representem o mesmo evento. Isso talvez o fizesse assinalar a alternativa ***iv)***. O número de repetições do experimento é baixo para que o aluno possa montar o espaço amostral sem muito trabalho. Essa questão está inserida no quadro probabilístico.

b) Refaça o item ***a)*** utilizando a árvore de probabilidades abaixo.



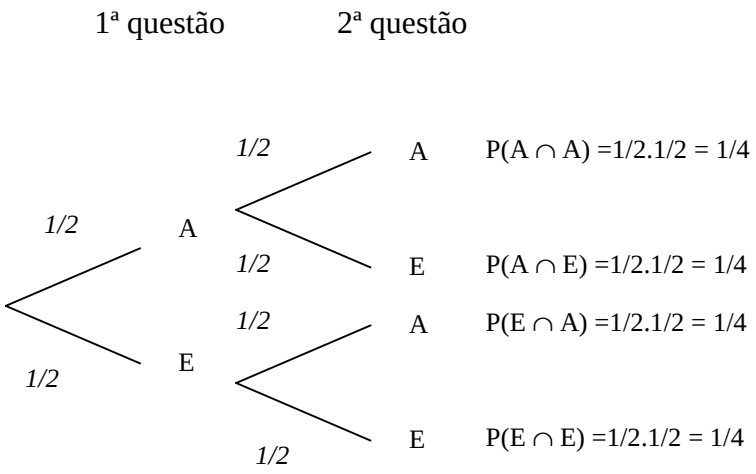
A significa que Pedro acerta a questão.

E significa que Pedro erra a questão.

p deve ser substituído pelo valor da probabilidade correspondente ao ramo da árvore.

- <u>Objetivo:</u> introduzir a árvore de probabilidades como ferramenta para a solução de problemas que envolvam a distribuição binomial.

- <u>Solução:</u>



i) Pedro acerta as duas questões: $P(A \cap A) = 1/4$

ii) Pedro erra as duas questões: $P(E \cap E) = 1/4$

iii) Pedro acerta apenas uma das questões: $P(A \cap E) + P(E \cap A) = 1/4 + 1/4 = 1/2$

iv) as alternativas ***i)***, ***ii)*** e ***iii)*** são igualmente prováveis: falso

A alternativa correta é a ***iii)***.

- <u>Análise didática:</u> duas repetições independentes do experimento aleatório geram uma distribuição binomial com $n = 2$ e $p = 0,5$. O aluno deve saber trabalhar com a árvore de probabilidades e deve saber, também, que os eventos complementares A e E são equiprováveis. A árvore de probabilidades possibilita que o aluno construa o espaço amostral do experimento. Porém essa questão pode causar o viés da equiprobabilidade na distribuição binomial – imaginar que, sempre que existirem duas possibilidades de resultado mutuamente exclusivas, a probabilidade de cada uma delas é 0,5. Tentamos contornar esse viés utilizando, na questão ***2)***, uma probabilidade diferente de 0,5.

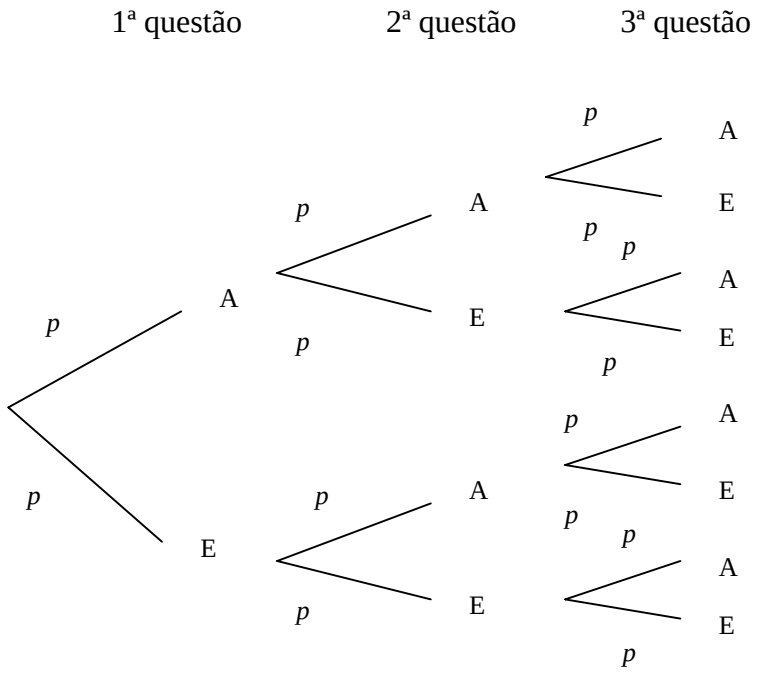
c) Você manteve a resposta do item ***a)***? Por quê?

- <u>Objetivo:</u> provocar a reflexão do aluno no que diz respeito aos vários resultados possíveis do experimento e suas respectivas probabilidades, particularmente se ele alterou a resposta dada no item ***a)***.

- <u>Solução:</u> sim, pois a análise da árvore confirmou que é mais provável que Pedro acerte apenas uma das questões.

- <u>Análise didática:</u> o uso da árvore deve possibilitar ao aluno que errou a questão ***a)*** perceber que AE e EA não representam o mesmo evento e que, então, a probabilidade de acertar apenas uma das questões é maior que a de acertar as duas ou errar as duas.

d) Se, ao invés de duas questões, fossem três, calcule a probabilidade de Pedro acertar duas, utilizando a árvore de probabilidades abaixo:



A significa que Pedro acerta a questão.

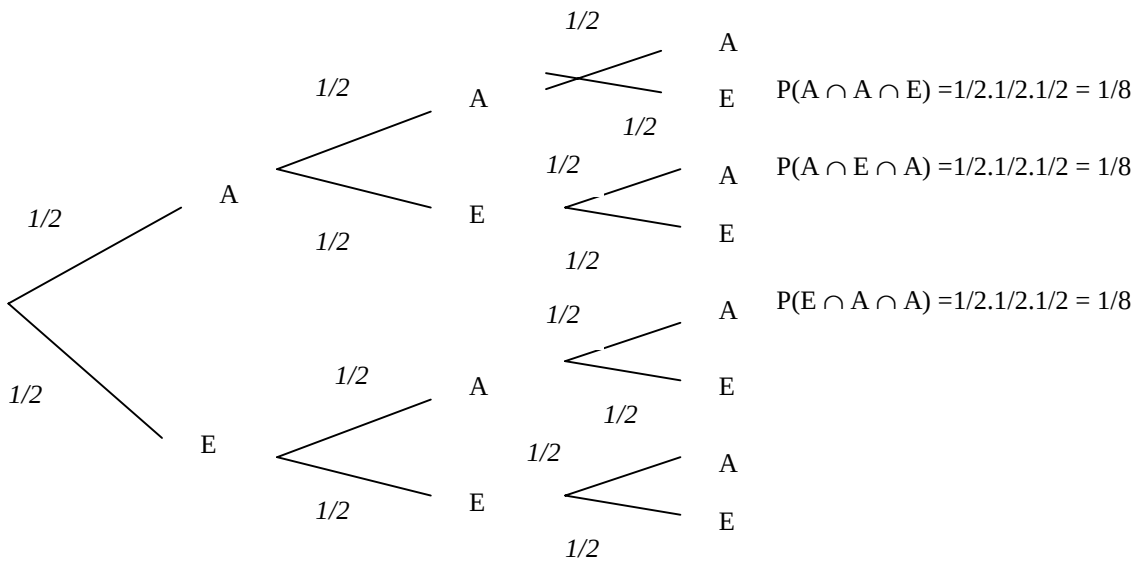
E significa que Pedro erra a questão.

p deve ser substituído pelo valor da probabilidade correspondente ao ramo da árvore.

- <u>Objetivo:</u> utilizar a árvore de probabilidades como ferramenta em problemas que envolvem a distribuição binomial.

- <u>Solução:</u>

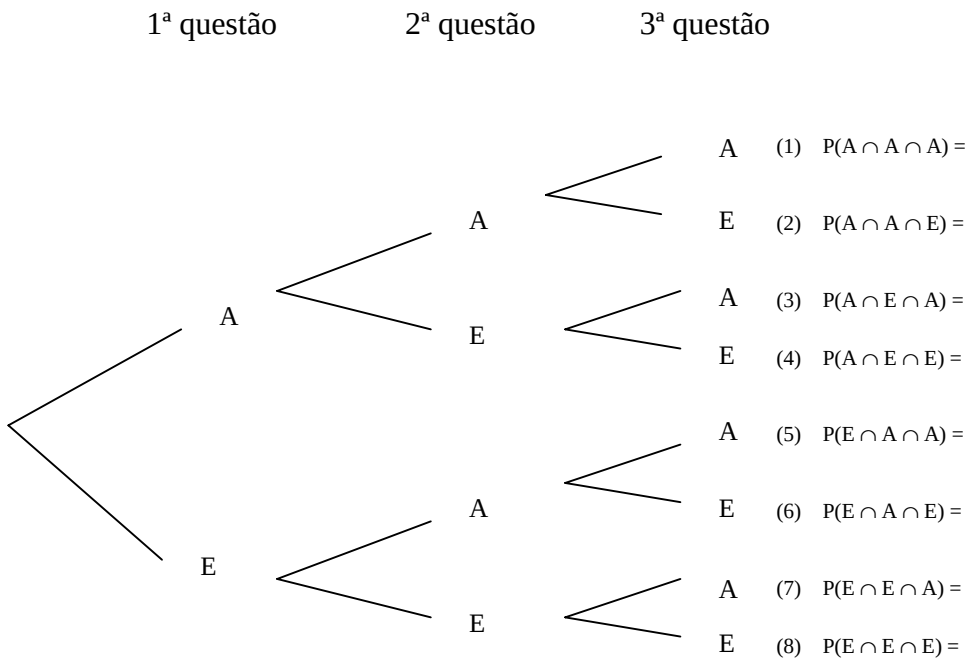
1ª questão 2ª questão 3ª questão



A probabilidade de Pedro acertar duas questões é 3/8.

- <u>Análise didática:</u> a distribuição binomial nesta atividade tem n = 3 e p = 0,5. O aluno precisa saber trabalhar com a árvore de probabilidades e precisa saber, também, que os eventos elementares A e E são equiprováveis. O número de repetições do experimento maior exige que a árvore tenha um número maior de ramos. Acreditamos que isso favorece a visualização das diferentes maneiras que os eventos A e E podem ocorrer, de quais e de quantos ramos devem ser escolhidos para satisfazer o evento solicitado. Com isso, procuramos fazer com que o aluno evitasse os vieses da disponibilidade e da representatividade. O viés da disponibilidade pode ser evitado pois todas as combinações de acerto e erro das questões foram dispostas na árvore. Com isso, se o aluno tem mais facilidade em formar uma combinação (por exemplo AAA), pode perceber que nem por isso é mais provável que Pedro acerte todas as questões. O viés da representatividade pode ser evitado pois é possibilitado ao aluno perceber que todas as seqüências formadas na árvore (AAA, AAE , AEA, etc.) são equiprováveis, portanto não existe uma seqüência mais representativa da situação proposta do que outra.

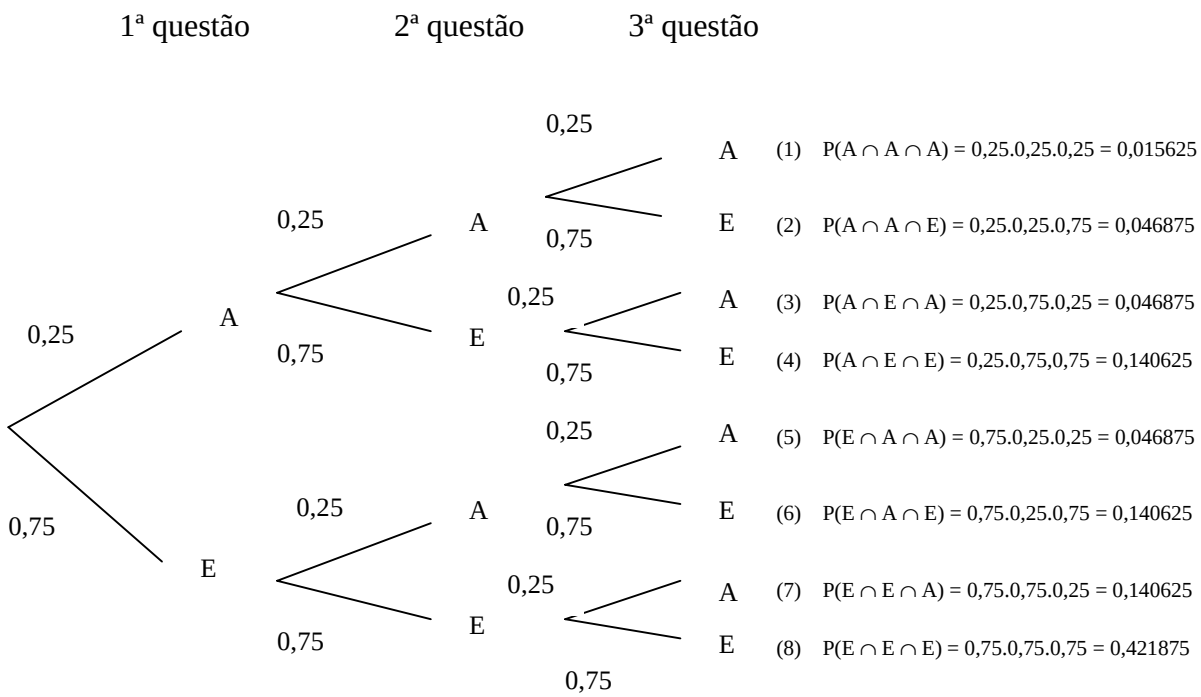
2) Em outro dia, o professor passa três questões aos alunos, porém cada uma delas tem quatro alternativas, sendo apenas uma correta. Complete a árvore de probabilidades abaixo.



a) Qual é a probabilidade de Pedro acertar uma questão, se ele as responde ao acaso?

- <u>Objetivo:</u> aprofundar e familiarizar o uso da árvore como ferramenta em problemas que envolvem a distribuição binomial.

- <u>Solução:</u>



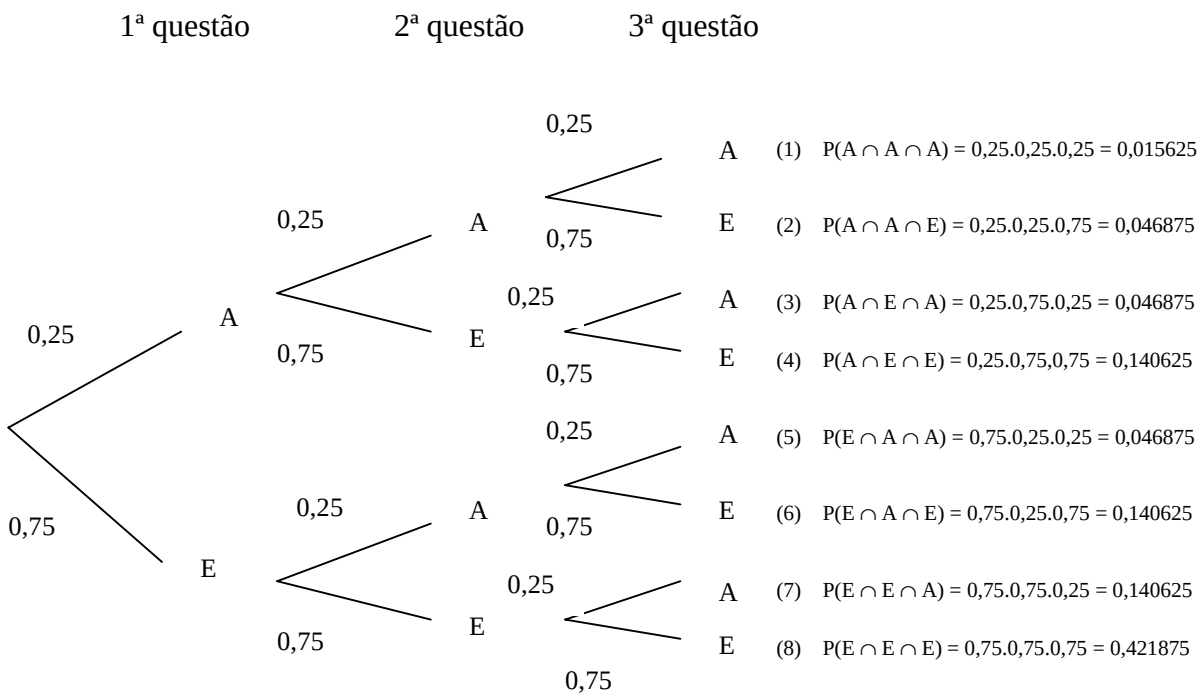
A probabilidade de Pedro acertar uma questão é 0,421875.

- <u>Análise didática:</u> a distribuição binomial desta atividade tem $n = 3$ e $p = 0,25$. O aluno deve saber trabalhar com a árvore de probabilidades e deve perceber a não-equiprobabilidade dos eventos elementares A e E. Nesta atividade é possível que o aluno contorne o viés da equiprobabilidade na distribuição binomial, pois o valor de p é diferente de 0,5. Da expressão "ao acaso" e do fato de haver quatro alternativas o aluno pode deduzir que $p = 0,25$. A atividade propicia ainda que o próprio aluno faça as mudanças de registro necessárias, da linguagem natural para a árvore de probabilidades, depois da árvore de probabilidades para o registro simbólico, já colocado na árvore e, finalmente, do simbólico para o numérico. Nessas mudanças de registro aparecem também mudanças de quadros: o aluno inicia a solução no quadro probabilístico, quando passa da linguagem natural para a árvore; passa para o quadro algébrico, quando transforma o registro da árvore no simbólico; termina no quadro numérico, quando, do registro simbólico, passa para os números com os quais realizará as contas.

b) Qual é a probabilidade de Pedro acertar duas questões, se ele as responde ao acaso?

- <u>Objetivo:</u> aprofundar e familiarizar o uso da árvore como ferramenta em problemas que envolvam a distribuição binomial. A institucionalização da distribuição binomial é feita usando essa atividade.

- <u>Solução:</u>



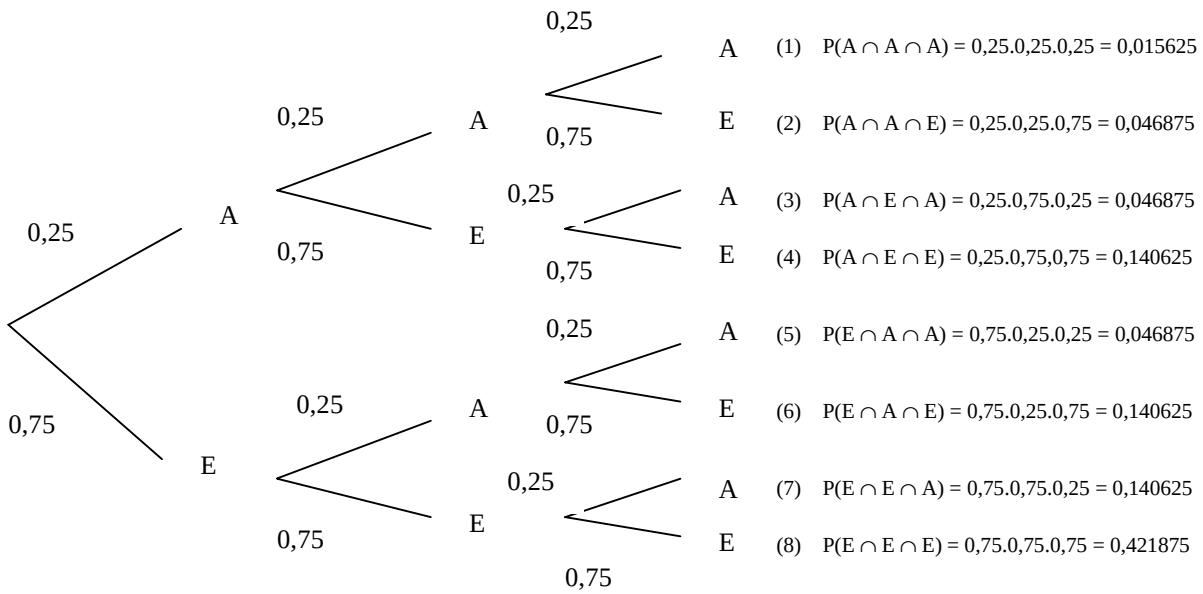
A probabilidade de Pedro acertar duas questões é 0,140625.

- <u>Análise didática:</u> as mudanças de registro da linguagem natural para a árvore, da árvore para o registro simbólico e deste para o numérico continuam presentes nesta questão. Alteramos o número de sucessos para propiciar a familiarização do aluno com a árvore de probabilidades.

Neste ponto foi feita a institucionalização da fórmula da combinação e da própria fórmula da distribuição binomial. Isso foi feito relacionando o que aparece na árvore com os valores que efetivamente usamos para calcular a probabilidade pedida.

Foi institucionalizada também a caracterização de uma variável aleatória binomial: *n* repetições independentes de um experimento aleatório, duas possibilidades complementares de resultado e probabilidade de sucesso constante, além da linguagem simbólica utilizada.

Faremos aqui uma exposição da maneira pela qual conduzimos a institucionalização da fórmula da distribuição.



Na árvore, observamos que os ramos que nos interessam, ou seja, os ramos nos quais Pedro acerta duas questões, são os ramos (2), (3) e (5). O fato de aparecerem três ramos na árvore vem de que $C_{3,2} = 3$ (neste ponto, tivemos que lembrar como é feito este cálculo). Além disso, observamos que as probabilidades são todas iguais a 0,046875 e isso ocorre porque em todos os ramos Pedro acerta duas questões e erra uma, independente da ordem. Essa probabilidade pode ser escrita então como $(0,25)^2.0,75$. Na linguagem formal de Probabilidade, "Pedro acertar a questão" é o sucesso do nosso experimento; daí, a probabilidade de ocorrência do sucesso em uma realização do experimento é $p = 0,25$. "Pedro errar" é denominado fracasso. Sucesso e fracasso são complementares e por isso a probabilidade de

ocorrer o fracasso em uma realização do experimento é 1- p = 1- 0,25 = 0,75. Podemos então escrever:

$$(0,25)^2.0,75 = p^2.(1-p)$$

Em três repetições do experimento, queremos a ocorrência de dois sucessos. Isso leva a necessariamente um fracasso. Se denominamos o número de repetições n e o de sucessos x, o de fracassos será n-x. Ainda: por que 0,25 está elevado ao quadrado e 0,75 à primeira? Porque estamos calculando a probabilidade de ocorrência de dois sucessos. Então:

$$(0,25)^2.0,75 = p^x.(1-p)^{n-x}$$

Continuando a montagem da fórmula da distribuição binomial, lembramos aqui que são três os ramos que nos interessam, todos numericamente iguais. Assim, a probabilidade que nos interessa é $3.(0,25)^2.0,75$, ou seja, $C_{3,2}$ $.(0,25)^2.0,75$. Usando as notações apropriadas:

$$C_{n,x}.p^x.(1-p)^{n-x}$$

Finalmente, é preciso indicar o que estamos calculando. A probabilidade de ocorrência de dois sucessos é indicada por P(X = 2). Assim,

$$P(X = 2) = C_{3,2}\ .(0,25)^2.0,75$$

De modo geral:

$$P(X = x) = C_{n,x}.p^x.(1-p)^{n-x}$$

Nesse ponto, comentamos sobre as notações que envolvem os sinais “≥”, “>”, “≤” e “<”.

Acreditamos que com essa abordagem o aluno compreendesse a construção da fórmula da distribuição binomial, possibilitando que evitasse erros comuns, como por exemplo trocar o valor de p pelo de 1-p ou o de x pelo de n-x.

Para terminar a institucionalização, destacamos a independência das repetições, a complementaridade dos resultados e a constância da probabilidade de sucesso.

3) Uma pesquisa eleitoral revelou que 35% dos eleitores de uma cidade votam num candidato por causa do partido político ao qual ele pertence. Qual é a probabilidade de, numa amostra de cinco eleitores da cidade:

a) nenhum votar num candidato por causa do partido?

- Objetivo: aprofundar a distribuição binomial; apresentar novo contexto.

- Solução:

$$P(X = 0) = C_{5,0}.(0,35)^0.(0,65)^5 = 0,116029.$$

- Análise didática: a distribuição binomial desta questão tem n =5 e p = 0,35. Para resolvê-la o aluno tem que perceber que a porcentagem de eleitores corresponde à probabilidade. O aluno pode também perceber que é possível que a variável assuma o valor zero. Uma vez que a fórmula da distribuição binomial já foi institucionalizada, não pedimos mais o uso da árvore de probabilidades. O aluno aqui pode fazer as conversões da linguagem natural diretamente para a fórmula, sem passar pela representação intermediária que é a árvore. A partir desta questão, os quadros envolvidos são o probabilístico, o algébrico e o numérico.

b) exatamente dois votarem num candidato por causa do partido?

- Objetivo: familiarizar com a distribuição binomial.

- Solução:

$$P(X = 2) = C_{5,2}.(0,35)^2.(0,65)^3 = 0,336416.$$

- Análise didática: o aluno, aqui, pode fazer as conversões da linguagem natural diretamente para a fórmula, sem passar pela representação intermediária que é a árvore.

c) pelo menos um votar num candidato por causa do partido?

- Objetivo: introduzir o cálculo da probabilidade utilizando o evento complementar ao solicitado.

- Solução:

  $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}116029 = 0{,}883971.$

- Análise didática: o aluno precisa conhecer eventos compostos. Além de relacionar porcentagem com probabilidade, introduzimos, a partir deste item, o cálculo da probabilidade de um evento composto e expressões comuns em Probabilidade (pelo menos). O aluno precisa realizar uma mudança de registro: transformar "pelo menos um" em "$X \geq 1$". Pelo que observamos em nossa prática docente, essa transformação não ocorre de imediato para muitos alunos.

c.1) Explique sua solução.

- Objetivo: provocar a reflexão do aluno quanto à solução dada.

- Solução:

  Foi usado o fato de que os eventos $P(X \geq 1)$ e $P(X = 0)$ são complementares.

- Análise didática: nossa expectativa é que, caso o aluno erre, perceba o erro ao explicar a solução.

c.2) Analise a seguinte igualdade: $P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1)$. Ela é verdadeira?

- Objetivo: familiarizar o aluno com a linguagem simbólica da Probabilidade, ao mesmo tempo em que percebe a complementaridade dos eventos.

- Solução: sim.

- Análise didática: o aluno, aqui, deve entender a linguagem simbólica, saber que a soma de eventos complementares é 1 e que os eventos "$X \geq 1$" e "$X < 1$" são

complementares. Esta atividade talvez propicie mudanças de registros – o aluno pode raciocinar transformando os registros da linguagem simbólica em registros da linguagem natural; a atividade também propicia a percepção dos eventos complementares envolvidos. Além de saber como verificar se a sentença é verdadeira (ela pode ser verdadeira ou falsa conforme os valores assumidos por $P(X \geq 1)$ e por $P(X < 1)$), o aluno deve saber quais elementos compõem o evento "$X \geq 1$" e quais compõem "$X < 1$".

c.3) O item ***c)*** pode ser resolvido utilizando a relação colocada em ***c.2)***? Por quê?

- <u>Objetivo:</u> detectar se o aluno usou a relação entre eventos complementares e por que o fez ou deixou de fazer.

- <u>Solução:</u> sim, pois os eventos $P(X \geq 1)$ e $P(X = 0)$ são complementares.

- <u>Análise didática:</u> imaginamos que, ao solicitar que o aluno reflita sobre a sua solução, ele perceba a utilidade de usar eventos complementares. Para aqueles que usaram, saberemos se o fizeram por acaso ou se tinham consciência do que faziam. Se não a tinham, a reflexão talvez os ajude na conscientização.

d) não mais que dois votarem num candidato por causa do partido?

- <u>Objetivo:</u> perceber que nem sempre é útil usar a relação entre eventos complementares.

- <u>Solução:</u>

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) =$$
$$= 0{,}116029 + C_{5,1}.(0{,}35)^1.(0{,}65)^4 + 0{,}336416 = 0{,}764831.$$

- <u>Análise didática:</u> esta atividade propicia que o aluno utilize a mudança de registros: transformar "não mais que dois" em "$X \leq 2$".

d.1) Explique sua solução.

- Objetivo: provocar a reflexão do aluno quanto à solução.

- Solução: foi calculada a probabilidade de, no máximo, dois indivíduos votarem no candidato por causa do partido sem a necessidade de usar a relação entre eventos complementares.

- Análise didática: esperamos que o aluno perceba se cometeu algum erro ao explicar a solução.

d.2) Analise a seguinte igualdade: $P(X \leq 2) = 1 - P(X > 2)$. Ela é verdadeira?

- Objetivo: familiarizar o aluno com a linguagem simbólica da Probabilidade, ao mesmo tempo em que percebe a complementaridade dos eventos.

- Solução: sim.

- Análise didática: o aluno, aqui, deve entender a linguagem simbólica, saber que a soma de eventos complementares é 1 e que os eventos "$X \leq 2$" e "$X > 2$" são complementares. Esta atividade talvez propicie mudanças de registros – o aluno pode raciocinar transformando os registros da linguagem simbólica em registros da linguagem natural; a atividade também propicia a percepção dos eventos complementares envolvidos. Além de saber como verificar se a sentença é verdadeira (ela pode ser verdadeira ou falsa conforme os valores assumidos por $P(X \leq 2)$ e por $P(X > 2)$), o aluno deve saber quais elementos compõem o evento "$X \leq 2$" e quais compõem "$X > 2$".

d.3) O item ***d)*** pode ser resolvido utilizando a relação colocada em ***d.2)***? Por quê?

- Objetivo: provocar a reflexão do aluno sobre a não-utilidade de usar, neste caso, a relação entre eventos complementares.

- Solução: pode, mas a solução vai ser mais trabalhosa do que se a relação não for utilizada.

- Análise didática: o aluno deve saber trabalhar com eventos complementares. Foi escolhido, neste item, um exemplo no qual é mais trabalhoso calcular a probabilidade pedida usando a relação entre eventos complementares para tentar evitar que o aluno imagine que, sempre que houver o cálculo de eventos que em linguagem natural se traduzem por "no máximo", "pelo menos", "não mais que", etc., ele tenha que usar essa relação.

4) Um curso de treinamento profissional melhora a atuação dos funcionários de certa empresa em 75% dos casos. Se oito funcionários quaisquer participarem do curso, qual a probabilidade de:

a) 25% dos funcionários não melhorarem a atuação?

- Objetivo: aprofundar a distribuição binomial, apresentar novo contexto.

- Solução: $P(X = 2) = C_{8,2}.(0,25)^2.(0,75)^6 = 0,3115$.

- Análise didática: nesta questão, $n = 8$ e $p = 0,75$. O aluno precisa relacionar a porcentagem de funcionários que melhora a atuação com a probabilidade de um funcionário melhorar a atuação. Esta questão também torna possível que o aluno perceba que a determinação do "sucesso" e do "fracasso" depende da nossa escolha. O parâmetro informado é $p = 0,75$, correspondente à melhora da atuação do funcionário, mas a questão colocada versa sobre a não-melhora da mesma. É preciso ainda que o aluno associe os 25% dos funcionários que não melhoram a atuação ao número de sucessos. Em outras palavras, o aluno tem que perceber que "25% dos funcionários" é igual a "dois funcionários". Também são consideradas aqui as mudanças de registro da linguagem natural para a simbólica: transformar "25% dos funcionários" em "$X = 2$".

b) mais de 25% dos funcionários não melhorarem a atuação?

- Objetivo: familiarizar e aprofundar a distribuição binomial, apresentar novo contexto.

- Solução:

$$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1- [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)] =$$
$$= 1- [C_{8,0}.(0,25)^0.(0,75)^8 + C_{8,1}.(0,25)^1.(0,75)^7 + 0,3115] =$$
$$=1- [0,1001 + 0,2670 + 0,3115] = 1 - 0,6786 = 0,3214.$$

- Análise didática: o aluno deve transformar "mais de 25% dos funcionários" em "$X > 2$"; esperamos, também, que ele perceba que é menos trabalhoso usar o evento complementar ao pedido para resolver a questão.

c) menos de 25% dos funcionários não melhorarem a atuação?

- Objetivo: familiarizar e aprofundar a distribuição binomial, apresentar novo contexto.

- Solução: $P(X < 2) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0,1001 + 0,2670 = 0,3671$.

- Análise didática: o aluno deve transformar "menos de 25% dos funcionários" em "$X < 2$". Esperamos também que ele perceba que esse é mais um caso no qual não vale a pena usar o evento complementar ao pedido.

c.1) Some os resultados dos itens ***a)***, ***b)*** e ***c)***. O resultado deve ser 1. Por quê?

- Objetivo: provocar a reflexão do aluno quanto ao esgotamento do espaço amostral.

- Solução: 0,3115 + 0,3214 + 0,3671 = 1. Porque juntos eles esgotam o espaço amostral do experimento.

- Análise didática: esperamos destacar que os itens ***a)***, ***b)*** e ***c)***, juntos, esgotam o espaço amostral do experimento.

5) Certa marca de sabonete detém 28% do mercado consumidor de uma cidade. Uma marca concorrente perguntou a uma amostra de nove pessoas qual marca

consumia. Qual é a probabilidade de pelo menos duas das pessoas entrevistadas não consumirem o sabonete que detém 28% do mercado?

- Objetivo: familiarização e apresentação de novo contexto.

- Solução:

$$P(X \geq 2) = 1- P(X < 2) = 1- P(X \leq 1) = 1- [P(X = 0) + P(X = 1)] =$$
$$= 1- [C_{9,0}.(0,72)^0.(0,28)^9 + C_{9,1}.(0,72)^1.(0,28)^8] = 1- 0,000255 = 0,999745.$$

- Análise didática: esperamos que o aluno não use a árvore, e sim a fórmula, motivo pelo qual optamos por $n = 9$. Ele deve, ainda, perceber que 28% representa a probabilidade do sucesso (ou do fracasso, conforme sua opção) e transformar "pelo menos dois" em "$X \geq 2$". Esperamos que ele utilize a relação entre eventos complementares.

6) Pesquisas médicas indicam que 90% dos pacientes com gripe tomam antigripais para aliviar os sintomas da doença. Numa amostra de seis indivíduos gripados, qual é a probabilidade de, no máximo, um deles tomar antigripais?

- Objetivo: familiarização e apresentação de novo contexto.

- Solução:

$$P(X\leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = C_{6,0}.(0,90)^0.(0,10)^6 + C_{6,1}.(0,90)^1.(0,10)^5 =$$
$$= 0,00005.$$

- Análise didática: esperamos que o aluno não use a árvore, e sim a fórmula, motivo pelo qual optamos por $n = 6$. Ele deve ainda perceber que 90% representa a probabilidade do sucesso e transformar "no máximo um" em "$x \leq 1$". Esperamos que ele perceba que é mais trabalhoso resolver esta questão usando a relação entre eventos complementares.

Nossa expectativa é que com essas questões o aluno conheça e compreenda a distribuição binomial de probabilidades e se familiarize com ela, sendo capaz de

identificar situações nas quais ela pode ser usada. A análise dos resultados obtidos com a aplicação desta seqüência está nos itens 1.9 e 1.10 deste capítulo.

1.8. A Experimentação

A seqüência foi aplicada nos dias 03 e 04 de outubro de 2001 em dois horários: das 14h às 16h e das 16h às 18h. A aplicação foi feita em dois horários a pedido dos alunos, em função do horário de aulas: manhã ou noite.

No primeiro horário, compareceram quatro alunos, que formaram duas duplas (EW e RT). No segundo horário, compareceram seis alunos, formando três duplas (AR, FR e GR), sendo que, no segundo dia, um dos alunos da dupla GR faltou, ficando seu parceiro do dia anterior sozinho. Tivemos, então, um total de cinco duplas no primeiro dia e quatro duplas mais um aluno sozinho no segundo.

Além da pesquisadora, que era na ocasião professora deles, esteve presente nas sessões um observador, que os alunos não conheciam. Todas as sessões foram gravadas em áudio (havia um gravador para cada dupla) e também foram preenchidas fichas de observação pela pesquisadora e pelo observador. Havia uma ficha para cada sessão.

Os alunos fizeram, no primeiro dia, até a questão ***3b)*** inclusive e, no segundo, da ***3c)*** até o final da seqüência. O conteúdo da seqüência e as institucionalizações foram os mesmos nos dois horários.

Foram previstos tempos para que os alunos fizessem grupos de questões. Depois de cada grupo, eles exibiam e discutiam suas soluções durante aproximadamente cinco minutos e então a pesquisadora usava mais cinco minutos para institucionalizar alguma noção envolvida ali. Nem sempre os tempos previstos foram rigorosamente respeitados. Em alguns casos foi necessário dar um pouco mais de tempo aos alunos, em outros o debate pôde começar antes.

O Quadro 1 mostra os grupos de questões resolvidas, o tempo (em minutos) previsto para o trabalho dos alunos – excluindo os debates – e as noções institucionalizadas.

Grupo de questões	***Tempo***	***Noção institucionalizada***
Até ***1c)***	15	Uso da árvore.
1d)	10	Uso da árvore.
Até ***2b)***	20	Combinação e distribuição binomial.
Até ***3b)***	10	Uso da fórmula.
Até ***3c.3)***	10	Uso de eventos complementares.
Até ***3d.3)***	10	Uso de eventos complementares.
Até ***4c.1)***	20	Uso de eventos complementares e esgotamento do espaço amostral.
Até ***6)***	15	Ausência de institucionalização.

Quadro 1

Não houve debate ou institucionalização das duas últimas questões, pois percebemos que os alunos estavam muito cansados; resolvemos então encerrar as sessões. Duas das duplas (AR e FR) mostraram interesse em saber se acertaram, e uma delas (FR) fez comentários interessantes sobre contrato didático, que foram transcritos no item 3 deste capítulo.

1.9. Resultados da Experimentação

Apresentamos, neste item, a análise quantitativa dos resultados da experimentação.

O Quadro 2 mostra quais questões cada uma das duplas acertou (A), errou (E), deixou de fazer (NF) e não terminou (NT).

↓ *Questão / Dupla* →	*AR*	*EW*	*FR*	*GR*	*RT*
1a)	E	E	E	E	A
1b)	E	E	A	E	A
1c)	E	E	A	E	A
1d)	E	A	E	E	A
2a)	A	E	A	E	A
2b)	A	E	E	A	A
3a)	E	NT	A	A	A
3b)	E	NT	A	E	A
3c)	E	NT	A	E	A
3c.1)	E	NF	A	E	A
3c.2)	A	NF	A	A	A
3c.3)	NF	NF	A	NT	A
3d)	A	E	A	NT	A
3d.1)	A	E	A	A	A
3d.2)	NF	NT	A	A	A
3d.3)	NF	E	A	NF	E
4a)	A	E	A	A	A
4b)	A	NT	A	E	A
4c)	E	E	A	A	A
4c.1)	A	E	A	A	A
5)	E	E	E	E	A
6)	A	A	A	E	A

Quadro 2

AR acertou 41% das questões, errou 45% e não fez 14%; EW acertou 9% das questões, errou 54%, não fez 14% e não terminou 23%; FR acertou 82% das questões e errou 18%; GR acertou 36% das questões, errou 50%, não fez 5% e não terminou 9% e RT acertou 95% das questões e errou 5%.

O Quadro 3 mostra o índice de acerto, de erro, de questões que não foram feitas e que não foram terminadas:

↓ *Questão / Ocorrência* →	*Acerto*	*Erro*	*Não foi feita*	*Não foi terminada*
1a)	20%	80%	-	-
1b)	40%	60%	-	-
1c)	40%	60%	-	-
1d)	40%	60%	-	-
2a)	60 %	40%	-	-
2b)	60 %	40%	-	-
3a)	60 %	20%	-	20%
3b)	40%	40%	-	20%
3c)	40%	40%	-	20%
3c.1)	40%	40%	20%	-
3c.2)	80%	-	20%	-
3c.3)	40%	-	40%	20%
3d)	60 %	20%	-	20%
3d.1)	80%	20%	-	-
3d.2)	60 %	-	20%	20%
3d.3)	20%	40%	40%	-
4a)	80%	20%	-	-
4b)	60 %	20%	-	20%
4c)	60 %	40%	-	-
4c.1)	80%	20%	-	-
5)	20%	80%	-	-
6)	80%	20%	-	-

Quadro 3

Esses resultados são válidos apenas para esse grupo de alunos, uma vez que não foi feita uma amostragem seguindo as regras estatísticas. Porém, eles nos permitem algumas considerações sobre as questões da seqüência:

- todas as duplas fizeram a questão ***1a)***, mas apenas uma delas acertou. A questão mostra claramente, a nosso ver, o viés da equiprobabilidade;

- todas as duplas que fizeram as questões ***3c.2)*** e ***3d.2)*** acertaram. Elas tratam da relação entre eventos complementares. Isso nos leva a crer que os alunos têm adquirida essa relação. Por outro lado, as questões ***3c.3)*** e ***3d.3)***, que tratavam das ocasiões nas quais a relação pode ser usada, tiveram menor índice de acerto. Parece-nos que o uso da relação pode ser uma dificuldade para os alunos;

- a questão ***3d.1)*** teve 80% de acerto. Ela pedia que a solução de ***3d)*** fosse explicada. Consideramos que acertou a questão a dupla que explicou a solução de maneira coerente com o que havia feito em ***3.d)***, mesmo que a solução em si estivesse errada;

- acreditamos que a questão ***4a)*** teve 80% de acerto por pedir um número exato de sucessos: P(X = 2). Nossa análise qualitativa nos levou a crer que os alunos têm dificuldade em trabalhar com os termos "pelo menos", " no máximo", etc.;

- pelos 80% de acerto da questão ***4c.1)***, acreditamos que os alunos são capazes de perceber o esgotamento do espaço amostral, assunto tratado na questão.

1.10. Análise Qualitativa dos Resultados da Experimentação

1) Um professor pede a seus alunos que respondam a duas questões do tipo V ou F. Um dos alunos, Pedro, responde as questões ao acaso.

a) É mais provável que:

i) Pedro acerte as duas questões;

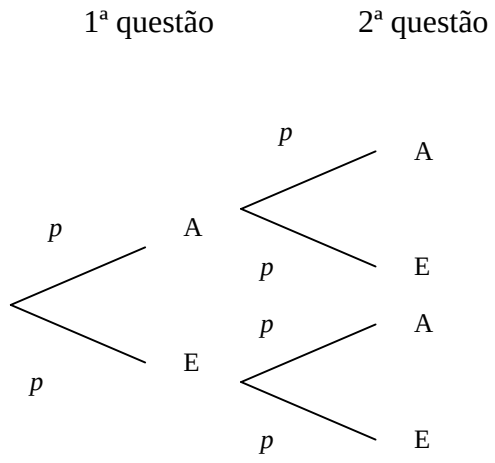
ii) Pedro erre as duas questões;

iii) Pedro acerte apenas uma das questões;

iv) as alternativas ***i)***, ***ii)*** e ***iii)*** são igualmente prováveis.

Apenas uma dupla (RT) acertou. Três duplas marcaram a alternativa ***iv)*** e GR não assinalou alternativa alguma. Esse resultado nos leva a crer que alguns alunos imaginam que os eventos AE e EA são iguais e devem ser considerados como uma possibilidade de resultado apenas.

b) Refaça o item ***a)*** utilizando a árvore de probabilidades abaixo.



A significa que Pedro acerta a questão.

E significa que Pedro erra a questão.

p deve ser substituído pelo valor da probabilidade correspondente ao ramo da árvore.

Somente uma dupla (FR) colocou os valores das probabilidades na árvore e escreveu as contas que fez; as outras apenas colocaram os valores das probabilidades na árvore.

c) Você manteve a resposta do item ***a)***? Por quê?

FR tinha errado o item ***a)*** e explicitou as contas feitas no ***b)***. Mudou a resposta, colocando então a alternativa correta. As duplas que erraram ***a)*** e não explicitaram as contas em ***b)*** mantiveram a resposta. Esses resultados nos levam a crer que a árvore de probabilidades possibilitou que FR percebesse que os eventos AE e EA eram diferentes.

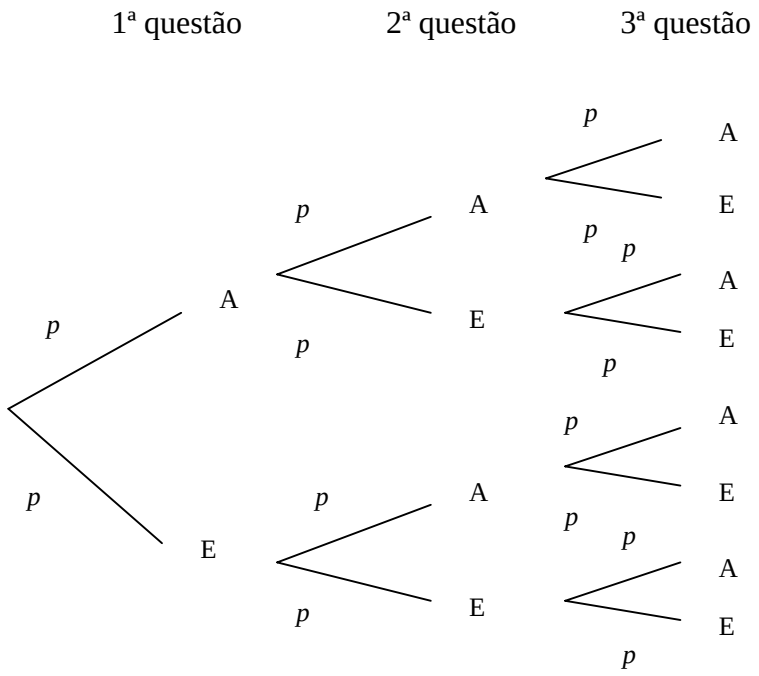
EW, que errou a questão, usou a árvore para responder o item ***a)***. A dupla teve dificuldade em perceber a independência das repetições do experimento e a não-equiprobabilidade dos eventos “acertar uma questão”, “acertar as duas questões” e “errar as duas questões”. Justificou a manutenção da resposta colocada em ***a)*** afirmando que “Pedro pode acertar as duas, acertar uma e errar a outra e errar as

duas”. Parece-nos que a dupla não percebeu que existem duas possibilidades de Pedro acertar uma das questões. Essa justificativa nos leva, ainda, a perceber que os vieses da representatividade e da disponibilidade estão presentes nesta dupla. Parece-nos que ela imagina que todos os resultados que citou representam igualmente a situação tratada (representatividade) e, também, que todos foram facilmente construídos em seu pensamento (disponibilidade).

RT acertou ***a)*** e manteve a resposta em ***c)***, mas sua justificativa não foi correta: “(...) existem apenas duas alternativas (*acertar ou errar a questão*); portanto, a chance de acerto ou de erro é de 50% cada”. Já GR e AR usaram a mesma justificativa para afirmar que a resposta correta era ***iv)***.

FR, a dupla que mudou a resposta, justificou: “(...) através da árvore, deduzimos que é mais provável que ele acerte apenas uma das questões”. Mas a dupla apresentou uma dificuldade no uso da árvore: só conseguiu calcular a probabilidade da união de eventos após intervenção da pesquisadora.

d) Se, ao invés de duas questões, fossem três, calcule a probabilidade de Pedro acertar duas, utilizando a árvore de probabilidades abaixo:



A significa que Pedro acerta a questão.

E significa que Pedro erra a questão.

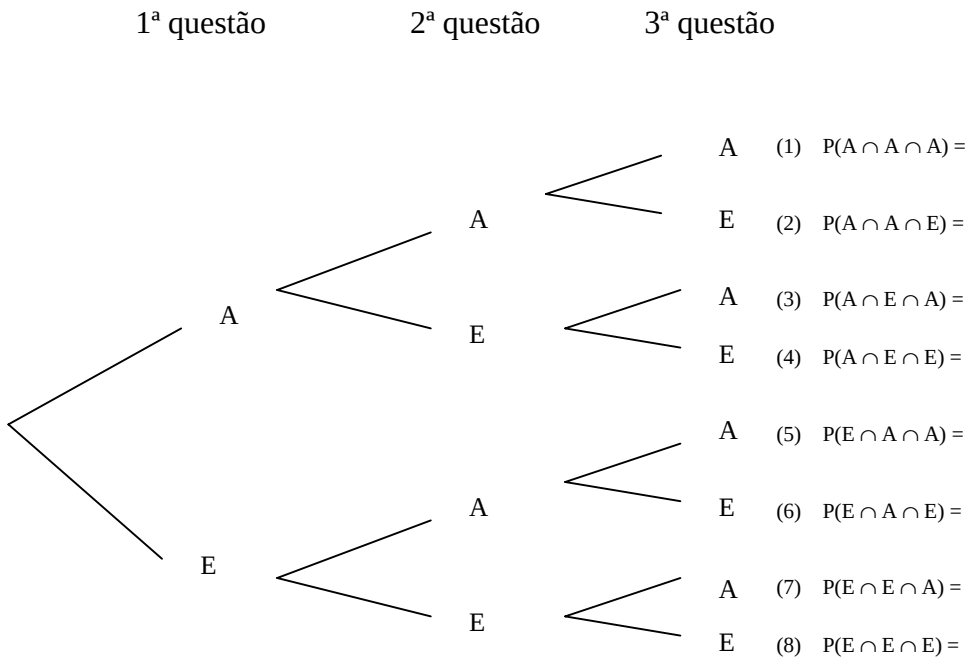
p deve ser substituído pelo valor da probabilidade correspondente ao ramo da árvore.

EW e GR acharam, no início, que a probabilidade de acerto era 1/3, pois agora havia três questões. Depois perceberam que a probabilidade continuava a ser 1/2.

Detectamos, nessa questão, um problema de enunciado: três duplas imaginaram que “acertar duas questões” era a mesma coisa que “acertar pelo menos duas questões”. GR errou por isso – considerou também o ramo AAA na árvore.

AR errou a questão, pois fez o seguinte cálculo: 1/2.1/2.1/2 = 1/6. Este erro – indicar multiplicação e realizar adição – já apareceu na seqüência piloto.

2) Em outro dia, o professor passa três questões aos alunos, porém cada uma delas tem quatro alternativas, sendo apenas uma correta. Complete a árvore de probabilidades abaixo.



a) Qual é a probabilidade de Pedro acertar uma questão, se ele as responde ao acaso?

EW errou pois usou $p = 1/3$.

As duplas perceberam, nessa questão, que os eventos elementares A e E não eram equiprováveis.

b) Qual é a probabilidade de Pedro acertar duas questões, se ele as responde ao acaso?

Percebemos, por meio da escrita, que as mudanças de registro da linguagem natural para a árvore, da árvore para o registro simbólico e deste para o numérico não foram realizados por apenas uma das duplas.

Essa questão foi usada para a institucionalização da distribuição binomial. EW usou $p = 1/3$ pois havia três questões, e durante a institucionalização percebeu que a determinação do valor de p vinha das quatro alternativas e não das três questões.

Mesmo durante a institucionalização da fórmula da distribuição binomial, foi difícil aos alunos perceberem que o número três da fórmula é o número de ramos que escolhemos na árvore. Eles achavam que era o número de repetições do experimento. Por um lado, pensamos que houve aqui um problema na escolha da variável didática "número de repetições do experimento", mas, por outro, serviu para que ficasse destacado que aquele número três representava a combinação de três elementos tomados dois a dois.

3) Uma pesquisa eleitoral revelou que 35% dos eleitores de uma cidade votam num candidato por causa do partido político ao qual ele pertence. Qual é a probabilidade de, numa amostra de cinco eleitores da cidade:

a) nenhum votar num candidato por causa do partido?

Houve, nessa questão, a manifestação de um contrato didático. EW falou: "a senhora falou que era para a usar a fórmula". Na verdade, durante a institucionalização, dissemos que a fórmula era uma outra maneira de resolver,

especialmente quando *n* fosse grande. EW e FR não se preocuparam em verificar se a fórmula podia ser usada, isto é, se o problema realmente era de distribuição binomial. Parece-nos que o pensamento das duplas era que se a pesquisadora (que era a professora deles) mostrou a fórmula, então era para usar a fórmula!

RT comentou que o valor de *p* é determinado de acordo com o que escolhemos para ser sucesso ou fracasso.

GR iniciou a solução fazendo 5.0,65, e, fazendo um esboço da árvore, percebeu que deveria fazer $(0,65)^5$. É a árvore ajudando, conforme prevíamos.

Não percebemos que os alunos tivessem tido problemas em associar "35% dos eleitores" à probabilidade do sucesso.

b) exatamente dois votarem num candidato por causa do partido?

No debate, GR comentou que é complicado fazer uma árvore "desse tamanho" e depois concluiu que a intenção é justamente que se deixe de usar a árvore.

Aqui encerrou-se a primeira sessão. Na segunda, G, da dupla GR, faltou , e pedimos que R continuasse a seqüência sozinho para que não interferisse nos relacionamentos já estabelecidos entre as duplas. Com isso, a análise de sua produção ficou prejudicada, pois ele não falava nem escrevia o que pensava, salvo em uma ou outra questão.

c) pelo menos um votar num candidato por causa do partido?

EW e AR não transformaram o registro "pelo menos um" no registro " $X \geq 1$".

RT usou a relação entre eventos complementares para resolver a questão. Isso nos surpreendeu, pois não imaginávamos que os alunos percebessem que podiam usá-la sem um trabalho específico.

c.1) Explique sua solução.

RT explicou sua solução dizendo que usou o fato de os eventos serem complementares; R e FR explicaram suas soluções de maneira coerente com o que tinham feito, o que não ocorreu com AR. Porém a questão não foi suficiente para que as duplas que erraram percebessem o erro que haviam cometido.

c.2) Analise a seguinte igualdade: $P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1)$. Ela é verdadeira?

Parece que AR percebeu a complementaridade dos eventos pois escreveu "$P_1 + \overline{P_1} = 1$". Afirmamos isso pois, nas aulas regulares, a pesquisadora, no papel de professora, utiliza a notação $\overline{A}$ para indicar o evento complementar ao evento A. Apesar disso, pudemos perceber, na dupla, uma dificuldade de Lógica Matemática misturada a uma manifestação de contrato didático: "sempre que tem um menos alguma coisa, são complementares", a dupla afirmou. Supôs então que a sentença era verdadeira para afirmar que era verdadeira, isto é, tomou o que era para ser verificado como verdadeiro e daí afirmou que era verdadeiro!

FR afirmou que a igualdade é verdadeira, mas verificou o resultado numericamente. Havia calculado $P(X \geq 1)$ e $P(X = 0)$ e disse que o resultado "batia". Levantamos aqui um problema de demonstração. Apesar de Girard (1997)[17] considerar dificuldades de Lógica Matemática como obstáculos matemáticos, não havíamos previsto que essa dificuldade aparecesse em nossa seqüência. É possível que essas dificuldades decorram da ausência de um trabalho específico com demonstração e com Lógica Matemática no Ensino Médio. Essa ausência pôde ser observada em livros didáticos destinados ao Ensino Médio, dentre os quais Bucchi (1998).

c.3) O item ***c)*** pode ser resolvido utilizando a relação colocada em ***c.2)***? Por quê?

Apenas FR percebeu que teria sido menos trabalhoso resolver ***c)*** usando a relação colocada em ***c.2)***.

[17] Capítulo III, 3.5

d) não mais que dois votarem num candidato por causa do partido?

EW identificou “não mais que dois” como “$X > 2$”.

d.1) Explique sua solução.

R, apesar de não ter feito o item anterior, explicou corretamente o que deveria fazer.

d.2) Analise a seguinte igualdade: $P(X \leq 2) = 1 - P(X > 2)$. Ela é verdadeira?

FR analisou e respondeu verificando os números, novamente. R escreveu que sim, pois “P(0,1,2) = 1- P(3,4,5)”. Parece-nos que ele percebeu a complementaridade dos eventos.

EW apresentou dificuldade em relacionar os símbolos “<”, “>”, etc. com “no máximo”, “não mais que”, etc. e também no sentido inverso. São dificuldades em transformar o registro da linguagem natural em simbólica e vice-versa.

d.3) O item ***d)*** pode ser resolvido utilizando a relação colocada em ***d.2)***? Por quê?

Apenas FR percebeu que seria mais trabalhoso resolver ***d)*** usando a relação entre eventos complementares. Na institucionalização, R, da dupla FR, comentou: “sempre que o maior ou igual for menor que a metade (*do número de repetições do experimento*), vale (*a pena usar a relação dos eventos complementares*); sempre que o menor ou igual for maior que a metade, vale”. Foi o único aluno que, explicitamente, se preocupou em entender a importância de se usar a relação.

Parece que RT não percebeu que não deveria calcular usando a relação entre eventos complementares. No debate, disse que não usou o complementar do evento pedido, pois já havia calculado $P(X = 0)$ e $P(X = 2)$, então só faltava calcular $P(X = 1)$ e somar.

Isso nos alertou para o fato de que talvez tivesse sido mais produtivo escolher um número de sucessos sobre os quais nenhum valor já tivesse sido calculado numa

questão anterior, para que isso não interferisse na percepção da utilidade do uso da relação entre eventos complementares.

4) Um curso de treinamento profissional melhora a atuação dos funcionários de certa empresa em 75% dos casos. Se oito funcionários quaisquer participarem do curso, qual a probabilidade de:

a) 25% dos funcionários não melhorarem a atuação?

RT e EW fizeram um esboço da árvore para começar.

FR usou como sucesso "melhorar a atuação" ao invés de "não melhorar a atuação", que era o pedido na questão. Por esse motivo, teve dificuldade em transformar os dados.

Os alunos não tiveram problemas em associar "75% dos casos" à probabilidade de sucesso, nem "25% dos funcionários" à "$X = 2$".

b) mais de 25% dos funcionários não melhorarem a atuação?

AR e RT usaram a relação entre eventos complementares, e RT comentou que por isso fez o item ***c)*** antes do ***b)***. EW chegou a discutir se seria interessante usar a relação entre eventos complementares, mas não o fez. R calculou "exatamente 25% não melhorarem" ao invés de "mais de 25% melhorarem".

c) menos de 25% dos funcionários não melhorarem a atuação?

AR errou essa questão pois calculou $P(X \leq 2)$ ao invés de $P(X < 2)$.

Três duplas explicitaram, pela escrita simbólica, que não usaram a relação entre eventos complementares nessa questão. Esse fato nos leva a crer que elas perceberam a não-utilidade da relação neste caso.

c.1) Some os resultados dos itens ***a)***, ***b)*** e ***c)***. O resultado deve ser 1. Por quê?

Todas as duplas acertaram a questão e perceberam o esgotamento do espaço amostral, exceto EW, que não a fez. R percebeu, nesse item, que havia errado o item ***b)***, pois, com os valores que tinha, a soma não resultava 1. Ele, então, retornou ao item ***b)*** e explicou como devia fazer para chegar ao resultado correto.

Nas questões ***5)*** e ***6)***, como não haveria debate nem institucionalização, pedimos que as duplas explicassem suas soluções por escrito.

5) Certa marca de sabonete detém 28% do mercado consumidor de uma cidade. Uma marca concorrente perguntou a uma amostra de nove pessoas qual marca consumia. Qual é a probabilidade de pelo menos duas das pessoas entrevistadas não consumirem o sabonete que detém 28% do mercado?

As duplas não tiveram dificuldade em perceber que "28% do mercado consumidor" lhes traria uma informação sobre a probabilidade de sucesso.

Nenhuma das duplas usou árvore de probabilidades. Todas usaram a fórmula. Insistimos, no entanto, em comentar que não foi feita nenhuma verificação para saber se a fórmula podia ser usada; creditamos então o uso da fórmula ao contrato didático e não ao real domínio da distribuição binomial.

RT solucionou utilizando a relação entre eventos complementares. A dupla não usou a linguagem simbólica do modo como foi feito durante as institucionalizações. Por exemplo, representa $P(X = 1)$ por $P_{(1)}$; $P(X \leq 1)$ por $P_{(0 \text{ e } 1)}$.

EW realmente apresentou dificuldade em transformar "no máximo" em "≤", "no mínimo" em "≥"; nesta questão, calculou $P(X \leq 2)$. Confundiu o valor de p, usando $p = 0{,}28$, onde deveria usar $p = 0{,}72$, uma vez que escolheu como sucesso "não consumir o sabonete".

FR errou, pois calculou $P(X = 2)$; R e AR erraram, pois calcularam $P(X \leq 2)$.

6) Pesquisas médicas indicam que 90% dos pacientes com gripe tomam antigripais para aliviar os sintomas da doença. Numa amostra de seis indivíduos gripados, qual é a probabilidade de, no máximo, um deles tomar antigripais?

RT calculou inicialmente a probabilidade de "no mínimo um tomar antigripais"; percebeu o erro e refez, corretamente.

R errou, pois calculou $1 - P(X = 1)$ ao invés de $P(X = 0) + P(X = 1)$. Não explicou a solução.

Pudemos perceber que os alunos não tiveram dificuldades em associar "90% dos pacientes" à probabilidade do sucesso e que quatro das duplas notaram que não era útil usar a relação entre eventos complementares.

Apesar do pedido às duplas para que explicassem suas soluções por escrito nas questões ***5)*** e ***6)***, pouca coisa foi escrita, o que dificultou nossa análise.

2. O Pós-teste

Para completar o ciclo da dialética ferramenta-objeto, foi realizado um pós-teste sobre a distribuição binomial, num contexto diferente dos trabalhados na seqüência.

O pós-teste foi realizado três semanas após a aplicação da seqüência didática, fora dos horários regulares de aula. Foi feito individualmente e sem consulta, e foi permitido o uso de calculadora. O pós-teste não foi gravado em áudio e foi observado apenas pela pesquisadora. Um dos alunos que participou da seqüência (R, aquele que foi "abandonado" por seu parceiro na segunda sessão) não fez o pós-teste. Portanto, oito alunos realizaram o pós-teste.

Os alunos receberam uma folha com o pós-teste impresso, resolveram na própria folha e devolveram-na quando terminaram. O pós-teste devia ser feito em, no máximo, vinte minutos. Todos devolveram a folha antes desse prazo, não tendo necessariamente terminado o pós-teste.

2.1. Análise a Priori do Pós-teste

Para fazer uma viagem, você pode escolher um entre dois aviões. O avião A é equipado com dois motores, e a probabilidade de cada um dos motores falhar é 0,01. O avião B é equipado com quatro motores, e a probabilidade de cada um dos motores falhar é 0,04. Os motores funcionam de maneira independente e os aviões completam a viagem com segurança se pelo menos metade dos motores funcionar. Qual avião você vai escolher para fazer a viagem?

- Objetivo: verificar se o aluno identifica as variáveis binomiais, utiliza a fórmula para a solução, associa e transforma corretamente "pelo menos metade dos motores funcionar".

- Solução:

Sejam X: número de motores do avião A que falham e Y: número de motores do avião B que falham.

A probabilidade de o avião A não completar a viagem com segurança é:

$$P(X = 2) = C_{2,2}.(0,01)^2.(0,99)^0 = 0,0001$$

A probabilidade de o avião B não completar a viagem com segurança é:

$$P(Y \geq 3) = P(Y = 3) + P(Y = 4) =$$
$$= C_{4,3}.(0,04)^3.(0,96)^1 + C_{4,4}.(0,04)^4.(0,96)^0 = 0,00025$$

Devemos escolher o avião A.

- Análise didática: neste problema, o aluno deve comparar probabilidades entre duas variáveis aleatórias binomiais: uma delas, relativa ao avião A, com $n = 2$ e $p = 0,01$; a outra, do avião B, com $n = 4$ e $p = 0,04$. Essa comparação é um elemento novo para o aluno. Este pós-teste encerra o ciclo da dialética ferramenta-objeto, assumindo o papel do novo problema[18]. O aluno deve associar "pelo menos

[18] Capítulo I, 4.2

metade dos motores funcionar" à ocorrência de dois sucessos no avião A e à de três ou quatro no B.

A seguir, nossas conclusões sobre o desempenho dos alunos no pós-teste.

2.2. Análise dos Resultados do Pós-teste

Nenhum dos oito alunos acertou o pós-teste. Parece-nos que o problema não foi o novo elemento introduzido, isto é, a comparação entre as variáveis, pois todos fizeram cálculos separados para os aviões A e B e cinco deles optaram por um dos aviões.

Cinco alunos tentaram resolver utilizando uma árvore de probabilidades. Desses, quatro montaram árvores erradas, que não ligavam o funcionamento dos motores entre si. Um aluno montou a árvore corretamente, mas errou porque, no avião B, considerou os ramos correspondentes a pelo menos metade dos motores falhar, ao invés de funcionar. Parece que os alunos não se desligaram da árvore, preferindo-a à fórmula.

Um dos alunos que procurou fazer pela árvore, tentou também pela fórmula, mas não identificou os valores de x, n e p.

Três alunos usaram diretamente a fórmula. Um errou, pois considerou que os aviões não completariam a viagem somente se nenhum dos motores funcionasse; outro, porque não identificou corretamente x, n e p; o último, porque, ao invés de considerar "pelo menos metade dos motores funcionar", considerou "mais da metade dos motores funcionar".

Continuaram a aparecer aqui dois fenômenos que já apareceram durante a seqüência: a ausência de linguagem simbólica e problemas em relacionar "pelo menos", "no máximo" , etc. com "≥", "≤" , etc.

3. Conclusões

Detectamos, na análise dos resultados da seqüência, algumas dificuldades matemáticas: Para EW, qualquer número elevado a zero era zero; não sabia quanto valia 0!; escreveu que 5!/5! = 0; apresentou dificuldade em trabalhar com porcentagem; na institucionalização de certa questão, um dos integrantes de AR disse: "eu prefiro fazer 3/64 + 3/64 +3/64 ao invés de 3.3/64". Apareceu uma dificuldade de Lógica Matemática: FR achava que, no contexto da questão ***3c.2)***, se $X = 1$ fosse válido, necessariamente $X \geq 1$ também seria.

Apesar de termos institucionalizado as notações $P(X = x)$, $P(X > x)$, $P(X < x)$, $P(X \geq x)$ e $P(X \leq x)$, os alunos não as usaram. Alguns escreveram apenas P; outros, nada; RT utilizou $P_{(ñ + q\ 2)}$ para indicar $P(X \leq 2)$. Poucos alunos empregaram as notações da maneira como foram institucionalizadas e mesmo assim não o fizeram em todas as questões.

Parece-nos que a influência do contrato didático é muito mais forte do que imaginávamos. Nada adiantou deixar claro que a atuação dos alunos na seqüência não influenciaria a professora, pois eles agiam como alunos da pesquisadora. Por exemplo, no início, quando eles percebiam que erravam, apagavam. Pedíamos que eles não fizessem isso, que eles deixassem tudo na folha, que escrevessem no verso se fosse necessário, mas o argumento era: "E se fosse prova, professora?". Outro exemplo: depois de institucionalizada a distribuição binomial, eles a empregavam sem verificar se a variável da questão permitia o uso. Afinal, se a "professora" deu a fórmula, ela deve ser utilizada.

Após o término da seqüência, FR percebeu que errou a questão ***5)*** porque não considerou que o pedido era a probabilidade de "pelo menos duas pessoas". Calculou a probabilidade de "duas pessoas". Transcrevemos aqui a justificativa da dupla:

R: "Porque, quando você está lendo o enunciado, você não se preocupa muito assim exatamente com o que ele está dizendo, você quer ir buscar os dados, o que tem na fórmula, entendeu, você quer achar o *p*, quer achar o *x* e quer achar o *n*. Então, no que você vê ali duas pessoas, você já joga direto no *p* (sic), você passa reto pelo pelo menos, na verdade é um dado do exercício mas não é um número."

F: “(*já joga direto*) no *p* não, no *x*.”

R: “É, no *x*.”

R: “ (...) o pelo menos é um dado, na verdade o *x* é maior ou igual a dois, mas no que você vê o número dois, você já vai para o número.”

F: “Você coloca o sucesso igual àquele número.”

R: “No que você está buscando os dados, você vê lá 28%, o nove pessoas e o duas pessoas...”

F: “ E esquece do pelo menos.”

R: “É, e passa reto.”

Parece-nos que essa foi uma forte manifestação de um contrato didático que diz que, num exercício de Matemática, os dados são números, todos os números dados têm que ser utilizados. O “pelo menos”, que não é um número, não foi usado.

No próximo capítulo, apresentamos as conclusões finais do nosso trabalho.

CAPÍTULO VI

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste capítulo final, apresentamos as conclusões às quais pudemos chegar, relacionando os resultados da experimentação com os fundamentos que utilizamos para elaborar nossa seqüência didática. Procuramos responder às nossas questões de pesquisa e deixamos, também, algumas sugestões de temas para novos trabalhos.

1. Os Resultados da Experimentação em relação aos Fundamentos da Pesquisa

No Capítulo I, discutimos alguns constructos da Didática da Matemática, nos quais nos baseamos, em parte, para elaborar nossa seqüência. Dentre eles, destacamos a dialética ferramenta-objeto, o contrato didático, a linguagem e os registros de representação.

No Capítulo III, fizemos um breve panorama de pesquisas já realizadas sobre ensino-aprendizagem de Probabilidade, e ali destacamos alguns resultados, dentre eles os relativos à equiprobabilidade, às dificuldades matemáticas e com o vocabulário e ao uso da árvore de probabilidades na introdução da distribuição binomial. Esses resultados também fundamentaram nossa seqüência.

Neste capítulo final, relacionamos as conclusões de nossa pesquisa aos constructos e aos resultados das pesquisas citados.

Os alunos apresentam dificuldades em transformar os registros da linguagem natural que envolvem eventos compostos em registros da linguagem simbólica. “Pelo menos”, “não mais que”, etc. não são sempre transformados em, respectivamente, “≥”, “≤”, etc. Tanto na seqüência didática como no pós-teste, houve alunos que não conseguiram fazer essas transformações. Notamos que o mesmo não ocorre com um evento simples, por exemplo “exatamente”. Parece que esse registro é naturalmente convertido em “=”. Acreditamos que os alunos não coordenaram a conversão entre os registros que envolvem eventos compostos, de acordo com Duval (1993), que comenta que essa coordenação não se dá de modo espontâneo na maioria dos alunos. Percebemos que aqui existe, ainda, uma outra dificuldade levantada por Duval

(1995c), que é o fato de essa conversão se dar especificamente entre as linguagens natural e simbólica. Maury (1984) e Coutinho (1994) também observaram dificuldades dos alunos no uso do vocabulário próprio da Probabilidade, o que nos parece ter sido confirmado aqui.

Girard (1997) destacou uma série de dificuldades dos alunos, entre as quais as que denominou obstáculos matemáticos. Nossos resultados mostraram várias dificuldades matemáticas: cálculos, fatorial, lógica e operações matemáticas com porcentagem.

Particularmente sobre porcentagem, percebemos um fato que se assemelha ao observado por Figueiredo (2000): os alunos têm dificuldades em operar com porcentagens; no entanto, a identificação da porcentagem como probabilidade ocorre mais facilmente do que de outras maneiras. Por exemplo, nas questões ***1d)*** e ***2)*** da nossa seqüência, a identificação da probabilidade do sucesso se dava pelas informações do enunciado, que nada tinham de porcentagem. Alguns alunos apresentaram dificuldades em identificar essas probabilidades. Já nas questões ***3)***, ***4)***, ***5)*** e ***6)***, nas quais eram dadas porcentagens que representavam probabilidades, a identificação ocorreu sem dificuldades.

Notamos, ainda, outro fato semelhante ao observado por Figueiredo (2000): de modo geral, os alunos não usaram a linguagem simbólica para indicar o que calculavam e os resultados a que chegavam. Os que o fizeram , usaram uma notação própria – por exemplo, a probabilidade de um sucesso era indicada por $P_{(1)}$ ao invés de $P(X = 1)$, que foi inclusive institucionalizada durante a realização da seqüência.

Conforme Dantal e Raymondaud (1997) escreveram, os enunciados dos problemas propostos aos alunos podem ser fontes de dificuldades, se não forem precisos. Em nossa seqüência, utilizamos, em algumas questões, a escrita “calcule a probabilidade de ocorrer dois sucessos”. Alguns alunos pensaram que, caso ocorressem três sucessos, teriam ocorrido dois e, por esse motivo, achavam que deviam calcular a probabilidade de dois sucessos ou mais. Explicamos aos alunos que, em nossa seqüência, “dois sucessos” devia ser considerado como “exatamente

dois sucessos” e então a dificuldade foi contornada. Pensamos, no entanto, que os enunciados dessas questões poderiam ter sido escritos de modo a evitar essa dificuldade.

No início da seqüência, mais especificamente na questão ***1)***, verificamos que alguns alunos apresentaram o viés da equiprobabilidade. Como só havia as possibilidades de Pedro acertar ou errar, a probabilidade de acerto era 1/2 e a de erro também. Na questão ***2)***, continuavam existindo as mesmas possibilidades, porém a probabilidade de acerto era 1/4 e a de erro, 3/4. Pelos protocolos dos alunos, pudemos perceber que essa questão foi suficiente para contornar o viés da equiprobabilidade.

Quanto ao uso da árvore de probabilidades, consideramos que, em parte, ela cumpriu seu papel. Alguns alunos a utilizaram, ou pelo menos um esboço dela, até mesmo no pós-teste. Assim, concordamos com Parzysz (1993) sobre a utilidade da árvore como ferramenta explícita na resolução de problemas de Probabilidade, de modo geral, e, particularmente, de distribuição binomial. Por outro lado, o uso da árvore até o pós-teste nos indicou que pode ter ocorrido um fato sobre o qual Parzysz (1993) alertou: a não-ultrapassagem, pelos alunos, do estágio “material” da construção da árvore.

Em nossa seqüência, destacamos a utilidade (ou não) do uso da relação entre eventos complementares ($P(A) + P(\overline{A}) = 1$) na resolução de algumas questões. Notamos, pelos protocolos dos alunos, que eles já tinham adquirido a relação em si, mas não as situações nas quais seria útil usá-la. Consideramos que nossa seqüência foi suficiente para esclarecer esse ponto, uma vez que, ao longo dela, o uso da relação foi acontecendo de maneira cada vez mais apropriada. A primeira questão que poderia ser resolvida usando a relação era a ***3c)*** e apenas uma dupla a utilizou. Conforme as duplas foram fazendo as questões seguintes, que objetivavam a percepção da utilidade do uso da relação, foram percebendo que, na situação colocada, era útil usar a relação. Nas questões posteriores, nas quais o tema aparecia - ***3d)*** até ***3d.3)***, ***4b)***, ***4c)***, ***5)*** e ***6)*** – notamos, pelo uso que da relação que fizeram, que os alunos iam percebendo as situações nas quais ela era útil e nas quais não era.

Finalmente, a análise dos resultados nos mostrou que o contrato didático é muito mais forte do que havíamos suposto. Previmos que haveria uma ruptura do contrato vigente pela própria realização da seqüência, que é uma atividade à qual o grupo de alunos presente não estava acostumado. Mas isso não bastou para romper com um conjunto maior de relações entre os alunos, a professora e o saber. Após a institucionalização da fórmula da distribuição binomial, os alunos não verificaram, em nenhuma das questões da seqüência, se o problema podia ser resolvido pela fórmula. Afinal, se a "professora ensinou" a fórmula, ela deve ser usada! Alguns alunos chegaram a fazer esboços de árvores, mas acabaram sempre "encaixando" os dados do problema na fórmula. Retomamos aqui algumas falas de alunos para exemplificar um pouco mais essa ausência de rompimento do contrato:

- quando a pesquisadora pediu que nada do que tivesse sido escrito na folha que seria entregue fosse apagado, um aluno falou: " e se fosse prova, professora?";

- enquanto resolvia a questão ***3c.2)***, que tratava da relação entre eventos complementares, uma aluna comentou: "sempre que tem um menos alguma coisa, são complementares";

- na questão ***3)***, que era a primeira após a institucionalização da fórmula da distribuição binomial, uma aluna disse: "a senhora falou que era para usar a fórmula";

- conversando com a pesquisadora, após a realização da seqüência, um aluno percebeu um erro que havia cometido e argumentou: "porque quando você está lendo o enunciado, você não se preocupa muito assim exatamente com o que ele está dizendo, você quer ir buscar os dados, o que tem na fórmula, entendeu, você quer achar o *p*, quer achar o *x* e quer achar o *n*. Então no que você vê ali duas pessoas, você já joga direto no *p* (sic), você passa reto pelo pelo menos, na verdade é um dado do exercício mas não é um número".

2. Respostas às Questões da Pesquisa

Na problemática desta pesquisa[19] elaboramos algumas questões sobre o ensino-aprendizagem da distribuição binomial. Vamos agora respondê-las.

Questionamos se os alunos dominavam os conceitos probabilísticos necessários para o desenvolvimento de um trabalho com a distribuição binomial. Percebemos que nem todos os alunos dominavam todos os conceitos necessários, apesar de esses conceitos já haverem sido trabalhados antes da realização da seqüência, em aulas regulares da disciplina Estatística I. Alguns alunos tiveram dificuldade em perceber a independência entre repetições de experimentos aleatórios, outros em calcular a probabilidade da união de eventos por meio da árvore de probabilidades, outros, ainda, na própria construção da árvore.

Perguntamos também se falhas anteriores interfeririam no trabalho com a distribuição binomial. Concluímos que sim, pois as falhas citadas dificultaram a solução de questões da seqüência e, pelo menos naquele momento, aspectos da distribuição binomial passaram despercebidos.

Pensamos se um trabalho que procurasse minimizar essas falhas seria suficiente para promover a compreensão da distribuição binomial. Após a análise dos resultados, ficou claro para nós que a distribuição binomial tem peculiaridades que são fontes de dificuldades para os alunos, confirmando que é necessário um trabalho específico sobre esse conteúdo, além daquele que procura minimizar falhas anteriores.

Finalmente, nossa principal questão era: será que uma seqüência didática que se utiliza da dialética ferramenta-objeto, de mais de um registro de representação, da ruptura do contrato didático vigente e considera ainda as já conhecidas dificuldades dos alunos é suficiente para que eles compreendam e utilizem corretamente a distribuição binomial de probabilidades?

[19] Capítulo I, 2.

Os alunos realizaram a seqüência, mas nem todos apreenderam o conteúdo.

A análise dos resultados do pós-teste mostrou que alguns alunos tentaram resolver o problema usando uma árvore de probabilidades. Esses alunos talvez não tenham percebido que as variáveis envolvidas eram binomiais. Não fizeram menção a nada que nos fizesse imaginar o contrário. Além disso, pode ser que eles não tenham ultrapassado o estágio da construção da árvore de probabilidades.

A maioria dos alunos que usou a árvore no pós-teste construiu uma que não favorecia a solução do problema. Parece-nos, então, que o trabalho conduzido sobre árvores de probabilidade na seqüência não foi suficiente.

Os alunos que utilizaram a fórmula da distribuição binomial no pós-teste não identificaram os valores de n, p ou x ou não transformaram "pelo menos metade" em "$\geq$".

Também, por meio do pós-teste, percebemos que a dificuldade em utilizar a linguagem simbólica para indicar cálculos e resultados permaneceu nos alunos. Talvez essas dificuldades pudessem ser minimizadas se, no Ensino Médio, fosse realizado um trabalho que envolvesse a interpretação de textos e as transformações entre as linguagens natural e simbólica. A observação de alguns livros didáticos destinados ao Ensino Médio, dentre eles Bucchi (1998), revelou que esse tipo de trabalho não foi feito.

Assim, concluímos que, apesar do trabalho desenvolvido sobre uma seqüência que se baseou na dialética ferramenta-objeto, em mais de um registro de representação e em algumas dificuldades já previstas dos alunos, ele não bastou para a compreensão da distribuição binomial.

Talvez uma seqüência que tivesse a mesma fundamentação que a elaborada neste trabalho, que pudesse, no entanto, ser realizada em um número maior de sessões, melhorasse a compreensão do conteúdo. Com mais sessões, poder-se-ia enfocar mais:

- a construção e o uso da árvore de probabilidades como ferramenta explícita de resolução de problemas de Probabilidade;

- as conversões entre os registros das linguagens natural e simbólica, especialmente aqueles que envolvem eventos compostos;

- as conversões entre os registros da árvore de probabilidades e da fórmula da distribuição binomial.

3. Sugestões de Novos Trabalhos

Durante o desenvolvimento do nosso trabalho, surgiram algumas questões que se relacionavam com nosso tema, porém não puderam ser aqui tratadas. Colocamos essas questões como sugestões para outros trabalhos.

- No que diz respeito às aproximações entre a distribuição binomial e outras distribuições de probabilidade (hipergeométrica, de Poisson e normal), levantamos as seguintes questões: que dificuldades o aluno pode ter em decidir quando usar a distribuição teoricamente correta ou uma aproximação? Como minimizar essas dificuldades, possibilitando que o aluno tome esse tipo de decisão?

- Em relação às outras distribuições de probabilidades comentadas neste trabalho, quais são as dificuldades no ensino-aprendizagem em cada uma delas? A distribuição hipergeométrica, por exemplo, é um "quebra-cabeças" de combinações; a de Poisson envolve expoente negativo; a normal, além de tratar do conceito estatístico de variável contínua, envolve a associação entre área e probabilidade, Cálculo Integral, etc.

- Segundo Girard (1997), algumas dificuldades que aparecem no ensino-aprendizagem de Probabilidade devem-se ao fato de que o acaso é mais difícil de apreender do que, por exemplo, a Geometria. Para o autor, essa pode ser uma causa de o desenvolvimento da Geometria ter se dado antes do da Probabilidade. Por outro lado, pensamos que a Geometria foi necessária na vida cotidiana das

pessoas antes da Probabilidade, razão pela qual talvez aquela tenha se desenvolvido antes desta. Será efetivamente o acaso mais difícil de apreender que a Geometria? Podem paralelos ser traçados entre acaso e Geometria? Por que a Geometria desenvolveu-se antes da Probabilidade? Será por uma das causas citadas, será por outras?

- Sobre a árvore de probabilidades e seu uso, quais as dificuldades dos alunos na montagem de uma árvore? Que tipo de atividade pode minimizar as dificuldades encontradas? Que dificuldades aparecem nas conversões de linguagens (da natural para a simbólica e vice-versa) na árvore de probabilidades? Como trabalhar com essas dificuldades?

- Em relação à própria distribuição binomial, será que uma seqüência que tivesse os mesmos fundamentos da elaborada neste trabalho, mas que fosse realizada em um número maior de sessões, podendo, com isso, trabalhar mais com construção e uso de árvore de probabilidades e com conversões de registros, especialmente entre linguagens natural e simbólica e entre árvore e fórmula, melhoraria a compreensão do conteúdo pelos alunos?

Finalmente, uma palavra aos professores que, ao final da leitura deste trabalho, pensam em como aplicar a seqüência didática apresentada em suas aulas: dispondo de uma sessão de 100 minutos, é possível aplicar as questões ***1)*** e ***2)***, que apresentam a distribuição binomial e relacionam a ela o uso da árvore de probabilidades; a partir da questão ***3)***, quando a seqüência passa a aprofundar o conteúdo e a familiarizá-lo com o aluno, cada professor pode escolher, de acordo com sua programação, as questões que julgar mais convenientes.

BIBLIOGRAFIA

[1] ARTIGUE, Michèle. 1990. Épistémologie et didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol. 10, nº 23, pp.241-286.

[2] BARBETTA, Pedro Alberto. 1999. *Estatística aplicada às ciências sociais*. 3ª edição, Florianópolis, Editora da UFSC.

[3] BERNABÉU, Carmen Batanero. 1999. *Didáctica de la probabilidad y estadística*. Unicamp.

[4] BROUSSEAU, Guy. 1983. Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol. 4, nº 2, pp. 165-198.

[5] BUCCHI, Paulo. 1998. *Curso prático de matemática*. 1ª edição, São Paulo, Editora Moderna.

[6] BUSSAB, Wilton O., MORETTIN, Pedro A. 1987. *Estatística básica*. 4ª edição, São Paulo, Atual Editora.

[7] CASTRUCCI, Benedito. 1981. *Elementos de teoria dos conjuntos*. 10ª edição, São Paulo, G.E.E.M.

[8] COUTINHO, Cileda de Queiroz e Silva. 1994. *Introdução ao conceito de probabilidade por uma visão freqüentista*. Dissertação de mestrado, PUC/SP.

[9] DANTAL, Bernard. 1997.Comment les élèves de terminale perçoivent les concepts d'expérience aléatoire, d'événement et de probabilité. In: IREM de Reims. *Enseigner les probabilités au lycée*. Reims, IREM de Reims, pp. 67-69.

[10] _____. 1997. Variables aléatoires et lois: utilisation de l'analyse en probabilités. In: IREM de Reims. *Enseigner les probabilités au lycée.* Reims, IREM de Reims, pp. 293-306.

[11] DANTAL, Bernard, RAYMONDAUD, Hubert. 1997. Analyse d'activités d'introduction et de sujets de baccalauréat. In: IREM de Reims. *Enseigner les probabilités au lycée.* Reims, IREM de Reims, pp. 383-404.

[12] DOUADY, Régine . 1986. Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol. 7, nº 2, pp. 5-31.

[13] DUVAL, Raymond. 1993. Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives.* Vol. 5, pp. 37-65.

[14] _____.1995c. *Sémiosis et pensée humaine.* Berne, Peter Lang.

[15] FARIA, João Pedro. 2000. Painel – A Estatística no currículo. In: LOUREIRO, Cristina, OLIVEIRA, Fernanda e BRUNHEIRA, Lina (orgs). *Ensino e aprendizagem da Estatística.* Lisboa, Sociedade Portuguesa de Estatística, pp. 64-67.

[16] FELLER, William. 1976. *Introdução à teoria das probabilidades e suas aplicações*. São Paulo, Edgard Blücher.

[17] FIGUEIREDO, Auriluci de Carvalho. 2000. *Probabilidade condicional: um enfoque de seu ensino-aprendizagem.* Dissertação de mestrado, PUC/SP.

[18] GIRARD, Jean-Claude. 1997. Quelques hypothèses sur les difficultés rencontrées dans l'enseignement des probabilités. In: IREM de Reims. *Enseigner les probabilités au lycée.* Reims, IREM de Reims, pp. 215-223.

[19] GODINO, Juan Díaz, BERNABÉU, Maria del Carmen Batanero, CASTELLANOS, Maria Jesus. 1996. *Azar y probabilidad.* Madrid, Editorial Sintesis.

[20] GRANGÉ, Jean-Pierre. 1997. Probabilité conditionelle et indépendance In: IREM de Reims. *Enseigner les probabilités au lycée*. Reims, IREM de Reims, pp. 339-374.

[21] HENRY, Annie, HENRY, Michel. 1992. L'enseignement des probabilités dans le programme de première. *Repères – IREM*, nº 6, pp. 27-52.

[22] HENRY, Michel. 1994. L'enseignement du calcul des probabilités dans le second degré. *Repères – IREM*, nº 14, pp. 69-104.

[23] LECOUTRE, Marie-Paule, FISCHBEIN, Efraïm. 1998. Évolution avec l'âge de "misconceptions" dans les intuitions probabilistes en France et en Israël. *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol.18, nº3, pp. 311-332.

[24] LEÓN, Nelly. 1998. Explorando las nociones básicas de probabilidad a nivel superior. *Paradigma*, Vol.19, nº 2, pp. 125-143.

[25] MAURY, Sylvette. 1984. La quantification des probabilités: analyse des arguments utilisés par les élèves de classe de seconde. *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol. 5, nº 2, pp. 187-214.

[26] MEYER, Paul L. 1983. *Probabilidade - aplicações à Estatística*. 2ª edição, Rio de Janeiro, LTC.

[27] ORTIZ, J. J., BATANERO, Carmen, SERRANO, L. e CAÑIZARES, M. J. 2000. Variables de tarea en los problemas elementales de probabilidad. In: LOUREIRO, Cristina, OLIVEIRA, Fernanda e BRUNHEIRA, Lina (orgs). *Ensino e aprendizagem da Estatística*. Lisboa, Sociedade Portuguesa de Estatística, pp. 138-146.

[28] PARZYSZ, Bernard. 1993.Des statistiques aux probabilités – exploitons les arbres. *Repères – IREM*, nº 10, pp. 91-104.

[29] _____. 1997. Les probabilités et la statistique dans le secondaire d'hier à aujourd' hui. In: IREM de Reims. *Enseigner les probabilités au lycée.* Reims, IREM de Reims, pp. 17-38.

[30] ROUAN, Omar. 1991. *Hasard et probabilité: conceptions d'élèves de 16 a 18 ans.* Séminaire sur la représentation, UQAM.

[31] SHAUGHNESSY, J. Michael. 1992. Research in probability and statistics: reflections and directions. In: GROWS, D. A. (ed). *Handbook of research on mathematics teaching and learning.* Reston, NTCM, pp. 465-494.

[32] STEVENSON, William J. 1986. *Estatística aplicada à administração*. São Paulo, Harbra.

[33] TOTOHASINA, André. 1992. *Méthode implicative en analyse de données et application à l'analyse de conceptions d'étudiants sur la notion de probabilité conditionnelle.* Tese de doutorado, Université de Rennes I.

[34] _____. 1994. L'introduction du concept de probabilité conditionnelle: avantages et inconvénients de l'arborescence. *Repères – IREM*, nº 15, pp. 93-117.

[35] TRIOLA, Mario F. 1998. *Introdução à estatística*. 7ª edição, Rio de Janeiro, LTC.

[36] TVERSKY, Amos e KAHNEMAN, Daniel. 1983. Extensional versus intuitive reasoning: the conjunction fallacy in probability judgment. *Psychological Review*, Vol. 90, nº 4, pp. 293-315.

[37] _____. 1984. Juicio en situación de incertidumbre: heuristicos e sesgos. In: CARRETERO, M. e GARCIA MADRUGA, J. A. (eds). *Lecturas de psicologia del pensamiento, solución de problemas y desarrollo cognitivo.* Madrid, Alianza Editorial, pp. 169-181.

ANEXOS

1. A Tabela da Distribuição Normal Padronizada

Z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2518	0,2549
0,7	0,2580	0,2612	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4986	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990
3,1	0,4990	0,4991	0,4991	0,4991	0,4992	0,4992	0,4992	0,4992	0,4993	0,4993
3,2	0,4993	0,4993	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4995	0,4995	0,4995
3,3	0,4995	0,4995	0,4995	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4997
3,4	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4998	0,4998
3,5	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998
3,6	0,4998	0,4998	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,7	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,8	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,5000	0,5000	0,5000
3,9	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000

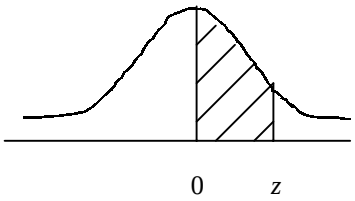


Fig.1

A tabela da distribuição normal padronizada nos fornece a área hachurada na Fig. 1, que corresponde a $P(0 \leq Z \leq z)$. Assim, para $z = 2{,}45$, temos:

Selecionando na tabela a linha 2,4 e a coluna 0,05 (para formar o número 2,45), na intersecção entre elas obtemos o valor 0,4929; então $P(0 \leq Z \leq 2{,}45) =$ $= 0{,}4929$ e, uma vez que $P(Z \geq 0) = 0{,}5$, $P(Z \geq 2{,}45) = 0{,}5 - 0{,}4929 = 0{,}0071$ (Fig. 2).

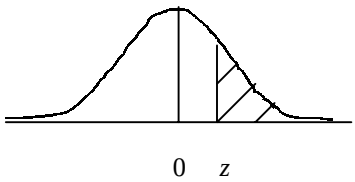


Fig. 2

2. *A Seqüência Piloto*

Uma moeda é viciada, de modo que, ao ser lançada, a probabilidade de sair cara é 0,25. Você pode indicar cara por C e coroa por K.

Questão I:

Qual é a probabilidade de sair coroa no lançamento dessa moeda?

Questão II:

1) Se essa moeda for lançada duas vezes, qual é a probabilidade de sair uma cara e uma coroa? Resolva a questão utilizando a árvore de probabilidades.

2) Se uma moeda for lançada duas vezes, quantas combinações existem de uma cara e uma coroa?

Questão III:

1) Se a moeda viciada for lançada três vezes, qual é a probabilidade de saírem:

a) três caras? Resolva a questão utilizando a árvore de probabilidades.

b) duas coroas e uma cara? Resolva a questão utilizando a árvore de probabilidades.

2) Se uma moeda for lançada três vezes, quantas combinações existem de:

a) três caras?

b) duas coroas e uma cara?

Questão IV:

1) Se a moeda viciada for lançada quatro vezes, qual é a probabilidade de saírem:

a) duas caras e duas coroas? Resolva a questão utilizando a árvore de probabilidades;

b) três caras e uma coroa? Resolva a questão utilizando a árvore de probabilidades;

c) quatro coroas? Resolva a questão utilizando a árvore de probabilidades.

2) Se uma moeda for lançada quatro vezes, quantas combinações existem de:

a) duas caras e duas coroas?

b) três caras e uma coroa?

c) quatro coroas?

Questão V:

1) Em cada uma das questões anteriores, qual a relação existente entre o número de combinações e o número de vezes em que uma parcela igual é somada?

2) Em cada uma das questões anteriores, qual a relação existente entre as parcelas somadas, no que diz respeito ao seu valor numérico ?

3) Refaça ***1a)***,***1b)*** e ***1c)*** da ***Questão IV*** utilizando as relações que você acabou de perceber.

Questão VI:

Suponha, agora, que você chame, no lançamento de uma moeda, cara de sucesso e coroa de fracasso.

1) Quantos sucessos existem em ***1a)*** da ***Questão IV*** ? E em ***1b)***? E em ***1c)***?

2) Quantos fracassos existem na questão ***1a)*** da ***Questão IV*** ? E na questão ***1b)***? E na ***1c)***?

3) Qual a relação existente entre o número de sucessos, o número de fracassos e o número de lançamentos da moeda em ***1a)*** da ***Questão IV***? E em ***1b)***? E em ***1c)***?

4) Retome ***3)*** da ***Questão V*** e escreva-a novamente usando potenciação no lugar de produtos de fatores iguais. Compare os resultados com aqueles obtidos em ***1)*** da ***Questão IV***.

5) Chame o número de lançamentos de *n*, o número de sucessos de *x* e o número de fracassos de (*n-x*); chame a probabilidade de um sucesso em um lançamento de *p* e a probabilidade de um fracasso em um lançamento de (*1-p*); reveja as informações de ***1)***, ***2)*** e ***3)*** da ***Questão VI***. Lembre-se de que o número de combinações de *n* elementos tomados de *x* em *x* é dado por:

$$\frac{n!}{x!(n-x)!}$$

Baseado nessas informações, escreva novamente ***4)*** da ***Questão VI***, substituindo os valores pelas notações aqui colocadas.

6) Usando a fórmula que você acabou de descobrir, calcule a probabilidade de saírem quatro caras se a moeda viciada for lançada dez vezes.

Questão VII:

1) Os sucessivos lançamentos da moeda são independentes?

2) A cada lançamento, quantas possibilidades de resultado existem? Elas podem ocorrer ao mesmo tempo?

3) A probabilidade de ocorrer um sucesso, a cada lançamento, se mantém constante?

3. A Seqüência Didática

1) Um professor pede a seus alunos que respondam a duas questões do tipo V ou F. Um dos alunos, Pedro, responde às questões ao acaso.

a) É mais provável que:

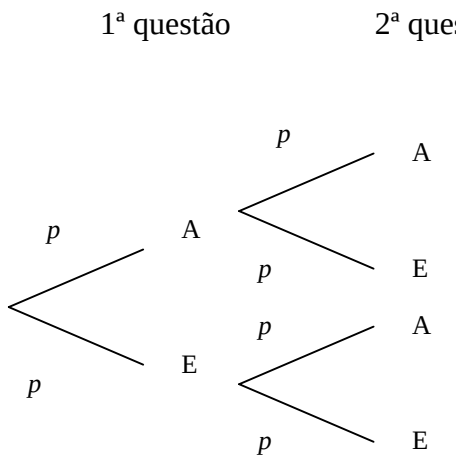
i) Pedro acerte as duas questões;

ii) Pedro erre as duas questões;

iii) Pedro acerte apenas uma das questões;

iv) as alternativas ***i)***, ***ii)*** e ***iii)*** são igualmente prováveis.

b) Refaça o item ***a)*** utilizando a árvore de probabilidades abaixo.



A significa que Pedro acerta a questão.

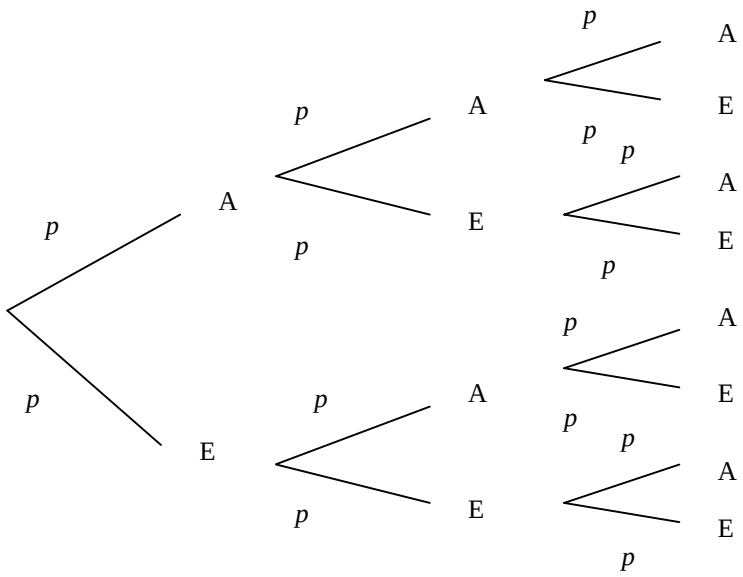
E significa que Pedro erra a questão.

p deve ser substituído pelo valor da probabilidade correspondente ao ramo da árvore.

c) Você manteve a resposta do item ***a)***? Por quê?

d) Se, ao invés de duas questões, fossem três, calcule a probabilidade de Pedro acertar duas, utilizando a árvore de probabilidades abaixo:

1ª questão 2ª questão 3ª questão



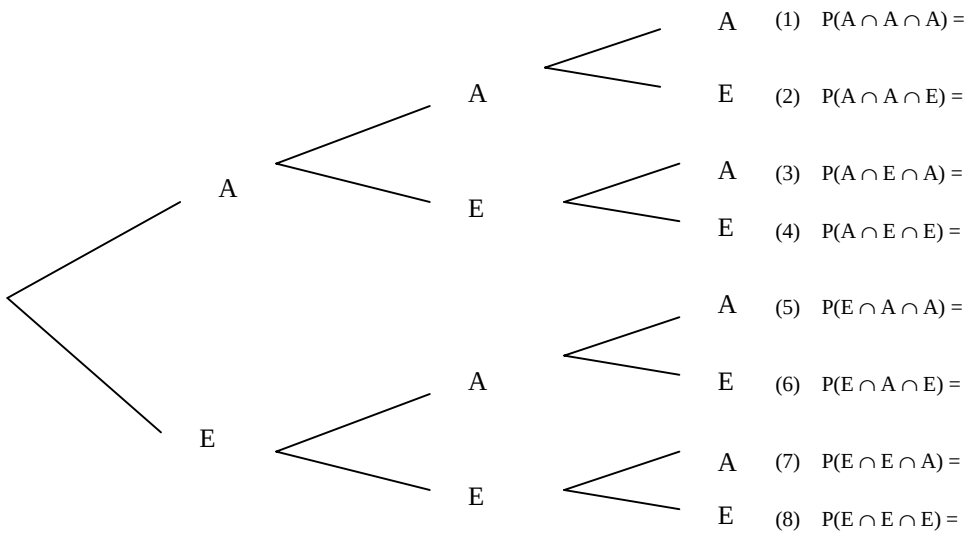
A significa que Pedro acerta a questão.

E significa que Pedro erra a questão.

p deve ser substituído pelo valor da probabilidade correspondente ao ramo da árvore.

2) Em outro dia, o professor passa três questões aos alunos, porém cada uma delas tem quatro alternativas, sendo apenas uma correta. Complete a árvore de probabilidades abaixo.

1ª questão 2ª questão 3ª questão



a) Qual é a probabilidade de Pedro acertar uma questão, se ele as responde ao acaso?

b) Qual é a probabilidade de Pedro acertar duas questões, se ele as responde ao acaso?

3) Uma pesquisa eleitoral revelou que 35% dos eleitores de uma cidade votam num candidato por causa do partido político ao qual ele pertence. Qual é a probabilidade de, numa amostra de cinco eleitores da cidade:

a) nenhum votar num candidato por causa do partido?

b) exatamente dois votarem num candidato por causa do partido?

c) pelo menos um votar num candidato por causa do partido?

c.1) Explique sua solução.

c.2) Analise a seguinte igualdade: $P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1)$. Ela é verdadeira?

c.3) O item ***c)*** pode ser resolvido utilizando a relação colocada em ***c.2)***? Por quê?

d) não mais que dois votarem num candidato por causa do partido?

d.1) Explique sua solução.

d.2) Analise a seguinte igualdade: $P(X \leq 2) = 1 - P(X > 2)$. Ela é verdadeira?

d.3) O item ***d)*** pode ser resolvido utilizando a relação colocada em ***d.2)***? Por quê?

4) Um curso de treinamento profissional melhora a atuação dos funcionários de certa empresa em 75% dos casos. Se oito funcionários quaisquer participarem do curso, qual a probabilidade de:

a) 25% dos funcionários não melhorarem a atuação?

b) mais de 25% dos funcionários não melhorarem a atuação?

c) menos de 25% dos funcionários não melhorarem a atuação?

c.1) Some os resultados dos itens ***a)***, ***b)*** e ***c)***. O resultado deve ser 1. Por quê?

5) Certa marca de sabonete detém 28% do mercado consumidor de uma cidade. Uma marca concorrente perguntou a uma amostra de nove pessoas qual marca consumia. Qual é a probabilidade de pelo menos duas das pessoas entrevistadas não consumirem o sabonete que detém 28% do mercado?

6) Pesquisas médicas indicam que 90% dos pacientes com gripe tomam antigripais para aliviar os sintomas da doença. Numa amostra de seis indivíduos gripados, qual é a probabilidade de, no máximo, um deles tomar antigripais?

4. O Pós-teste

Para fazer uma viagem, você pode escolher um entre dois aviões. O avião A é equipado com dois motores, e a probabilidade de cada um dos motores falhar é 0,01. O avião B é equipado com quatro motores, e a probabilidade de cada um dos motores falhar é 0,04. Os motores funcionam de maneira independente e os aviões completam a viagem com segurança se pelo menos metade dos motores funcionar. Qual avião você vai escolher para fazer a viagem?