PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO

PUC/SP

Walkíria Corrêa dos Santos

As ideias envolvidas na gênese do Teorema Fundamental do Cálculo, de Arquimedes a Newton e Leibniz.

MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

São Paulo

2011

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO

PUC/SP

Walkíria Corrêa dos Santos

As ideias envolvidas na gênese do Teorema Fundamental do Cálculo, de Arquimedes a Newton e Leibniz.

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para a obtenção do título de ***MESTRE PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA****, sob a orientação do* ***Professor Doutor Benedito Antonio da Silva.***

São Paulo

2011

Banca Examinadora

As três razões de minha vida, meu marido Silvio, meu companheiro e amigo, meus filhos Thiago e Nathália, pela beleza de saber amar e a meus Pais, meus eternos professores.

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Doutor Benedito Antonio da Silva por seus conselhos, seus ensinamentos, sua dedicação, seu incentivo e, principalmente, pelo privilégio de ter sido sua orientanda.

As professoras, Dra. Auriluci de Carvalho Figueiredo e Dra. Sonia Pitta Coelho pela participação na Banca Examinadora e pelas sugestões e comentários que contribuíram na evolução desse trabalho.

A Tânia, "meu anjo", pelas horas de choros e risos nessa nossa empreitada, e a amizade que ficou.

Ao Vagner pela compreensão e paciência, nas horas de estudos.

E a Elis, por nos ajudar nas horas de aflição e ao carinho que nos dedicou.

Meu muito obrigado!

"Estou certo de que nenhuma outra disciplina perde mais do que a matemática quando dissociada de sua história"

J.W.L. GLAISHER

RESUMO

Esse trabalho busca contribuir com o estudo das principais ideias que envolvem o Teorema Fundamental do Cálculo (TFC), desde a Matemática na Grécia Antiga até as contribuições de Newton (1642 - 1727) e Leibniz (1646 - 1716), no século XVII. Dada a abrangência de tal tema, focamos nossa atenção na questão da Incomensurabilidade e em decorrência, na definição de Proporção de Eudoxo (390 a.C. - 320 a.C.). Tal definição traz como consequência a 'geometrização' da matemática traduzindo as ideias que culminaram nos conceitos de derivada e integral, nas questões de quadratura e cálculo de volumes, por meio dos métodos de Exaustão e o método Mecânico de Arquimedes (287 a.C. - 212 a.C.), e no método do traçado de tangente de Apolônio (262 a.C. - 190 a.C.) . As buscas da tangente a uma curva e a questão da quadratura foram a mola precursora para que os trabalhos de Newton (1642 - 1727) e Leibniz (1646 - 1716) pudessem estabelecer o Cálculo Infinitesimal. O renascimento da atividade matemática no século XV, pela necessidade de novas rotas de comércios e navegação, abordando a aritmética, a álgebra e a trigonometria e o século XVI, foram de grande importância, constituindo a base de todo desenvolvimento algébrico. No século XVII, uma importante área foi estabelecida: a Geometria Analítica que muito contribuiu para os resultados alcançados por Newton (1642 - 1727) e Leibniz (1646 - 1716), estabelecendo, em definitivo, que o processo de integração e derivação são operações uma inversa da outra. O resultado é hoje conhecido como Teorema Fundamental do Cálculo. O produto da pesquisa realizada é um texto, redigido com preocupação didática, que pretende facilitar o entendimento da interligação das ideias que contribuíram, através de séculos, para o resultado que hoje conhecemos como o Teorema Fundamental do Cálculo.

Palavras-chave: Tangente; Quadratura; Incomensurabilidade; Infinitamente pequeno; Teorema Fundamental do Cálculo.

ABSTRACT

This paper seeks to contribute to the study of the main ideas that involve the Fundamental Theorem of Calculus (FTC) from the Mathematics in Ancient Greece to contributions of Newton (1642 - 1727) and Leibniz (1646 - 1716), the seventeenth century. Given the scope of this theme, we focus our attention on the question of Incommensurability and in consequence, the definition of Proportion of Eudoxus (390 a.C. - 320 a.C.). Such a definition, results in the 'geometrization' of translating the mathematical ideas that culminated in the concepts of derivative and integral, in quadrature issues and calculation of volumes, through method of exhaustion and method Mechanic Archimedes (287 a.C. - 212 a.C.), and the method of tracing the tangent of Apollonius (262 a.C.) - 190 a.C.). The searches tangent to a curve and the problem of quadrature were a predecessor motive for the work of Newton (1642 - 1727) and Leibniz (1646 - 1716) could establish "Infinitesimal Calculus". The revival of mathematical activity in the fifteenth century, with the need for new routes of commerce and navigation, covering arithmetic, algebra and trigonometry and the sixteenth century, were of great importance, forming the basis of all algebraic development. In the seventeenth century, an important area has been established: the Analytic Geometry, which contributed greatly to the achievements of Newton (1642 - 1727), and Leibniz (1646 - 1716), by establishing, in definitive, that the process of integration and differentiation are inverse operations of one another. The result is now known as the Fundamental Theorem of Calculus. The product of the research conducted is a text, drafted with didactic concern, which aims to facilitate understanding of the interconnection of ideas that have contributed, through centuries, to the result that we now know as the Fundamental Theorem of calculus.

Key words: Tangent; Quadrature; Incommensurability; Infinitely Small; Fundamental Theorem of Calculus

ÍNDICE DE IMAGENS

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

Pesquisas na área de Educação Matemática têm evidenciado que o Teorema Fundamental do Cálculo (TFC) apresenta dificuldades, quer de ensino quer de aprendizagem. Na tentativa de buscar soluções, vários estudos de ensino têm sido criados e usados (no ensino) no processo.

No grupo de pesquisa "O Elementar e o Superior em Matemática: Didática do Ensino do Cálculo" onde está alocado o projeto "As diversas componentes envolvidas no ensino do Cálculo", três participantes desse projeto realizaram pesquisas sobre o tema TFC: Anacleto (2007), que focou as dificuldades encontradas por alunos no TFC; Campos (2007), que analisou o enfoque dos livros didáticos dado ao tema e Picone (2007), que buscou verificar como o professor de Cálculo trata esse problema. Essas três pesquisas fazem referências à tese de doutorado de Segadas Vianna (1998). Também trabalhou sobre o tema Luzia Palaro (2006), que dedica um capítulo de sua tese ao Teorema Fundamental do Cálculo.

Segadas Vianna (1998), em sua tese — Students' Understanding of the Fundamental Theorem of Calculus — defendida na Universidade de Londres, teve como alvo investigar o entendimento que os estudantes revelavam do TFC, a fim de identificar as dificuldades que eles apresentam com relação aos conceitos envolvidos nesse teorema, que interferem direta ou indiretamente em sua compreensão e interpretação gráfica.

Dividiu sua pesquisa em duas etapas: a primeira foi a aplicação de um questionário piloto, em 1994, aos estudantes da UFRJ, sendo uma classe do curso de Ciência da Computação e duas classes do curso de Engenharia. Após análise dos resultados, a autora organizou um novo questionário que foi aplicado na mesma universidade em 1996, agora em duas classes do curso de Matemática, uma do curso de Ciência de Computação e três de Engenharia. A segunda etapa foi a realização de entrevistas com os estudantes que participaram desse estudo.

A autora realizou a análise de sua pesquisa em duas partes: na primeira buscou identificar estratégias que os estudantes usavam para questões relacionadas ao TFC e continuidade de funções, e na segunda, buscou identificar a ideia geral dos conhecimentos matemáticos necessários para a compreensão do teorema.

Após análise dos questionários e das entrevistas, independentemente do curso dos participantes, a autora concluiu, em relação à primeira parte, que alguns estudantes apresentaram dificuldades em solucionar questões em que existisse a necessidade de interpretação gráfica, com ou sem o uso do computador. Atribuiu essa dificuldade à forma como os gráficos são guardados na mente, apenas como uma figura estática e não como uma construção dinâmica. Já na parte dos conhecimentos matemáticos, Segadas Vianna (1998) concluiu que a maioria dos estudantes indicou ter conhecimentos sobre as retas secantes e tangentes, além da área sob o gráfico de uma função, necessários para a compreensão do teorema; no entanto, faltava "uma certa familiaridade" no emprego dos mesmos, para solucionar questões quando eles eram necessários.

Anacleto (2007) teve em sua dissertação "Uma investigação sobre a aprendizagem do Teorema Fundamental do Cálculo", o objetivo de investigar os conhecimentos mobilizados por alunos que já haviam estudado o teorema, relativos aos conceitos de derivada e integral e a inter-relação entre elas.

A autora, em sua pesquisa, cita que segundo Segadas (1998), o TFC é um dos tópicos mais importantes em qualquer curso de Cálculo e fundamenta sua pesquisa nos pressupostos teóricos da dialética ferramenta-objeto e jogos de quadros de Douady (1987).

Baseada em questões trabalhadas por Segadas Vianna (1998), Anacleto (2007) formulou um questionário que foi aplicado a um grupo de alunos do curso de Licenciatura em Matemática de uma universidade de São Paulo. Verificou então que a maioria dos alunos encontrou dificuldades para solucionar problemas baseados em visualização de gráficos, envolvendo o significado das funções derivada e integral. Este resultado demonstrou que os obstáculos encontrados pelos estudantes para compreender o teorema, estão relacionados com uma incompleta mobilização dessas noções e também com a continuidade, uma vez que utilizaram apenas parcialmente esses conhecimentos para a solução das questões apresentadas.

A autora concluiu que tal fato está provavelmente associado aos hábitos dos estudantes, que tendem a não focar atenção aos aspectos conceituais do teorema, apenas memorizando o algoritmo dos procedimentos, sem refletir sobre a sua aplicabilidade.

Na dissertação, cujo título é: “A abordagem do Teorema Fundamental do Cálculo em livros didáticos e os registros de representação semiótica”, Campos (2007) focou a análise de quatro livros didáticos que tratam desse assunto.

Para desenvolver esse trabalho, o autor também tomou como ponto de partida os resultados obtidos por Segadas Vianna (1998). Como referencial teórico baseou-se nos registros de Representação Semiótica de Duval (1999), e para análise dos conteúdos dos livros escolhidos, elaborou indicadores, fundamentado na Análise de Conteúdos de Bardin (2003). Desse modo, procurou investigar a maneira como cada autor explora a coordenação dos registros de representação, ao apresentarem o TFC.

A partir das análises, Campos (2007) observou que um dos livros não aborda explicitamente a inter-relação entre derivada e integral que é proporcionada pelo teorema. Porém, quanto aos registros de representação, concluiu que os autores exploram a coordenação desses, em seus livros, de diferentes maneiras. Apesar de um apresentar de forma mais evidente que o outro, isso foi justificado por Campos (2007), pela necessidade do público-alvo de cada livro.

Outra pesquisadora a realizar um estudo sobre o mesmo tema foi Picone (2007), que em sua dissertação “Os Registros de Representação Semiótica Mobilizadas por Professores no Ensino do Teorema Fundamental do Cálculo”, buscou investigar que registros de representação são mobilizados por professores no ensino desse tema, assim como a coordenação desses registros e a exploração da visualização por meio da representação gráfica.

A autora utilizou a teoria dos registros de Representação Semiótica de Duval (1999), para destacar o papel da identificação das variáveis visuais pertinentes na conversão do registro gráfico para o algébrico e vice-versa.

Seu estudo é composto por um questionário e entrevistas realizados com professores de cálculos de instituições públicas e particulares do Estado de São Paulo. Após a análise do questionário e das entrevistas, Picone (2007) concluiu que os professores consideram importante, no ensino do teorema, enfatizar de que o mesmo serve como ferramenta para o cálculo de áreas e que estabelece uma conexão entre derivação e integração, mas nem todos a exploram graficamente.

A inter-relação entre as variáveis visuais pertinentes nem sempre é enfatizada pelos professores na articulação de diferentes registros — apesar de acharem importante esta articulação —, sendo que os registros mais utilizados foram algébricos, gráficos e língua natural.

Porém, quando analisaram uma situação onde se explora a conexão entre a derivada e a integral, graficamente, alguns afirmaram que apesar de proporem situações parecidas, não compreendem de que forma essas situações podem contribuir para o entendimento do TFC, e outros sequer propõem essas situações aos seus alunos, mas em nenhum momento foi apontado que não eram importantes tais situações serem propostas.

Assim como Anacleto (2007) e Campos (2007), Picone (2007) utilizou o estudo realizado por Segadas (1998).

Palaro (2006) realizou uma pesquisa com o objetivo de investigar os aspectos caracterizadores da concepção de Educação Matemática de Henri Lebesgue (1875 – 1941), professor eminente do século XX, que revolucionou a Análise Matemática com a criação de uma nova teoria da medida e, fundamentada nesta, uma nova definição de integral.

A autora iniciou sua pesquisa com uma breve apresentação da vida e obras de Lebesgue, contextualização histórico-filosófica e sua filosofia matemática. Em seguida, a autora abordou um estudo do desenvolvimento histórico do Cálculo, do século XVII até Lebesgue (1875 – 1941), enfatizando a teoria das funções. Também é apresentado um estudo de como alguns livros didáticos de Cálculo e Análise, definem a integração e como abordam o TFC para identificar a perspectiva adotada. Finalizando com um estudo da obra Sobre a Medida das Grandezas de

Lebesgue (1875 – 1941), buscando identificar quais aspectos do processo no ensino da matemática eram considerados importantes para Lebesgue (1875 – 1941).

Palaro (2006) concluiu no seu estudo, que Lebesgue (1875 – 1941) não gostava da tendência axiomática de fazer matemática de sua época, que dava ênfase às atividades e considerava matemática um instrumento que não tem objetos próprios. A autora ainda concluiu que o mesmo propagava uma filosofia da matemática simples e utilitária, e que Lebesgue (1875 – 1941) considerava que o ensino, assim como na prática de fazer matemática, deveria iniciar com uma atividade e a partir daí abstrair conceitos, fazer generalizações, deixando as definições axiomáticas por último.

Em sua pesquisa, a autora dedicou um capítulo ao TFC (Cap. III, p. 71). Nele a autora elenca os temas que nortearam o desenvolvimento desse teorema em meados do século XVII, até Newton (1642 - 1727) (1642 - 1727) e Leibniz (1646 - 1716). Ela inicia com a relação entre a questão da quadratura e da reta tangente a uma curva. Começa com Fermat (1601 - 1665), que de acordo com Palaro (2006) foi o primeiro a estabelecer o conceito moderno de reta tangente a uma curva. Em seguida destaca Torricelli (1608-1647) que, entre suas colaborações, apresentou dois métodos para calcular a área da região limitada por um cicloide e Gregory (1638 - 1675) — professor de Newton (1642 - 1727) — que publicou dois estudos um em 1667 e o outro em 1668, sob os títulos Vera circuli et hiperbolae quadratura e Geometriae pars universalis, respectivamente. Salientando Barrow (1630-1677) que estudou e editou as obras de Euclides (330 a.C. - 260 a.C.), Apolônio (262 a.C. - 190 a.C.) e Arquimedes (287 a.C. – 212 a.C.). Ainda nesse capítulo a autora aborda, separadamente, os desenvolvimentos apresentados por Newton (1642 - 1727) e Leibniz (1646 - 1716) que culminaram no TFC.

Levando em conta as análises dessas pesquisas e diante desses resultados, decidimos buscar "outros" subsídios que possam contribuir para uma melhor compreensão das várias componentes que foram sendo elaboradas desde a antiguidade Grega até os trabalhos de Newton (1642 - 1727) e Leibniz (1646 - 1716).

Para isso iniciamos o estudo a partir do pensamento matemático predominante na Grécia Antiga, destacando algumas características das diferentes escolas filosóficas e suas doutrinas.

Foram objetos de nossa atenção questões como a Incomensurabilidade e em decorrência desta, a contribuição de Eudoxo (390 a.C. - 320 a.C.) por meio do estabelecimento de sua definição de Proporção.

Ainda foram apontados os métodos de Exaustão e o método Mecânico de Arquimedes (287 a.C. - 212 a.C.) para resolver problemas de quadratura e de cálculo de volumes. Além disso, demos destaque ao método do Traçado de tangente de Apolônio (262 a.C. - 190 a.C.) .

Com isso objetivamos trabalhar temas e preocupações existentes na Grécia Antiga, que deram origem a dois problemas cuja solução demandou séculos de estudo e contribuições, que são: a busca da tangente a uma curva e a questão da quadratura. A solução desses dois problemas, com os trabalhos de Newton (1642 - 1727) e Leibniz (1646 - 1716) no século XVII, culminou com o TFC.

Em seguida, apresentamos no primeiro capítulo, um panorama das escolas filosóficas que refletem o pensamento grego vigente na antiguidade. Em particular, as escolas Pitagórica e a Eleática, além de Eudoxo (390 a.C. - 320 a.C.) que chegou a frequentar a Academia de Platão (430 a.C. - 347 a.C.), que tiveram papel destacado na questão da incomensurabilidade. Esta questão também será tratada nesse capítulo.

O segundo capítulo, trará as ideias de Arquimedes (287 a.C. - 212 a.C.) e Apolônio (262 a.C. - 190 a.C.) respectivamente, os estudos sobre a quadratura e o traçado de retas tangentes, que séculos mais tarde irá fundamentar os estudos de Newton (1642 - 1727) e Leibniz (1646 - 1716) na determinação do TFC. Será motivo de nossa atenção, nesse capítulo, o Declínio da matemática grega, na tentativa de explicar o “por que” do lapso de tempo entre tais concepções.

O terceiro capítulo dá ênfase ao Renascimento, a necessidade de se retomar os conhecimentos dos antigos filósofos gregos, há tanto esquecidos. Relatos, sucintos, das participações de alguns estudiosos da matemática dos séculos XV e XVI, continuando com o século XVII, com o estabelecimento da *Geometria Analítica* e as contribuições dadas por Descartes (1596 - 1650) e Fermat (1601 - 1665). Do *Cálculo Infinitesimal com a*s contribuições de James Gregory (1638 - 1675) e Isaac Barrow (1630 - 1677), que influenciaram, de forma crucial, os trabalhos de sistematização das ideias e métodos utilizados por Newton (1642 - 1727) e Leibniz (1646 - 1716) para a "construção" do Teorema Fundamental do Cálculo e finalizando o capítulo com um exemplo desse teorema.

Encerramos esse trabalho com nossas considerações finais.

CAPÍTULO I

NOTAS SOBRE O PENSAMENTO GREGO E A QUESTÃO DA INCOMENSURABILIDADE

Não podemos compreender o nascimento do TFC sem antes abordar certos preceitos que contribuíram para a existência desse teorema. Elaboramos este capítulo com a finalidade de expor como os pensamentos matemáticos “surgiram” na Grécia a partir do século VI a.C. Neste período, podemos distinguir quatro tendências ou escolas filosóficas e a influência que elas tiveram na formação de conhecimentos matemáticos que, de alguma forma, contribuíram com estabelecimento deste teorema, e serão objetos de nossa reflexão neste capítulo.

1.1 - O PENSAMENTO FILOSÓFICO

No intuito de facilitar à visualização, a compreensão dessas tendências, as influências que causaram e suas figuras mais eminentes elaboraram o quadro a seguir. Contudo, devemos ressaltar que em nosso estudo foi detectado a existência de um certo grupo de “mestres” viajantes que, por um determinado valor, passavam os conhecimentos filosóficos, sendo essa prática repugnada pelas doutrinas filosóficas. Todavia, não podemos deixar de observar que essa prática auxiliou a difundir o conhecimento daquela época. Esses”mestres” eram denominados *Sofistas* e por este motivo os incluímos no nosso quadro.

LEGENDA

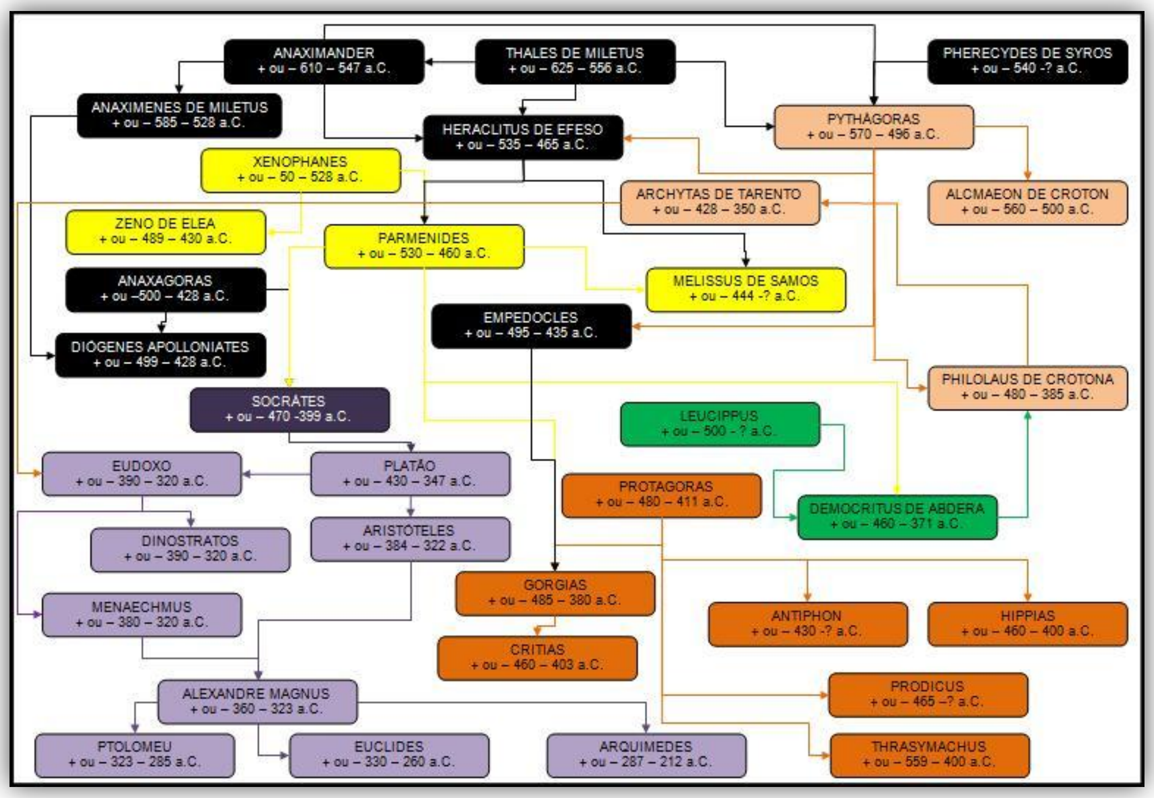


Figura 1 - Quadro de escolas filosóficas

Apresentamos, adiante, breves comentários das doutrinas dessas escolas e suas principais figuras, em particular àquelas em que se podem buscar as origens dos conceitos que constituem o que hoje se denomina Cálculo Diferencial e Integral.

> “ [...] o Período Helênico grego (c. 800 - 336 a.C.) testemunhou realizações intelectuais extraordinárias. Nas ágoras de Atenas e outras cidades-Estados, os filósofos ensinavam seus discípulos e lançaram novas ideias. [...] Foi também nesse período que se assistiu pela primeira vez ao emprego do raciocínio dedutivo matemático - o que se deve a Thales de Mileto (640? - 564? a.C.) e Pitágoras (586? - 5000? a.C.), [...] ” (Eves 2008, p. 93).

Sobre essas duas figuras, Boyer (1974, p.33) afirma que, "[...] durante o sexto século a.C. apareceram dois homens, Thales e Pitágoras, que tiveram na matemática o papel de Homero e Hesíodo na literatura."

Os primeiros relatos sobre as origens da matemática grega descendem de duas escolas: a Jônica e a Pitagórica. Em respeito à ordem cronológica, apresentaremos os principais aspectos de suas doutrinas e de seus representantes mais eminentes.

O início do pensamento matemático, explicitamente da geometria, muitas vezes é atribuído a Thales de Mileto (625? a.C - 556? a.C.). Considerado um dos "sete sábios" da Antiguidade, de sua vida pouco se sabe. Segundo parece, era um mercador que em suas viagens a vários centros culturais como a Babilônia e o Egito, teve oportunidade de aprimorar seus conhecimentos filosóficos e matemáticos. Proclus (410? a.C. - 485? a.C.), nas primeiras páginas de seu Comentário sobre Os Elementos de Euclides (330 a.C. - 260 a.C.), o designa como o primeiro matemático grego. (ibid., pp.34 -35)

Foi o fundador da escola Jônica, sendo também o primeiro a refutar as explicações místicas e mitológicas, da natureza do Universo. Buscava um sentido racional para a origem das coisas, formulando a questão de existir alguma forma primordial da matéria ou elemento primário, a partir do qual, tudo seria construído. Para ele tal elemento seria a água. Esta concepção é chamada de *monismo* e é expressa pela afirmação*: "O todo é um".* Podemos ainda citar alguns discípulos de Tales, como Anaximandro (610? a.C – 547? a.C.) e Anaxímenes (588? a.C - 524? a.C.), que deram importantes contribuições para esta escola.

O outro matemático, Pitágoras de Samos (586? a.C - 500? a.C), ao que se sabe, era um místico cuja vida foi envolta em grandes mistérios e lendas. Também não se tem certeza da época de seu nascimento e o consenso é que tenha sido na primeira metade do século sexto a.C., em Samos, uma ilha da costa da Ásia, situada muito perto de Mileto. É bem provável que tenha viajado também para o Egito e Babilônia e que, possivelmente, tenha ido até a Índia. Enfim, o fato importante dessas idas de Pitágoras é o seu retorno à Samos, pois encontrou a mesma sobre o domínio do tirano Polícrates e a Jônia sobre o domínio persa.

Devido a esta situação emigrou para Crotona, situada ao sul da Itália, e lá fundando sua escola — um centro de estudo de filosofia, matemática e ciências da natureza e também uma irmandade com rituais secretos —, com uma doutrina conservadora se opondo à moderada da escola jônica. Exerceu grande influência na Magna Grécia. (Colin, 1987, pp. 73 -74)

De acordo com relatos creditados a Filolaus de Tarento[1] que, aparentemente, teve permissão para escrever a respeito do pitagorismo e que por meio desse livro Platão (430 a.C. - 347 a.C.) tirou seu conhecimento da escola de Pitágoras, pois a prova incontestável não se possui até o presente momento.

Ao que parece, a doutrina dessa escola era baseada na declaração que "*todas as coisas são números"* e que *o Cosmo* pode ser explicado por eles. Os números exerciam verdadeiro fascínio sobre seus seguidores, que buscavam uma estrutura da matéria idêntica à dos números. Defendia que toda matéria seria composta por minúsculas unidades maciças e indivisíveis, dispostas continuamente, sem espaços entre elas. Esta concepção é denominada de *mônadas*. Cada mônada era associada a uma unidade numérica. Dessa forma os pitagóricos argumentavam que: se toda matéria era formada pelas mônadas, então qualquer corpo era constituído por uma forma ordenada de "uma certa" quantidade de mônadas, da mesma forma que os números se formavam por quantidade ordenada de unidades. Utilizando este ponto de vista, explicavam *o Cosmos* pela *teoria das mônadas*. (Boyer, 1974, p. 52)

Para eles, todo o mistério da ciência tinha o seu centro na matemática. Os números são matérias (elementos imutáveis da natureza) e ocupam um lugar no espaço. Aristóteles descreveu o ponto pitagórico como sendo uma "unidade tendo posição" ou "unidade considerada no espaço". Essas ideias atraíram a atenção de certa escola situada no sul da Itália, mais precisamente em Eléia. Parmênides de Eléia (530? a.C - 460? a.C.) foi o fundador da escola Eleática. Postulava um universo essencialmente estático, dotado de uma essência uniforme e permanente. As mudanças na natureza e mesmo o movimento, seriam ilusórios. Atribui-se a ele a

[1] Filósofo pré-socrático e matemático grego, autor e professor da cidade de Tarento, nascido em Crotona, cidade da Magna Grécia, colônia grega na hoje Jônia italiana, o principal centro de estudo e divulgação do pensamento pitagórico, hoje na Itália, um dos primeiros pitagóricos, discípulo de Lísis e o primeiro a sistematizar a doutrina pitagórica, expondo-a no livro chamado Escritos Pitagóricos, segundo o historiador Diógenes Laércio (~ 240-310)

criação do pensamento metafísico. Seu seguidor mais famoso foi Zenão de Eléia (489? a.C - 430? a.C), que se opôs às ideias numéricas dos pitagóricos, ao mobilismo[2] de Heráclito e a toda a filosofia jônica, atacando os conceitos de multiplicidade e divisibilidade, defendendo, em oposição, a unidade e a permanência do ser. Defendia a concepção de que o universo seria único, imutável e imóvel; movimento, mudança, tempo e pluralidade não seriam mais do que ilusões (Colin, 1987, p. 80). . Nesse contexto, para “provar” a inexistência do movimento e defender a sua filosofia, Zenão propôs seus paradoxos, relacionados adiante.

Os paradoxos mais conhecidos são: Dicotomia; Aquiles; Flecha e Estádio. A título de ilustração exporemos apenas o primeiro aqui relacionado, que refuta a suposição de que espaço e tempo são infinitamente divisíveis. A argumentação de Zenão, sempre supondo uma afirmação como verdadeira e daí chegar a uma contradição, foi muito utilizada, em particular, para refutar certas ideias definidas pela escola pitagórica. Por exemplo, o paradoxo da Dicotomia, que partindo da suposição que um segmento pode ser subdividido indefinidamente, Zenão surgiu com a seguinte argumentação: se um corredor quer percorrer uma distancia de um ponto *A* até um ponto *B*, para tal terá que primeiro percorrer a metade desta distância, e assim proceder até chegar ao ponto *B*, sempre percorrendo a metade da distância que resta, dessa forma o corredor nunca conseguirá cumprir sua meta, pois sempre restará, por menor que seja, uma distância à ser percorrida para atingirr o ponto *B*. Logo o movimento é uma ilusão. (Boyer, 1974, p. 55)

Também argumentava Zenão: Como podem os pitagóricos pretender que um segmento de reta seja constituido por mônadas? Continuava afirmando que se isso fosse verdade, entao entre duas mônadas deveria existir um espaço, porque senão as duas seriam uma só mônada e ainda que esse espaço deva ser maior que uma mônada, já que esta ocupa o menor espaço possível. Então nesse espaço existente entre duas mônadas cabe uma terceira. Da mesma forma que entra a primeira e esta terceira mônada tambem existe um espaço -- maior que uma

[2] Mobilismo é uma concepção segundo a qual a realidade natural se caracteriza pelo movimento. Todas as coisas estão em constante fluxo.

mônada -- e que nele caberia uma quarta mônada. Dessa maneira pode-se continuar indefinidamente com esse argumento, o que é um paradoxo.

Deixaremos uma referência para aqueles leitores que tiverem interesse ou curiosidade em conhecer os detalhes dos demais paradoxos citados. O livro História da Matemática de Carl B. Boyer, 1974.

Ao norte da Grécia, em Abdera, surgiu uma outra escola denominada atomista. Iniciada por Leucipo (490? a.C. - 420? a.C.) e Demócrito (460? a.C. - 370? a.C.), parece que seu desenvolvimento foi uma tentativa de unir o pensamento pitagórico e o eliático. Com esta visão mais ampla, esta escola defendia o atomismo geométrico, doutrina que sustentava ser a matéria formada de átomos rígidos, infinitamente pequenos e variados, de tamanho e forma, que se agrupavam em combinações casuais e por processos mecânicos. Nessa tentativa de unificação, a escola atomista, por um lado, aceitava a visão dada por Heráclito explicando as mudanças da natureza, afirmando que tudo é movimento e por outro lado, defendia a argumentação de Parmênides ao dizer que o ser é uno e imutável e que o movimento é ilusão. Tentando resolver esse dilema, considerou que toda a realidade se compunha de dois únicos elementos: o vácuo ou “não ser” e os átomos indivisíveis (os arké). Um pensamento que, na realidade, tem suas origens no pensamento geométrico dos pitagóricos. (Colin, 1987, pp. 73-83)

Podemos ter uma visão fragmentada da matemática daquela época. Fragmentada porque tudo que supostamente sabemos, veio através de relatos feitos oralmente e o pouco que se havia escrito, foi perdido através dos séculos e só mais tarde, por volta do século cinco depois de Cristo, foram encontrados alguns registros.

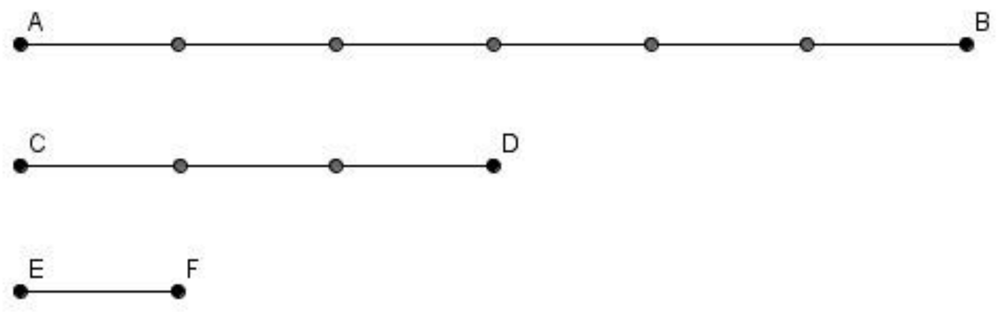
Devemos lembrar que de todas essas doutrinas, quem mais sofreu com as críticas foi a pitagórica, pois além de enfrentar as ideias apresentadas por Zenão, em seus paradoxos, teve que enfrentar um problema muito mais sério que viria a abalar a fé desta escola: a descoberta das grandezas incomensuráveis.

1.2 - AS GRANDEZAS INCOMENSURÁVEIS

No tempo de Pitágoras, pensava-se que duas grandezas quaisquer seriam comensuráveis, isto é, sempre seria possível encontrar uma terceira grandeza contida em um número inteiro de vezes, em cada uma dessas grandezas.

Afinal, o que são Grandezas Incomensuráveis? O radical contido na palavra incomensurável é mensurar, que significa medir. O prefixo *co* trás a ideia de "ao mesmo tempo". Portanto, comensuráveis está relacionado com duas, ou mais, grandezas que possam ser medidas ao mesmo tempo. Mas qual é o significado de medir? Os gregos usavam um processo de comparação para efetuar medidas de grandezas: a partir de uma grandeza de mesma espécie, denominada de "unidade", era verificado quantas vezes esta estava contida na grandeza a ser medida. Dessa forma para estabelecer se duas grandezas eram comensuráveis, era necessário buscar uma terceira que coubesse em um número inteiro de vezes em cada uma delas.

Vejamos um exemplo, tomando o segmento como grandeza. De agora diante utilizaremos as notações $\overline{AB}$ para designar o segmento de reta e AB em para indicar sua medida.



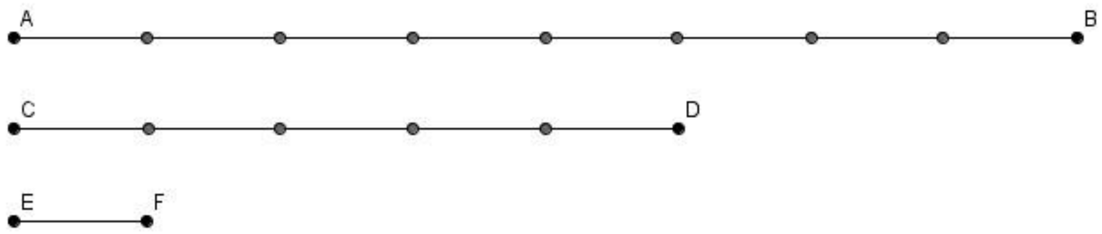
Desse modo $AB = 6.EF$ e $CD = 3.EF$.

Se considerarmos um segmento qualquer, tomando como unidade de medida EF ($EF = u$), contido m vezes num segmento $\overline{AB}$ e n vezes num segmento $\overline{CD}$, sendo m e n inteiros positivos, então, de um modo geral, tem-se que $AB = m.u$ e $CD = n.u$.

Nesse caso os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ se dizem comensuráveis. Uma maneira utilizada para expressar esse fato é escrever $n.AB = m.CD$.

Uma consequência imediata, decorrente do fato de dois segmentos serem comensuráveis, é que um deles pode ser medido tomando o outro como unidade, sendo que o resultado dessa medida nem sempre é um número inteiro.

Observando o exemplo, vemos que $\boldsymbol{AB = 8.EF}$ e $\boldsymbol{CD = 5.EF}$.



Ao tomarmos $\frac{\boldsymbol{AB}}{\boldsymbol{8}} = \boldsymbol{EF}$ e $\frac{\boldsymbol{CD}}{\boldsymbol{5}} = \boldsymbol{EF}$, temos que:

$$\Rightarrow \frac{\boldsymbol{AB}}{\boldsymbol{8}} = \frac{\boldsymbol{CD}}{\boldsymbol{5}}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{5.AB = 8.CD}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{AB} = \frac{\boldsymbol{8}}{\boldsymbol{5}}\,\boldsymbol{.CD}$$

Chegando a conclusão que não é possível medir ***AB***, tomando ***CD*** como unidade, pois o resultado dessa comparação não pode ser expresso através de um número inteiro positivo, mas sim por uma razão entre eles.

Intuitivamente, é natural se imaginar que sempre será possível encontrar uma unidade que caiba um número inteiro de vezes em duas outras grandezas quaisquer de mesma espécie, bastando para isso considerar a unidade tão pequena quanto se queira. Aqui está um exemplo clássico que a intuição, mola propulsora da criatividade, pode, às vezes, levar a enganos: grandezas que não admitem submúltiplos comuns são chamadas de grandezas incomensuráveis.

No caso do exemplo anterior pode-se observar que $\boldsymbol{AB = m.u = m.\frac{1}{n} = \frac{m}{n}\,.CD}$, nota-se que, apesar de os gregos não expressarem esse fato utilizando fração, a medida de $\overline{\boldsymbol{AB}}$ tomando $\overline{\boldsymbol{CD}}$ como unidade representa a razão entre os números $\boldsymbol{m\ e\ n}$.

Compreender o *"por que"* da descoberta das grandezas incomensuráveis, causou uma crise nos fundamentos da matemática grega, principalmente na escola pitagórica. É preciso se reportar ao fato de que para essa escola, o Cosmo era totalmente explicado pelos números.

Eves (2004, p.106), "[...] parecia ao senso comum [filosofia pitagórica], pois intuitivamente havia o sentimento de que toda grandeza poderia ser expressa por *algum* número racional".

Segundo Ávila (2005, p. 48), "[...] foram os próprios Pitagóricos que descobriram que o lado e a diagonal de um quadrado são grandezas incomensuráveis".

Apresentaremos a seguir a demonstração de que o lado e a diagonal de um quadrado não são comensuráveis. Isto quer dizer que se tentarmos medir a diagonal, tomando o lado como unidade não é possível encontrar uma razão de dois inteiros. Atualmente sabe-se que esse resultado é representado por um número irracional (um múltiplo da $\sqrt{2}$).

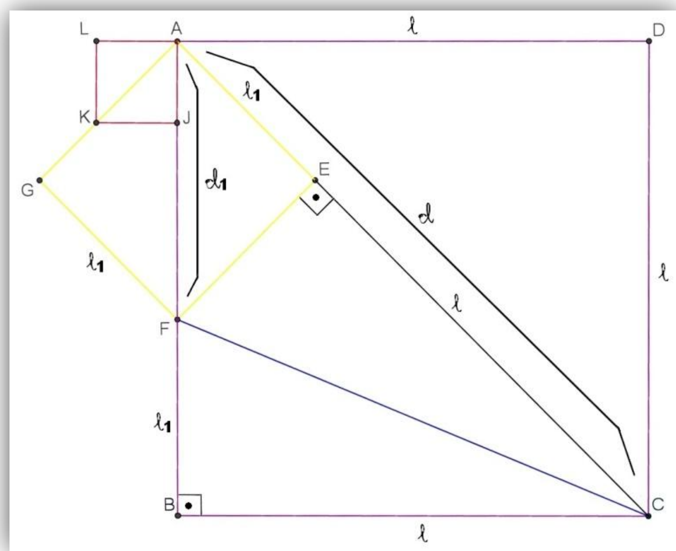


Figura 2 - O lado e a diagonal do quadrado

Dado um quadrado $ABCD$, onde d é a medida da sua diagonal e l a medida do seu lado. Supondo que estes dois segmentos são comensuráveis, isto é, existe um segmento de medida x e dois inteiros $\boldsymbol{m}$ e $\boldsymbol{n}$ tais que $\boldsymbol{d = mx}$ e $\boldsymbol{l = nx}$**.**

Marcamos o ponto ***E*** na diagonal $\overline{\boldsymbol{AC}}$ tal que $\boldsymbol{BC = EC}$, por ***E*** traçamos uma perpedicular a $\overline{\boldsymbol{AC}}$, determinando em $\overline{\boldsymbol{AB}}$ o ponto ***F***, o ângulo $\boldsymbol{E\hat{A}F}$ mede 45°, (a diagonal divide o ângulo reto em dois ângulos iguais), e consequentemente $\boldsymbol{A\hat{F}E}$, também medida 45°. com $\overline{\boldsymbol{EF}}$ que passa pelo ponto ***A***, logo $\boldsymbol{AFE}$ é um triângulo isóscele, com $\boldsymbol{AE = EF}$. Como $\boldsymbol{FBC}$ e $\boldsymbol{FEC}$ são triângulos retângulos com a mesma hipotenusa, e cujos catetos, respectivamente, $\boldsymbol{BC}$ e $\boldsymbol{EC}$ tem as mesmas medidas, pelo caso especial de Em seguida construímos o quadrado $\boldsymbol{AEFG}$, em que o ponto ***G*** é a interseção da paralela $\overline{\boldsymbol{AE}}$ congruência de triângulos retângulos: se dois triângulos retângulos têm ordenadamente congruentes um cateto e a hipotenusa, então esses triângulos são congruentes, então podemos afirmar que $\boldsymbol{BF = EF = AE}$. Chamando de $\boldsymbol{d_1}$ a medida da sua diagonal e $\boldsymbol{l_1}$ a medida do seu lado, temos:

$$\boldsymbol{l_1 = AE = AC - EC = AC - BC = d - l}$$

$$\boldsymbol{d_1 = AF = AB - BF = AB - AE = l - (d - l) = 2l - d}$$

Como $\boldsymbol{d = mx}$ e $\boldsymbol{l = nx}$, temos:

$$\boldsymbol{l_1 = mx - nx = (m - n)x = n_1 x}$$

$$\boldsymbol{d_1 = 2nx - mx = (2n - m)x = m_1 x}$$

Onde $\boldsymbol{n_1 = m - n}$ e $\boldsymbol{m_1 = 2n - m}$ são dois números inteiros positivos, com $\boldsymbol{m_1} < m$ e $\boldsymbol{n_1} < n$. Esses resultados indicam que o segmento de medida $\boldsymbol{x}$**,** esta contida $\boldsymbol{n_1}$ vezes em $\boldsymbol{l_1}$ e $\boldsymbol{m_1}$ vezes em $\boldsymbol{d_1}$, isto é $\boldsymbol{l_1}$ e $\boldsymbol{d_1}$ são comensuráveis.

Procedendo da mesma forma com o quadrado $AEFG$, vamos obter um novo quadrado cuja diagonal é $\boldsymbol{d_2 = m_2 x}$ e cujo lado é $\boldsymbol{l_2 = n_2 x}$, sendo que $\boldsymbol{n_2 = m_1 - n_1}$ e $\boldsymbol{m_2 = 2n_1 - m_1}$ são dois números inteiros positivos, com $\boldsymbol{m_2} <$ $\boldsymbol{m_1} < m$.

Dessa forma, podemos indefinidamente, ficar construindo novos quadrados, gerando uma sucessão estritamente decrescente de números inteiros positivos:

$$\boldsymbol{m > m_1 > m_2 > m_3 > m_4 > \cdots}$$

$$\boldsymbol{e}$$

$$\boldsymbol{n > n_1 > n_2 > n_3 > n_4 > \cdots}$$

Ou seja, $\boldsymbol{m_i} < m, \forall_{\boldsymbol{i}} \in \mathbb{N}$, o que é absurdo, dado que não pode haver uma infinidade de números inteiros positivos distintos menores do que $\boldsymbol{m}$ (existe exatamente $\boldsymbol{m-1\ elementos}$: $\boldsymbol{1, 2, 3, \ldots, m-2, e\ m-1}$). O mesmo ocorre para a sequência $n_i < n, \forall_i \in \mathbb{N}$. Logo, a diagonal e o lado do quadrado $ABCD$ são incomensuráveis.

Até o presente momento não se tem, com exatidão, uma data ou época da descoberta da existência de grandezas incomensuráveis. Porém, o primeiro manifesto que faz referência à incomensurabilidade se encontra na obra *Theaetetus*, de Platão (430 a.C. - 347 a.C.). O *Theaetetus,* que provavelmente data de cerca de 370 a.C., é indiscutivelmente sua maior obra sobre a epistemologia. Nela relata um diálogo entre Sócrates, *Theaetetus* e o seu professor Theodorus de Cirene sobre o conhecimento. O trecho que se faz referencia a incomensurabilidade está retratado a seguir.

Parte do diálogo entre Sócrates e Theaetetus, do documento Theaetetus, traduzido para o inglês, constante na biblioteca do Projeto Gutemberg, em http://www.gutenberg.org/dirs/1/7/2/1726/1726-h/1726-h.htm.(17h06min- 03/04/2010)

> *"SÓCRATES: E quando um homem questionado sobre o que é a ciência ou o conhecimento, para responder o nome de alguma arte ou ciência é ridículo, pois a questão é: "O que é conhecimento""? e ele responde: "O conhecimento é isto ou aquilo..."*
> *Teeteto: Verdade.*

SÓCRATES: Além disso, ele poderia responder simplesmente, mas ele dá uma enorme volta. Por exemplo, quando perguntado sobre a argila, ele poderia ter dito simplesmente que o tipo de argila não é o ponto em questão, que a argila é terra umedecida.
Teeteto: Sim, Sócrates, não há nenhuma dificuldade como você colocou a questão. Quer dizer, se não me engano, algo como o que ocorreu comigo e com meu amigo aqui, o seu homônimo Sócrates, num debate recente.
SÓCRATES: Qual foi essa discussão, Teeteto?
Teeteto: Theodorus estava transcrevendo sobre raízes, tal como a raiz de três ou cinco, mostrando que eles são incomensuráveis com a unidade: ele selecionou outros exemplos até dezessete e ali parou. Agora, como existem inúmeras raízes, ocorreu-nos a ideia de tentar incluí-los todos sob um nome ou classe.
SÓCRATES: E vocês acharam essa tal classe?
Teeteto: Penso que sim, mas eu gostaria de ter a sua opinião.
SÓCRATES: Deixe-me ouvir.
Teeteto: Dividimos todos os números em duas classes: aqueles que são compostos de fatores iguais, os quais nós comparamos com os números de figuras quadrados e os chamamos de número quadrado ou número equilátero, e esta foi uma classe.
SÓCRATES: Muito bom.
Teeteto: Os números intermediários, tais como três e cinco, e todos os outros números, que são composta de fatores diferentes, quer de um maior multiplicado por um menor, quer de um menor multiplicado por um maior e, quando olhados como uma figura, esta contém lados desiguais; todos esses nos comparamos com figuras retangulares e então os chamamos de números retangulares.
SÓCRATES: Excelente, e o que se seguiu?
Teeteto: As linhas ou lados, que têm para seus quadrados os números planos equiláteros, foram chamados por nós comprimentos ou magnitudes e as linhas que são as raízes de (e as linhas cujos potencias são iguais), os números retângulos, foram chamados de raízes, a razão deste último nome vem que eles são comensuráveis com o antigo [isto é, com os assim chamados comprimentos e

> *magnitudes] não em medida linear, mas no valor da superfície que contém seus quadrados, e mesmo acontece com os sólidos.*
> *SÓCRATES: Excelente meus meninos, acho que justifica plenamente os elogios de Theodorus, e que ele não será considerado culpado de falso testemunho.*
> *Teeteto: Mas eu sou incapaz, Sócrates, para lhe dar uma resposta semelhante sobre o conhecimento, que é o que você aparenta querer, e, portanto, Theodorus apesar de tudo falseou.*
> *SÓCRATES: Bem, mas se alguém os elogiou como corredores e diz que ele nunca encontrou nada igual entre os jovens, e depois que foram derrotados na corrida por um homem adulto, que era um grande corredor, elogiaria por algo menos verdadeiro?*
> *Teeteto: Certamente que não.*
> *SÓCRATES: E se a descoberta da natureza do conhecimento é uma questão tão pequena questão, como disse há pouco? Não é uma tarefa que teria os poderes do homem perfeito em todos os sentidos?"*

Esse diálogo representa bem as questões envolvendo conceitos como grandezas, números, medidas, áreas, resaltando a questão das grandezas incomensuráveis e dos números, hoje conhecidos como irracionais. Além de, naquela época, terem a preocupação de subdividir por classe de semelhança de tipo de grandeza.

1.3 - CONTRIBUIÇÕES DE EUDOXO

Por um século, aproximadamente, esse tipo de grandeza fomentou uma crise na base da matemática grega, que só seria aplacada por intermédio de Eudoxo de Cnidus (390 a.C. - 320 a.C.) quando ele apresenta uma solução para a questão das grandezas incomensuráveis, formulando uma definição de proporção aplicável tanto às grandezas comensuráveis, quanto às incomensuráveis.

Pouco se sabe da vida de Eudoxo (390 a.C. - 320 a.C.). Estudou com Arquitas, que foi um seguidor de Pitágoras, visitou a Sicilia, onde estudou medicina com Philiston, antes de fazer sua primeira visita a Atenas na companhia do médico Theomedon, e por lá ficou dois meses. Depois passou mais de um ano no Egito, onde estudou astronomia com os sacerdotes de Heliópolis. Do Egito, viajou para

Cyzicus no noroeste da Ásia Menor, na margem sul do mar de Mármara, estabelecendo aí uma escola. Por volta de 368 a.C., Eudoxo faz sua segunda visita a Atenas, estudando na Academia de Platão (430 a.C. - 347 a.C.), sendo considerado, nos dias atuais, um dos representantes da doutrina platônica.

Uma das grandes dificuldades da Matemática naquele tempo era o fato de que certas grandezas não serem comparáveis. O método de comparar dois segmentos $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ procurando um terceiro $\boldsymbol{t}$ tal que $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{mt}$ *e* $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{nt}$ para $\boldsymbol{m}$ *e* $\boldsymbol{n}$ inteiros positivos, não funcionava para todas as grandezas. Eudoxo (390 a.C. - 320 a.C.) definiu a igualdade entre duas razões de uma maneira engenhosa. Esta definição se encontra no livro V (definição 6) dos Elementos de Euclides (330 a.C. - 260 a.C.) onde fixa o critério de razões idênticas.

> *"Diz-se que grandezas estão na mesma razão, a primeira para a segunda e a terceira para a quarta se, quando equimúltiplos quaisquer são tomados da primeira e da terceira e equimúltiplos quaisquer da segunda e da quarta, os primeiros equimúltiplos são **ambos maiores que**, ou **ambos iguais a**, ou **ambos menores que**, os últimos equimúltiplos considerados em ordem correspondente."(Boyer, 1974, p. 66)*

Podemos entender esta definição do seguinte modo: Dado quatro grandezas $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ e $\boldsymbol{d}$, diz se que $\boldsymbol{a}:\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}:\boldsymbol{d}$ são iguais, se para cada par de inteiros positivos $\boldsymbol{m}$ e $\boldsymbol{n}$, ocorrer:

- (1ª) se $\boldsymbol{ma} < \boldsymbol{nb}$ então $\boldsymbol{mc} < \boldsymbol{nd}$,
- (2ª) se $\boldsymbol{ma} = \boldsymbol{nb}$ então $\boldsymbol{mc} = \boldsymbol{nd}$,
- (3ª) se $\boldsymbol{ma} > \boldsymbol{nb}$ então $\boldsymbol{mc} > \boldsymbol{nd}$.

Se as grandezas forem comensuráveis, ocorrerá o segundo caso. Ocorrendo qualquer um dos outros dois casos as grandezas serão incomensuráveis.

Essa nova concepção de proporção apresentada por Eudoxo (390 a.C. - 320 a.C.) para as grandezas, de fato resolveu o problema da incomensurabilidade, porém acarretou uma consequência para a matemática grega, fazendo com que ela se direcione, exclusivamente, para a geometria. Com isso, os gregos deixam de lado toda concepção aritmética dos pitagóricos, como os seus números figurativos. Exemplo disso pode ser notado nos Elementos de Euclides (330 a.C. - 260 a.C.), em que o número 1 é representado por um segmento de reta. (Eves, 2004, pp. 176 - 177)

Outra contribuição que é atribuído a este grande filósofo, é o *método da exaustão*. Podemos dizer que esse método é a mola propulsora do Cálculo Integral. O termo "*método de exaustão*" surgiu muito tempo mais tarde, aproximadamente em meados do século XVI.

A seguir apresentamos considerações sobre a tentativa de quadrar o círculo, como um exemplo do método de exaustão. Para isso iniciamos expondo algumas considerações sobre a maneira como os gregos calculavam a área de figuras poligonais.

1.4 - A QUADRATURA DO CÍRCULO

É também neste período, que têm origem três problemas de construção geométrica, cujas tentativas de solução contribuíram para o desenvolvimento da matemática ao longo do tempo, servindo de fonte de ideias e processos matemáticos. Devemos ressaltar que na Grécia Antiga, uma construção geométrica só poderia ser realizada utilizando régua não graduada e compasso. Devido a essa imposição, somente nos séculos XVIII e XIX é que se estabeleceu a impossibilidade dessas construções. Ao se dar um tratamento algébrico, tais questões ficaram conhecidas como *os três problemas clássicos da matemática grega*, sendo eles: Trissecção de um ângulo, que consiste em dividir qualquer ângulo em três partes iguais; Quadratura do círculo, que consiste em construir um quadrado com a mesma área de um círculo dado e a Duplicação do cubo, que consiste em construir um cubo com o dobro do volume de um cubo dado.

Desses três problemas clássicos escolhemos o segundo, a tentativa da quadratura do círculo, como uma aplicação do *método de exaustão* de Eudoxo (390 a.C. - 320 a.C.).

Na tentativa da quadratura do círculo desponta um problema que envolve a questão da comparação entre segmentos de retas e segmentos curvilíneos. Boyer (1974, pp. 67 - 68) apresenta considerações pertinentes a esta questão.

> *“[...] Aqui, também, parece ter sido Eudoxo quem forneceu a chave. Matemáticos anteriores parecem ter sugerido que se tratasse inscrever e circunscrever figuras retilíneas dentro e fora da figura curva, e ir multiplicando-se indefinidamente o número de lados; mas não sabiam como terminar o argumento, pois não conheciam o conceito de limites. Segundo Arquimedes foi Eudoxo quem forneceu o lema que hoje tem o nome de Arquimedes, às vezes chamado axioma de Arquimedes e que serviu de base para o método de exaustão [...]. O lema ou axioma, diz que, dadas duas grandezas que têm uma razão, isto é, nenhuma delas sendo zero, pode se achar um múltiplo de qualquer delas que seja maior que a outra. Esse enunciado eliminava um nebuloso argumento sobre segmento de retas indivisíveis, ou infinitésimos fixos, que às vezes aparecia.”(Boyer 1974, p.67)*

Para compreender este processo, devemos antes lembrar que os gregos dessa época calculavam a área de figuras poligonais por meio de comparação com a área de um quadrado conhecido. Para isso era necessário saber construir com o auxílio apenas de régua não graduada e compasso, também conhecido como instrumentos platônicos, um quadrado que tivesse a área equivalente ao da figura poligonal que se desejava medir, e este tipo de problema era conhecido como “*quadratura*”. Dessa forma para se encontrar a área de um retângulo de lados conhecidos ***a*** e ***b***, eles utilizavam a seguinte abordagem: Primeiro construíam um círculo de diâmetro igual à soma de seus lados (***d = a + b***), como se vê nas figuras abaixo.

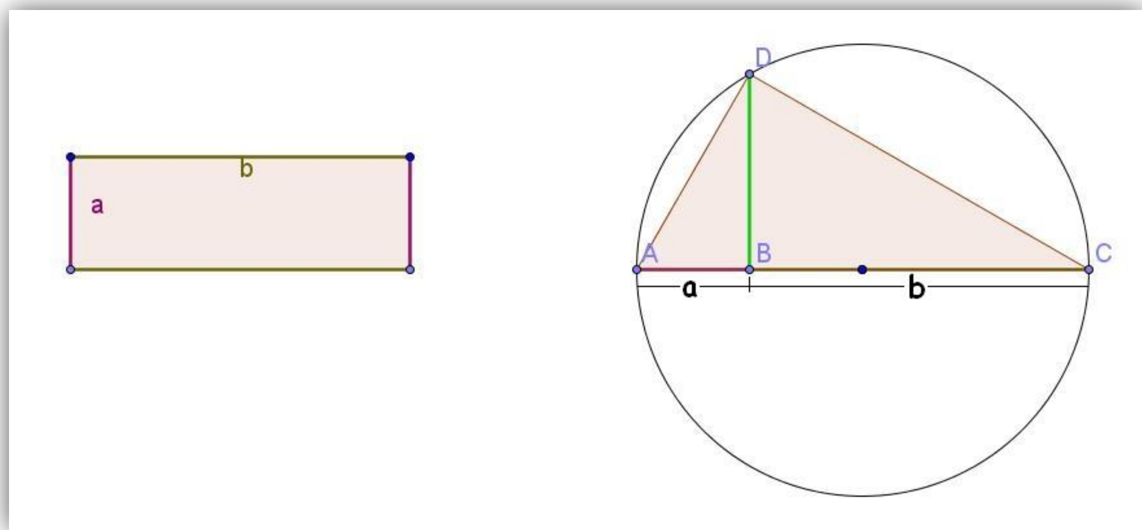


Figura 3 - Quadratura do retângulo

A seguir pelo ponto ***B*** traçavam uma perpendicular e obtinham o segmento ***BD,*** que seria o lado do quadrado de área igual à área do retângulo original.

Na linguagem atual mostra-se facilmente que $\overline{BD}$ é realmente o lado do quadrado procurado. Para isso observamos que se ligarmos os pontos ***A***, ***D*** e ***C***, teremos um triângulo retângulo, pois todo triângulo inscrito em uma semicircunferência, usando como base (do triângulo) o diâmetro da mesma, tem essa propriedade. Por este motivo o segmento $\overline{BD}$ é a altura, relativa à hipotenusa, deste triângulo. Assim, utilizando a relação métrica tem: $BD^2 = AB \,.\, BC$. Dessa forma verificamos que as áreas são iguais. (Ávila, 2005, p. 210)

Em se tratando de quadratura de polígonos, esse mecanismo servia muito bem. Todavia, achar a área das figuras cujos lados contenham segmentos de curvas, como de um círculo, de uma parábola ou, até mesmo, de uma espiral, era possível encontrar somente uma aproximação da área da região procurada, utilizando o método de exaustão. Eudoxo (390 a.C. - 320 a.C.) alimenta o desenvolvimento do pensamento dedutivo e assim abre caminho para novas "tentativas" de solução de problemas similares.

O *método da exaustão* é um procedimento que consiste em esgotar a região cuja área se quer calcular por meio de outras áreas conhecidas. A ideia central está em: dada uma região cuja área se pretende determinar, nela se inscrever regiões poligonais, cuja área é conhecida, e que se aproximem da primeira. A seguir, escolhe-se outra região poligonal que dê uma melhor aproximação e o processo continua, tomando polígonos com número cada vez maior de lados, de modo a "cobrir" toda a região dada. (Boyer, 1974, p. 68)

Desenvolvendo este raciocínio, apresentamos a concepção dessa ideia, a base do raciocínio lógico dedutivo envolvido e não uma demonstração que apresente uma expressão algébrica, pois nossa intenção é mostrar ***como*** este mecanismo ocorria. Dessa forma utilizando como exemplo a *quadratura do círculo*, indicamos por meio do método de exaustão.

Seja ***A, B, C*** e ***D***, o quadrado inscrito num círculo de raio ***r***, uma primeira aproximação da área da região procurada.

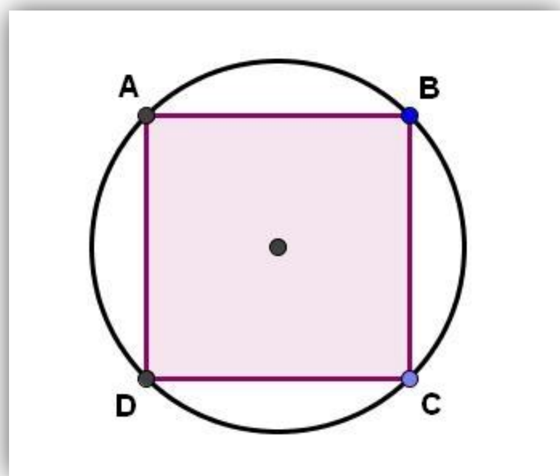


Figura 4 - Quadratura de círculo

Primeira aproximação

Porém a ideia central é achar a área do círculo, o que visivelmente não ocorreu. Buscando uma solução, inscreve-se um polígono com o dobro dos lados do anterior, para isso encontra-se o ponto médio dos arcos descrito pelos vértices, que nesse caso são os arcos $\widehat{AB}, \widehat{BC}, \widehat{CD}$ e $\widehat{DA}$. Unindo esses pontos, obtemos, nesse exemplo, o polígono regular octógono fornecendo uma aproximação melhor da área do círculo.

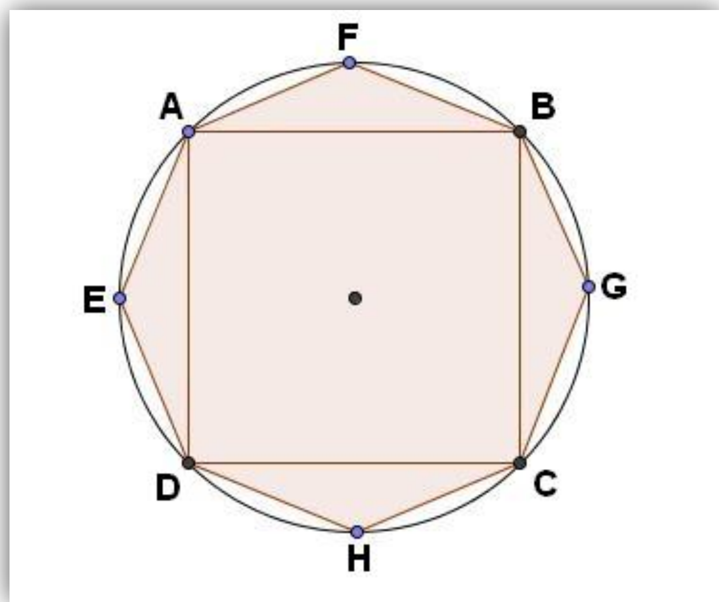


Figura 5 - Quadratura do círculo

Octógono regular

Repetindo esse processo, em cada etapa os polígonos obtidos se aproximam mais e mais do círculo. Na figura a seguir, estão representados os polígonos de quatro, oito e dezesseis lados, mas pode se notar que a região circular não está totalmente “coberta”.

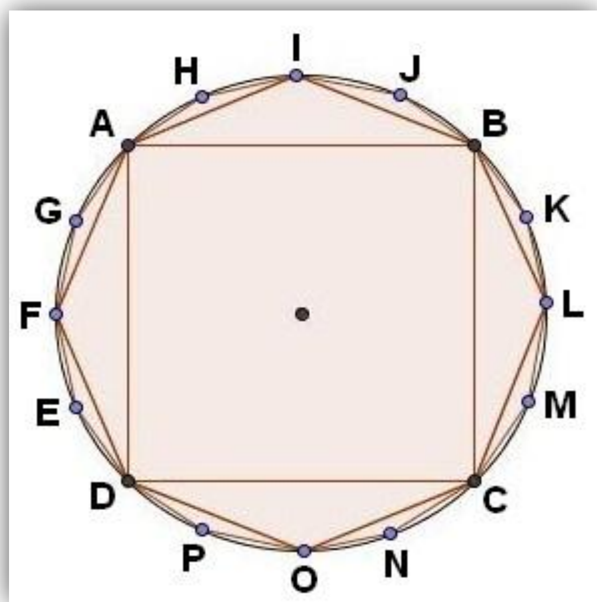


Figura 6 - Quadratura do círculo - Polígono de 16 lados

Esse processo pode ser continuado, sempre duplicando o lado do polígono anterior e quanto maior for o número desses lados, melhor será a aproximação de sua área com a área do círculo.

Ao estudar a figura deste grande geômetra grego Eudoxo (390 a.C. - 320 a.C.), ao que parece toda a sua notoriedade esta baseada em três grandes contribuições atribuída a ele; a teoria geral das proporções; o montante de numerosos resultados no estudo da secção áurea e a invenção do "*método da exaustão*", que acabamos de apresentar. Este último, mais tarde aprimorado por Arquimedes (287 a.C. - 212 a.C.), se tornando uma poderosa ferramenta para determinar áreas curvilíneas, superfícies e volumes – *um importante precursor do Cálculo Integral.*

Elaboramos este capítulo para situar o contexto histórico do pensamento filosófico/matemático da Grécia Antiga, que se iniciou aproximadamente no século seis antes de Cristo, para dessa forma, obter uma compreensão dos componentes históricos envolvidos na construção de um conceito matemático, a Integral.

CAPITULO II

AS CONTRIBUIÇÕES DE ARQUIMEDES E APOLÔNIO.

Para dar prosseguimento ao nosso objetivo, fomos buscar elementos da gênese das principais ideias envolvidas no Teorema Fundamental do Cálculo. Duas figuras que muito contribuíram para o florescer deste teorema foram Arquimedes (287 a.C. - 212 a.C.) e Apolônio (262 a.C. - 190 a.C.) , e com o auxílio delas iremos considerar os dois problemas que posteriormente se constituirão a base da construção do TFC.

Em Arquimedes (287 a.C. - 212 a.C.) buscamos elementos que constituíram os germes do conceito de integral, no desenvolvimento do estudo da quadratura. Com Apolônio (262 a.C. - 190 a.C.) encontramos a preocupação, também expressa por Arquimedes (287 a.C. - 212 a.C.), com o traçado de tangentes a curva. Muito mais tarde, no século XVI, certos princípios utilizados por Apolônio (262 a.C. - 190 a.C.) manifestaram-se no cálculo de reta tangente as curvas, descritas de fenômeno naturais. É em tais cálculos que se encontram as origens das derivadas, como coeficiente angular de tangente.

Assim buscamos criar elementos para que possamos formar uma base sólida a fim de se alcançar uma real compreensão dos processos envolvidos na elaboração de um conceito, pois não é nossa intenção repetir os passos que a humanidade levou séculos para dar, mas sim de compreender e aprender com eles.

2.1 – ARQUIMEDES

Da figura de Arquimedes (287? a.C.- 212? a.C), pouco se sabe. Nasceu e morreu na cidade de Siracusa, situada na ilha da Sicília. Há registros que passou algum tempo no Egito e é provável que tenha estudado com os sucessores de Euclides (330 a.C. - 260 a.C.), na cidade de Alexandria, que era então o centro da ciência grega. No consenso histórico, quase unânime, é considerado um dos maiores cientistas de todos os tempos e o maior matemático da antiguidade.

Os trabalhos de Arquimedes (287 a.C. - 212 a.C.) são verdadeiras obras-primas, superando todos os outros matemáticos que o antecederam, tanto pela originalidade dos métodos utilizados, quanto pelo rigor empregado em suas demonstrações. Parte de seus trabalhos foi perdida, porém das obras preservadas destacam-se: *Sobre o Equilíbrio das Figuras Planas I*; *A Quadratura da Parábola*; *Sobre o Equilíbrio de Figuras Planas II*; *Sobre a Esfera e o Cilindro*; *Sobre as Espirais*; *Sobre os Cones e os Esferoides*; *Sobre os Corpos Flutuantes*; *A Medida de um Círculo*; *O Contador dos Grãos de Areia*.

Desses tratados citados, destacaremos dois, em especial, *A Quadratura da Parábola* e *Sobre as Espirais,* porque neles se encontram as primeiras concepções em que se baseiam grande parte das ideias que deram origem ao Cálculo Integral. Outro fator importante para esta escolha é o fato de ter sito estas duas obras de Arquimedes (287 a.C. - 212 a.C.), juntamente com o tratado de Apolônio (262 a.C. - 190 a.C.) , intitulado *Tangências,* que Newton (1642 - 1727) e Leibniz (1646 - 1716) se inspiraram para o desenvolvimento, dezenove séculos mais tarde, no que hoje conhecemos como Teorema Fundamental do Cálculo, promovendo uma relação entre os filósofos da Grécia Antiga do século III a.C., e os matemáticos do século XVII d.C.

Para demonstrar esta ligação, temos que discutir esses três tratados de forma conceitual, intuitiva, tal como, aparentemente, foram concebidos por seus mestres. O primeiro a ser apresentado é *A Quadratura da Parábola*, em que foi utilizado *O Método* de Arquimedes.

Devemos destacar que Arquimedes (287 a.C. - 212 a.C.) desenvolveu o que hoje se conhece como *método mecânico*, para estabelecer certos teoremas. A fim de provar as proposições estabelecidas, de forma elegante e rigorosa, utiliza o *método de exaustão de Eudoxo (390 a.C. - 320 a.C.)*, de uma forma peculiar.

Esse eminente matemático da Escola de Alexandria [3] se dedicou ao cálculo de áreas e de volume de diversas figuras geométricas, entre elas o círculo, a parábola, a esfera, etc.

[3] Escola de Alexandria - **Instituto Museu de Alexandria**, constituído de jardins botânico, zoológico, escolas de medicina, observatório astronômico, biblioteca e centros de estudos, para onde foram convidados a trabalhar os

2.2 - O MÉTODO MECÂNICO

O que se destaca no trabalho de Arquimedes (287 a.C. - 212 a.C.) é que ele contém, praticamente, o único relato de um matemático da antiguidade, apresentando o método que o levou as suas descobertas. Arquimedes (287 a.C. - 212 a.C.) apresenta o caminho que utilizou para chegar a diversos resultados importantes e difíceis, de quadratura e de cubatura, entre outras.

O que torna sua obra ainda mais peculiar, além de sua originalidade, rigor e elegância, é a história por trás de seu descobrimento. Esteve perdida até 1906, quando o erudito dinamarquês J. L. Heiberg (1854-1928), professor de filologia clássica na Universidade de Copenhagem, em 1899 teve a informação sobre a existência de um palimpsesto de conteúdo matemático localizado em Constantinopla. Este, em específico, continha uma coleção de orações do século XIII, que foram escritas em um pergaminho no qual fora raspado um manuscrito matemático do século X. Com algumas linhas a que teve acesso, suspeitou que se tratasse de um texto de Arquimedes (287 a.C. - 212 a.C.). O manuscrito continha cerca de 200 "folhas" com obras de Arquimedes (287 a.C. - 212 a.C.) em grego, entre elas um texto inédito com a descrição do livro conhecido pelo título de *O Método*.

De acordo com Ávila (2005, p. 211): "Em suas descobertas, Arquimedes valia-se muitos de argumentos intuitivos e poucos rigorosos, mas depois de obter seus resultados, os demonstrava com impecável rigor."

Em seu famoso trabalho figura uma carta introdutória que Arquimedes (287 a.C. - 212 a.C.) enviou a Erastóstenes, reproduzida, em parte, a seguir:

> *"Saudações,*
> *Enviei a você em uma ocasião anterior alguns dos teoremas que descobri, apresentando apenas os enunciados e convidando-o a descobrir as demonstrações, que não havia fornecido naquela ocasião.*

maiores estudiosos dos mais variados ramos da ciência (matemática, astronomia, geografia, medicina e filosofia) do século III a.C., dentre eles destacaram-se Euclides, Eratóstenes (276-175 a.C.), Arquimedes (287-212 a.C.) e Apolônio (287-185 a.C.). Estes geniais pesquisadores, cada qual em seu campo de estudo, fariam de Alexandria o maior centro de estudos científicos por cerca de sete séculos (300-a.C.-415-d.C).

Os enunciados dos teoremas que enviei naquela ocasião são como segue. [...]
Além disso, vendo em você, como digo um estudante sério, um homem de eminência considerável em filosofia, e um admirador [da pesquisa matemática], achei apropriado apresentar e explicar para você detalhadamente no mesmo livro a peculiaridade de um certo método, através do qual será possível a você ter um começo para capacitá-lo a investigar alguns dos problemas em matemática por meio da mecânica. Estou persuadido de que este procedimento não é menos útil até mesmo para a demonstração dos próprios teoremas; pois algumas coisas tornaram-se claras para mim por um método mecânico, embora tivessem de ser demonstradas depois pela geometria, pois a investigação destas coisas por este método não forneceu uma demonstração real. Mas obviamente é mais fácil fornecer uma demonstração quando já adquirimos anteriormente, pelo método, algum conhecimento das questões, do que encontrar a demonstração sem qualquer conhecimento. Este é o motivo pelo qual, no caso dos teoremas que Eudoxo foi o primeiro a descobrir as demonstrações, a saber, que o [volume do] cone é a terça parte do cilindro [circunscrito], e [o volume] da pirâmide [a terça parte] do prisma [circunscrito], tendo a mesma base e a mesma altura, devemos dar uma parte importante do crédito a Demócrito que foi o primeiro a afirmar isto com relação a esta figura, embora ele não tenha demonstrado isto.
Eu próprio estou na posição de ter feito inicialmente a descoberta do teorema a ser publicado agora [pelo método indicado], e considero necessário expor o método, parcialmente por já ter falado sobre ele e não quero que se pense que proferi palavras em vão, mas também porque estou persuadido de que o método será bem útil para a matemática.
Pois entendo que alguns dos meus contemporâneos ou dos meus sucessores serão capazes, por meio do método uma vez que ele esteja estabelecido, de descobrir outros teoremas adicionais, os quais ainda não ocorreram para mim.
Em primeiro lugar vou apresentar o primeiro teorema que descobri por meio da mecânica:

> *Qualquer segmento de uma parábola é igual a quatro terços do triângulo que tem a mesma base e a mesma altura. Após isto apresentarei cada um dos teoremas investigados pelo mesmo método. Então, no final do livro, apresentarei a [demonstrações] geométricas [das proposições]...*
> *[Apresento as seguintes proposições que usarei ao longo do trabalho.] [...].” (texto extraído do livro Arquimedes, o Centro de Gravidade e a Lei da Alavanca, de André Koch Torres Assis)*

A importância que esta carta nos revela é a preocupação de Arquimedes (287 a.C. - 212 a.C.) em provar seus resultados pela geometria, que é a matemática grega que passou a existir a partir da solução apresentada por Eudoxo (390 a.C. - 320 a.C.) ao problema da incomensurabilidade, por meio da sua definição de proporção. No trecho destacado a seguir, podemos notar o quanto era importante a comprovação desses processos mecânicos por meio da geometria.

“[...] Estou persuadido de que este procedimento não é menos útil até mesmo para a demonstração dos próprios teoremas; ***pois algumas coisas tornaram-se claras para mim por um método mecânico, embora tivessem de ser demonstradas depois pela geometria****, pois a investigação destas coisas por este método não forneceu uma demonstração real.”*

Esta carta indica claramente que Arquimedes (287 a.C. - 212 a.C.) inicialmente descobria seus teoremas por meio do método mecânico desenvolvido por ele. Esse processo dedutivo ficou conhecido como *Método do Equilíbrio ou Lei das Alavancas* e se baseava em sete postulados e cinco proposições, relacionado abaixo:

Postulados

1. Pesos iguais a distâncias iguais estão em equilíbrio, e pesos iguais a distâncias desiguais não estão em equilíbrio, mas inclinam-se para o peso que está à maior distância.

2. Se, quando pesos a uma certa distância estão em equilíbrio, e algo é adicionado a um dos pesos, eles deixam de estar em equilíbrio, mas inclinam-se para o lado do peso que foi acrescentado.

3. De maneira semelhante, se algo é removido de um dos pesos, eles deixam de estar em equilíbrio, mas inclina-se para o peso do qual nada foi removido.

4. Se figuras iguais e semelhantes coincidem quando aplicadas uma sobre a outra, seus centros de gravidade também coincidem.

5. Em figuras desiguais, mas semelhantes, seus centros de gravidade estarão situados de maneira a preservar a semelhança.

6. Se magnitudes estão em equilíbrio a uma certa distância uma da outra, magnitudes iguais estarão em equilíbrio à mesma distância.

7. Se uma figura tem perímetro côncavo em uma e mesma direção, seu centro de gravidade estará dentro da figura.

Proposições

Proposição 1

Pesos que estão em equilíbrio a uma mesma distância são iguais.

Demonstração.

Pois, se forem desiguais, remova do maior a diferença entre eles. As sobras ficarão desequilibradas [pelo postulado 3]; o que é absurdo. Portanto, os pesos não podem ser iguais.

Proposição 2

Pesos desiguais a distâncias iguais não estão em equilíbrio, mas se inclinam para o peso maior.

Proposição 3

Pesos desiguais se equilibram a distâncias desiguais, com o peso maior a uma distância menor do centro de equilíbrio.

Proposição 4

Se dois pesos iguais não têm o mesmo centro de gravidade, o centro de gravidade dos dois, tomados conjuntamente, está no ponto médio da linha que une o centro de gravidade de cada um deles.

Proposição 5

Se três pesos têm seus centros de gravidade a distâncias iguais sobre uma mesma reta, o centro de gravidade do sistema estará sobre o peso que está no ponto médio.

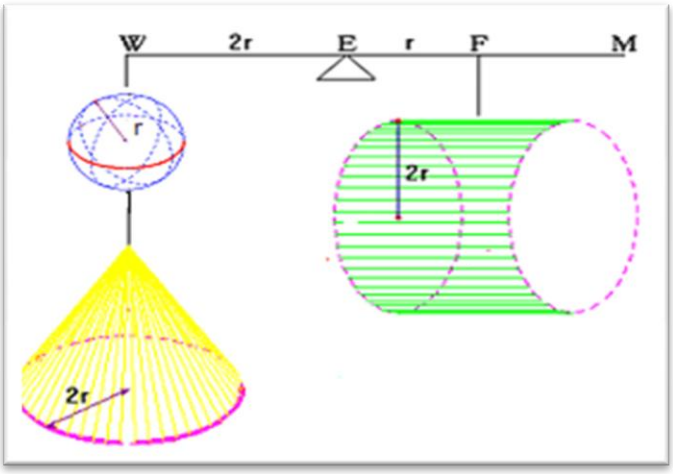


Figura 7 - Alavanca de Arquimedes

Fonte: Arquimedes e o volume da esfera - Universidade Federal de Minas Gerais, 2005.

Arquimedes (287 a.C. - 212 a.C.) baseava seu método mecânico em considerações puramente geométricas. A ideia fundamental do método criado por ele para determinar áreas ou volumes, de uma região, baseava-se em fragmentar a região a ser calculada em um número grande de fatias paralelas muito finas e as pendurava em uma das duas extremidades de uma alavanca dada, de tal forma a estabelecer o equilíbrio com uma figura de área ou volume com centros conhecidos, como mostra a figura acima.

Dessa forma, Arquimedes, experimentalmente, por meio de processo mecânico, estabelecia a área ou o volume das regiões que desejava e depois os conferia utilizando demonstrações geométricas, exigidas na época.

2.3 - UM EXEMPLO DA APLICAÇÃO DO MÉTODO: A QUADRADURA DA PARÁBOLA

No prefácio de sua carta para Eratóstones, do livro o Método, Arquimedes (287 a.C. - 212 a.C.) escreve:

"(...) *Em primeiro lugar vou apresentar o primeiro teorema que descobri por meio da mecânica: Qualquer segmento de uma parábola é igual a quatro terços do triângulo que tem a mesma base e a mesma altura (...)".*

Buscando uma aplicação do método mecânico a que Arquimedes (287 a.C. - 212 a.C.) se refere, encontramos um artigo publicado na revista Matemática Universitária, número quatro, da Sociedade Brasileira de Matemática, em 1986, intitulada "*Arquimedes, o Rigor e o Método"*, de autoria de Geraldo Ávila. Esta abordagem ilustra a essência desse processo, que apresentamos adiante.

Inicialmente destacamos que por segmento de parábola estamos nos referindo a região limitada pelo arco de parábola $\boldsymbol{ABC}$ e o segmento $\overline{\boldsymbol{AC}}$ como representado abaixo.

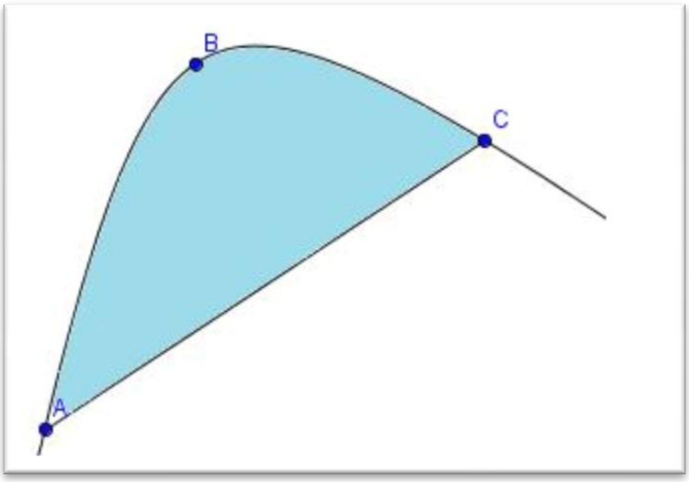


Figura 8 - Segmento de Parábola

Arquimedes (287 a.C. - 212 a.C.) intuiu e depois demonstrou que a área de tal segmento de parábola é $\frac{4}{3}$ da área do triângulo $\boldsymbol{ABC}$**,** com vértices nesses pontos. O ponto crucial é encontrar o ponto $\boldsymbol{B}$ que posteriormente passou a se chamar o vértice da parábola.

Dado um arco de parábola $\boldsymbol{ABC}$, com eixo ***e***, seja $\boldsymbol{D}$ o ponto médio do segmento $\overline{\boldsymbol{AC}}$, e $\boldsymbol{B}$ a intersecção da parábola com a reta paralela a ***e*** passando pelo ponto $\boldsymbol{D}$. O que se pretende estabelecer é que do segmento de parábola $\boldsymbol{ABC}$ é $\frac{4}{3}$ da área do triângulo $\boldsymbol{ABC}$.

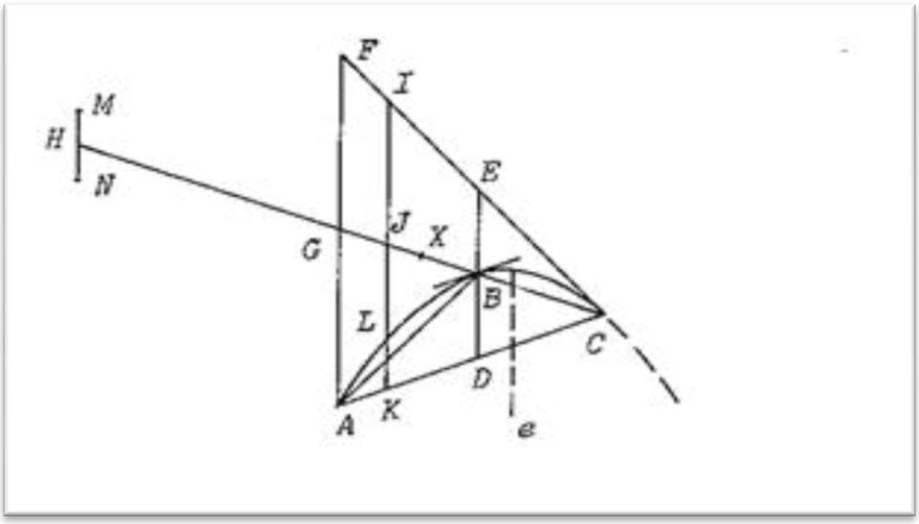


Figura 9 - Quadratura da Parábola

Fonte: Sociedade Brasileira de Matemática, 1986.

Para isto traçamos a reta $\boldsymbol{CF}$ tangente a parábola em $\boldsymbol{C}$. Por um ponto arbitrário $\boldsymbol{I}$, da parábola e também por $\boldsymbol{A}$, traçamos respectivamente, os segmentos $\overline{\boldsymbol{IK}}$ e $\overline{\boldsymbol{AF}}$ paralelos ao eixo. Traçamos também, por $\boldsymbol{C}$ e $\boldsymbol{B}$ o segmento $\overline{\boldsymbol{CH}}$ que encontra $\boldsymbol{AF}$ em $\boldsymbol{G}$ e tal que $\boldsymbol{IJ} = \boldsymbol{JK}\ \boldsymbol{e}\ \boldsymbol{AG} = \boldsymbol{GF}$. Ainda por propriedade da parábola podemos escrever:

$$\frac{\boldsymbol{KI}}{\boldsymbol{KL}} = \frac{\boldsymbol{AC}}{\boldsymbol{AK}}.$$

mas

$$\frac{\boldsymbol{AC}}{\boldsymbol{AK}} = \frac{\boldsymbol{GC}}{\boldsymbol{CJ}} = \frac{\boldsymbol{GH}}{\boldsymbol{GJ}},$$

De forma que

$$\frac{\boldsymbol{KI}}{\boldsymbol{KL}} = \frac{\boldsymbol{GH}}{\boldsymbol{GJ}}\ .$$

Esta proporção, que em forma moderna pode-se escrever $\boldsymbol{KI}.\boldsymbol{GJ} = \boldsymbol{KL}.\boldsymbol{GH}$, nos diz que se interpretarmos ***HJ*** como uma alavanca de fulcro[4] em ***G***, então o segmento ***KI*** no extremo ***J*** equilibra o segmento ***LK (= MN)*** no extremo ***H.*** (Isto é a lei da alavanca, obtida pelo próprio Arquimedes (287 a.C. - 212 a.C.) em seu livro "Sobre o Equilíbrio de Figuras Planas".) Variando o ponto ***L*** ao longo do arco da parábola ***ALBC*** *,* obtemos o triângulo ***AFC*** como união de todos os segmentos do tipo ***KI*** e o segmento de parábola como união de todos os segmentos do tipo ***KL.*** Agora vem a parte heurística do método: considerando o triângulo ***AFC*** e o segmento de parábola ***ABC*** como reunião dos infinitos segmentos ***KI*** e ***KL*** respectivamente, presume-se que o segmento de parábola com seu centroide em ***H*** equilibrará o triângulo ***AFC*** onde ele se encontra, com centroide $\boldsymbol{X}: \boldsymbol{GX} = \boldsymbol{GC}/\boldsymbol{3} = \boldsymbol{GH}/\boldsymbol{3}.$

[4] Alavanca de fulcro: máquina simples que consiste normalmente em uma barra rígida móvel em torno de um ponto fixo, denominado fulcro ou ponto de apoio. O efeito de qualquer força aplicada à alavanca faz com que esta gire em relação ao fulcro. A força rotativa é diretamente proporcional à distância entre o fulcro e a força aplicada.

Sendo ***p*** a área do segmento de parábola ***ABC*** e a do triângulo ***AFC***, teremos então:

$$\frac{\boldsymbol{a(AFC)}}{\boldsymbol{p}} = \frac{\boldsymbol{GH}}{\boldsymbol{GX}} = \boldsymbol{3}$$

Mas $\boldsymbol{a(AFC) = 4a(ABC)}$, logo $\boldsymbol{p = 4a\,(ABC)/3}$, que é o resultado desejado.

Essa é a maneira como Arquimedes (287 a.C. - 212 a.C.) utilizava o seu método mecânico para descobrir o resultado, entretanto ele observou que esse argumento pode se remeter a uma conclusão verdadeira. Porém, dito por ele mesmo, para haver uma prova contundente de tal resultado, esse requer uma "demonstração geométrica".

Após essa exposição, procurando mostrar como Arquimedes (287 a.C. - 212 a.C.) fazia suas descobertas utilizando seu método mecânico, Ávila prossegue no seu artigo expondo, no mesmo exemplo, o lado rigoroso da obra desse grande geômetra.

Para demonstrar este rigor, ele toma a definição V que aparece nos Elementos de Euclides (330 a.C. - 260 a.C.):

"Dadas duas grandezas distintas, se da maior se subtrai mais que a sua metade, e do restante mais que sua metade, e assim por diante, acabará restando uma grandeza menor que a menor das grandezas dadas."

E assim dessa definição expressa duas equivalências:

*1ª) Dadas as grandezas **A** e **B** existe um múltiplo de **A** que supera **B**, isto é,*

$$\boldsymbol{nA} > B \quad .$$

*2ª) Dadas as grandezas **A** e **B**, existe um múltiplo de **B** menor que **A**, isto é,*

$$\frac{\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{n}} < A \quad .$$

Utilizando o seguinte argumento: pelo ponto médio ***D*** da base ***AC*** do segmento de parábola, que vai cortar a parábola em ***B***. Repetimos a mesma construção referente aos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, obtemos os pontos ***E*** e ***F*** respectivamente, e assim por diante. A ideia é aproximar a área da parábola pela soma das áreas dos triângulos ***ABC***, ***AEB***, ***BFC***, etc. (Ávila, 1986).

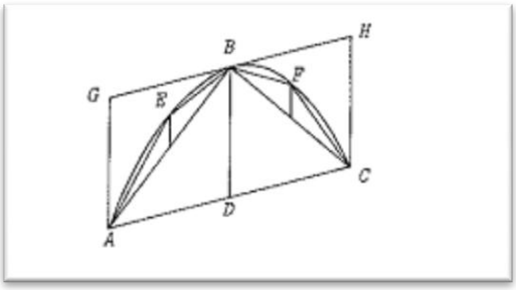


Figura 10 - Aplicação do Método de Arquimedes

Fonte: Arquimedes, o rigor e o método.

Nessa demonstração, seguindo os preceitos do rigor exigidos na época, Arquimedes (287 a.C. - 212 a.C.) utiliza o método de exaustão de Eudoxo (390 a.C. - 320 a.C.) em sua descoberta e assim determinar a área dessa região delimitada por um arco de parábola e uma corda (segmento de parábola). O primeiro passo foi inscrever um triângulo $\boldsymbol{ABC}$ no segmento parabólico, tal que a tangente a parábola em $\boldsymbol{B}$ fosse paralela à corda $\boldsymbol{AC}$, em uma primeira aproximação. Para obter a área de uma região mais próxima da delimitada pelo segmento parabólico, ele inscreveu os triângulos $\boldsymbol{AEB}$, $\boldsymbol{BFC}$, em segunda aproximação. Feito isso, adicionou a área dos triângulos construídos em cada uma das quatro regiões ainda não incluídas entre os arcos $\mathbf{AE}$, $\mathbf{EB}$, $\mathbf{BF}$ e $\mathbf{FC}$, obtendo uma terceira aproximação somando as áreas dos quatro novos triângulos construídos com a área já encontrada.

Arquimedes (287 a.C. - 212 a.C.) prova então que para cada triângulo os dois triângulos construídos sobre seus lados têm área total igual a $\frac{1}{4}$ da área do triângulo dado anterior.

Repetindo sucessivamente o raciocínio, Boyer (1993, p.30) afirma que "dessa forma ele "exaure" o segmento parabólico" e a área total pode ser aproximada por uma soma de áreas e então Arquimedes (287 a.C. - 212 a.C.)

mostra que a área do arco parabólico não pode exceder $\frac{4}{3}$ da área do primeiro triângulo inscrito e, da mesma forma, que não pode ser menor que esse valor.

Em linguagem atual, a soma das áreas dos triângulos agrupada adequadamente conduz a uma série em que cada termo é $\frac{1}{4}$ do anterior, com exceção do primeiro. A soma de tal série é $\frac{4}{3}$ do primeiro termo.

Em outras palavras, a área do arco de parábola é dada por:

$$\Delta ABC + \frac{\Delta ABC}{4} + \frac{\Delta ABC}{4^2} + \frac{\Delta ABC}{4^3} + \cdots = \Delta ABC \left[1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \ldots\right] = \frac{4}{3}\Delta ABC$$

Pelo constituído da carta de Arquimedes (287 a.C. - 212 a.C.) a Erastóstenes, pode-se observar como faz Ávila (2007):

> ”[...] que o chamado “*método dos indivisíveis*”, inventado no século XVII, e que deu origem ao moderno Cálculo Diferencial e Integral, é muito parecido com o antigo “*método mecânico*” de Arquimedes. Tanto um quanto o outro carece de uma sólida fundamentação lógica, mas contém os ingredientes que facilitou as descobertas. Essa semelhança entre os dois métodos deixa claro que os matemáticos do século XVII, seguiram a mesma trilha de Arquimedes [...]” (Ávila, 2007, pp. 94 - 95).

A próxima concepção envolvida na gênese do TFC é o problema do traçado da reta tangente a uma curva num ponto, que ao longo dos séculos foi objeto de estudo de muitos matemáticos, tais como Arquimedes (287 a.C. - 212 a.C.), Apolônio (262 a.C. - 190 a.C.) , Descartes (1596 - 1650) e Fermat (1601 - 1665).

2.4 - O TRAÇADO DE RETAS TANGENTES A UMA CURVA NUM PONTO

O conceito de retas tangentes é resultado de uma lenta e longa evolução histórica iniciada na Antiguidade, primeiramente relacionado com uma circunferência e outras curvas, e mais tarde, a gráfico de função.

Na realidade, o problema da tangente refere-se à busca da reta que "mais se aproxima" de uma curva nas vizinhanças de um ponto. A partir do século XVI a procura de tal reta refere-se a curvas que descreve fenômenos naturais, isto é gráfico de função. Entretanto, na Grécia Antiga o conceito de função ainda não estava formalizado, mas os gregos foram os pioneiros, os primeiros a buscarem processos para as constantes de retas tangentes a uma curva num ponto.

Este fato é creditado a dois grandes matemáticos gregos, Apolônio (262 a.C. - 190 a.C.) e Arquimedes (287 a.C. - 212 a.C.). O primeiro, em seu tratado *Tangências*, descreve métodos de determinação de tangentes a uma circunferência, a uma hipérbole ou a uma elipse, além da tangência entre circunferências. Já o segundo, no seu estudo *Sobre Espirais*, determina a reta tangente a espiral num ponto dado. Contudo, ambos trataram o problema por meios de seus processos particulares.

A seguir apresentamos um exemplo do tratado de *Tangências* devido a *Apolônio (262 a.C. - 190 a.C.)* , e outro, *Sobre as Espirais,* devido a *Arquimedes (287 a.C. - 212 a.C.).*

2.5 - APOLÔNIO DE PERGAMO

Contemporâneo de Arquimedes (287 a.C. - 212 a.C.) e ao que parece um cordial rival, muito pouco se sabe de sua vida. Nasceu por volta de 262 a.C. e faleceu em 190 a.C., aproximadamente, em Perga, no sul da Ásia Menor.

Presume-se que estudou em Alexandria e talvez tenha lecionado algum tempo em sua "Universidade". Foi Apolônio quem recebeu o privilégio, do cognome de "O Grande Geômetra" e não Euclides (330 a.C. - 260 a.C.), apesar deste último ser reconhecido como sinônimo de geometria, devido ao seu trabalho amplamente conhecido; "*Os Elementos*". O pouco que se conhece das obras de Apolônio, devemos a Pappus de Alexandria (séc. IV d.C.), por meio de breves descrições contidas em seu trabalho "*O Tesouro*", uma compilação dos tratados matemáticos de Apolônio, os quais parecem retratar deduções bastante avançadas para época. Esses conteúdos contribuíram para, séculos mais tarde, o desenvolvimento da *Geometria Analítica*.

De suas obras, "*As Cônicas*", sobre secções cônicas, é a que mais se destaca. Composto por oito livros, sete dos quais sobreviveram, devemos a este grande geômetra a inclusão de termos, hoje amplamente utilizados, como elipse, parábola e hipérbole, Eves (2004, p.199) cita que Apolônio introduziu tais termos com o significado de secções cônicas, entretanto, foram tomados da terminologia pitagórica antiga.

Apesar da pouca documentação de sua vida e obra, é consenso que esta figura matemática influenciou a ciência de uma forma inovadora, constituindo uma base para novas descobertas. [*...] foi à matemática pura de Apolônio que permitiu cerca de 1800 anos mais tarde, os Principia de Newton; esse, por sua vez, deu aos cientistas de hoje condições para que a viagem de ida e volta à Lua fosse possível. (Boyer, 1974, p. 111)*

Entre os trabalhos conhecidos de Apolônio (262 a.C. - 190 a.C.), destacamos o tratado *Tangências*. Sobre ele, Pappus descreve um problema proposto e as devidas soluções apresentadas pelo geômetra. Essa questão é conhecida atualmente como "*Problema de Apolônio"*, estando relacionada ao traçado de retas tangentes a uma curva; esta curva é uma circunferência. Enunciamos tal questão a seguir:

"***Dadas três coisas, cada uma das quais pode ser um ponto, uma reta ou um círculo, traçar um círculo que é tangente a cada uma das três coisas."***

Aparentemente o problema apresenta um enunciado simples e de fácil compreensão, porém apresenta dez possibilidades, a saber: três pontos; três retas; dois pontos e uma reta; duas retas e um ponto; dois pontos e uma circunferência; duas circunferências e um ponto; duas retas e uma circunferência; duas circunferências e uma reta; um ponto, uma reta e uma circunferência; três circunferências, tais combinações oriundas da natureza de seus objetos: pontos, retas ou circunferências. Devemos lembrar que as soluções exibidas por Apolônio (262 a.C. - 190 a.C.) eram, estritamente, construções geométricas em sua forma mais genuína, realizadas tão somente com régua e compasso. Assim, dependendo do método geométrico empregado e do número de intersecções realizada na construção, cada caso pode admitir diferentes soluções.

Entre os métodos clássicos de solução, o que exibe a determinação do menor número intersecções foi proposto por François Viète (1540 – 1603), o que não significa que por conter o menor número de intersecções seja a forma mais simples de construção. Considerando que uma reta é uma circunferência de raio infinito e um ponto, uma circunferência de raio nulo, Viète em sua obra "*Apolônio Gallus*", desenvolve uma possível solução.

Encontramos na Universidade Federal do Paraná uma monografia que apresenta uma abordagem ilustrativa desse processo de construção com base na geometria inversiva[5], intitulada "*Resolução do Problema de Apolônio por meio da inversão: Um roteiro de estudo para a formação de professor em geometria*", de autoria de Ana Cristina Corrêa Munaretto (2010), apresentada a seguir:

Problema: Dadas três circunferências A; B e C, disjuntas e externas duas a duas, encontrem as circunferências que são tangentes a A; B e C simultaneamente.

[5] Geometria Inversiva - Jacob Steiner, no século XIX, descobriu e desenvolveu uma geometria para resolver problemas (tais como o Problema de Apolônio) que até então eram considerados irresolúveis pela geometria de Euclides. Steiner deixou-nos então como legado as bases da *geometria inversiva.*
Dada uma circunferência de centro em *O* e raio *r,* dizemos que a *inversão* é a transformação que faz corresponder, a cada ponto *P* do plano, diferente de *O*, o ponto *P'* que se encontra sobre a semirreta *OP* e que verifica o fato de $\overline{OP} \times \overline{OP'} = r^2$. A inversão pode então ser comparada como uma espécie de reflexão onde a chamada *circunferência de inversão* funciona como um eixo de reflexão. Pedro Miguel Oliveira (2007) - Grupo de Geometria da APM.

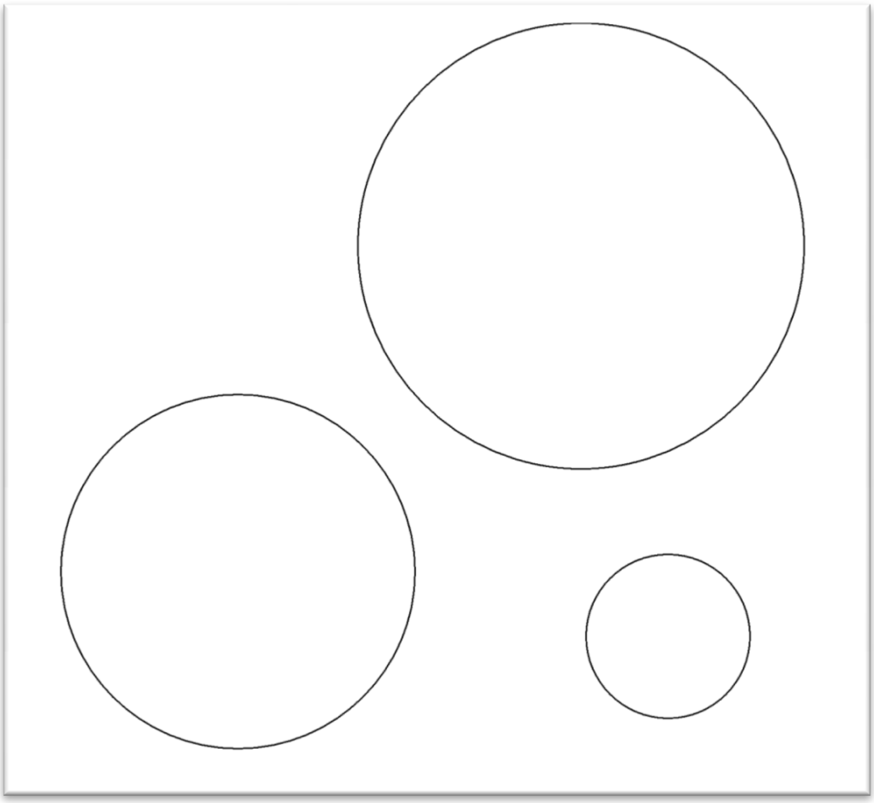


Figura 11 - Problema de Apolônio: enunciado.

Solução: Sejam P e Q os pontos mágicos de A e B. Assim, P é interno à circunferência A, ou P é interno à circunferência B. Suponhamos, sem perda de generalidade, que P é interno a A, logo, Q é interno à B. Pela proposição acima, se S é uma circunferência de inversão com centro em P, então, os inversos A' e B' de A e B, respectivamente, em relação à S, são circunferências concêntricas. Pois bem, se C' é o inverso de C em relação à S, que posição C' ocupa em relação à A' e B'?

Afirmação 1) Como C é externa à A e P (centro da circunferência de inversão) é interno à A, então, C' é interna à A'.
Afirmação 2) Como B e C são externas e P (centro da circunferência de inversão) é externo à B e à C, então, B' e C' são externas.

Portanto, o nosso problema foi reduzido ao seguinte: Sendo A' e B' circunferências concêntricas; com B' interna à A'; e C' uma circunferência compreendida no anel entre A' e B', encontremos as circunferências que são tangentes a estas três simultaneamente.

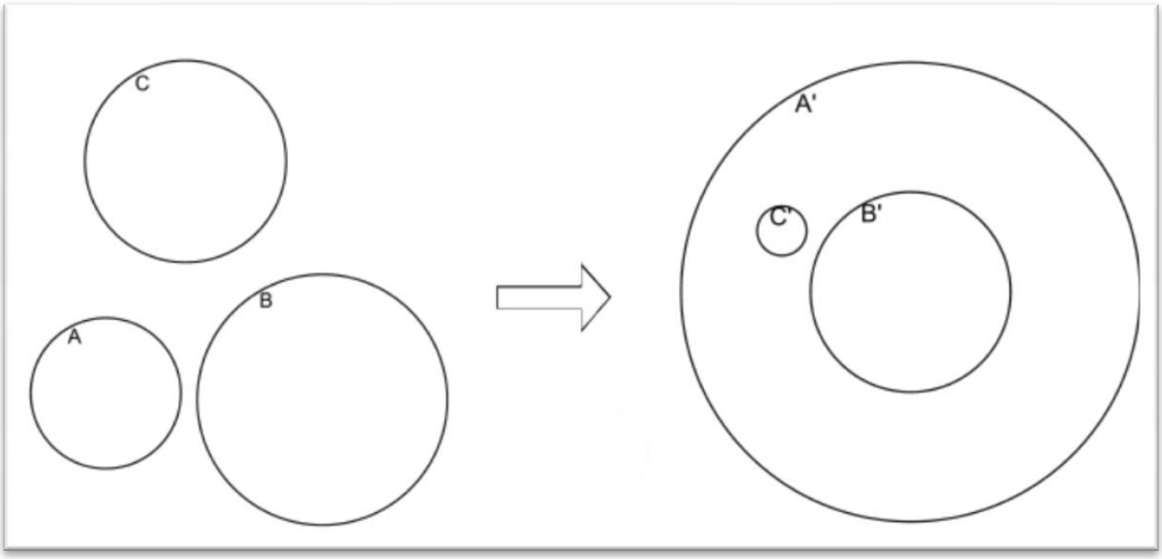


Figura 12 - Redução do Problema a um caso particular

A solução deste problema é fácil e, ao todo, são oito as circunferências procuradas. Sendo C_1 a circunferência de centro em Q' e raio $\frac{r_1+r_2}{2}$, então temos quatro soluções cujo centro pertence à C_1 onde r_2 é o raio de A' e r_1 é o raio de B'. Destas, duas são circunferências tangentes externas com C' e duas são circunferências tangentes internas com C'.

Agora, sendo C_2 a circunferência de centro em Q' e raio $\frac{r_2-r_1}{2}$, temos quatro soluções cujo centro pertence à C_2, sendo duas tangentes externas com C' e duas tangentes internas com C'.

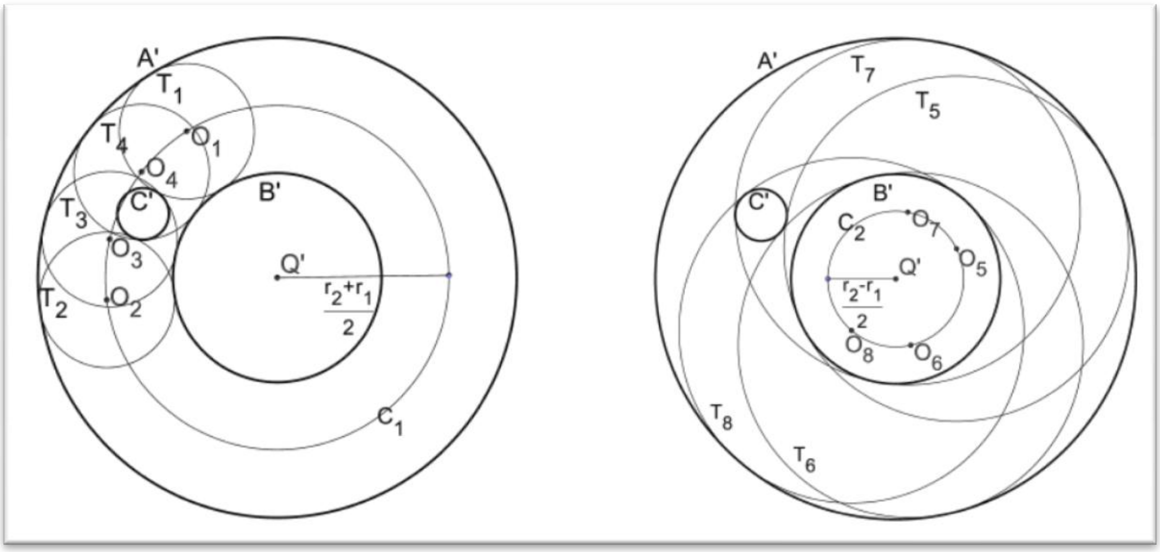


Figura 13 - Quatro soluções com centro C_1 e quatro soluções com centro em C_2

Portanto, temos as oito soluções como mostra a figura abaixo: Basta agora "desinvertê-las" e teremos a solução do Problema de Apolônio:

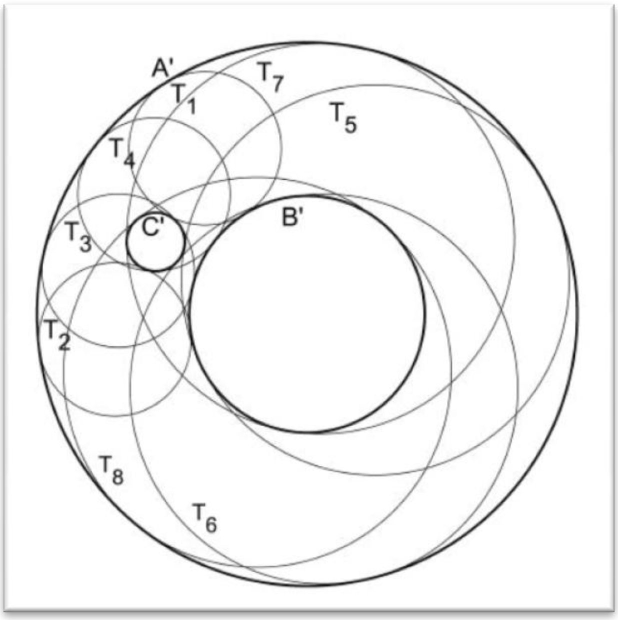


Figura 14 - As oitos soluções invertidas

Basta agora "desinvertê-las" e teremos a solução do Problema de Apolônio:

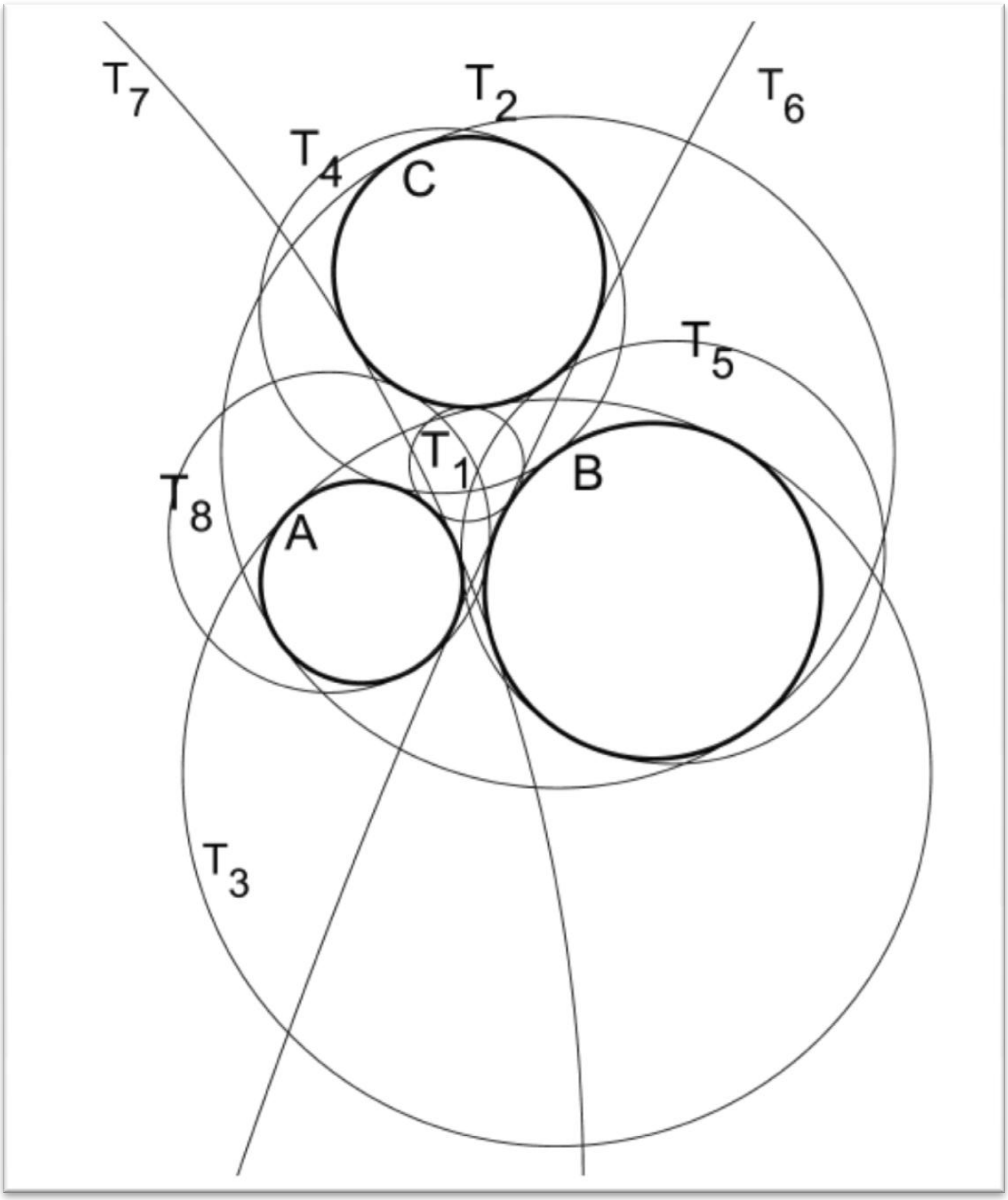


Figura 15 - A solução do Problema de Apolônio

Deixamos claro aqui que não é nossa intenção demonstrar o passo a passo, desenvolvido pela autora, e sim expor uma solução como ilustração do Problema de Apolônio. Contudo, aos interessados em desenvolver o roteiro apresentado, deixamos o site: *www.pb.utfpr.edu.br/anamunaretto/monografia.pdf,* como auxílio.

Ao longo dos séculos, muitos matemáticos estudaram e tentaram solucionar o problema de Apolônio (262 a.C. - 190 a.C.) , tais como: Newton (1642 -

1727), Descartes (1596 - 1650), Gauss entre outros, mas só em 1824 através da descoberta da geometria inversiva, descoberta por Jacob Steiner, que o matemático dinamarquês Julius Petersen (1839-1910) produziu uma solução bastante elegante para o problema de Apolônio (262 a.C. - 190 a.C.) .

As tentativas de solucionar este problema contribuíram para o desenvolvimento de uma geometria alternativa, estando intimamente ligado ao conceito estabelecido da Geometria Analítica.

2.6 - ARQUIMEDES E A ESPIRAL

Do acervo científico de Arquimedes (287 a.C. - 212 a.C.), distinguimos o tratado *Sobre Espirais. N*ele são apresentadas propriedades geométricas particulares de uma curva, hoje conhecida como *Espiral de Arquimedes*. Essa curva é gerada por um ponto, com movimento uniforme ao longo de uma reta enquanto esta mantém um movimento circular uniforme em torno de um ponto fixo. Arquimedes (287 a.C. - 212 a.C.) atribui a criação desta curva a Conon de Alexandria (150? a.C. - 215? a.C.) e que o estudo que fez das espirais era parte da busca de soluções dos três problemas famosos, a saber: duplicação do cubo ou o problema de construir o lado de um cubo cujo volume é o dobro do cubo dado; trissecção do ângulo ou o problema de dividir um ângulo arbitrário dado, em três partes iguais; quadratura do círculo ou o problema de construir um quadrado com área igual a de um círculo dado. Boyer (1974, p.94).

Esta espiral é representada nos dias de hoje em coordenadas polares (***r***, ***θ***), podendo ser descrita pela equação:

$$\boldsymbol{r = k\theta, k} \in \boldsymbol{R_{+},} \text{ onde } \boldsymbol{k} \text{ é constante.}$$

O raio vetor "r" varia proporcionalmente ao movimento do ângulo polar θ, que é determinado pelo raio vetor em relação ao eixo da espiral. Podemos notar que nesta representação o tempo não aparece. A importância histórica da definição original dessa curva feita por Arquimedes (287 a.C. - 212 a.C.) é a introdução do conceito de tempo na geometria, decisivo para todo o desenvolvimento posterior da mecânica clássica.

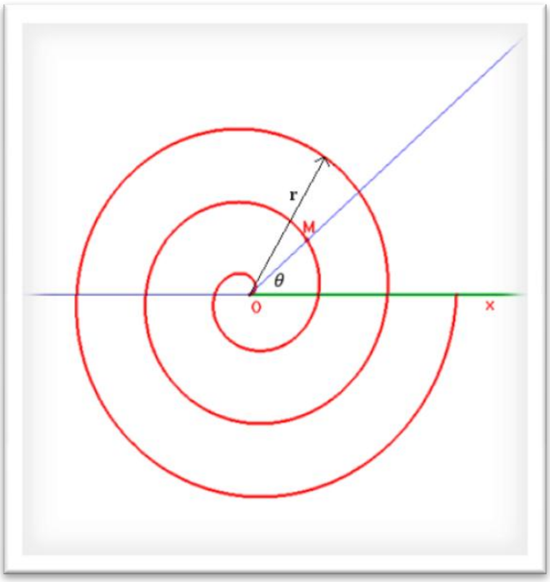


Figura 16 - Espiral de Arquimedes.

Mas, a genialidade desse geômetra não para na introdução do tempo. Ele também determina a área de um segmento de uma espiral. Por área de segmento de espiral está se entendendo a área da região limitada pelo segmento de espiral desde seu ponto inicial *0* até a intersecção com o eixo horizontal, como assinalado na figura abaixo:

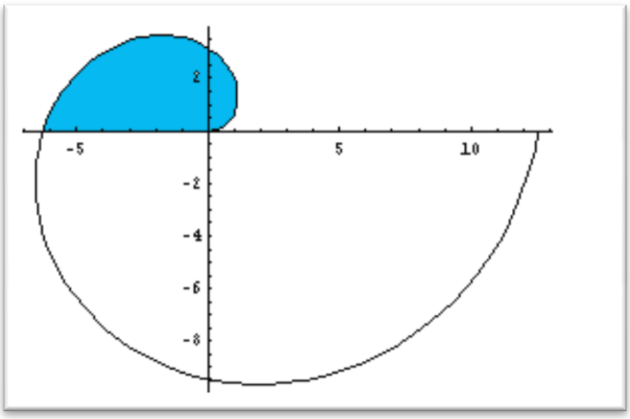


Figura 17 - Área de segmento de espiral

Além de solucionar o problema do traçado da tangente num ponto desta curva, sem ter qualquer conhecimento da expressão descrita por esta função.

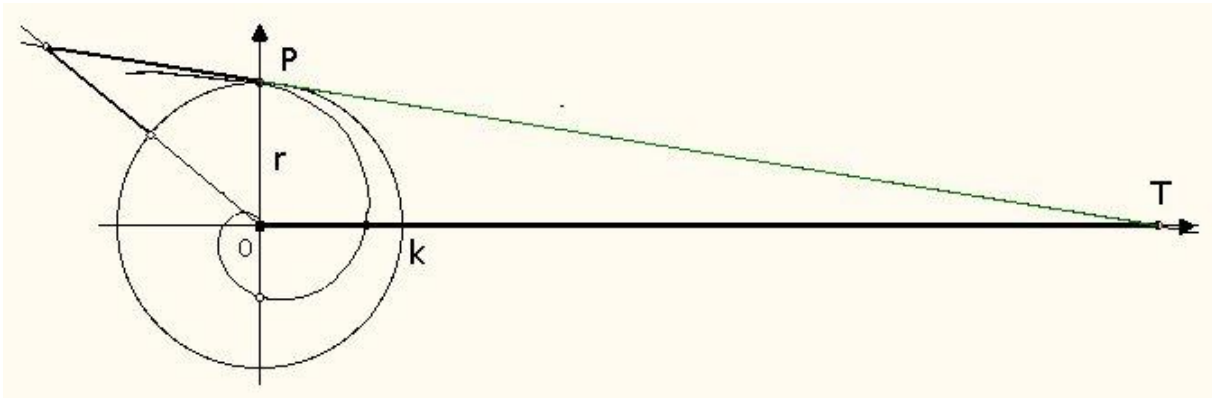


Figura 18 - Reta tangente a uma espiral

O traçado de reta tangente à espiral, pelo método de Arquimedes (287 a.C. - 212 a.C.) é descrito da seguinte forma: Dada uma espiral de centro 0, traçar a reta tangente a ela, pelo ponto P. Deve-se:

- Traçar o raio vetor $\overline{OP}$ e o arco de circunferência $\widehat{PK}$ (centro 0, raio $\overline{OP}$, sendo K o ponto do eixo horizontal);
- Traçar OT perpendicular a $\overline{OP}$ e de comprimento igual ao arco $\widehat{PK}$;
- PT é a reta tangente a espiral.

Ao resolver o problema de traçado de tangente, utilizando processos mecânicos, Arquimedes (287 a.C. - 212 a.C.) trás noções que séculos mais tarde, com os trabalhos de Viéte (1540 - 1603) e com a criação da Geometria Analítica, muito contribuíram para a noção de derivada, quando o problema de traçado de tangente passou a receber um tratamento algébrico. Por este motivo, Arquimedes (287 a.C. - 212 a.C.), que também contribuiu com o desenvolvimento das quadraturas, é considerado por alguns como o precursor do Cálculo Diferencial e Integral.

No prefácio de seu trabalho *Sobre as Espirais*, Arquimedes escreve para Dositeu (século III a.C), discípulo de Conon[6] (século III a.C), que reproduzimos um trecho.

> *Mas, embora tenham passado muitos anos desde a morte de Conon, não vi qualquer um dos problemas [os três problemas] ter sido resolvido por uma única pessoa. Desejo agora resolvê-los um por um, particularmente por*

[6] Conon de Samos, matemático e astrônomo do séc. III a.C..

> *haver dois dentre eles que são de realização impossível [errados], [o que pode servir como um aviso] para aqueles que afirmam descobrir tudo, mas não produzem demonstrações de suas afirmações, pois podem ser refutados como tendo de fato tentado descobrir o impossível.* (Ver Eecke, P. (1960) – *Les Oeuvres Complétes d´Archimède*, Albert Blanchard, Paris. Vol. I , p. 239)

Nesse trecho da carta, vemos que de fato, Arquimedes (287 a.C. - 212 a.C.) desenvolveu o estudo da espiral no intuito de resolver os três problemas: *Trissecção de um ângulo*: *Quadratura do círculo Duplicação do cubo*.

Tanto Apolônio (262 a.C. - 190 a.C.) como Arquimedes (287 a.C. - 212 a.C.) exerceram forte influência no desenvolvimento matemático, não só em sua época, como nos séculos seguintes. As duas concepções, a quadratura e o traçado de reta tangente, movimentaram o pensamento lógico da Grécia Antiga por vários séculos, atribuindo a eles contribuições inestimáveis à matemática. Somente no século XVII, Newton (1642 - 1727) e Leibniz (1646 - 1716) que, trabalhando de forma independente e utilizando pressupostos diferentes, descobriram que esses dois problemas estão inter-relacionados de maneira recíproca. A resolução desses problemas apresentados por eles, explicitaram que os dois conceitos fundamentais do Cálculo: a derivada [traçado da reta tangente] e a integral [quadratura], são resultados de operações uma inversa da outra. Com isso ficou estabelecido que resolvido um daqueles problemas, o outro, automaticamente, se resolve. Esse fato é hoje conhecido com o Teorema Fundamental do Cálculo.

2. 7 - O DECLÍNIO DA MATEMÁTICA GREGA

Entre todas as civilizações conhecidas na antiguidade, sem dúvida a grega foi quem mais contribuiu para o desenvolvimento intelectual da humanidade. O poder de especulação e lógica desse povo era admirável, a elegância e o rigor que impunham em suas demonstrações, são verdadeiras obras de arte; as contribuições à ciência, à filosofia e à matemática são inegáveis. Poderíamos até arriscar a dizer que não houve outra civilização que tenha influenciado tanto o comportamento da humanidade.

A matemática grega estendeu-se por um intervalo de tempo, de ***600 a.C.*** a ***600 d.C.,*** aproximadamente.

Ptolomeu de Alexandria (90? d.C. -168? d.C.) foi, sem dúvida, a última grande figura "científica" dessa gloriosa civilização, e a ele devemos o conhecimento dos trabalhos de Hiparco de Nicéia (190? a.C – 120? a.C).

Após esse período grego, conhecido historicamente como helenístico, compreendido entre a morte de Alexandre, o Grande, em 323 a.C. e a anexação da península grega e ilhas, por Roma em 147 a.C., a matemática sofreu uma desaceleração em seu desenvolvimento, um verdadeiro declínio depois de um período tão longo de glória. Roma pouco ou quase nada contribuiu para a ciência, a filosofia e menos ainda para a matemática. Citando Boyer (1974, p.129), os romanos mostraram pouca inclinação para a investigação especulativa ou lógica.

Devemos resaltar duas grandes figuras que deram significativas colaborações à matemática, aproximadamente no início do século III, Diofante de Alaxndria (200? D.C. - 284? D.C.), o maior algebrista grego e Papus de Alexandria (290 - 350), o último geômetra grego.

A invasão islâmica do Egito, em 640 d.C., acarretou a destruição do maior centro cultural de todos os tempos, a Biblioteca de Alexandria, e um incêndio, que no mínimo poderíamos classificá-lo como um crime contra a humanidade, devido aos registros inéditos que desapareceram para sempre.

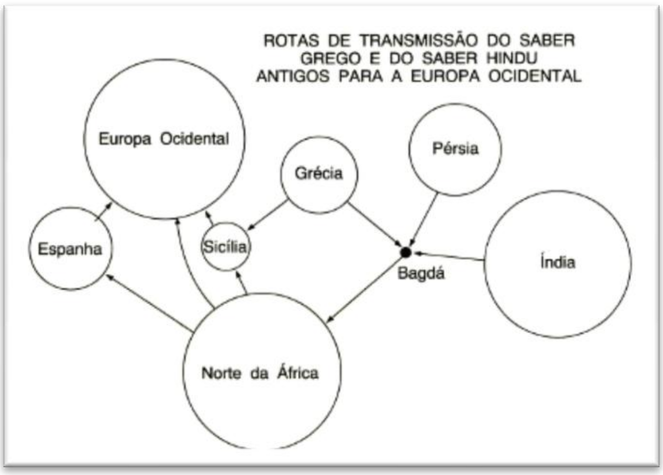


Figura 19 - Rotas de transmissão do saber

Fonte: Eves (2004, p. 292)

Contudo, ao contrário dos romanos, os árabes deram significativas contribuições consolidando e aperfeiçoando a “herança grega” matemática. O matemático Thabit ibn Qurra, traduziu para o árabe todos os trabalhos de Arquimedes (287 a.C. - 212 a.C.), assim como os trabalhos de Apolônio (262 a.C. - 190 a.C.) sobre as secções cônicas e a geometria de Euclides (330 a.C. - 260 a.C.). Não há um acordo sobre o papel desempenhado pelos árabes no desenvolvimento matemático. Segundo Eves (2004 - p. 267), “*(...) no balanço a seu favor, o importante fato de que eles custodiaram de maneira admirável grande parte do patrimônio intelectual do mundo até que os europeus despertassem (...)”*

No próximo capítulo apresentamos as contribuições apartir do Renascimento até os trabalhos de Newton (1642 - 1727) e Leibniz (1646 - 1716) que vieram a solidificar o Cálculo Infinitesimal.

CAPITULO III

DERIVADA E INTEGRAL, O RENASCIMENTO.

3.1. O *POR QUE:* DO RENASCIMENTO DA MATEMÁTICA EUROPEIA

Na transição entre a Idade Média e a Idade Moderna, a Europa foi devastada pela guerra, a peste e a fome. Os turcos interromperam o comércio de mercadorias do Oriente para o Ocidente, os árabes dominavam todo o comércio e a navegação pelo mediterrâneo, obrigando os europeus a buscarem novas alternativas a fim de se restabelecer o comércio, principalmente com a Índia.

A única rota existente para solucionar este problema era por meio do Oceano Atlântico, viagens extremamente longas e perigosas, as quais os europeus não estavam preparados. Este tipo de translado requeria um conhecimento mais aprofundado, com técnicas de navegações avançadas e navios mais resistentes, o que implicava em métodos de construções arrojados, criação de instrumentos para a navegação e criação de cartas marítimas e geográficas.

Para solucionar os desafios que a expansão marítima determinou, eram necessários altos conhecimentos matemáticos e científicos. É evidente que este processo foi um dos fatores determinantes para uma retomada europeia à matemática, bem como às outras ciências. Dessa forma, o continente europeu renasce se tornando uma grande potência.

Outro fator que possibilitou esse renascimento matemático europeu, foi a queda de Constantinopla em 1453 d.C., um centro cultural dominado pelos Turcos, que permitiu a fuga de sábios e artistas para o Ocidente, proporcionando o acesso aos originais gregos e aos estudos orientais desenvolvidos sobre os temas.

A invenção da imprensa, em 1450, pelo alemão Johannes Gutenberg contribui para a disseminação dos conhecimentos, através da comercialização de livros, agora tipografados em um processo mais rápido do que até então usado, os manuscritos, verdadeiras obras de artes. Da mesma forma que a invenção da escrita é um marco histórico, pois possibilitou um legado mais fidedigno do até então existente, a imprensa, por sua vez, fornece a difusão desta maneira mais rápida.

3.2. OS SÉCULOS XV E XVI E SUAS CONTRIBUIÇÕES

Nesse contexto a atividade matemática renasceu no século XV, influenciada pela necessidade de novas rotas de comércios e navegação, abordando a aritmética, a álgebra e a trigonometria, ocorrendo, principalmente, nas cidades mercantis em desenvolvimento.

A matemática de hoje não apareceu por mágica, mas por meios de longos processos de construção. Os séculos XV e XVI foram de grande importância e de significativas contribuições que constituíram a base de todo desenvolvimento algébrico. Tomando como parâmetro a sequência estabelecida por Eves (2004, pp. 296 - 308), apresentamos algumas figuras, dessa época, que direta ou indiretamente auxiliaram na formalização do Teorema Fundamental do Cálculo.

- Nicholas Cusa (1401-1464)

Filho de um pescador pobre, ascendeu rapidamente à hierarquia da igreja, chegando a Cardeal. Foi governador de Roma. Seus trabalhos matemáticos consistem na reforma do calendário e nas tentativas de quadrar o círculo e trisseccionar o ângulo.

- George Von Peurbach (1423-1463)

Aluno de Nicholas Cusa. Escreveu alguns tratados de aritmética e astronomia, além de coligir uma tábua de senos. Iniciou uma tradução latina, a partir do grego, da obra "*Almagesto*" de Ptolomeu.

- Johann Muller (1436-1476)

Conhecido como "*Regiomontanus*". Estudou com Peurbach e tomou para si o trabalho de traduzir o "Almagesto" iniciado por seu mestre. Traduziu também textos de Apolônio (262 a.C. - 190 a.C.) , Herão e Arquimedes (287 a.C. - 212 a.C.). Publicou "*De Triangulis Omnimodis"*, primeira exposição europeia sistemática de trigonometria plana e esférica, independente da astronomia. Montou um observatório e, com uma prensa tipográfica escreveu tratados de astronomia.

- Luca Pacioli (1445-1509)

Frade franciscano que se dedicou a compilações de álgebra, aritmética e geometria. Publicou *"Summa de arithmetica, geométrica, proportioni et proportionalita*", conhecida apenas por $\boldsymbol{S\breve{u}ma}$. Este trabalho, que contém muito dos assuntos encontrados no "*Líber abaci*", trata de operações fundamentais para a extração de raízes quadradas, escrituração mercantil, equações quadráticas, álgebra sincopada (p, para indicar mais). Publicou ainda *"De divina proportione"*, com ilustrações de sólidos geométricos feitas por Da Vinci, aluno de Pacioli.

- Johann Widman (1460-??)

Credita-se a ele o primeiro registro dos símbolos $+ \ \boldsymbol{e} \ -$. Estes símbolos eram usados para indicar excesso e deficiência.

- Nicolau Copérnico (1473-1543)

Astrônomo polonês, estudou leis, medicina e astronomia. Apresentou em 1530 sua teoria Heliocêntrica para o universo, ano de sua morte. Para elaborar este trabalho necessitou de conhecimentos da trigonometria. Sua teoria para o *Sistema Planetário* diferia da usual para a época, a teoria *Geocêntrica*.

- Michael Stifel (1486-1567)

Considerado o maior algebrista alemão do século XVI, trabalhou com álgebra, números racionais e irracionais. Associou uma progressão aritmética a uma progressão geométrica, antecipando assim a invenção dos logaritmos.

- Scipione del Ferro (1465-1526)

Professor de matemática da Universidade de Bolonha, resolveu algebricamente a cúbica $\boldsymbol{x^3 + mx = n}$, baseando seu trabalho em textos árabes. Não publicou resultados de seu trabalho, mas revelou o segredo ao seu discípulo Antônio Fior.

- Nicolo Fontana de Brescia (1499-1557)

É creditada a ele a descoberta da solução para a cúbica $\boldsymbol{x^3 + px^2 = n}$. Conhecido por Tartaglia, foi vítima do primeiro roubo autoral da história da matemática, a solução desta cúbica. Foi o primeiro a usar matemática na ciência dos tiros de artilharia. Escreveu a melhor aritmética do século XVI com tópicos de operações numéricas e da aritmética mercantil. Publicou também edições de Euclides (330 a.C. - 260 a.C.) e Arquimedes (287 a.C. - 212 a.C.).

- Girolamo Cardano (1501-1576)

Gênio matemático inescrupuloso, pois roubou e publicou a solução de Tartaglia como sendo sua no livro "*Ars Magna*". Cardano ainda conseguiu apresentar a solução da equação quártica geral por meios algébricos neste mesmo livro, contudo quem tem êxito nessa tarefa foi seu discípulo Ludovico Ferrari.

- Federigo Comandino (1509-1575)

Em 1558, traduz as obras de Arquimedes (287 a.C. - 212 a.C.), permitindo, deste modo, o acesso dos latinos ao método de "integração" utilizado por Arquimedes, o que contribuiu para o desenvolvimento do Cálculo Infinitesimal.

- Robert Recorde (1510-1558)

Deixou pelo menos cinco publicações, sendo a mais conhecida *"The ground of artes"* o seu mais completo livro de aritmética. Também era médico. Fez trabalhos sobre astronomia, geometria, medicina e álgebra. Foi ele quem apresentou o sistema de Copérnico aos ingleses. É dele a introdução do símbolo ***(=)*** para a igualdade.

- Georg Joachim Rhaeticus (1514-1576)

Matemático teutônico, aluno de Copérnico, durante doze anos trabalhou na construção de tábuas trigonométricas notáveis e úteis até hoje. Estas tábuas referem-se as seis funções trigonométricas atuais e é graças a ele que os trabalhos de Copérnico foram publicados.

- Rafael Bombelli (1536 - 1573)

Algebrista italiano nascido em Bologna, importante matemático da Itália, pioneiro no estudo sobre os números imaginários: sua principal publicação, intitulada *Álgebra*, composta de cinco volumes, sendo que os livros IV e V, incompletos, só foram editados (1573) no ano seguinte à sua morte. A partir das suas ideias desencadeou-se todo desenvolvimento teórico dos números complexos, uma curiosidade a respeito desses números é que, incorretamente, se atribui sua "criação" às equações do segundo grau, quando na verdade se deve esta "criação" às equações do terceiro grau.

- François Viéte (1540-1603)

Importante matemático francês do século XVI, foi advogado e membro do parlamento francês. Dedicava-se à matemática por lazer. Tem uma vasta obra, com trabalhos em trigonometria, álgebra e geometria. *"Cânon mathematicus seu ad triangula"* é o primeiro livro que desenvolveu triângulos planos e esféricos. Entretanto, o mais famoso trabalho de Viète é "*In artem*" ao qual o desenvolvimento do simbolismo algébrico muito se deve. Nesse texto Viète introduziu a prática de se usar vogais para representar incógnitas e consoantes para representar constantes. Sendo um algebrista, aplicou a álgebra à trigonometria e à geometria. Estudou os problemas da *Antiguidade* dando valiosas contribuições, mostrando que os problemas da trissecção e da duplicação de um ângulo dependem da solução de uma equação cúbica. Além de sua tentativa de restaurar os trabalhos Tangências de Apolônio (262 a.C. - 190 a.C.) . Em 1594, Viéte se envolve em uma polemica com o Christopher Clavius (1538-1612), sobre a reforma gregoriana do calendário.as. Segundo alguns autores, credita-se a ele o epíteto de "*Pai da Álgebra*".

- Christopher Clavius (1537-1612)

Matemático alemão publicou uma edição dos "Elementos" de Euclides (330 a.C. - 260 a.C.). Escreveu textos de aritmética, álgebra, trigonometria e astronomia. Participou na reforma do calendário gregoriano.

- Simon Stevin (1548-1620)

Credita-se a este matemático o fato de ter atribuído aos decimais o status de números. Os princípios e operações com os números decimais estão no seu pequeno livro denominado, em francês, "*La Disme*" (O Decimal). Destacam-se ainda três importantes publicações em 1586: *Princípios de estática*, baseado nos trabalhos de Arquimedes (287 a.C. - 212 a.C.) (teoria da alavanca, centro de gravidade dos corpos, etc.); *Aplicações de estática* e os *Princípios de hidrostática*.

Podemos concluir que as realizações matemáticas dos séculos XV e XVI contribuíram para: expansão da álgebra simbólica, padronização do cálculo com numerais indos-arábicos, uso de frações decimais, resolução de equações cúbica e quárticas por meios algébricos, aprimoramento da trigonometria e progressão da teoria das equações. Para Eves (2004, p. 314). "O campo estava preparado para os notáveis avanços do próximo século".

O "*horror"* ao infinito, tão "celebrado" pelos filósofos da Grécia Antiga, não parece ter causado grande influência aos filósofos dos séculos XV e XVI, tanto que suas especulações sobre o assunto, infinito, contribuíram muito para o desenvolvimento do Cálculo no século XVII e os seguintes.

Para Colin (1983, vol. III, p. 7), "[...] a revolução que mudou a forma de encarar a natureza e que gerou a moderna concepção científica, foi a que começou no século XV e se prolongou até o fim do século XVI".

Todavia, esta ciência só se estabeleceu nos séculos seguintes, quando a matemática tornou-se uma ferramenta cada vez mais essencial nas demonstrações das ciências físicas. Contudo, é no século XVII que os estudos de Arquimedes (287 a.C. - 212 a.C.) e Apolônio (262 a.C. - 190 a.C.) tornaram-se a maior influência na base do conceito do Cálculo e consequentemente nos estudos de Newton (1642 - 1727) e Leibniz (1646 - 1716).

3.3. O SÉCULO XVII

Esta época foi extremamente produtiva para matemática, duas grandes áreas são estabelecidos neste século: no início dele, a *Geometria Analítica* e no fim do mesmo, o *Cálculo Infinitesimal*.

O século XVI lançou as sementes, com o renascimento matemático voltado para uma álgebra mais simbólica, devido a influência árabe exercida nos manuscritos gregos, auxiliando a compreensão geométrica. Nesse século os matemáticos continuaram e aprofundaram os estudos na tentativa de resolução dos problemas de quadratura e de reta tangente a curvas, descrita por um móvel na forma $y = x^n$. “Do século dezessete em diante, portanto, a matemática desenvolve-se mais em termos de lógica interna do que sob a ação de forças econômicas, sociais ou tecnológicas, [...]” (Boyer, 1974, p. 245).

De forma independente, dois franceses, Pierre de Fermat (1601 - 1665) e René Descartes (1596 - 1650), por meio de processos particulares, estabeleceram uma relação entre a álgebra e a geometria. Ambos graduados em Direito e nenhum deles era matemático. O primeiro, um apaixonado pela ciência matemática e o segundo, pela filosofia. Contudo não podemos deixar de reverenciá-los pela “*criação*” da *Geometria Analítica,* que muito auxiliou o desenvolvimento matemático.

Entretanto, devemos ressaltar que os filósofos gregos da antiguidade usavam figuras geométricas para as resoluções de “equações primitivas”. Somente cerca de dois mil anos depois, Descartes (1596 - 1650) e Fermat (1601 - 1665), seguindo caminho inverso, traduziram as relações geométricas em equações algébricas.

Em um consenso histórico, são creditados a Descartes: o epíteto de Pai da Geometria Analítica e a “criação” dos eixos de coordenadas. Entretanto, segundo Boyer (1974, p. 253) relata o quão longe está *La Géométrie* da Geometria Analítica usada hoje. Em sua obra são usadas ordenadas oblíquas, não eixos perpendiculares, e nem pensava em representar suas coordenadas como pares de números. Nesse contexto as coordenadas de Oresme se assemelham mais com as de hoje, tanto em motivação quanto em forma. Conclui que *La Géométrie* está longe da compreensão de seu tempo, como *As Cônicas* de Apolônio na antiguidade. Porém reconhece que ambas tiveram um papel extraordinário para o desenvolvimento matemático.

Ao que parece, a Geometria Analítica se desenvolveu sob a influência de *La Géométrie*, porém pode ser considerado o primeiro texto sobre o assunto. Em seu trabalho *As Cônicas*, Apolônio (262 a.C. - 190 a.C.) já havia feito uma caracterização das seções cônicas por meio de eixos que se assemelham as coordenadas, embora não lhes fossem atribuídos valores numéricos. Porém, a latitude e a longitude na *Geographia*, de Ptolomeu, eram coordenadas numéricas. Não é nossa intenção criar nenhuma polêmica quanto à este assunto, apenas apresentamos os fatos por fidelidade histórica.

Levando em consideração que sem os conceitos introduzidos pela "*nova geometria"* desses dois mestres, à matemática de então: reta tangente, máximos e mínimos, quadratura, funções e formalização do Cálculo e, consequentemente, o seu teorema fundamental, não seriam possíveis, optamos por expor, brevemente, as contribuições dadas por Descartes (1596 - 1650) e Fermat (1601 - 1665).

As principais ideias de Descartes aparece em seu tratado intitulado "*Discours de la Méthode pour Bien Conduire as Raison et Chercher la Vérité dans les Sciences"* (Discurso do Método para Bem Conduzir a Razão e Procurar a Verdade nas Ciências), em 1637, esse tratado era acompanhado por três apêndices: *La dioptrique*, *Les météores* e *La géométrie.* Desses três somente o último, além de ser o mais famoso, é a única publicação matemática dele.

O *La géométrie* é dividido em três partes. Na primeira encontramos uma explicação de alguns dos princípios da álgebra geométrica, o que revela um avanço real em relação aos gregos. Enquanto que, para os antigos gregos, uma variável correspondia ao comprimento de um segmento e, consequentemente, o produto de duas variáveis representava a área de algum retângulo, assim como o produto de três variáveis representava o volume de um paralelepípedo qualquer. Eves (2004, p.384).

Segundo o próprio Eves (2004):

> *"Para Descartes, $\boldsymbol{x^2}$ não reproduzia uma área, mas sim o quarto termo da proporção $\mathbf{1} : \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} : \boldsymbol{x^2}$, passível de ser representado por um segmento de reta fácil de construir quando se conhece $\boldsymbol{x}$". Ao se utilizar um segmento unitário é possível, dessa forma, representar qualquer potência, ou um produto de variáveis, por meio de um segmento de reta e então, quando se atribuem valores a essas variáveis, construir efetivamente o segmento de reta. Dessa forma Descartes, marcava $\boldsymbol{x}$ num eixo dado e então um comprimento $\boldsymbol{y}$, formando um ângulo fixo entre os eixos.(ibid., p. 384)*

A ideia central da segunda parte de La géométrie traz, entre outras coisas, uma classificação de curvas e um método de construir tangentes a curvas que pode ser resumido da seguinte maneira: sejam $\boldsymbol{f(x,y)=0}$ a equação de uma curva dada e $(\boldsymbol{x_1,y_1})$ as coordenadas do ponto P da curva pelo qual se deseja traçar a tangente. Seja Q um ponto do eixo *x,* de coordenadas $(\boldsymbol{x_2,0})$. Então a equação da circunferência de centro Q pelo ponto P é:

$$(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x_2})^2+\boldsymbol{y}^2=(\boldsymbol{x_1}-\boldsymbol{x_2})^2+\boldsymbol{y_1^2}$$

A terceira parte contém a resolução de equações de grau maior que dois, sendo ainda apresentado o uso do princípio de identidade de polinômios.

Boyer (1974, pp. 254 - 255) considera que a exposição da geometria analítica exibida por Fermat (1601 - 1665) em sua obra *Introdução aos lugares,* publicada após sua morte, era muito mais sistemática e didática que a de Descartes (1596 - 1650). Além disso, era mais próxima da atual, pelo fato de tomar o eixo das ordenadas, como usualmente, perpendicular ao eixo das abscissas. Boyer, ainda admite a possibilidade de Fermat, desde 1629, estivesse de posse de sua *geometria analítica,* pois alguns anos mais tarde escreve um tratado, também não publicado em vida, chamado "*Método para achar máximos e mínimos".*

As contribuições de Fermat partem de suas tentativas de determinação de máximos e mínimos em curvas poligonais. Também "descobriu" como aplicar seu processo de valores vizinhos para achar a tangente a uma curva algébrica da forma $\boldsymbol{y=f(x)}$" (Boyer, 1974, p. 255). Sendo $\boldsymbol{P(a,b)}$ o ponto de tangencia à curva, e tomando um ponto vizinho da curva o ponto $\boldsymbol{P'}$, de coordenadas $\boldsymbol{P'[(a+E);f(a+E)]}$, "estará tão perto da tangente que se pode pensar nela como estando aproximadamente também sobre a tangente"(ibid. p. 255)

Se considerarmos a subtangente no ponto P, sendo $\boldsymbol{TQ=C}$ (na figura abaixo), os triângulos $\boldsymbol{TPQ}$ e $\boldsymbol{TP'Q'}$ podem ser considerados semelhante, e dessa forma obtém à proporção:

$$\boldsymbol{\frac{b}{C}=\frac{f(a+E)}{C+E}}$$

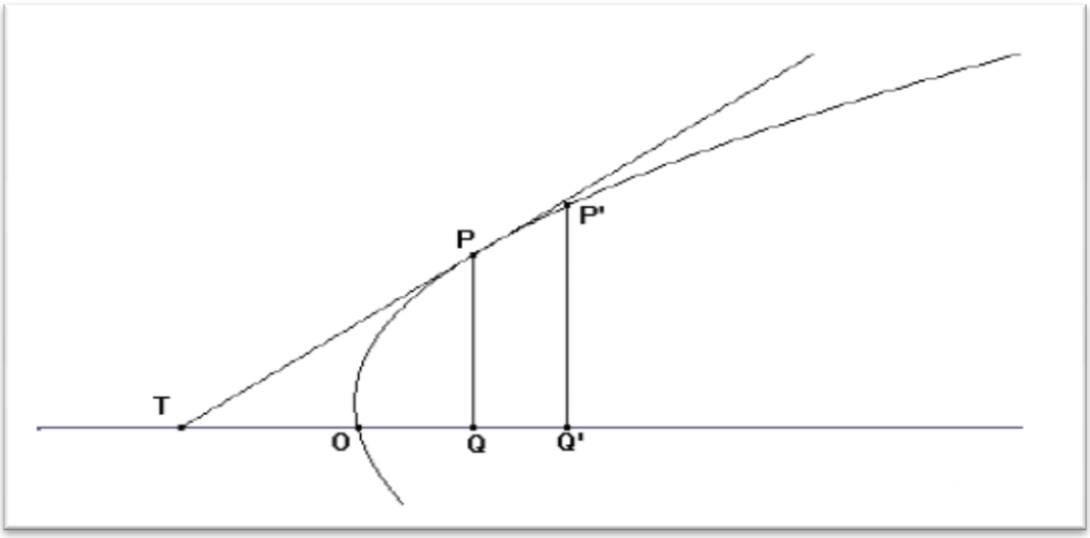


Figura 20 - Determinação da tangente a uma curva num dado ponto, segundo Fermat.

Fonte: Revista Portuguesa de Educação, 2003, 16(2), p. 200.

Assumindo que $\boldsymbol{b = f(a)}$, tem-se que:

$$\boldsymbol{C = \frac{f(a)}{\frac{f(a+E) - f(a)}{E}}}$$

Atribuindo valores próximos de zero para E, encontra-se a subtangente

$$\boldsymbol{C = \frac{f(a)}{f'(a)}}$$

Esse processo tem por essência o que hoje é chamado de diferenciação, pois apesar de Fermat (1601 - 1665) não ter o conceito de limite, seria o mesmo, nos dia de hoje escrever seu processo na forma abaixo:

$$\boldsymbol{\lim_{E \to 0} \frac{f(a+E) - f(a)}{E}}$$

Com esse processo se resolve o problema de construção da reta tangente a uma curva em um ponto da mesma. Contudo, em se tratando de uma função derivável, o fato de sua derivada ser zero, não garante que esse ponto seja de máximo ou de mínimo; esta é apenas uma condição necessária, mas não suficiente. Palaro (2006, p.72)

Para Boyer (1992, p. 15)., "Há plena razão para se reconhecer, portanto, como Pierre Simon Laplace, que Fermat foi o" inventor" do *Cálculo Diferencial*,(...)". Afinal seu método se assemelha muito ao processo utilizado nos dia de hoje no Cálculo.

Fermat (1601 - 1665) em seus trabalhos sobre geometria analítica, não só participou do desenvolvimento do Cálculo Diferencial, com também contribuiu para evolução do Calculo Integral, apresentando uma integração da curva $\boldsymbol{y = x^n}$. "Seu método era mais refinado que os existentes na época o mais próximo da integral de Riemann do que qualquer o anterior ao século XIX."(ibid. p.14)

Para achar $\int_0^T \boldsymbol{x^2 dx}$, ou seja, área sob a curva $\boldsymbol{y = x^2}$, no intervalo de 0 a T, segundo Boyer (ibid. p 14), Fermat considerava ordenadas dos pontos da curva de abscissas: $\boldsymbol{T, ET, E^2T, E^3T}$, ..., onde $\boldsymbol{E} < 1$. Em seguida formava uma sequência de retângulos cuja h eram essas ordenadas e cuja base eram as distâncias entre duas abscissas consecutivas. As somas das áreas desses retângulos representava uma aproximação da área da região sobre a curva.

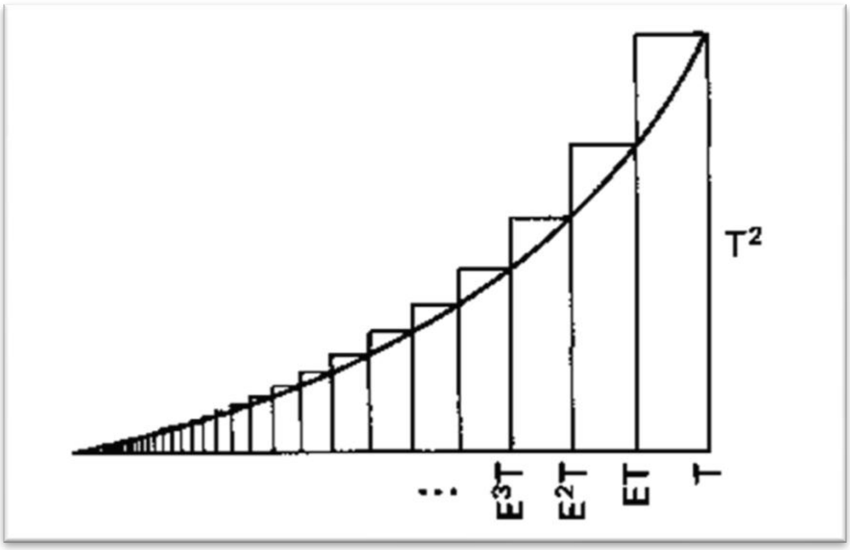


Figura 21 - Integral de Fermat

Fonte: Boyer (1992, p.14)

Obtendo-se assim as áreas dos retângulos:

$$\boldsymbol{T^2(T - ET), E^2T^2(ET - E^2T), E^4T^2(E^2 T - E^3T), \ldots}$$

Calculando a soma dessas áreas, é igual a:

$$\boldsymbol{T^3(1-E)(1+ E^3+ E^6+ E^9+ \ldots) =}$$

$$\boldsymbol{= T^3(1-E)\left(\frac{1}{1- E^3}\right) =}$$

$$\boldsymbol{= \frac{T^3}{1+E+ E^2}} .$$

Quando fazemos E se aproximar cada vez mais de um, as larguras dos retângulos tendem azero, e a soma das áreas dos retângulos se aproxima da área sob a curva, isto é $\frac{T^3}{3}$**,** dessa forma obtém-se que:

$$\int_0^T x^2 dx = \frac{T^3}{3}$$

Por meio de um raciocínio análogo, Fermat (1601 - 1665) generalizou esse resultado mostrando que:

$$\int_0^T x^n\, dx = \frac{T^{(n+1)}}{n+1}$$

Ao que parece Fermat "descobriu" os princípios básicos de diferenciação e de integração, que no primeiro caso multiplica-se o coeficiente pelo expoente e diminuía-se este último de uma unidade, já no segundo caso aumenta-se o expoente de uma unidade e dividi-se o coeficiente pelo expoente. Estranhamente, assim como seus contemporâneos, como Torricelli (1608-1647) , James Gregory (1638 - 1675) ou Isaac Barrow (1630 - 1677), parece que Fermat não viu nenhum significado nessa reciprocidade. (ibid. p. 15)

Com o estabelecimento da *Geometria Analítica*, a compreensão de certos conceitos como máximos e mínimos de função, reta tangente a uma curva em um ponto, agora algebricamente descritos por meio de equações, permitiu um avanço no desenvolvimento do Cálculo que até então não era possível.

As contribuições de James Gregory (1638 - 1675) e Isaac Barrow (1630 - 1677) foram cruciais no trabalho de sistematização das ideias e métodos utilizados por Newton (1642 - 1727) e Leibniz (1646 - 1716) para a "construção" do Teorema Fundamental do Cálculo.

James Gregory (1638-1675), matemático escocês, foi um dos predecessores de Newton (1642 - 1727) e morreu ainda jovem, com apenas trinta e seis anos de idade. Em 1663 foi para a Itália onde estudou vários anos com Stefano degli Angeli (1623-1697), com quem aprendeu os métodos italianos sobre indivisíveis, além das quadraturas de espirais, parábolas e hipérboles. Antes de voltar a Londres, provavelmente ainda na Itália, teve oportunidade de estudar as expansões de funções em séries de potencias e dos processos infinitos em geral. Acarretando em 1667 a publicação da obra *Vera circuli et hyperbolae quadratura* apresentando resultados importantes referentes à Análise Infinitesimal e preocupou-se em generalizar o algoritmo de Arquimedes (287 a.C. - 212 a.C.) (método de exaustão), aplicando-o na quadratura de elipses e hipérboles (BOYER, 1974, p. 282).

Segundo Boyer (1974): se Gregory "[...] tivesse expressado sua obra analiticamente, poderia ter-se antecipado a Newton (1642 - 1727) na invenção do Cálculo, pois conhecia virtualmente todos os elementos fundamentais pelo fim de 1668." (ibid., p. 282).

Para Baron (Baron, apud. Palaro, p.78), Gregory tinha clara compreensão da relação inversa entre o problema de quadratura e o da tangente, conhecido atualmente como Teorema Fundamental do Cálculo. Só não se sabe se ele o considerava "fundamental".

Contemporâneo de James Gregory (1638 - 1675), Isaac Barrow nasceu em Londres, em 1630, e morreu em Cambridge, em 1677. Era considerado um conservador em Matemática, por não gostar do formalismo da Álgebra. Editou obras de Euclides (330 a.C. - 260 a.C.), Apolônio (262 a.C. - 190 a.C.) e Arquimedes (287 a.C. - 212 a.C.) e, também, publicou suas próprias obras, *Lectiones opticae* em 1669 e *Lectiones geometriae* em 1670, ambas com a ajuda de seu pupilo Newton (1642 - 1727) (BOYER, 1974, p. 284), que teve o privilégio de expandir a semente plantada por seu professor, de onde mais tarde, possivelmente, tenha brotado o seu cálculo.

Torna-se essencial mencionarmos Barrow (1630 - 1677), pois é importante a sua contribuição, como a construção da reta tangente a curva, que veremos mais abaixo, ainda que muitos tenham condenado o uso de métodos geométricos pelo autor, pois dificultava o entendimento de suas demonstrações.

> *Em Barrow, [...] [a] pesada formulação geométrica que evita cuidadosamente todo recurso aos procedimentos analíticos de Descartes e Fermat, torna [esse teorema] totalmente inoperante. [Dahan-Dalmedico e Peiffer (1986, p. 189)]*

O trabalho apresentado por Barrow é baseado em curvas, tangentes e quadraturas, e não em uma notação baseada em coordenadas cartesianas e notação funcional. Afinal, na época, não havia nenhuma convenção para traçar eixos, este é um fato que acaba dificultando a compreensão da demonstração que vamos apresentar.

Para compreender a demonstração apresentada por Barrow, se torna necessário traduzir seus resultados e métodos para uma linguagem algébrica e geométrica moderna.

Edwards Jr. (1979, p. 139-140) faz uma descrição sucinta desta demonstração e para isso considera a figura a seguir:

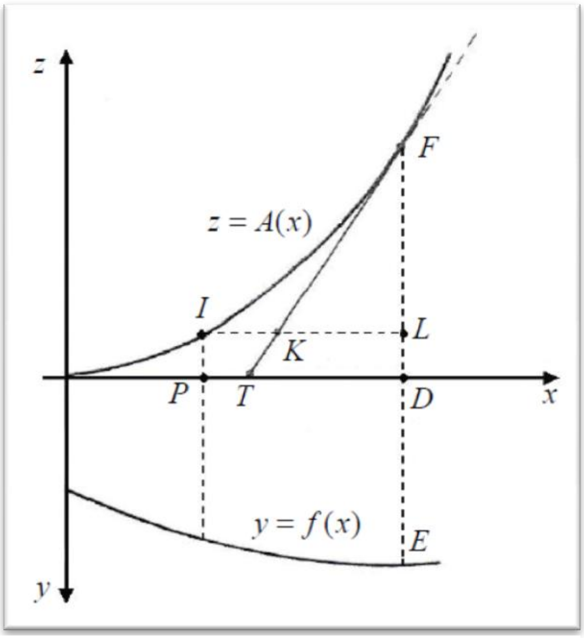


Figura 22 - Edwards, 1979, p. 140

Dessa forma, é necessário, primeiramente, que se considere, por conveniência, os eixos e com orientações opostas entre si e perpendiculares ao eixo x . Seguindo, então, o procedimento desenvolvido por Barrow (1630 - 1677): considera-se dada uma função $y = f(x)$ positiva e crescente. Denota-se, então, pela função $z = A(x)$ a área compreendida entre a curva $y = f(x)$ e o segmento $[0, x]$ contido no eixo x.

Sendo dado um ponto $D(x_0, 0)$ pertencente ao eixo x T será um ponto, convenientemente localizado, também, sobre o eixo x tal que $DT = \frac{DF}{DE} = \frac{A(x_0)}{f(x_0)}$. Com estas considerações feitas, Barrow afirma que a reta TF toca a curva $z = A(x)$ somente no ponto $F(x_0, A(x_0))$.

Para provar esta afirmação, considera-se um ponto $I = (x_1, A(x_1))$ pertencente à curva $z = A(x)$, tal que $x_1 < x_0$, mostra-se que, neste caso, o ponto K (intersecção da reta horizontal IL com a reta TF) localiza-se à direita do ponto I . Levando em consideração a obtenção do ponto T , nota-se que $\frac{LF}{LK} = \frac{DF}{DT} = DE$, logo $LF = LK \times DE$; observa-se, também, que $LF = DF - PI = A(x_0) - A(x_1) < DP \times DE$, pois $y = f(x)$ é uma função crescente.

Consequentemente, $LK \times DE < DP \times DE$, mostrando que $LK < DP$, ou seja, provando que o ponto K localiza-se à direita de I. Repetindo então, o processo mostrando que para $x_1 > x_0$, o ponto K localiza-se à esquerda de I , prova-se, assim, que TF é tangente à curva $x = A(x)$, no ponto F .

Edwards Jr. (1979, p. 139) chama a atenção para o fato da inclinação da reta TF ser $\frac{DF}{DE} = \frac{A(x_0)}{A(x_0)/f(x_0)} = f(x_0)$; observa que Barrow apresentou uma prova de que a reta TF é tangente à curva $z = A(x)$ no sentido apresentado pelos antigos gregos, ou seja, que a reta tangente a uma curva toca a mesma em um único ponto. Conclui que se Barrow tivesse apresentado analiticamente a reta TF , com inclinação propriamente definida, poderia ter chegado a , ou seja, poderia ter formulado explicitamente o Teorema Fundamental do Cálculo.

Apesar de todo o desenvolvimento do Cálculo apresentado até a época de Barrow, necessitava-se de uma fundamentação lógica para o mesmo, bem como de um simbolismo geral apropriado e da criação de regras analíticas formais (EVES, 2004, p. 435). Somente com os trabalhos de Newton (1642 - 1727) e Leibniz (1646 - 1716), esse almejado Cálculo seria conquistado, caracterizando a base do Cálculo moderno.

3.4. NEWTON E LEIBNIZ

As ideias do Cálculo surgiram aos poucos, sendo elaboradas por meio de contribuições realizadas por vários matemáticos ao longo dos séculos, como apesar da forma sucinta, foram apresentadas.

Desde os seus germes, surgidos na Grécia Antiga até Newton (1642 - 1727) e Leibniz (1646 - 1716) no século XVII, quando, efetivamente, ele foi formalizado, passaram-se mais de dois mil anos. O Cálculo se originou com o problema da quadratura e das tangentes a uma curva. Esses rudimentos podem ser encontrados nos trabalhos dos gregos, principalmente nos de Arquimedes (287 a.C. - 212 a.C.) e Apolônio (262 a.C. - 190 a.C.) . Outras contribuições são encontradas em várias obras de matemáticos até o século XVII, como por exemplo: Fermat (1601 - 1665), Descartes (1596 - 1650), Wallis, Barrow (1630 - 1677) (que foi professor de Newton (1642 - 1727)), Torricelli (1608-1647) e seu discípulo Gregory.

De acordo com Baron:

> *(...) o Cálculo Diferencial e Integral não finalizou nem se iniciou com Newton e Leibniz, mas cabe a eles o mérito da "invenção" do Cálculo Infinitesimal. Newton estabeleceu e unificou vários processos de cálculos e Leibniz ligou-os através de uma notação eficaz e de um novo cálculo operacional. (Baron, 1985, p.5, unidade3)*

De fato, os trabalhos desses dois matemáticos, citados por Baron, nem finalizaram e nem iniciaram o desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral. Contudo, é mérito deles o estabelecimento definitivo que a relação inversa do processo de integração e de derivação são operações uma inversa da outra, e o resultado disso, é hoje, conhecido como *Teorema Fundamental do Cálculo*.

3.4.1. CONTRIBUIÇÃO DE NEWTON (1642 - 1727)

Nasceu na Inglaterra em 1642. Aos dezoito anos, quando estudava no *Triniti College*, Cambridge, teve contato com um livro de astronomia que o levou a voltar sua atenção para matemática. Movido por esse interesse, estudou os *Elementos* de Euclides (330 a.C. - 260 a.C.), e depois *La Géométrie* de Descartes (1596 - 1650). Aprimorando seu conhecimento, leu as obras de: Schooten, Kepler, Viète, Wallis, Fermat (1601 - 1665), Huygens entre outros. Em 1664, Newton (1642 - 1727) fez suas primeiras contribuições, ligando duas questões, que ele havia trabalhado — as séries infinitas e a taxa de variação — "criando" o "*método*". (Boyer, 1974, p. 287)

No período de 1665 e 1666, fez quatro de suas principais descobertas, o teorema binomial, a sistematização do Cálculo Infinitesimal, a lei da gravitação e sobre a natureza das cores.

Suas primeiras descobertas [...] resultaram de saber exprimir funções em termos de séries infinitas — a mesma coisa que James Gregory (1638 - 1675) estava fazendo na Itália pela mesma época, embora dificilmente Newton (1642 - 1727) pudesse saber disso. (ibid., p. 287)

Dessas quatro contribuições de Newton (1642 - 1727), apenas duas serão referidas aqui, o teorema binominal e a sistematização do Cálculo Infinitesimal, dada a importância deles para a formalização do *Teorema Fundamental do Cálculo*.

Há mais de meio milênio que os estudiosos matemáticos tinham conhecimento dos coeficientes binomiais e suas regras de sucessão para potência inteira. Contudo, não usavam a notação exponencial de Descarte, e por esse motivo não faziam a transição de uma potência inteira para fracionária. O primeiro a trabalhar com os expoentes fracionários foi Wallis, porém não foi capaz de escrever uma extensão para $(x - x^2)^{1/2}$ ou para $(1 - x^2)^{1/2}$. Somente com Newton (1642

- 1727) o problema foi resolvido por meio de seu método de séries infinitas. (ibid., p. 287).

Para relacionar o trabalho de Newton (1642 - 1727) ao criar o seu Teorema Binomial, decidimos colocar sua forma generalizada tal qual é apresentada nos dias de hoje:

Se *k* é um número inteiro positivo, então para todo e qualquer *a, b* tem-se que:

$$(a+b)^k = a^k + ka^{(k-1)}b + \frac{k(k-1)a^{(k-2)}b^2}{2!} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{k(k-1)\ldots(k-n+1)a^{(k-n)}b^n}{n!} + \ldots + b^k.$$

Cabe aqui citar Ávila (2005, p. 128).

"Mas as séries infinitas são conhecidas desde a antiguidade. A primeira a ocorrer na História da Matemática é uma série geométrica de razão $1/_4$, que intervém no cálculo da área da parábola, feita por Arquimedes."

Apesar de Newton (1642 - 1727) ter descoberto o teorema binomial generalizado, ou seja, utilizou *n* como fração, por volta de 1665, esse resultado só chegou ao conhecimento de Henry Oldenburg (secretário da Sociedade Real de Londres), em 1676, por intermédio de duas cartas dirigidas a Leibniz (1646 - 1716), sendo publicado por Wallis (dando crédito a Newton (1642 - 1727)) em seu trabalho *Álgebra* de 1685. (Ibid., p. 288 - 289)

Na segunda carta, ele relata que, dando continuidade aos seus estudos matemáticos, teve a oportunidade de conhecer os trabalhos de Wallis sobre a determinação da área de regiões sob curvas do tipo $y = (1 - x^2)^n$, de *x = 0* e *x = x.* Observou que para $n = 0, 1, 2, 3 \ldots$, primeiro termo é sempre *x*, e o segundo pode assumir os valores:

$$-\frac{0}{3}x^3 \; ou -\frac{1}{3}x^3 \; ou -\frac{2}{3}x^3 \; ou -\frac{3}{3}x^3,$$

dependendo dos valores que *n* assuma. Pelo princípio de "*intercálculo"* de Wallis, Newton (1642 - 1727) adota $n = \frac{1}{2}$ para a área sob a curva de coordenadas $(1-x^2)^{1/2}$, e dessa forma assume que os dois primeiros termos para essa curva são:

$$x - \frac{\frac{1}{2}x^3}{3}.$$

Com um procedimento análogo, ele encontra os outros cinco primeiro termos:

(1)

$$x - \frac{\frac{1}{2}x^3}{3} - \frac{\frac{1}{8}x^5}{5} - \frac{\frac{1}{16}x^7}{7} - \frac{\frac{5}{128}x^9}{9}.$$

Percebe que os resultados podem ser encontrados fazendo inicialmente:

(2)

$$(1-x^2)^{1/2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 - \frac{5}{128}x^8 - \dots .$$

Dessa forma chega à conclusão que a série (1), que é a área da região sob a curva de coordenadas $(1-x^2)^{1/2}$, pode ser encontrada calculando primeiro o desenvolvimento binomial (2) e depois determinando a área, por integração dos termos da referida série, passando de um problema de quadratura para o *Teorema Binomial.* (ibid. p. 289)

Newton (1642 - 1727) observou que sua descoberta ia além do teorema binominal, verificando que as operações realizadas com as séries infinitas são muito semelhantes às feitas com as expressões polinomiais finitas, pois estão sujeitas às mesmas leis gerais. Assim, as séries infinitas deixaram de ser consideradas formas de aproximação e passaram a ser percebidas como outras formas das funções que representavam (ibid., p. 289).

Em 1669, Newton (1642 - 1727) passou a ocupar a cátedra de seu mestre Isaac Barrow como professor em Cambridge. Relutava em divulgar suas descobertas, mas em 1687, por insistência de alguns colegas, publicou seu livro "*Philosophiae naturalis principia mathematica"*, considerada uma das maiores obras científicas de todos os tempos.

No mesmo ano que passou a ser professor em Cambridge, e tomando como base suas descobertas — das séries infinitas e taxas de variação — de 1665-1666, Newton (1642 - 1727) escreve *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas* (Sobre análises para equações com infinitos termos), que só foi publicada em 1711. Esta publicação é de grande importância, pois foi à primeira exposição sistemática sobre os princípios do *Cálculo Infinitesimal*. Ao contrário de Barrow, o seu mais importante mentor, que era um geômetra por excelência, Newton (1642 - 1727) — comumente considerado um expoente da geometria pura — interessava-se pelos métodos algébricos e usava notações e instrumentos algorítmicos (ibid., 1974, p. 290). Os estudos realizados em *La Géométrie* de Descartes (1596 - 1650) influenciou seu trabalho e foi de lá que assimilou a ideia de aplicar a Álgebra à Geometria (Baron, 1985, v. 3, p. 19).

Observamos que, embora esses eminentes estudiosos estejam no século XVII, observa-se ainda a influência da solução que Eudoxo (390 a.C. - 320 a.C.) deu no século IV antes de Cristo, à questão da incomensurabilidade que teve como consequência a transformação da matemática grega em geometria.

Em seu trabalho *De analysi*, Newton (1642 - 1727) prova que a área sob a curva $\boldsymbol{y = ax^{\frac{m}{n}}}$**,** onde m, n são inteiros positivos, é dada por:

$$\frac{ax^{(\frac{m}{n}+1)}}{\frac{m}{n}+1}.$$

Newton (1642 - 1727) chamou a área de z e supondo

$$z = \left(\frac{n}{m+n}\right) ax^{\frac{m+n}{n}}$$

Adaptou ao seu método a notação de James Gregory, ou seja, usou " $\circ$ " para representar *incremento infinitesimal* (variação) da abscissa, resultando a nova abscissa $(x + \circ)$, o que, consequentemente, acarretará em um aumento na área sob a curva dada por:

$$z + \circ y = \left(\frac{n}{m+n}\right) a(x + \circ)^{\frac{m+n}{n}}$$

Aplicando o *teorema do binômio* e cancelando os termos iguais:

$$z \ \ \mathbf{e} \ \ \left(\frac{n}{m+n}\right) ax^{\frac{m+n}{n}}$$

Dividiu toda a expressão por " $\circ$ ", desprezando ainda todos os termos que tenham " $\circ$ ", obtendo como resultado:

$$y = ax^{\frac{m}{n}}.$$

Reciprocamente se a curva for:

$$y = ax^{\frac{m}{n}}$$

Sua a área será expressa por:

$$z = \left(\frac{n}{m+n}\right) ax^{\frac{m+n}{n}}.$$

A conclusão que Newton (1642 - 1727) chega em sua análise, podemos, em notação moderna escrever:

Se $\boldsymbol{z = f(x)}$ e

$$\int_{0}^{x} y\,dx = z$$

Então

$$y = \frac{dz}{dx} = f'(x)$$

Podemos observar nessas passagens, que Newton (1642 - 1727) recorre as mônadas da época dos pitagóricos, para escolher o acréscimo infinitesimal “ ∘ “ que ora é substituído como sendo zero (quando abandona todos os termos que estão multiplicados por “ ∘ “), ora como diferente de zero (quando divide toda a expressão por “ ∘ “) e aí está a ideia principal do infinitésimo, a saber, é menor que qualquer número positivo, porém não é zero.

Na Análise Clássica, os infinitamente pequenos não tem significado, entretanto na Análise Standard, desempenha um importante papel. Por exemplo: na primeira a Clássica, 0,9999... é diferente de 1, enquanto que na segunda a Standard mostra facilmente que é igual a 1.

De acordo com Boyer (1974), parece ter sido a primeira vez na história da matemática que uma área foi registrada por meio de um processo inverso do que hoje conhecemos como diferenciação. (Boyer, 1974, p. 291) É interessante notar que nesse processo, Newton (1642 - 1727) utilizou como base de seu raciocínio a determinação de *taxa de variação*, que é o princípio do que hoje chamamos de *derivada*. Provavelmente esse processo já era do conhecimento de Barrow (1630 - 1677) e Gregory, e talvez também fosse do conhecimento de Fermat (1601 - 1665). Entretanto, foi Newton (1642 - 1727) o primeiro a realizar um procedimento explorando a relação inversa entre a expressão de uma curva e a área sob ela por meio de variação infinitamente pequeno. Por este motivo é considerado muitas vezes o “inventor” do Cálculo Infinitesimal.

Quando Newton (1642 - 1727) escreveu o *De analysi*, já havia experimentado outras notações. Em 1666, havia escrito um pequeno tratado no qual aborda problemas de Cálculo Infinitesimal com base na ideia de curva, sendo gerada pelo movimento contínuo de um ponto (Baron, apud. Palaro, 2006, p. 92).

Provavelmente essas ideias culminaram no conhecido Método das Fluxões.

3.4.2. MÉTODO DAS FLUXÕES

Em 1671, Newton (1642 - 1727) descreve um método que pode ser o resultado de sua busca pela resolução do problema de determinação da tangente a uma curva dada por uma equação $f(x, y) = 0$. Denominava as $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ por quantidades que fluem ou fluentes e $\dot{\boldsymbol{x}}$ e $\dot{\boldsymbol{y}}$ por fluxos. Este método só foi publicado em 1742, intitulado *Tractatus de methodis serierum et fluxionum* (Tratado sobre os métodos das séries e fluxões), apesar de uma tradução feita para o inglês datada de 1736, apresente o título "*Methodus fluxionum et serieum infinitorum".*

Para ilustrar o método das fluxões de Newton (1642 - 1727), transcrevemos do livro Análise Matemática para licenciatura de Geraldo Ávila de 2005, página 187, "*O cálculo fluxional de Newton (1642 - 1727)*", apresentado a seguir:

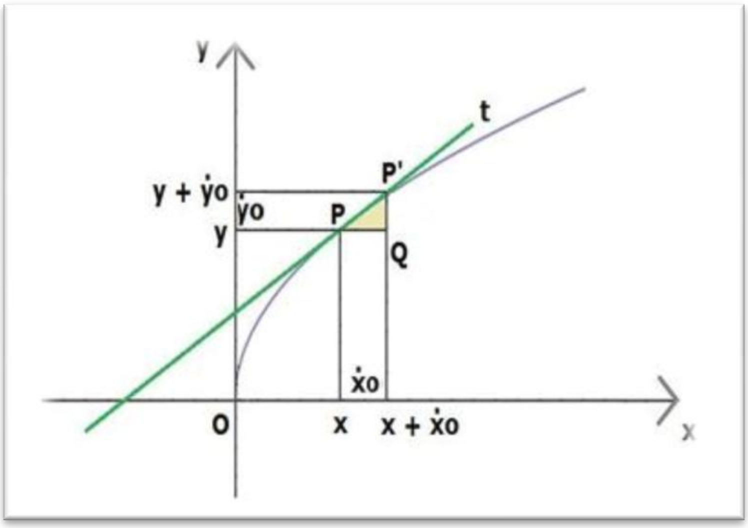


Figura 23 - Gráfico do Método de Fluxões de Newton (1642 - 1727)

Fonte: http:qqfatosmatemáticos.blogspot.com

Vamos dar uma pequena mostra do método de Newton (1642 - 1727), como ele resolveu o problema da determinação da tangente a uma curva dada por uma equação $f(x,y) = 0$. Newton (1642 - 1727) considerava as variáveis x e y como fluentes, ou seja, grandezas que "fluem" com o passar do tempo. Isso equivale a considerá-las funções do tempo. Assim, *o deslocamento de um ponto P sobre a curva pode ser descrito em termo dos deslocamentos de suas projeções sobre os eixos; e a velocidade de P é a composição das velocidades de x e y, denotadas pelos símbolos* $\dot{x}$ *e* $\dot{y}$*, chamados de fluxões de x e y, respectivamente. Durante um incremento "infinitamente pequeno" de tempo, designado por "o", os deslocamentos x e y sofrem incrementos "infinitesimais"*$\dot{x}o$ *e* $\dot{y}o$*, respectivamente. Assim devemos ter não somente* $f(x,y) = 0$, mas também $f(x + \dot{x}o, y + \dot{y}o) = 0$.

Vejamos como isso funciona num exemplo concreto dado pelo próprio Newton (1642 - 1727). Dada a relação entre fluentes, encontrar a relação entre as fluxões (ou seja, em linguagem de hoje, achar o declive da reta tangente no ponto P). O exemplo ilustrativo é o da equação

$$\boldsymbol{f(x,y) = x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0}.$$

Expandindo $\boldsymbol{f(x + \dot{x}o, y + \dot{y}o) = 0}$, eliminando os termos que perfazem $\boldsymbol{f(x,y)}$ e dividindo tudo pelo infinitésimo 0, obtém:

$$\boldsymbol{3x^2\dot{x} - 2ax\dot{x} + a\dot{x}y - 3y^2\dot{y} + \ldots = 0}$$

onde os três pontos representam os termos que ainda contém 0 como fator. Esses são desprezados por Newton (1642 - 1727) por serem "*infinitamente pequenos*". O resultado é

$$\boldsymbol{\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{3x^2 - 2ax + ay}{3y^2 - ax}},$$

que, em notação moderna, é simplesmente

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = -\frac{f(x)}{f(y)}}.$$

Uma terceira exposição de seu Cálculo, escrita, em 1676, com o título *De quadratura curvarum* e publicada em 1704, Newton (1642 - 1727) tenta evitar a frase "infinitamente pequeno". Determinava primeiramente a razão $\frac{q}{p}$ dos fluxos (ou $\frac{\acute{y}}{\acute{x}}$), fazendo com que *o*, desaparecesse ou fosse, e assim determinava o que chamava de "*primeira e última razões*" (o que hoje podemos chamar de "*limite da razão*") dos fluxos. Contudo, em "*Principia"* publicado em 1687, ele reverteria os primeiros rudimentos das ideias de incrementos "*infinitamente pequenos*" ou "*momentos*". E nesse sentido seu Cálculo é bem similar ao de Leibniz (1646 - 1716). (Boyer, 1992, p. 20)

No *Tractatus de methodis* (Tratado sobre o método) de 1671, Newton (1642 - 1727) enuncia claramente a relação fundamental: *"Sendo dada a relação das quantidades fluentes, encontrar a relação de suas fluxões".* (NEWTON apud Palaro, 2006, p.97)

O movimento de um ponto era descrito por Newton (1642 - 1727) dando a sua posição e velocidade em relação ao tempo. Chama a relação posição-tempo de fluente e a relação velocidade-tempo de fluxão; qualquer uma das relações sendo dada, a outra pode ser determinada. Além de estabelecer o que hoje chamamos de *Teorema Fundamental do Cálculo*, usa esta relação para resolver problemas de cálculo de área. (KATZ, apud. Palaro, 2006, p. 97)

Com seus estudos, Newton percebeu que encontrar a distância percorrida por um ponto em um dado intervalo de tempo, sendo dada a velocidade do mesmo, é equivalente a encontrar a área sob a curva que representa a velocidade (KATZ, apud. Palaro, 2006, p. 97)

Newton apresenta seu Cálculo em três etapas e em cada uma ele tenta oferecer uma fundamentação algébrica sólida que possa justificar seus métodos. Entretanto, as bases lógicas que fundamentam o seu Cálculo, não foram, até hoje, convincentes e ainda causam "certos" desconforto e preocupações. (Palaro, 2006, p.98)

As grandezas infinitamente pequenas aqui utilizadas representam uma volta ao conceito de mônadas utilizado pelos pitagóricos.

3.4.3. LEIBNIZ E SUAS CONTRIBUIÇÕES

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) nasceu em Leipzig, na Alemanha; aos quinze anos ingressou na Universidade, obtendo grau de bacharel quando estava com dezessete anos. Estudou teologia, direito, filosofia e matemática na universidade, é considerado, às vezes, *o último sábio* a conseguir conhecimento universal. Tendo sido negado o grau de *doutor em direito,* devido a sua idade, obtendo-o na Universidade de Altdorf, em Nuremberg e, então, entrou para o serviço diplomático, ali ficando até sua morte.

Em 1672 deslocou-se a Paris numa missão diplomática e lá teve a oportunidade de conhecer o célebre físico e matemático Huygens, de quem recebeu aulas de matemática. Em 1673, durante uma missão diplomática a Londres, onde comprou um exemplar "*Lectiones geometricae*" de Barrow (1630 - 1677), encontrou Collin e Oldenburg e tornou-se membro da Royal Society. Mais tarde, em 1676, voltou a Londres apresentando sua "*máquina de calcular*". Foi durante esse período que completou a "descoberta" do Cálculo Infinitesimal. Contudo as relações que culminaram em tal "criação" realizadas por Newton (1642 - 1727) e Leibniz (1646 - 1716), se deram sob pontos de vistas diferentes. Tal como nos trabalhos de Newton (1642 - 1727), o uso de séries infinitas, também desempenharam um papel importante nos trabalhos de Leibniz (1646 - 1716). (BOYER, 1974, p. 292-295)

Em particular, foi ao ler a carta de Amos Dettonville sobre *Traité dês simus Du quart de cercle*, que Leibniz (1646 - 1716) encontrou inspiração para uma de suas ideias que fundamentou sua "criação" do Cálculo, o triângulo característico. Observou que a razão das diferenças das ordenadas pela diferença das abscissas relacionava a tangente a uma curva e que as somas das ordenadas dos retângulos infinitamente finos se relacionavam as quadraturas.

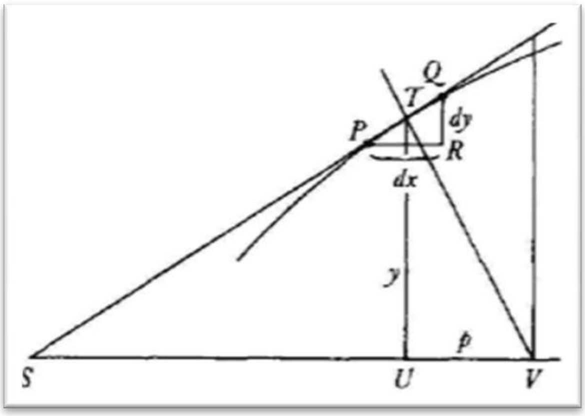


Figura 24 - Triângulo Característico

Fonte; http://jorgecabral.planetaclix.pt/monografia

O triângulo característico num ponto genérico T da curva é o triângulo retângulo formado pelos elementos dy, dx e pela linha PQ, como indica a figura acima. Leibniz (1646 - 1716) por meio de semelhança entre o triângulo característico e o triângulo

UVT, formado pelo segmento $\overline{UV}$, designado por p, a ordenada da curva em T, designado por y e o segmento $\overline{VT}$. Leibniz (1646 - 1716) expressa então que, se os triângulos PRQ e UVT são semelhantes, teremos a relação:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{y}$$

ou na forma:

$$p\,dx = y\,dy$$

De acordo com Eves (2004), antes de deixar Paris, Leibniz (1646 - 1716) já havia "descoberto" o *Teorema Fundamental do Cálculo*, assim com notações peculiares e fórmulas elementares de diferenciação que compunham seu Cálculo Infinitesimal. (Eves, 2004, p.443)

Em um manuscrito datado de 1675, Leibniz (1646 - 1716) utiliza $\int$ para a soma, derivado da palavra latina *summa* (soma) e dx e dy para diferencial menor possível ou diferencias em x e y respectivamente. Pouco tempo depois ele já descrevia suas diferencias e derivada da mesma forma que hoje é escrito, assim como representava por $\int x\,dy$ e $\int y\,dx$ para integrais. (Boyer, 1992, p. 45)

O Cálculo Infinitesimal de Leibniz (1646 - 1716), em sua essência, é mais complicado que o de Newton (1642 - 1727), porém em formalismo peculiar vence qualquer outro. Considerava *a integração como um processo somatório que é inverso da diferenciação,* ideia que também está contida nos trabalhos de Newton (1642 - 1727) e Barrow. Mas é a primeira vez que é enunciada como uma relação entre a soma e a diferenciação.

Em um artigo no *Acta Eruditorum*, Leibniz (1646 - 1716) publicou uma explicação mostrando que as quadraturas são casos especiais do método inverso do das tangentes., dando ênfase à relação inversa entre diferenciação e integração. (Boyer, 1974. p.296)

Para compreender as contribuições de Leibniz (1646 - 1716) ao Cálculo Infinitesimal, devemos considerar seu trabalho em lógica, metafísica e filosofia, pois Leibniz (1646 - 1716) acreditava que todas estas atividades estão inter-relacionadas. Para ele, o Cálculo Infinitesimal, em especial seu Teorema Fundamental, "era uma maneira prática de computar" e sendo uma abreviação dos métodos rigorosos das tangentes de Apolônio (262 a.C. - 190 a.C.) e das quadraturas de Arquimedes (287 a.C. - 212 a.C.).

No início do século XVIII, alguns seguidores de Newton (1642 - 1727) iniciaram uma verdadeira guerra aos trabalhos de Leibniz (1646 - 1716), acusando-o de ter plagiado o Cálculo de Newton (1642 - 1727). Leibniz (1646 - 1716) escreveu seu *History and Origin of the Differential Calculus* (1714), numa tentativa de apaziguar tal infortúnio, infelizmente sem sucesso. À medida que o século XVIII avançava em uma lealdade mal direcionada, a maior parte dos matemáticos ingleses se limitou aos fluxões e fluentes de Newton (1642 - 1727), evitando as notações de Leibniz (1646 - 1716). Somente no início do século XIX é que esse constrangimento foi resolvido. Em consequência, a matemática inglesa teve um atraso em relação a matemática do resto da Europa.

Num consenso, depois de muito estudo meticuloso e imparcial, feito por vários estudiosos, chegou-se a conclusão que Newton (1642 - 1727) e Leibniz (1646

- 1716) desenvolveram o Teorema Fundamental do Cálculo independentemente e, portanto, devem dividir igualmente a glória da criação do Cálculo Infinitesimal.

O cálculo elaborado por Newton (1642 - 1727) e Leibniz (1646 - 1716), Cálculo Infinitesimal, recebe esse nome por estarem embasados nos "infinitamente pequenos" cujas origens remontam a matemática grega.

Leibniz (1646 - 1716) estruturou seu Teorema Fundamental do Cálculo por meio de uma analogia, enquanto Newton (1642 - 1727) justificou por meio de suas análises de fluxões e fluentes, que dependiam da intuição de pontos em movimentos ao longo de uma curva. A primeira parte do Teorema Fundamental do Cálculo foi provada por Colin Maclaurin (1698-1746), para funções do tipo $y = x^n$, onde n = 1, 2, 3, …,Joseph Lagrange (1736--1813) estendeu essa ideia para as funções crescentes representadas por uma série de potências. Cauchy generalizou para todas as funções contínuas.

O Cálculo Infinitesimal de Newton (1642 - 1727) e Leibniz (1646 - 1716) traziam questões que ocasionaram grandes discussões, principalmente devido as questões do "infinitamente pequeno" que Newton (1642 - 1727) denotava por " ∘ " e Leibniz (1646 - 1716) por dx ou dy ou dz. Segundo Ávila (2005, p.190), um dos principais críticos das incoerências desse Cálculo foi Berkeley, cujas ponderações foram bem acatadas e chegaram a estimular esforços para resolver os problemas dos fundamentos. Afirma o autor que:

> *[...] D' Alembert, que também era um espírito bastante crítico, tentou explicar as dificuldades apontadas por Berkeley em termos da ideia de limite, naturalmente já presente, tacitamente, nas "razões primeira e última" de Newton. Ele expôs seu pensamento no verbete "Diferencial", publicado no volume quatro da famosa Encyclopédie, editada por ele mesmo e Diderot. Suas explicações são equivalentes à ideia intuitiva de limite que adotamos hoje em dia, como costuma ser apresentada em cursos introdutórios de Cálculo. (Ávila, 2005, p.190).*

As buscas para os fundamentos da matemática envolveram muitos matemáticos dos séculos XVII e o seguinte, chamado século do rigor, foi a época em que muitos dos conceitos ainda hoje estudados, tiveram suas bases estabelecidas. Em particular, as definições de limite, derivada e integral dadas por Weierstrass e por Cauchy, baniram de vez os “infinitamente pequenos” que foram “substituídos” pela noção de limite. Esse é o Cálculo Diferencial e Integral que ainda hoje estudamos na Análise Standard.

3.4.4. O TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO

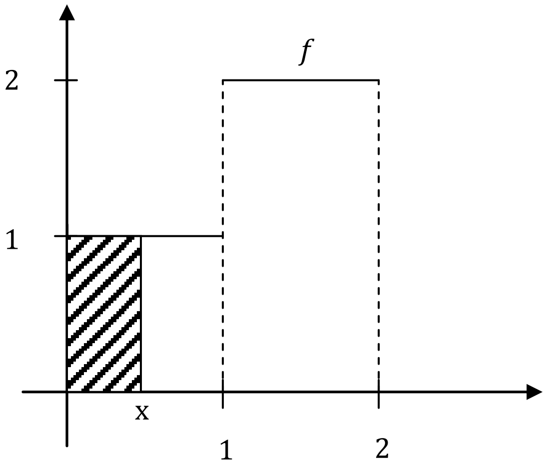
Muito embora Newton (1642 - 1727) e Leibniz (1646 - 1716), de maneira independente um do outro, tenham descoberto a relação recíproca que a integração e a derivação guardam entre si, já no século XVII, muito se discutiu e se estudou a fim de se estabelecer os fundamentos do Cálculo Diferencial e Integral, o que somente ocorreu a partir do século XIX, que passou para a história da Matemática como sendo o século do rigor.

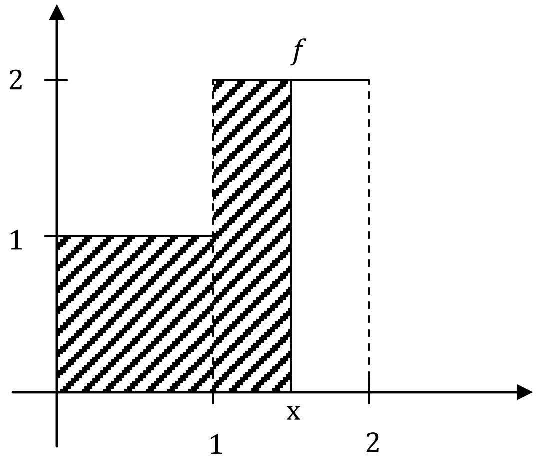
Durante esse longo percurso, procurou-se estabelecer condições para que uma dada função admitisse primitiva, isto é, para que tipo de função integrável existe uma outra que tem essa como derivada? A título de motivação, apresentamos o seguinte exemplo:

Seja $f: [0,2] \to R$ dada por $f(x) = \begin{cases} 1, se\ 0 \leq x < 1 \\ 2, se\ 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

Como f é integrável, para todo x de $[0,2]$, é possível definir a função $F: [0,2] \to R$ por: $F(x) = \int_0^x f(t)dt$

Os gráficos a seguir ilustram a obtenção da função F.





$0 \le x < 1$ $\quad\quad\quad$ $1 \le x \le 2$

Figura 25

Vê-se então que para $0 \le x < 1$, $F(x) = \int_0^x f(t) = x.1 = x$

e, para $1 \le x \le 2$, $F(x) = \int_0^x f(t)dt = 1 + (x-1).2$

Então, $F(x) = \begin{cases} x, se\ 0 \le x < 1 \\ 2x-1, se\ 1 \le x \le 2 \end{cases}$

Segue o gráfico de F.

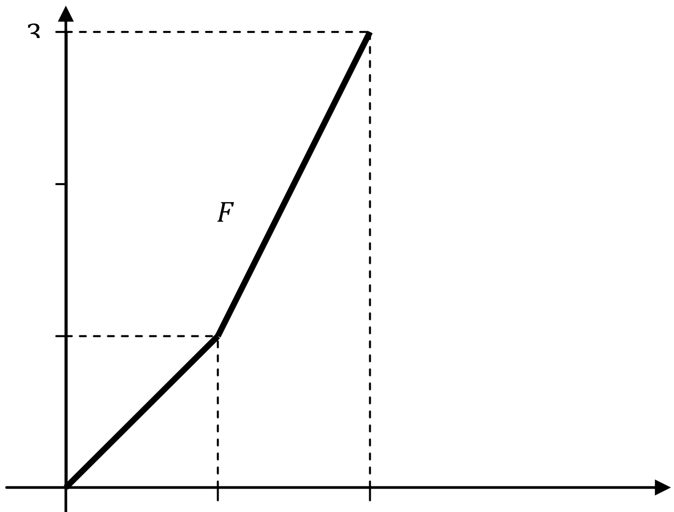


Figura 26

Observa-se que, embora f não seja contínua em $x = 1, F$ o é; porém nesse ponto F não é derivável. Portanto, em $[0,2]\ f$ não é a derivada de F. Por esse exemplo, vê-se que o fato de uma f ser integrável em um intervalo fechado $[a, b]$ não é suficiente para garantir que a função F construída como anteriormente, seja sua primitiva. O Teorema Fundamental do Cálculo estabelece que condição f deve obedecer, além de ser integrável, para que isso aconteça.

Teorema (TFC): Seja $f: [a, b] \to R$ uma função integrável. Se f é contínua então a função $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, para x em $[a, b]$, é derivável e $F'(x) = f(x)$.

Em outras palavras, o TFC afirma que, nessas condições, F é uma primitiva de f.

A demonstração do teorema não é o foco deste trabalho. O leitor interessado pode encontrá-lo no livro “Curso de Análise”, volume 1, de Elon Lages Lima.

O Teorema Fundamental do Cálculo, além de estabelecer a condição para que uma função integrável num intervalo fechado admita primitiva, fornece um procedimento algorítmico para se calcular integrais (definidas).

Para exibir tal procedimento, observamos que o TFC afirma que, com a condição de ser contínua, uma função f admite uma primitiva. Ora, se f tem uma primitiva, então tem infinitas e duas delas diferem por uma constante.

Sejam, então, $f: [a, b] \to R$ uma função contínua. Logo, $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ é uma primitiva de f. Se g for outra primitiva, para todo x de $[a, b]$, tem-se que:

$F(x) = g(x) + k\ (k: constante)$ (1).

Donde $0 = F(a) = g(a) + K$ ou $k = -g(a)$ o que resulta de (1) que:

$F(x) = g(x) - g(a)$, para todo $x\ de\ [a, b]$.

Agora, tomando $x = b$, tem-se: $F(b) = \boxed{\int_a^b f(x)dx = g(b) - g(a)}$

Reiteramos que esse resultado não depende da primitiva d f escolhida. Assim, desde que a função integranda seja contínua, graças ao TFC, temos esse processo simples para se calcular a sua integral no intervalo $[a, b]$. Ela é dada pela diferença entre os valores de uma primitiva nos extremos do intervalo da integração. (Bem entendido: a diferença entre o valor da primitiva no extremo superior e o valor no extremo inferior).

Talvez seja por esse resultado prático e de natureza computacional que, muitas vezes, ele seja referido como sendo o Teorema Fundamental do Cálculo; mesmo porque em cursos que visam preferencialmente às aplicações, às funções apresentadas são contínuas nos intervalos considerados, desse modo, a existência de sua primitiva fica garantida.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O ensino, principalmente o de matemática, tem sofrido muitas vicissitudes nos últimos anos, tanto no nível elementar como no superior, influenciando essencialmente na falta de preparo de docentes e discentes.

Levando em conta as análises das pesquisas realizadas por Anacleto (2007), Campos (2007), Picone (2007), assim como a de Segadas (1998), na área de Educação Matemática, que tem evidenciado que o Teorema Fundamental do Cálculo apresenta dificuldades na percepção do significado dos conteúdos envolvidos e das relações existentes entre eles. Diante desses resultados, decidimos buscar "outros" subsídios que possam contribuir para uma melhor compreensão às várias componentes que foram sendo elaboradas desde a antiguidade Grega até os trabalhos de Newton (1642 - 1727) e Leibniz (1646 - 1716).

O Cálculo, como outras áreas do conhecimento humano, desenvolveu-se a partir das tentativas de resoluções de problemas. Os problemas geram as formulações de conceitos, teorias e técnicas apropriadas para resolvê-los; teorias, por sua vez, originam novos problemas e ampliam as áreas de aplicação. No caso do Cálculo, este processo resultou na formulação de um conjunto de estruturas constituídas por regras operacionais para a solução de diversos problemas.

Direcionamos nossa atenção para um, dentre tantos aspecto do Cálculo: o Teorema Fundamental, apresentando, apesar de sucintamente, o desenvolvimento histórico de sua gênese, até a sua formalização com Newton (1642 - 1727) e Leibniz (1646 - 1716), no século XVII.

É sem dúvida que o trabalho de sistematização, em geral, tenha começado com Tales de Mileto (VI a.C.), após o seu rompimento com o místico e o estabelecimento da teoria dedutiva. Evidentemente, a intuição, a descoberta empírica e a experimentação têm o seu lugar, mas é no raciocínio dedutivo, ou a dedução a partir de hipóteses conhecidas ou admitidas, que estabelecem a veracidade das proposições geométricas. A tentativa de tal sistematização continuou nos séculos posteriores pelos pitagóricos e, de acordo com a história, a descoberta da incomensurabilidade que gerou uma grande crise nos fundamentos da matemática grega, fez surgir discussões que se prolongaram por mais de vinte e cinco séculos.

Eudoxo (390 a.C. - 320 a.C.), ao apresentar sua genial solução à crise gerada pela incomensurabilidade, reduziu toda a matemática grega existente à geometria. Este fato trouxe consequências: a primeira delas foi que os números, praticamente, foram substituídos por entes geométricos, a ponto de, nos Elementos de Euclides (330 a.C. - 260 a.C.), encontrar o número um, representado por um segmento de reta. Dessa forma os problemas que originaram os conceitos de integral e derivadas surgiram com uma roupagem geométrica, a saber, os problemas das quadraturas e tangentes, respectivamente.

Outra consequência da geometrização da matemática grega perdura até nossos dias, no ensino e aprendizagem do conceito de continuidade. É bastante comum haver referência à função contínua como sendo aquela cujo gráfico não apresenta rupturas (assim como as grandezas geométricas); porém esta analogia funciona quando a continuidade da função em questão se refere a um ponto de seu domínio que é ponto de acumulação do mesmo. Se o ponto for isolado, como é o caso das sequencias (funções definidas no conjunto dos números naturais), seu gráfico é constituído por pontos isolados e, no entanto, são funções contínuas.

O “domínio” da geometria em teorias do Cálculo Diferencial ou Integral, perdurou, praticamente, até o século XIX, quando esta começou a apresentar as “rachaduras” na fundamentação da Análise Matemática. Dedekind, ao buscar fundamentação que sustentasse questões relativas ao Cálculo, retomou as ideias de Eudoxo (390 a.C. - 320 a.C.) para estabelecer a teorias dos cortes e construir os números reais, que também possuem todas as propriedades das grandezas geométricas, em especial a continuidade. Esta fundamentação baseada nos números reais, passou a ser conhecida como aritmetização do Cálculo.

Outro conceito que retoma a época da Grécia Antiga, e utilizada por Newton (1642 - 1727) e Leibniz (1646 - 1716) em seus trabalhos é o das mônadas. Os pitagóricos atribuíram à matéria um “caráter discreto” e definiam suas unidades constituídas por mônadas, isto é, átomos. Eram partículas cuja dimensão era menor do que qualquer número, porém não nulo. Esta ideia foi retomada por Newton (1642 - 1727) e Leibniz (1646 - 1716), quando consideravam os "infinitamente pequenos", a partir dos quais foi fundamentado o Cálculo Infinitesimal

Estes dois grandes estudiosos do século XVII, ao estabelecerem, cada um à seu modo, as quadraturas, retomaram o método mecânico de Arquimedes (287 a.C. - 212 a.C.), para considerarem os segmentos dados pela ordenada de um ponto em movimento sobre uma curva.

Também os princípios utilizados por Apolônio (262 a.C. - 190 a.C.) no traçado de tangente, foram retomados por Newton (1642 - 1727) e Leibniz (1646 - 1716), para que, juntamente com a questão da quadratura, viesse à tona a relação de reciprocidade entre integral e a derivação.

O espírito dominante na Grécia Antiga, de rigor, é manifestado pelo problema inicialmente proposto por Anaxágoras sobre a quadratura da circunferência. Não se tratava de se encontrar uma aproximação do quadrado que se queria construir, mas achar exatamente o lado de tal quadrado. Também esse espírito de rigor é evidenciado nas demonstrações feitas por Arquimedes (287 a.C. - 212 a.C.), utilizando o método de exaustão em teoremas que já havia descoberto pelo método mecânico.

Vemos assim que importantes contribuições para que se chegasse ao Teorema Fundamental do Cálculo são encontradas nos trabalhos dos pensadores da Geometria Analítica, quer as que derivaram de métodos então estabelecidos, quer nos princípios dos métodos lógico-formais, principalmente, desenvolvidos pela heurística platônica, já, de alguma maneira, esboçado por Zenão em seus paradoxos.

REFERÊNCIAS

ANACLETO M. C.M. Gracia - Uma investigação sobre a aprendizagem do Teorema Fundamental do Cálculo. PUCSP, 2007.

ASSIS, A. K. T. Arquimedes, o Centro de Gravidade e a Lei da Alavanca, André Koch Torres Assis Apeíron, Publicado por C. Roy Keys Inc. 4405, rue St-Dominique Montreal, Quebec H2W 2B2 Canadá http://redshift.vif.com © André Koch Torres Assis 2008. Primeira Edição, 2008.

ÁVILA, G. Arquimedes, o Rigor e o Método. Publicação da Sociedade Brasileira de Matemática, 1986, Número 4.

________. "Introdução à Análise Matemática". 2ª Edição. São Paulo: Editor Edgard Blücher Ltda., 1999.

________. Várias faces da matemática: Tópicos para licenciatura e leitura geral Editora Edgard Blücher Ltda., 2007.

BARON, M. E. Curso de história da matemática: origens e desenvolvimento do cálculo (Matemática Grega). Editora Universidade de Brasília, 1985, unidade 1.

BOYER, C. B. Cálculo- Tópicos da História da Matemática para uso em sala de aula. Atual Editora Ltda, São Paulo, SP- 1992 v. 6. Tradução Hygino H. Domingues

________. História da Matemática, Edgard Blücher, São Paulo, 1974, Reimp. 1996.

CAMPOS P., Ronaldo - A abordagem do Teorema Fundamental do Cálculo em livros didáticos e os registros de representação semiótica - PUCSP, 2007.

COLIN A. RONAN - História Ilustrada Da Ciência, Volumes II e III - Editor Jorge Zahar, 1987.

EVES, H. Introdução à História da Matemática, 3ª reimpressão, 2008, editora UNICAMP.

EDWARDS JR., Charles Henry. The historical development of the calculus. New York, Springer - Verlag 1979.

LIMA L., Elon - Curso de Análise, volume I.

KATZ, V. J.- A History of Mathematics an introduction. University of the District of Columbia. Addison-Wesley, 1998.

MIGUEL, A. BRITO, A. J. A História da Matemática na Formação do Professor de Matemática. Cadernos CEDES História e Educação Matemática. Campinas: Papirus, n. 40, 1996. p. 47-61.

MIORIM, M. A. Introdução à História da Educação Matemática. São Paulo: Atual, 1998.

MUNARETTO, Ana C.(2010) - Resolução do Problema de Apolônio por meio de inversão: Um roteiro de estudo para formação de professor em geometria.

PALARO A., Luzia - Concepção de Educação Matemática de Henri Lebesgue - PUCSP, 2006

PICONE F.B., Desiree - Registros de Representação Semiótica Mobilizadas por Profissões no Ensino do Teorema Fundamental do Cálculo - PUCSP, 2007.

SCHIMIDT, Maria Auxiliadora & CAINELLI, Marlene. Ensinar História. São Paulo: Scipione, 2004; (Capítulos: I II e III).

___________. A História guardada no baú. Revista de História. Ano1 nº 8 fev/mar 2006 p.82 a 85. Cálculo Infinitesimal: o que é isso? Disponível em: <http://euler.mat.ufrgs.br/~portosil/oque.html>. Acesso em: 15 ago. 2006.

VIANNA, Segadas - Students' Understanding of the Fundamental Theorem of Calculus. Universidade de Londres (1998).

VIDIGAL, L. F., Conhecimentos mobilizados por alunos sobre a noção integral no contexto das concepções operacionais e estruturais. (PUCSP, 2007).