

**PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC-SP**

Emerson Pereira Rodrigues

**Sistema de Equação Linear:
um estudo de sua abordagem nos
Cadernos do Professor de Matemática de 2008 e 2009 da Rede
Pública de Ensino do Estado de São Paulo**

Mestrado Profissional em Ensino de Matemática

São Paulo

2011

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC-SP

Emerson Pereira Rodrigues

**Sistema de Equação Linear:
um estudo de sua abordagem nos
Cadernos do Professor de Matemática de 2008 e 2009 da Rede
Pública de Ensino do Estado de São Paulo**

*Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo como exigência parcial para obtenção do título de **MESTRE PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA**, sob a orientação da Professora Doutora Barbara Lutaif Bianchini.*

São Paulo
2011

Banca Examinadora

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos a reprodução total ou parcial desta dissertação por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: _____ local: _____ data: _____

DEDICATÓRIA

*Este trabalho é dedicado à minha família. Aos meus amados pais **Aparício e Alzira**, sem eles nada disto teria acontecido em minha vida, a minha amada companheira, amiga, conselheira **Fabiana** pela paciência, compreensão e apoio em todos esses anos que estamos juntos, aos meus queridos filhos **Pedro Henrique e Bruno Castro** pela inspiração doada pelo sorriso estampado em seus rostos.*

*Aos meus queridos irmãos **Edson, Everaldo e Eduardo** pelo apoio nos momentos difíceis e a todos que rezaram, torceram e me apoiaram a jamais desistir do objetivo.*

AGRADECIMENTOS

Reservo esta página para expressar meus mais profundos reconhecimentos a algumas pessoas que, de alguma forma, estiveram presentes na realização deste trabalho.

*Primeiramente a **Deus**, criador do céu e da terra, pai de toda ciência, e com sua benção e permissão pude realizar este sonho.*

*À minha família que esteve sempre presente me apoiando em todos os momentos, **Aparício e Alzira, Fabiana, Pedro Henrique e Bruninho, Everaldo e Cristina, Eduardo e Edson, a minha sogra Dona Zizi e meu sogro Sr Hidelmon**, que de uma forma ou de outra contribuíram para a realização da minha conquista.*

*À minha orientadora Profa Doutora **Barbara Lutaif Bianchini** pela paciência, motivação e principalmente por suas orientações e dedicações em horas extras para a realização deste trabalho.*

*Aos Professores Doutores **Sonia Igliori, Gerson Pastre e Marilena Bittar** pelas orientações valiosíssimas que contribuíram para a melhora deste trabalho.*

Aos Professores do Programa de Ensino de Pós-Graduados em Ensino de Matemática da Pontfícia Universidade Católica de São Paulo pelas sugestões durante o curso.

*Aos amigos e colegas do Mestrado Profissional e Acadêmico **Fabio, Rafael, Edson, Cristina, Maurício, Iara, Claudia, Elvis**, pela troca de experiência nestes anos.*

*Agradeço a minha amiga Profa **Erica** pela revisão deste trabalho, e aos meus amigos **Alex, Adnan e André (Kiko)** que acreditaram e torceram por mim neste percurso.*

À Secretaria de Educação do Estado de São Paulo de São Paulo pela concessão da bolsa de Estudo e à Diretoria de Ensino de Santo André por acompanhar o trabalho desde o início.

RESUMO

Esta pesquisa qualitativa do tipo documental tem como objetivo investigar como é abordado o conteúdo de Sistemas de Equações Lineares nos Cadernos do Professor de Matemática da rede pública de São Paulo de 2008 e 2009. Nosso interesse em realizar esta pesquisa partiu da constatação apresentada no Relatório Pedagógico de Matemática (2010) que o aluno do Ensino Médio apresenta uma maior dificuldade com relação à aprendizagem de Matemática que o aluno do Ensino Fundamental. Para o desenvolvimento deste trabalho investigamos o que os documentos oficiais recomendam para o ensino de sistemas de equações lineares para o Ensino Fundamental e Médio. Para efeito de comparação investigamos também duas coleções de livros didáticos de Matemática. Nosso estudo constatou que os Cadernos do Professor de Matemática de 2008 e o de 2009 do Ensino Fundamental abordam de forma semelhante aos livros didáticos. A maior diferença foi constatada nos materiais destinados ao Ensino Médio. Enquanto os livros didáticos abordam os conteúdos seguidos de exercícios, os autores dos Cadernos do Professor de Matemática se preocupam com a contextualização do conteúdo estudado com relação à realidade do aluno, constatamos também a ausência de uma discussão mais abrangente a respeito da classificação dos sistemas lineares em função de um parâmetro. Este trabalho tem como produto propiciar uma análise do Caderno do Professor de Matemática do 3º bimestre do 8º ano do Ensino Fundamental e da 2ª série do 2º ano do Ensino Médio referente ao ensino de sistemas de equações lineares. Esse produto encontra-se em separado da dissertação e está disponível para o uso de professores interessados na página do Programa (www.pucsp.br/pos/edmat).

Palavras-chave: Educação Algébrica, Sistemas de Equações Lineares, Cadernos do Professor de Matemática, Livros Didáticos.

ABSTRACT

The aim of this documentary qualitative research is to investigate how the content from the "Linear Equations Systems in Mathematics Teacher's Notebooks from São Paulo's public schools (from 2008 and 2009)" is covered. Our interest about this research started when the Pedagogical Mathematics Report (2010) was presented. In this report, they affirmed that high school students present more difficulty to learn Mathematics than elementary school students do. To develop this paper we have researched the official documents, to see what they recommend in teaching linear equations systems to high school and elementary school students. For comparison, we have also explored two didactical Mathematics book collections. We have found out that Mathematics Teacher's Notebooks from São Paulo's public schools (from 2008 and 2009) use an approach that is similar to didactical books; the biggest difference has been found in materials dedicated to high school. While didactic books teach subjects followed by exercises, authors from Mathematics Teacher's Notebooks from São Paulo's public schools worry more about contextualizing the subject to student's realities. The aim of this paper is to propitiate an analysis of Mathematics Teacher's Notebooks from São Paulo's public schools from the 3rd bimester from the 8th year in high school and the 2nd grade from the 2nd year in high school referring to teaching linear equations systems. The product of this analysis can be found separately from this paper, and it is available online at www.pucsp.br/pos/edmat

Keywords: Algebraic Teaching, Linear Equations Systems, Mathematics Teacher's Notebooks, Didactic Books.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Questão do SARESP/2009	20
Figura 2 - Questão do SARESP/2009	20
Figura 3 - Conteúdos e habilidades do 3º bimestre do 8º ano do Ensino Fundamental.....	32
Figura 4 - Conteúdos e habilidades do 2º bimestre da 2ª série do Ensino Médio	34
Figura 5 - Problema com duas incógnitas	45
Figura 6 - Resolução do sistema de equações pelos métodos de substituição e comparação.....	45
Figura 7 - Exercícios propostos	47
Figura 8 - Problemas com duas incógnitas	47
Figura 9 - Resolução do sistema de equações pelo método da adição.....	47
Figura 10 - Problemas propostos para que o aluno invente	48
Figura 11 - Interpretação dos pares ordenados no plano cartesiano.....	49
Figura 12 - Interpretação geométrica de um sistema de duas equações lineares a duas incógnitas.....	50
Figura 13 - Resolução pelo método da adição e a interpretação da solução geométrica de um sistema de equações lineares	50
Figura 14 - Interpretação geométrica de um sistema de equações lineares com infinitas soluções	51
Figura 15 - Resolução pelo método da adição e classificação do sistema de equações lineares	51
Figura 16 - Exercício proposto	51
Figura 17 - Problema com duas incógnitas	53
Figura 18 - Resolução do sistema de equações pelo método da substituição	53
Figura 19 - Resolução de sistemas com número de equações igual ao número de incógnitas	57
Figura 20 - Resolução de sistemas com número de equações menor que o número de incógnitas	57
Figura 21 - Resolução de um sistema impossível	58
Figura 22 - Discussão das possíveis soluções do sistema em função do parâmetro	59
Figura 23 - Discussão das soluções do sistema homogêneo.....	60
Figura 24 - Discussão das soluções do sistema homogêneo.....	60
Figura 25 - Quadro Geral dos Conteúdos do 3º bimestre do 8º ano do Ensino Fundamental.....	65
Figura 26 - Conteúdos do 8º ano do Ensino Fundamental.....	66

Figura 27 - Problema 1 – Atividade 1.....	68
Figura 28 - Representação na forma de tabela – Atividade 1.....	68
Figura 29 - Problema 2 – Atividade 1.....	69
Figura 30 - Problema 4 - Atividade 1.....	69
Figura 31 - Linguagem materna, linguagem algébrica e representação figural - Atividade 2.....	70
Figura 32 - Linguagem materna, linguagem algébrica e representação figural - Atividade 2.....	70
Figura 33 - Linguagem materna, linguagem algébrica e representação figural - Atividade 2.....	71
Figura 34 - Linguagem materna, linguagem algébrica e representação figural - Atividade 2.....	72
Figura 35 - Exercícios propostos - Atividade 3.....	73
Figura 36 - Etapas do método da substituição - Atividade 3.....	73
Figura 37 - Procedimentos de resolução do método da substituição	73
Figura 38 - Problema 1 – Atividade 4.....	74
Figura 39 - Linguagem materna, linguagem algébrica e representação figural - Atividade 4.....	74
Figura 40 - Linguagem materna, linguagem algébrica e representação figural - Atividade 4.....	75
Figura 41 - Linguagem materna, linguagem algébrica e resolução pelo método da adição - Atividade 4	75
Figura 42 - Exercícios propostos – Atividade 5	76
Figura 43 - Etapas do método da adição – Atividade 5	77
Figura 44 - Exercícios propostos – Atividade 6	78
Figura 45 - Problema 1 - Atividade 7.....	79
Figura 46 - Representação na forma de tabela e representação gráfica-Atividade 7	79
Figura 47 - Representação gráfica - Atividade 7	80
Figura 48 - Soluções de um sistema linear – Atividade 8.....	81
Figura 49 - Resolução pelo método da adição – Atividade 9.....	82
Figura 50 - Representação na forma de tabela – Atividade 9.....	82
Figura 51 - Representação gráfica – Atividade 9	82
Figura 52 - Resolução pelo método da adição – Atividade 10.....	83
Figura 53 - Representação na forma de tabela - Atividade 10	84
Figura 54 - Representação gráfica - Atividade 10	84
Figura 55 - Resolução pelo método da adição - Atividade 11	84
Figura 56 - Representação na forma de tabela - Atividade 11	85

Figura 57 - Representação gráfica - Atividade 11	85
Figura 58 - Quadro Geral dos Conteúdos do 2º bimestre da 2ª série do Ensino Médio	88
Figura 59 - Conteúdos de Matemática do Ensino Médio	89
Figura 60 - Atividade 1.....	91
Figura 61 - Atividade 2.....	92
Figura 62 - Atividades 3 e 4	93
Figura 63 - Atividade 5.....	94
Figura 64 - Resolução pelo método da adição	95
Figura 65 - Resolução pelo método de escalonamento matricial	96
Figura 66 - Resolução pelo método de escalonamento matricial	97
Figura 67 - Resolução pelo método de Cramer.....	98
Figura 68 - Exercício proposto	98
Figura 69 - Resolução pelo método de escalonamento matricial	99
Figura 70 - Matriz escalonada.....	100
Figura 71 - Áreas de polígonos representados no plano cartesiano.....	102
Figura 72 - Resolução aritmética e resolução pelo método de Sarrus	103

Sumário

INTRODUÇÃO	13
CAPÍTULO I - PROBLEMÁTICA e JUSTIFICATIVA	15
1.1 - Problemática.....	15
1.2 - Justificativa	18
CAPÍTULO II - PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS	23
2.1 - Método e Procedimento da pesquisa	23
CAPÍTULO III - ANÁLISE DE DOCUMENTOS OFICIAIS E REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	27
3.1 – Parâmetros Curriculares Nacionais	27
3.2 – Orientações Curriculares para o Ensino Médio	30
3.3 – Proposta Curricular do Estado de São Paulo de 2008	31
3.4 – Revisão Bibliográfica	36
CAPÍTULO IV - ANÁLISE DAS COLEÇÕES DE LIVROS DIDÁTICOS.....	44
4.1 - Análise da <i>Coleção Matemática e Realidade</i>	44
4.2 - Análise da <i>Coleção Matemática: Ciência e Aplicações</i>	55
CAPÍTULO V - ANÁLISE DOS CADERNOS DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA	63
5.1 – Sistemas de Equações Lineares no Caderno do Professor do 8º ano do Ensino Fundamental de 2008	64
5.2 – Análise do Caderno do Professor de Matemática do 8º ano do Ensino Fundamental de 2008	65
5.3 – Considerações a respeito do Caderno do Professor de Matemática do 8º ano do Ensino Fundamental de 2009.....	87
5.4 - Sistemas de Equações Lineares no Caderno do Professor de Matemática da 2ª série do Ensino Médio de 2008.....	87
5.5 - Análise do Caderno do Professor de Matemática da 2ª Série do Ensino Médio de 2008	89
5.6 - Análise do Caderno do Professor de Matemática da 2ª Série do Ensino Médio de 2009	101
CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	105
REFERÊNCIAS.....	111

INTRODUÇÃO

Ao longo de minha docência iniciada em fevereiro de 2006 constatei tanto no Ensino Fundamental quanto no Ensino Médio as dificuldades dos alunos com relação à aprendizagem da Matemática.

Com o objetivo de buscar meios de compreender algumas dessas dificuldades e também de melhorar o meu trabalho em sala de aula, ingressei em fevereiro de 2009 no curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática do Programa de Estudos Pós-Graduados na Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP).

Ao iniciar este curso, comecei a participar do Grupo de Pesquisa para Educação Algébrica (GPEA) que é coordenado pelas pesquisadoras Prof^a Dra Silvia Dias Alcântara Machado, Prof^a Dra Maria Cristina S. de A. Maranhão e a Prof^a Dra Barbara Lutaif Bianchini.

Nosso grupo se reúne semanalmente, e em uma dessas reuniões discutimos em qual linha de pesquisa nossos projetos estavam inseridos. Minha pesquisa está ligada à Matemática na Estrutura Curricular e na Formação de Professores. E entre os projetos desenvolvidos nesta linha de pesquisa meu trabalho se inseriu no projeto denominado “*Contribuições a materiais de orientação a docência na educação Básica*” desenvolvido junto às orientações da Prof^a Dra. Barbara Lutaif Bianchini.

Este projeto tem como objetivo desenvolver contribuições a materiais de orientação à docência na Educação Básica (divulgados em instituições escolares, por Secretarias, ou Ministério da Educação), bem como a professores desse segmento de ensino, em tópicos relativos à Aritmética e Álgebra, sustentadas em elementos teóricos da Educação Matemática.

Diante de uma nova Proposta Curricular imposta pela Secretaria da Educação do Estado de São Paulo em 2008, e que no mesmo ano tornou-se Currículo Oficial, decidi investigar um tema matemático que contemplasse tanto nos Ensinos Fundamental quanto no Médio proposto pelos autores destes materiais didáticos, conhecido como Caderno do Professor de Matemática.

Este material foi organizado com base nos resultados do Sistema de Avaliação e Rendimento do Estado de São PAULO (SARESP) de 2005, destinado aos alunos e professor visando ações que consolidam a aprendizagem, a partir de um conjunto

de competências e habilidades como referência para todo o trabalho em todas as disciplinas de 5ª a 8ª série do Ensino Fundamental e todas as séries do Ensino Médio.

Após diversos encontros com o grupo de pesquisa do GPEA e discussões com minha orientadora, decidimos investigar nesses Cadernos do Professor de Matemática de 2008 e 2009 como é feita a abordagem do conteúdo de sistema de equações lineares no Ensino Fundamental e Médio. Nossas questões de pesquisa serão explicitadas no próximo capítulo.

Nosso trabalho está dividido em cinco capítulos mais as considerações finais.

No primeiro capítulo, apresentamos a problemática e a justificativa que nos motivaram a investigar um tema matemático que contempla tanto o ensino Fundamental quanto o Médio.

No segundo, apresentamos os procedimentos metodológicos baseados na investigação qualitativa do tipo documental que conduziram o desenvolvimento desta pesquisa.

No terceiro, apresentamos o que os documentos oficiais recomendam para o ensino de sistemas de equações lineares e a revisão bibliográfica que apresentaram alguns resultados referentes ao ensino e aprendizagem desse tema.

No quarto capítulo, investigamos a abordagem de sistemas de equações lineares em duas coleções de livros de Matemática para compararmos com os Cadernos do Professor de Matemática de 2008 e 2009 da rede pública do Estado de São Paulo.

No último capítulo, investigamos a abordagem de sistemas de equações lineares nos Cadernos do Professor de Matemática de 2008 e 2009 da rede pública do Estado de São Paulo.

E finalizamos esta pesquisa apresentando as considerações finais e sugestões para possíveis pesquisas futuras.

CAPÍTULO I

PROBLEMÁTICA e JUSTIFICATIVA

1.1 - Problemática

O ensino da Matemática, ao longo do tempo, vem sofrendo grande mudança. Numa época seu ensino estava voltado para o desenvolvimento de habilidades (efetuar cálculos ou resolver problemas), em outra, para procedimentos incessantes de algoritmos, e atualmente está voltado para o desenvolvimento de competências tais como, a de compreensão de fenômenos, de argumentação consistente, da tomada de decisões conscientes e refletidas, da criatividade e das potencialidades do aluno, da instrumentalização de conceitos, de métodos, de formas de agir e pensar para enfrentar os problemas do mundo objetivando uma sociedade crítica (SÃO PAULO, 2008b, p.35).

De acordo com a Proposta Curricular do Estado de São Paulo, que hoje é Currículo Oficial, há uma tendência de a sociedade brasileira ter acesso a níveis educacionais além do ensino obrigatório. No entanto, isto não é o suficiente.

[...] Com mais gente estudando, a posse de um diploma de nível superior deixa de ser um diferencial suficiente, e características cognitivas e afetivas são cada vez mais valorizadas, como as capacidades de resolver problemas, trabalhar em grupo, continuar aprendendo e agir de modo cooperativo, pertinente em situações complexas. Em um mundo no qual o conhecimento é usado de forma intensiva, o diferencial será marcado pela qualidade da educação recebida. A qualidade do convívio, assim como dos conhecimentos e das competências constituídas na vida escolar, será o fator determinante para a participação do indivíduo em seu próprio grupo social e para que tome parte de processos de críticas e renovação. (SÃO PAULO, 2008a, p.10).

Decorrente de uma sociedade produto da revolução tecnológica e das mudanças dos currículos nas últimas décadas supõe-se que os livros didáticos de Matemática também sofreram alterações nesse período. O livro didático muitas vezes tem sido o único material utilizado pelo professor em seu trabalho, apesar das recomendações encontradas no Guia dos Livros Didáticos de 2010:

[...] Não é demais insistir que, apesar de toda a sua importância, o livro didático não deve ser o único suporte do trabalho pedagógico do professor. É sempre desejável buscar complementá-lo, seja para ampliar suas informações e as atividades nele propostas ou contornar suas deficiências, seja para adequá-lo ao grupo de alunos que o utilizam. (BRASIL, 2010, p.13).

A utilização deste material também tem destaque nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental:

[...] A formação dos professores, por exemplo, tanto a inicial quanto a continuada, pouco tem contribuído para qualificá-los para o exercício da docência. Não tendo oportunidade e condição para aprimorar sua formação e não dispondo de outros recursos para desenvolver as práticas da sala de aula, os professores apóiam-se quase exclusivamente nos livros didáticos, que muitas vezes, são de qualidade insatisfatória. (BRASIL, 1998, p.21-22).

A escolha de um livro envolve muita responsabilidade e deve ser compartilhada entre os docentes e dirigentes de cada unidade escolar, afinal, o material permanecerá na unidade por três anos, no mínimo. Devido a suas informações e explicações, a sua escolha tem um papel importantíssimo no processo de ensino e aprendizagem. Portanto, o professor deve saber qual o livro didático mais adequado para a sua prática pedagógica.

Lojolo (1996) destaca a importância de sua utilização.

[...] Didático, então, é o livro que vai ser utilizado em aulas e cursos, que provavelmente foi escrito, editado, vendido e comprado, tendo em vista essa utilização escolar e sistemática. Sua importância aumenta mais em países como o Brasil, onde uma precaríssima situação educacional faz com que ele acabe determinando conteúdos e condicionando estratégias de ensino, marcando, pois de forma decisiva, o que se ensina e como se ensina o que se ensina. (p.4).

Ramos (2007) analisou livros das séries finais do Ensino Fundamental do Programa Nacional de Livros Didáticos de Matemática de 2005 buscando uma reflexão a respeito do recurso didático neles inserido, e em uma das pesquisas que analisou, a de Oliveira¹ (1968 *apud* RAMOS, 2007) ressalta a importância do uso do livro didático.

[...] Alguns professores, ao usar o livro escolar, preferem fazer primeiro uma leitura comentada e depois mandar estudar, pelos alunos, o tópico, verificando as aquisições, por processos comuns; arguição e dissertação. É preciso ter cuidado a fim de que a leitura comentada não se torne monótona e a verificação não caia na rotina. Um professor mais cauteloso prefere fazer antes uma exposição do assunto, sugerindo a leitura do capítulo correspondente, indicando fontes acessíveis. Um professor hábil em métodos estudará os tópicos em forma de problemas e servirá do manual como ponto de apoio, nos diversos passos do desenvolvimento da solução, sem negligenciar as fontes ao alcance. Há ainda uma possibilidade de aconselhar ao aluno a leitura preparatória, desenvolvendo bons hábitos de leitura silenciosa e será motivadora para esclarecimentos e desenvolvimentos do tema. (OLIVEIRA, 1968, p.90-91 *apud* RAMOS, 2007, p.149).

¹ OLIVEIRA, Alaíde Lisboa de. **O livro didático**. Belo Horizonte: Bernardo Álvares S. A., 1968.

Estamos de acordo com Oliveira, por se tratar de um material dirigido aos professores e alunos, por ser muitas vezes o único utilizado em sala de aula, ele exerce um papel importante na aprendizagem.

Cabe ao professor investigar a qualidade desse material para que a escolha do mesmo possa contribuir para realização de seu trabalho em sala de aula, evitando a utilização daqueles que contenham informações incorretas.

Nosso trabalho tem como objetivo investigar sistema de equações lineares nos materiais didáticos distribuídos em 2008 e 2009 para todas as escolas da rede pública estadual pela Secretaria de Educação do Estado de São Paulo, conhecido como Caderno do Professor de Matemática que no mesmo ano passou a ser Currículo Oficial.

Os estudos de sistemas de equações lineares estão propostos nos Cadernos do Professor de Matemática na 7ª série do Ensino Fundamental e retomam o tema na 2ª série do Ensino médio.

Segundo Bianchini e Almouloud (1996) este assunto é pré-requisito para o ensino de Álgebra no terceiro grau. Esses pesquisadores aplicaram uma atividade a fim de investigar as dificuldades dos alunos referentes ao tema de Sistema de Equações Lineares e constataram as dificuldades dos estudantes do primeiro ano do curso de Ciências da Computação em encontrar a solução de sistemas indeterminados e também a confusão que apresentam para determinar o que é parâmetro e o que é incógnita.

Bisognin e Cury (2009) também constataram essas dificuldades nos estudantes calouros de disciplinas matemáticas do Ensino Superior em apresentar a solução de sistemas indeterminados e impossíveis, além disso, constataram também a preferência dos alunos em utilizar o método de adição para a resolução, apesar de alguns realizarem os cálculos algébricos de forma incorreta.

Já Battaglioli (2009) constatou a necessidade de promover um ensino a partir de representações gráficas no Ensino Médio, aliada a um ambiente computacional, o qual poderia contribuir para que os alunos entendam não só o conjunto solução de sistemas de equações lineares, mas também classificá-lo e discuti-lo quando necessário.

Jordão (2010) formulou e analisou uma sequência didática proposta aos alunos do Ensino Médio e constatou a dificuldade dos alunos em combinar duas a duas as equações dos sistemas 3×3 , constatou também que eles não encontravam a solução

correta quando não realizavam todas as etapas no método de adição e que o uso do *software* contribui para a compreensão do significado das equações obtidas no tratamento algébrico.

De acordo com Bisognin e Cury (2009),

[...] De maneira geral, há muitas publicações que enfocam erros em resoluções de estudantes, Ainda que explicitam a palavra “erro”, mas mencionem dificuldades ou problemas; no entanto as avaliações continuam a detectar as mesmas dificuldades e não são, em geral aprofundadas as suas causas. Se tivermos condições de realizar outras pesquisas e discuti-las sob o enfoque de novos construtores teóricos, como os que têm sido apresentados por pesquisadores do ensino e da aprendizagem da Álgebra escolar, talvez possamos estabelecer relações entre a forma de ensinar um determinado conteúdo (como as equações e os sistemas lineares) e as produções dos estudantes ao resolver problemas sobre tal conteúdo. (p.19).

Diante da importância desse tema matemático para a continuação dos estudos no ensino superior e as dificuldades que os alunos apresentam com relação a este tema, temos como objetivo investigar como o novo currículo de São Paulo aborda esse tema nos Cadernos do Professor de Matemática de 2008 e 2009.

1.2– Justificativa

De acordo com os resultados apresentados no Relatório Pedagógico de Matemática de 2010, o motivo do baixo desempenho do aluno com relação à aprendizagem de Álgebra se deve à ênfase a procedimentos; regras e passos na resolução de problemas; à utilização de uma linguagem que não faz sentido para o aluno; dificuldade de que o comportamento de algumas variáveis se modifica na presença da variação de outras, à compreensão do conceito algébrico, como, variáveis, incógnitas, expressão, função, equação, construção e análise, representações de situações, e etc. (SÃO PAULO, 2010, p.223).

Ainda conforme descrito neste documento, o maior problema encontra-se na 3ª série do Ensino Médio, e que o motivo desse fracasso possa ser que o aluno tenha maximizado suas dificuldades em Matemática ao longo de seus onze anos (no mínimo) de escolaridade. (SÃO PAULO, 2010, p.230).

Considerando que poucas pesquisas foram realizadas com relação ao material didático destinado a todas as escolas da rede pública do Estado de São Paulo, propomos desenvolver um trabalho com objetivo de investigar de que forma é feita a

abordagem de um tema da Álgebra que contemple tanto o Ensino Fundamental quanto o Médio, nos Cadernos do Professor de Matemática de 2008 e 2009.

Quando surgiu um projeto destinado aos estudantes do curso de Mestrado Profissional em Ensino da Matemática na PUC/SP com o propósito de desenvolver contribuições a materiais de orientação à docência na Educação Básica relativos à Aritmética e Álgebra, engajamo-nos neste projeto e nos propusemos investigar um tema matemático inserido no Currículo Oficial do Estado de São Paulo implantado em 2008 pela Secretaria de Educação do Estado de São Paulo.

Esse Currículo foi desenvolvido com base nos resultados obtidos pelo Sistema de Avaliação e Rendimento Escolar do Estado de São PAULO (SARESP)² de 2005. Foi colocado em prática devido à autonomia dada às escolas pela Lei de Diretrizes e Bases, que definiam seus próprios projetos pedagógicos, e que ao longo dos anos mostrou-se ineficiente. (SÃO PAULO, 2008a).

Por se tratar de um novo currículo fizemos uma leitura completa para enfim definir qual seria nosso tema de pesquisa e assim partiu a curiosidade em investigar como é a abordagem de sistemas de equações lineares nestes materiais.

Alguns pesquisadores na área da Educação Matemática desenvolveram suas pesquisas com o objetivo de identificar a dificuldade de aprendizagem com relação a esse tema.

Segundo Bianchini e Almouloud (1996):

[...] parece-nos que os alunos têm mais dificuldades em encontrar as soluções dos sistemas indeterminados que num determinado, eles se atrapalham para dar as respostas, tiram uma incógnita em função de outra e dificilmente dão a solução com o menor número de incógnitas. (p.219).

Encontramos também no Relatório Pedagógico de Matemática do SARESP de 2009 apontamentos das dificuldades dos alunos do 9º ano do Ensino Fundamental e do 3º ano do Ensino Médio em solucionar problemas envolvendo sistema de equações lineares.

Apresentamos a seguir duas de seis questões dadas no SARESP de 2009, avaliação realizada em novembro de 2009, nas quais três destinadas ao 9º ano do Ensino Fundamental e quatro à 3ª série do Ensino Médio, sendo que uma foi proposta em ambas as séries.

² Criado em 1996 o Sistema de Avaliação e Rendimento Escolar do Estado de São Paulo (SARESP) consiste em uma avaliação externa do desempenho dos alunos do Ensino Fundamental (EF) e do Ensino Médio (EM) do Estado de São Paulo, e subsidia a SEE - Secretaria de Estado da Educação de São Paulo - nas tomadas de decisão quanto às políticas públicas voltadas a melhoria da educação paulista. (SÃO PAULO, 2010, p.10).

A questão a seguir consiste em avaliar a habilidade do aluno, tanto do 9º ano do Ensino Fundamental quanto da 3ª série do Ensino Médio, em identificar a relação da representação algébrica e geométrica de um sistema de equações lineares do primeiro grau.

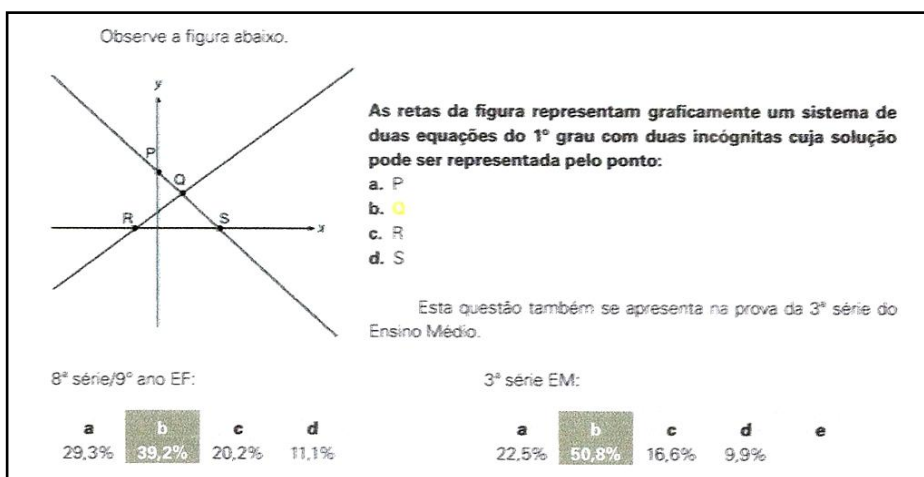


Figura 1 - Questão do SARESP/2009
Fonte: SÃO PAULO, 2010, p.156

Nesta questão, os alunos deveriam mostrar conhecimento de que o ponto do plano cujas coordenadas representam a solução do sistema de equação linear que está representado pelo ponto Q. No entanto, podemos perceber que aproximadamente 60% dos alunos do 9º ano do ensino fundamental e aproximadamente 50% dos alunos da 3ª série do ensino médio não acertaram esta questão.

A Figura 2 ilustra outra questão proposta no SARESP de 2009:

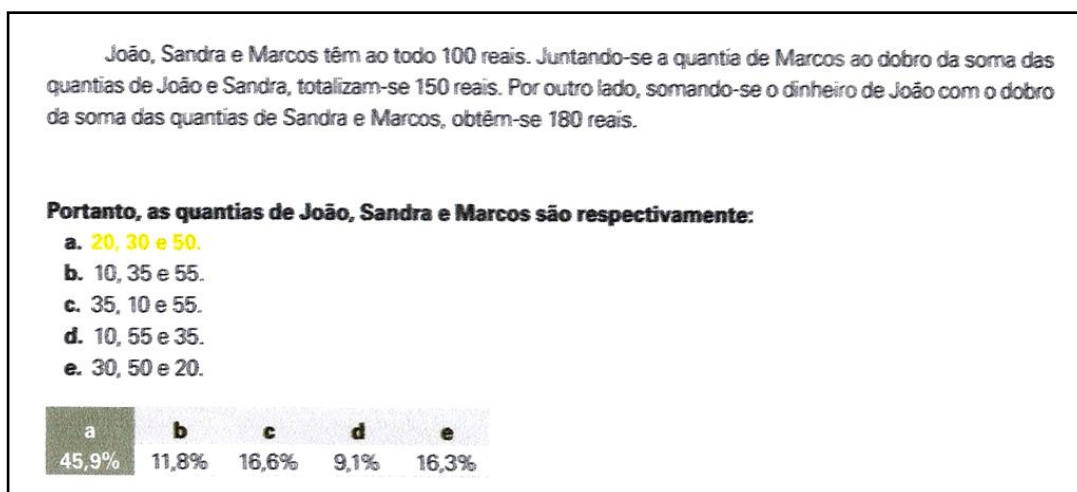


Figura 2 - Questão do SARESP/2009
Fonte: SÃO PAULO, 2010, p.190

O objetivo da questão foi de identificar se o aluno resolvia a situação-problema por intermédio de sistemas de equações lineares de 3ª ordem, ou seja, escrever três equações e três incógnitas. Percebe-se que mais de 50% dos alunos não conseguiram resolver. A dificuldade de resolução pode ter sido pelo fato de o aluno não ter conseguido traduzir o problema para a linguagem matemática ou à resolução do sistema. (SÃO PAULO, 2010, p.190).

Diante desses fatos, decidimos analisar o conteúdo de Sistemas de Equações Lineares nos Cadernos do Professor de Matemática de 2008 e 2009 da rede pública estadual de ensino do Estado de São Paulo com a intenção de responder às seguintes questões: os Cadernos do Professor de Matemática de 2008 e 2009 contemplam as recomendações nos documentos oficiais? De que forma os livros didáticos abordam esse tema no Ensino Fundamental e Médio? Há conexão nos Cadernos do Professor de Matemática do Ensino Fundamental para o Médio?

Para o desenvolvimento desta pesquisa consideramos relevante primeiramente verificar o que os documentos oficiais recomendam para o ensino de sistemas de equações lineares no Ensino Fundamental e Médio; e em seguida investigamos como os livros didáticos aprovados pelo Plano Nacional do Livro Didático (2012) e os Cadernos do Professor de Matemática de 2009 abordam este tema para então compararmos as abordagens apresentadas.

Este material tem como propósito implantar uma nova abordagem no ensino dos conteúdos, porém não apontam mudanças nesses conteúdos disciplinares que frequentemente são apresentados nos livros didáticos.

No capítulo seguinte faremos a descrição da metodologia e os procedimentos utilizados para o desenvolvimento da nossa pesquisa.

CAPÍTULO II

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Neste capítulo, descrevemos os procedimentos metodológicos utilizados em nossa pesquisa. Lembramos que o objetivo principal desta pesquisa é investigar a abordagem de Sistema de Equações Lineares nos Cadernos do Professor de Matemática do Ensino Fundamental e Médio de 2008 e 2009 fornecidos pela Secretaria de Educação do Estado de São Paulo para as escolas da rede pública estadual.

2.1 – Método e procedimento da pesquisa

Com o propósito de responder às questões de pesquisa utilizamos a Investigação Qualitativa em Educação descrita por Bogdan e Biklen (1994).

Segundo Bogdan e Biklen (1994), uma das estratégias utilizadas na investigação qualitativa baseia-se no pressuposto de que muito pouco se sabe do objeto de estudo.

Ainda de acordo com os mesmos autores,

[...] Os planos (de uma investigação qualitativa) evoluem à medida que se familiarizam com o ambiente, pessoas e outras fontes de dados, os quais são adquiridos através da observação direta. Após a conclusão do estudo efetua-se a narração dos fatos, tal como se passaram, e é elaborado, em retrospectiva, um relatório detalhado do método utilizado. Quando iniciam um trabalho, ainda que os investigadores possam ter uma ideia acerca do que irão fazer, nenhum plano detalhado é delineado antes da recolha de dados. (BOGDAN e BIKLEN, 1994, p.83).

A investigação qualitativa provê um plano flexível: à medida que a pesquisa vai avançando, as hipóteses formuladas podem ser modificadas e reformuladas.

No primeiro momento, o investigador qualitativo define o plano para o planejamento da investigação, e este plano procede a partir da recolha e análise de dados, para então passar à fase escrita.

[...] A descrição geral do plano representa uma plataforma aceita pela maioria dos investigadores qualitativos, mas isso não significa que todos estejam de acordo com a definição que acabamos de apresentar. Alguns concebem-no de forma mais estruturada. Podem elaborar um modelo de entrevista que seguem à risca. Outros são menos estruturados, vagueando entre os dados sem nunca elaborar, de forma consciente, um plano. É o método próprio que utilizam nos seus trabalhos, assim como seus objetivos

e a experiência de investigação, que vai definindo as etapas. (BOGDAN e BIKLEN, 1994, p.84).

Na fase da análise de dados, o investigador organiza sistematicamente os materiais que foram selecionados com o intuito de apresentar aos outros aquilo que encontrou e aumentar a sua própria compreensão desses materiais.

Segundo Bogdan e Biklen (1994) existem diferentes estilos de investigação qualitativa e maneiras de trabalhar e analisar os dados. Uma delas é trabalhar a análise concomitante com a recolha dos dados passando a estar completa no momento em que os dados são recolhidos, se assim não o fizer, os dados podem ser insuficientes para realizar a análise posteriormente. Noutra abordagem, a análise é realizada após a recolha dos dados.

Para a realização desta pesquisa, fizemos uma busca no Currículo Oficial do Estado de São Paulo de 2008 com o propósito de verificar em que série e bimestre nosso tema está inserido e descobrimos que estão presentes no terceiro bimestre da 7ª série do Ensino Fundamental e no segundo bimestre da 2ª série do Ensino Médio.

Em seguida fizemos um levantamento nos documentos oficiais para identificar o que estes recomendam para o ensino de sistemas de equações lineares, especialmente, nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental (PCNEF) de 1998, nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM) de 1999, Parâmetros Curriculares Nacionais Mais do Ensino Médio (PCN+) de 2002, nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio (OCEM) 2006 e na Proposta Curricular do Estado de São Paulo (PCESP) de 2008.

Após a investigação nos documentos oficiais fizemos um levantamento bibliográfico para familiarizar-nos com os métodos utilizados por outros pesquisadores, como eles trabalharam seus dados, e ainda, como esses dados podem contribuir para a nossa análise.

Segundo Bogdan e Biklen (1994), o levantamento bibliográfico tem o objetivo de responder às seguintes questões:

[...] Quais os aspectos mais relevantes da bibliografia? Que resultados já encontrados por outros investigadores têm pertinência para o seu estudo? Em que medida a sua perspectiva difere da apresentada pelos autores que está a ler? Em que medida se aproxima? Que aspectos foram negligenciados na literatura? (p.215).

Selecionamos trabalhos a partir de alguns critérios, tais como: pesquisas que apontam algumas dificuldades de ensino e a aprendizagem a respeito de sistema de equações lineares, trabalhos que propõem métodos de ensino referentes a sistema

de equação linear e pesquisas que investigaram livros didáticos antigos e atuais a respeito do nosso tema.

Outro procedimento realizado para analisarmos a abordagem de sistema de equação linear proposta no Caderno do Professor de Matemática de 2008 e 2009 foi a escolha de duas coleções de livros didáticos, um do Ensino Fundamental e outro do Médio, aprovado pelo Plano Nacional do Livro Didático para que pudéssemos comparar os materiais em nossa análise.

De acordo com Bogdan e Biklen (1994),

[...] A análise dos dados verifica-se ao longo de toda a investigação, se bem que seja normalmente nas fases finais que os dados são analisados de forma mais sistemática. Esta análise e elaboração do plano podem ser feitas em simultâneo. (p. 84).

Após a recolha de dados, fizemos uma leitura em todo o material que seria analisado, bem como nos Cadernos do Professor de Matemática, livros didáticos aprovados pelo Plano Nacional do Livro Didático de 2012, documentos oficiais, dissertações e artigos referentes ao tema sistemas de equações lineares.

A partir desta primeira análise fizemos uma releitura para destacar os pontos que consideramos relevantes para o desenvolvimento desta pesquisa.

Numa terceira etapa, passamos para a fase da escrita, entendendo que esta fase seja a mais longa, pois consiste em um estudo minucioso, com critérios e regras previamente formuladas, e principalmente é a fase que conduz o investigador qualitativo ao objetivo da pesquisa.

Assim, elaboramos nosso texto relacionando com as recomendações dos documentos oficiais descritas nas páginas 34 e 35 no Quadro 1 que será a base para a nossa análise.

Segundo Bogdan e Biklen (1994),

[...] Uma investigação pode contribuir para tirar conclusões que sejam de crucial importância para a educação ou para a sociedade, em geral. Além disso, alguns temas e contextos foram repetidamente estudados enquanto outros continuam relativamente inexplorados. Ainda que na escolha de um tópico de investigação a questão dos interesses seja de importância crucial, o leitor pode tomar em consideração o “estado da arte” do campo em que trabalha e as questões mais relevantes dos nossos tempos na escolha de um problema a investigar. (p. 88).

Para responder nossas questões de pesquisa procedemos da seguinte maneira:

- a- Primeiro, fizemos um levantamento nos documentos oficiais para identificar o que estes recomendam para o ensino de sistemas de equações lineares.
- b- Apresentamos a descrição dos materiais didáticos investigados e os conteúdos desenvolvidos anteriormente e posteriormente ao nosso tema de pesquisa.
- c- Analisamos os conteúdos de sistemas de equações lineares conforme é apresentado pelos autores dos materiais.
- d- Apresentamos os exercícios e a resolução proposta pelos autores dos materiais didáticos.
- e- Verificamos se os materiais didáticos estão de acordo com as recomendações dos documentos oficiais apresentados no Quadro 1 das páginas 34 e 35.
- f- Finalizamos apresentando as semelhanças e as diferenças entre os materiais didáticos analisados e as considerações finais.

No próximo capítulo faremos a descrição do que recomendam os documentos oficiais a respeito de sistemas de equações lineares e a revisão bibliográfica.

CAPÍTULO III

Análises de documentos oficiais e revisão bibliográfica

Devido à importância dos Parâmetros Curriculares Nacionais, das Orientações Curriculares para Ensino Médio e do Currículo Oficial do Estado de São Paulo, fizemos uma análise desses documentos referentes ao ensino de sistema de equações lineares. Neste capítulo, faremos também um breve relato de trabalhos relevantes à nossa pesquisa.

3.1 – Parâmetros Curriculares Nacionais

Os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental (PCNEF) de 1998, documento oficial que serve de referência curricular para todo o país, tem como objetivo adequar o trabalho escolar para que os alunos obtenham o conhecimento Matemático que lhes possibilite a inserção ao mundo do trabalho, devido à exigência de conhecimentos científicos e tecnológicos mais específicos.

Esse documento foi elaborado com a intenção de ampliar e aprofundar o debate educacional, procurando respeitar diversidades regionais, culturais e políticas existentes no país. (BRASIL, 1998).

A primeira parte deste documento retrata as mudanças do currículo e dos aspectos com relação ao ensino da Matemática no Brasil, destaca a importância da História da Matemática e das Tecnologias da Comunicação na sala de aula e da conexão da Matemática com os conteúdos relacionados aos Temas Transversais, que segundo o documento são: Ética, Pluralidade Cultural, Saúde, Meio Ambiente, Orientação Sexual, Trabalho e Consumo, para isso aponta como ponto de partida da atividade Matemática a resolução de problemas.

Na segunda parte do documento são apresentados os objetivos e os conteúdos a serem desenvolvidos em cada ciclo, levando em conta o desenvolvimento afetivo, social e cognitivo dos adolescentes. Nesta parte encontram-se também as inovações na exploração de conceitos, procedimentos e atitudes, incorporando o estudo de Probabilidades e de Estatística no Ensino Fundamental e uma maior ênfase no estudo da Geometria e das Medidas.

Para cada ciclo são apresentados critérios de avaliações como parte fundamental no processo de ensino e aprendizagem, que permitem detectar problemas e possíveis correções.

Na parte final do documento são sugeridas alternativas que podem surgir no processo de ensino e aprendizagem e discussões de certas orientações didáticas com relação a conceitos e procedimentos. Com relação ao ensino da Álgebra chama a atenção para o desenvolvimento e o exercício da abstração e generalização, além disso, destaca a possibilidade de o aluno adquirir uma rica ferramenta para a resolução de problemas.

O objetivo nessa etapa da escolaridade quanto ao ensino da Álgebra é levar o aluno a traduzir informações de tabelas e gráficos em linguagem algébrica e vice-versa; identificar o significado das letras; construir estratégias de cálculo algébrico utilizando os conhecimentos sobre as operações numéricas e suas propriedades. (BRASIL, 1998, p. 64); e ainda, produzir, interpretar diferentes escritas algébricas; resolver situações-problema por meio de equações, inequações e sistemas; observar a relação de dependência de variáveis. (BRASIL, 1998, p. 81).

Além da resolução de situações-problema por meio de sistemas de equações lineares do primeiro grau, recomenda-se, nesse documento, que os métodos de resolução sejam construídos por meio de diferentes procedimentos, e que se apresente ao aluno as soluções dos sistemas utilizando a representação das equações no plano cartesiano, com discussões a respeito do significado das raízes encontradas em confronto com a situação proposta. (BRASIL, 1998, p.88).

De acordo com os PCN+ (2002), a peça central no ensino da Matemática, é a resolução de problemas, quando são propostos exercícios para a aplicação de técnicas de matemática, a ação é uma simples transposição analógica, o aluno não se engaja ativamente no enfrentamento de desafios. No entanto, isto não quer dizer que exercícios do tipo “calcule...”, “resolva...”, devam ser extintos, mas de forma alguma são suficientes para preparar o aluno a continuar aprendendo, ou então que construam uma visão de mundo abrangente, ou ainda, para que se realizem no mundo social ou do trabalho. (BRASIL, 2002, p.112-113).

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNEM, 1999), a Matemática no Ensino Médio,

[...] tem um valor formativo, que ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo, porém também desempenha um papel instrumental, pois é uma ferramenta que serve para a vida cotidiana e para muitas tarefas específicas em quase todas as atividades humanas.[...] podendo formar no aluno a capacidade de resolver problemas genuínos, gerando hábitos de investigação, proporcionando confiança e desprendimento para analisar e enfrentar situações novas, propiciando a formação de uma visão ampla e científica da realidade, a percepção da beleza e da harmonia, o desenvolvimento da criatividade e de outras capacidades pessoais. (BRASIL, 1999, p.40).

No entanto, o aluno deve perceber que além de caráter formativo ou instrumental, a Matemática é uma ciência que possui características estruturais e específicas, e que o seu ensino nessa etapa lhe proporciona novas informações e instrumentos necessários para que ele possa continuar a aprender. (BRASIL, 1999, p.41).

O papel da Matemática no Ensino Médio deve ir além da memorização, a aquisição do conhecimento matemático deve estar vinculada ao domínio de saber fazer matemática e de saber pensar matemática. Esse processo ocorre a partir de resolução de problemas de diferentes tipos, de atividades com o objetivo de conjecturar, argumentar, interpretar, estimular a busca de regularidade, a generalização de padrões. Assim, esses elementos tornam-se fundamentais para o processo de formalização do conhecimento matemático. (BRASIL, 1999, p. 40-41).

No aspecto curricular esse documento utiliza critérios centralizados na contextualização e na interdisciplinaridade e propõe que o ensino isolado de qualquer tema matemático não permite o caráter integrador que a Matemática possui.

Quanto ao ensino de sistemas de equações lineares nos PCN+ (2002) recomenda-se da seguinte forma:

[...] Esses dois conteúdos (equações polinomiais e sistemas lineares) devem receber um tratamento que enfatize sua importância cultural, isto é, estender os conhecimentos que os alunos possuem sobre a resolução de equações de primeiro e segundo grau e sobre a resolução de sistemas de duas equações e duas incógnitas para sistemas lineares 3 por 3, aplicando esse estudo à resolução de problemas simples de outras áreas do conhecimento. Uma abordagem mais qualitativa e profunda deve ser feita dentro da parte flexível do currículo, como opção específica de cada escola. (BRASIL, 2002, p. 122).

Observamos que tanto os PCNEM (1999) e PCN+ (2002) não fazem referências explícitas quanto aos procedimentos de introdução e resolução de

sistemas lineares, no entanto encontramos nesses documentos habilidades a serem desenvolvidas no estudo da Álgebra.

Destacamos nos PCNEM (BRASIL, 1999, p.46) algumas habilidades a serem desenvolvidas que estão diretamente relacionadas com o nosso tema:

- ler, interpretar e utilizar representações matemáticas (tabelas, gráficos, expressões, etc);
- transcrever mensagens matemáticas da linguagem corrente para linguagem simbólica (equações, gráficos, diagramas, fórmulas, tabelas etc.) e vice-versa;
- exprimir-se com correção e clareza, tanto na língua materna, como na linguagem matemática, usando a terminologia correta;
- selecionar estratégias de resolução de problemas;
- aplicar conhecimentos e métodos matemáticos em situações reais, em especial, em outras áreas do conhecimento.

3.2 – Orientações Curriculares para o Ensino Médio

As Orientações Curriculares para o Ensino Médio (OCEM) de 2006 dividem-se em três volumes: o primeiro é dedicado a Linguagem, Códigos e suas Tecnologias, o segundo, as Ciências da Natureza, Matemáticas e suas Tecnologias, e o terceiro, as Ciências Humanas e suas Tecnologias.

Desenvolvidas pela Secretaria de Educação Básica, por intermédio do Departamento de Política Pública do Ensino Médio têm como objetivo retomar as discussões dos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio.

Nesse documento os conteúdos básicos de Matemática estão organizados em quatro blocos: Números e operações; Funções; Geometria; e Análise de dados e probabilidade, priorizando a qualidade no processo de ensino ao invés da quantidade de conteúdos a serem trabalhados. Tem como propósito o trabalho interdisciplinar em busca da integração dos conhecimentos, descartando exigências de memorização, regras desprovidas de explicações, resoluções de exercícios aplicando diretamente as fórmulas, exercícios repetitivos de “fixação”, e outros métodos. (BRASIL, 2006).

De acordo com as OCEM os conteúdos devem ser desenvolvidos a partir de problemas contextualizados, que incentivam o desenvolvimento das habilidades, que

estimulam a construção do conhecimento e a utilização do raciocínio lógico, e uma das sugestões dada é propor problemas abertos e situações-problema.

[...] O problema do tipo “aberto” procura levar o aluno à aquisição de procedimentos para resolução de problemas. A prática em sala de aula desse tipo de problema acaba por transformar a própria relação entre o professor e os alunos e entre os alunos e o conhecimento matemático. O conhecimento passa a ser entendido como uma importante ferramenta para resolver problemas, e não mais como algo que deve ser memorizado para ser aplicado em momentos de “provas escritas”. (BRASIL, 2006, p.83).

Quanto aos conteúdos de sistemas de equações lineares recomenda-se nas OCEM (2006) o ensino de técnicas para a resolução dos sistemas, além disso, chamam a atenção da importância de realizar uma aproximação entre a Álgebra e a Geometria para a resolução de situações-problema.

Para o estudo de sistemas de equações lineares 2×3 ou 3×3 , isto é, duas equações com três incógnitas ou três equações com três incógnitas, recomenda-se neste documento a resolução pelo processo de escalonamento com discussão a respeito da classificação de suas soluções, além disso, recomenda-se que o professor não utilize a regra de Cramer para a resolução de sistemas 3×3 , por ser um método apresentado ao aluno, em geral, sem demonstração e com pouco significado, e só é possível sua utilização em sistema de equações lineares quadrado com solução única.

3.3 – Proposta Curricular do Estado de São Paulo de 2008

A Proposta Curricular de São Paulo de 2008, que hoje é o Currículo Oficial, foi criada com o objetivo de organizar, mediante ações integradas e articuladas, o sistema educacional de São Paulo, pois até então as escolas tinham autonomia de definir seus próprios projetos pedagógicos o que ao longo do tempo mostrou-se ineficiente. (SÃO PAULO, 2008a, p.5).

Integram a este documento outros três: as Orientações para a Gestão do Currículo Escolar, os Cadernos dos Professores e os Cadernos dos Alunos. Este currículo foi implantado para que todos os alunos fizessem o mesmo percurso de aprendizagem, garantindo-lhes iguais oportunidades, preservando o acesso aos mesmos conhecimentos atualizados e significativos. Para isso lançou dez metas a serem alcançadas até 2030 visando a melhoria da qualidade do ensino.

1 - Todos os alunos de oito anos plenamente alfabetizados. 2 - Redução de 50% das taxas de reprovação da oitava série. 3 - Redução de 50% das taxas de reprovação do Ensino Médio. 4 - Implantação de programas de recuperação de aprendizagem nas séries finais de todos os ciclos de aprendizagem (2ª, 4ª e 8ª séries do Ensino Fundamental e 3ª série do Ensino Médio). 5 - Aumento de 10% nos índices de desempenho do Ensino Fundamental e Médio nas avaliações nacionais e estaduais. 6 - Atendimento de 100% da demanda de jovens e adultos de Ensino Médio com currículo profissionalizante diversificado. 7 - Implantação do Ensino Fundamental de nove anos, com prioridade à municipalização das séries iniciais (1ª a 4ª séries). 8 - Programas de formação continuada e capacitação da equipe. 9 - Descentralização e/ou municipalização do programa de alimentação escolar nos 30 municípios ainda centralizados. 10 - Programa de obras e melhorias de infra-estrutura das escolas. (SEE/SP, s/p, 2007).

Para que isso ocorra foram descritos os conteúdos, as competências, as habilidades, as estratégias metodológicas e o que se espera do aluno em cada série/ano para as seguintes disciplinas básicas: Língua Portuguesa, Matemática, Ciências (Física, Química e Biologia, no Ensino Médio), História (mais Filosofia e Sociologia no Ensino Médio), Geografia, Língua Estrangeira Moderna (Inglês), Artes e Educação Física.

Para o ensino de Matemática, o currículo articula o sistema simbólico (gráficos, diagramas, desenhos, fotografias, etc.) com a língua materna, na forma oral e escrita. E para que ocorra a construção do conhecimento, os conteúdos disciplinares estão dispostos em quatro blocos temáticos que diretamente ou indiretamente serão ensinados em todas as séries tanto no Ensino Fundamental quanto no Médio: os números; a geometria; as grandezas e medidas; os tratamentos da informação.

Com relação ao ensino de sistemas de equações lineares, o documento determina que esse conteúdo seja realizado no terceiro bimestre do 8º ano do Ensino Fundamental e na 2ª série do Ensino Médio, e não faz referência a respeito de seu ensino em outra série ou bimestre.

Na Figura 3 podem-se observar as habilidades desejadas do aluno do 8º ano do Ensino Fundamental com relação ao nosso tema de pesquisa.

7ª série/8º ano do Ensino Fundamental		
	Conteúdos	Habilidades
3º Bimestre	Números/Relações	
	Equações • Resolução de equações de 1º grau • Sistemas de equações e resolução de problemas • Inequações de 1º grau Gráficos • Coordenadas: localização de pontos no plano cartesiano	• Compreender situações-problema que envolvem proporcionalidade, sabendo representá-las por meio de equações ou inequações • Saber expressar de modo significativo a solução de equações e inequações de 1º grau • Saber explorar problemas simples de matemática discreta, buscando soluções inteiras de equações lineares com duas incógnitas • Saber resolver sistemas lineares de duas equações e duas incógnitas pelos métodos da adição e da substituição, sabendo escolher de forma criteriosa o caminho mais adequado em cada situação • Compreender e usar o plano cartesiano para a representação de pares ordenados, bem como para a representação das soluções de um sistema de equações lineares

Figura 3 – Conteúdos e habilidades do 3º bimestre do 8º ano do Ensino Fundamental
 Fonte: SÃO PAULO, 2008a, p.62.

O documento aponta as habilidades a serem desenvolvidas nos alunos. Além dos métodos de adição e da substituição para a resolução de sistemas de duas equações e duas incógnitas, há necessidade da compreensão e utilização do plano cartesiano para representar os pares ordenados. Para isso, os autores exploram como conhecimentos prévios, soluções inteiras de equações lineares com duas incógnitas.

Para a segunda série do Ensino Médio podemos observar na Figura 4 as habilidades desejadas do aluno com relação ao nosso tema de pesquisa.

2ª série do Ensino Médio		
	Conteúdos	Habilidades
2º Bimestre	Números/Relações Matrizes, determinantes e sistemas lineares • Matrizes: significado como tabelas, características e operações • A noção de determinante de uma matriz quadrada • Resolução e discussão de sistemas lineares: escalonamento	• Compreender o significado das matrizes e das operações entre elas na representação de tabelas e de transformações geométricas no plano • Saber expressar, por meio de matrizes, situações relativas a fenômenos físicos ou geométricos (imagens digitais, <i>pixels</i> etc.) • Saber resolver e discutir sistemas de equações lineares pelo método de escalonamento de matrizes • Reconhecer situações-problema que envolvam sistemas de equações lineares (até a 4ª ordem), sabendo equacioná-los e resolvê-los

Figura 4 - Conteúdos e habilidades do 2º bimestre da 2ª série do Ensino Médio
 Fonte: SÃO PAULO, 2008a, p.67.

Conforme podemos observar, nosso tema de pesquisa está inserido no bloco dos Números/Relações e os autores sugerem para a resolução e discussão de sistemas de equações lineares a utilização do método de escalonamento de matrizes, e ainda saber equacionar e resolver situações-problema que envolvam sistemas de equações lineares até 4ª ordem.

Para facilitar a compreensão dos estudos realizados em relação aos documentos oficiais, apresentamos o Quadro 1 que sintetiza o que esses recomendam quanto ao estudo de sistema de equações lineares.

Documento Oficial	Recomendações
PCNEF (1998)	• desenvolver os conteúdos por meio de situações-problema; • utilizar diferentes procedimentos de resolução; • discutir a representação gráfica das equações dos sistemas no plano cartesiano; • utilizar diferentes representações matemática (tabelas, gráficos, diagramas, equações, expressões, etc.) • discutir os significados das raízes encontradas em confronto com a situação-problema.

PCNEM (1999) e PCN+ (2002)	• situações-problema são pontos de partida para a atividade matemática; • utilizar diferentes procedimentos de resolução; • relacionar etapas da história da Matemática com a evolução da humanidade; • transcrever mensagens na língua corrente para a linguagem simbólica (equações, gráficos, diagramas, fórmulas, tabelas, etc) e vice-versa;
OCEM (2006)	• desenvolver os conteúdos por meio de situações problemas; • discutir a representação gráfica das equações dos sistemas no plano cartesiano; • resolver os sistemas 2×3 e 3×3 por meio de escalonamento; • não utilizar a regra de Cramer para a resolução de sistemas 3×3. • utilizar a História da Matemática em sala de aula no processo de atribuição de significados aos conceitos matemáticos.
PCESP (2008)	• desenvolver os conteúdos por meio de situações problemas; • converter uma linguagem em outra; • resolver pelos métodos de adição e substituição; • discutir a representação gráfica das equações dos sistemas no plano cartesiano; • resolver pelo método de escalonamento de matrizes; • reconhecer, equacionar, resolver sistemas de até 4ª ordem; • utilizar a história da Matemática buscando a compreensão dos significados dos conceitos fundamentais, e principalmente o significado das transformações ou das mudanças de significado.

Destacamos esses pontos por considerar relevantes para a nossa análise. O objetivo é de levantar dados a respeito de sistemas de equações lineares para comparar com a abordagem apresentada nos materiais didáticos que são: Coleção de livros didáticos de Matemática e Cadernos do Professor de Matemática de 2008 e

2009. A seguir faremos uma breve descrição de pesquisas que dizem respeito ao nosso tema matemático de investigação.

3.4 – Revisão Bibliográfica

Durante o desenvolvimento desta pesquisa fizemos um levantamento de trabalhos científicos realizados na área da Educação Matemática a respeito de sistemas de equações lineares. Realizamos um levantamento bibliográfico de artigos e dissertações publicadas no Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da Pontifícia Católica de São Paulo (PUC-SP), no Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação em Ciências e Matemática da Universidade do Pará (UFPA), no Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da Universidade do Mato Grosso do Sul (UFMS) e em sites de bibliotecas digitais de outras universidades.

Selecionamos alguns trabalhos que evidenciaram uma escassa produção acerca desse tema e, além disso, buscaram compreender como vem sendo o ensino dessa temática. Apresentamos a seguir um breve relato destes trabalhos que são relevantes com relação com a nossa pesquisa.

Bianchini e Almouloud (1996) elaboraram e aplicaram um teste composto por seis questões para uma turma do primeiro ano do Curso de Ciências da Computação da PUC/SP referentes aos sistemas lineares.

O objetivo do teste foi de investigar os motivos dos erros dos alunos, bem como a dificuldade de compreensão entre parâmetro e incógnita, da apresentação de soluções inadequadas para sistemas indeterminados, da resolução de sistemas com número maior de equações do que incógnitas e da mudança do quadro algébrico para o gráfico. Este teste teve duração de 50 minutos e a análise foi feita por meio de sua produção escrita.

Os pesquisadores identificaram erros dos sujeitos ao efetuarem os cálculos e na mudança do quadro algébrico para o gráfico. Constataram ainda, que alunos, ao encontrarem a solução do exercício, ignoraram o fato de que essa deve satisfazer todas as equações do sistema. Acreditaram que essa forma de solução dos cálculos por parte dos alunos deve-se ao fato de ser mais frequente o trabalho de sistemas lineares quadrados em sala de aula. Com relação aos parâmetros e incógnitas, há

uma confusão: quem deve ficar em função de quem? Alguns alunos isolaram x , outros isolaram y e outros, os parâmetros. Segundo os pesquisadores, uma maneira de amenizar essas dificuldades é propor exercícios que necessitam de reflexão a respeito do que determinar no sistema linear e continuar a institucionalização por mais tempo.

Valenzuela (2007), em seu trabalho, analisou as técnicas de resolução de sistemas de equações lineares utilizadas pelos autores da Coleção “*A conquista da Matemática*”. A pesquisadora analisou também as aulas aplicadas por um professor de Matemática do Ensino Fundamental em sala de aula. E num terceiro momento elaborou e aplicou aos alunos deste professor uma sequência didática utilizando o *software* Aplusix³ para o estudo de sistema de equações lineares em uma sala de informática.

Para a análise da Coleção a pesquisadora estabeleceu três critérios: Qual a estratégia para a introdução de sistema de equações nos livros? Quais as técnicas de resolução utilizadas? E se há continuidade do conteúdo nesses livros.

Valenzuela constatou que os autores dos livros didáticos iniciam o tema de sistema de equações lineares na 6ª série do Ensino Fundamental com situações-problema, tabelas, processos de resolução por tentativas e interpretação de uma equação com duas variáveis para, então, iniciar os estudos de sistemas de duas equações com duas incógnitas. Identificou também que o conteúdo é apresentado em estreita relação com as técnicas de resolução de comparação, de substituição e de adição, e ainda ressalta a não continuidade na 7ª série o conteúdo iniciado na 6ª série.

Quanto aos métodos utilizados pelo professor de Matemática de uma turma da 7ª série do Ensino Fundamental, a pesquisadora observou que este professor iniciou a introdução de sistemas de equações lineares com uma só equação com duas variáveis para, então, apresentar os sistemas de equações lineares com duas variáveis. Posteriormente, o professor apresentou aos alunos as técnicas de substituição e adição.

Além de pesquisas que analisaram livros didáticos, achamos importante destacar também trabalhos desenvolvidos em sala de aula, e neste trabalho percebemos um frágil recurso do professor para a construção de conhecimentos

³ *Aplusix software* criado pelo Laboratório IMAG-Leibniz-França, voltado para o ensino de Álgebra.

matemáticos. Sendo assim, as técnicas de resolução das tarefas apresentadas prevalecem sobre o objeto matemático estudado.

Referente ao uso do *software Aplusix*, a autora aplicou uma sequência didática composta por nove sessões de 50 minutos com 29 alunos da 7ª série do Ensino Fundamental em uma sala de informática sem a presença do professor dessa turma, que preferiu não participar. Seu estudo constatou que alguns alunos conseguiram conjecturar, elaborar e testar suas concepções junto ao *software* e permitiu a compreensão do discurso teórico-tecnológico de técnicas utilizadas para a resolução de sistemas determinados. No entanto, não houve o mesmo sucesso para os sistemas indeterminados e impossíveis. Essa dificuldade pode estar relacionada à atenção maior aos trabalhos realizados com os objetos ostensivos⁴ e o escasso trabalho com os objetos não-ostensivos⁵.

Costa (2008) apresentou um panorama dos livros didáticos de diferentes épocas, desde a década de 1950 ao século XXI, com o propósito de investigar como são propostas as tarefas referentes ao ensino de sistema de equações lineares com duas incógnitas.

A autora analisou oito livros didáticos: *Curso de Álgebra* de 1959, *Matemática Curso Moderno* de 1966, *Matemática na Escola Renovada* de 1971, *Matemática Conceitos Operações* de 1982, *Matemática Scipione* de 1991, *Matemática e Realidade* de 2000, *A conquista da Matemática* de 2002 e *Matemática e Realidade* de 2005.

Em sua análise constatou que nas obras de 1959 e 1966 as definições e as propriedades ficavam a cargo do professor e o que se esperava dos alunos era o domínio de métodos de resolução.

Na obra de 1971, época do Movimento da Matemática Moderna, segundo a pesquisadora, os autores do livro propugnavam aos alunos a resolução de problemas por meio de sistema de equações lineares buscando a articulação entre o nível técnico, mobilizável e disponível⁶.

⁴ Objetos Ostensivos são todos os objetos que têm uma natureza sensível, uma certa materialidade, que, com efeito, adquirem para o sujeito humano uma realidade perceptível. Boch e Chevallard (1999 *apud* HENRIQUE, 2007, p.65).

⁵ Objetos Não-ostensivos são objetos que, como as ideias, as intenções ou os conceitos, existem institucionalmente sem, no entanto, poderem ser vistos, ditos, entendidos, percebidos ou mostrados por si: só podem ser evocados ou invocados a partir da manipulação adequada de objetos ostensivos associados. Boch e Chevallard (1999 *apud* HENRIQUE, 2007, p.65).

⁶ Abordagem teórica dos três níveis de conhecimento (técnico, disponível e mobilizável), segundo Aline Robert: o nível técnico corresponde a um trabalho único e simples. O nível mobilizável corresponde a uma justaposição de saberes de certo domínio em que vários métodos são utilizados. O nível disponível corresponde em saber responder corretamente o que é proposto, fazer relações, aplicar métodos não previstos sem nenhuma indicação. (GRECCO, 2008, p.40-41)

Nas obras de 1982 e 1991, Costa verificou a preocupação dos autores em manter o rigor e a coerência em relação à teoria matemática que a sustenta, explorando as tarefas de aplicação em situações da própria matemática, de outras ciências e do cotidiano.

Nos livros didáticos de 2000, 2002 e 2005 considerados, pelo Plano Nacional de Livros Didáticos de suas épocas, como satisfatório, a pesquisadora identificou a noção de equação do 1º grau como conhecimentos prévios para a introdução de Sistemas de Equações Lineares com duas incógnitas, contrário ao método de tentativas nas obras anteriores. E ainda, na obra de 2002 os autores não favorecem a discussão de sistemas de equações indeterminados e impossíveis, e assim, segundo a pesquisadora não é enfatizado o caráter objeto desse conteúdo.

Esta pesquisa apresenta um resultado importante para o desenvolvimento de nossa pesquisa. Segundo a pesquisadora, na obra de 2002, mesmo sendo aprovada pelo PNLD, o autor não favorece a discussão de sistemas de equações lineares indeterminados e impossíveis, tratando o tema matemático como uma ferramenta para a resolução de problemas da própria matemática ou de outras áreas do conhecimento, que diverge das recomendações dos PCNEF (1998), que orientam a resolução de sistemas de equações lineares com discussão a respeito da classificação de suas soluções.

Outro pesquisador que descreve a respeito de livros didáticos de diferentes épocas foi Reis (2010), que investigou quais as técnicas utilizadas para a resolução de sistemas de equações do primeiro grau pelos autores de livros no período de 1890 aos dias atuais.

Para o desenvolvimento de sua pesquisa, Reis selecionou dois livros, *Tratado de Álgebra Linear* de 1929 e *Matemática Para Todos* de 2006, e constatou a diminuição de técnicas de resolução nos livros atuais. Enquanto no livro da década de 30 o autor apresentava os métodos de substituição, comparação, redução, Bézout e Cramer, e logo adiante mostrava todos os passos da resolução, no livro atual há o predomínio da língua materna e do registro algébrico no enunciado dos problemas, além da presença de diversas figuras para auxiliar na compreensão do problema proposto.

Segundo Reis (2010), há uma valorização no estudo de sistemas de equações nos livros didáticos antigos aos didáticos contemporâneos. Constatou também uma diversidade de métodos de resolução nos livros antigos, uma predominância da

língua materna e uma diversidade de registros nos livros contemporâneos e uma grande quantidade de exercícios nos livros de ambas as épocas.

Pantoja (2008) elaborou e aplicou uma sequência didática para uma classe de vinte e quatro alunos da segunda etapa do ensino médio da educação de jovens e adultos (EJA) de uma escola da rede pública estadual de ensino, com o objetivo de verificar se os alunos estabelecem conexões entre o método de substituição e o método de escalonamento por meio de conversões de registros.

Para a análise foram aplicadas três situações-problema, três problemas contextualizados e três sistemas não contextualizados.

Seus resultados indicaram que os alunos encontraram dificuldades em aplicar o método da substituição no início da proposta. Segundo a autora pode ser devido à insegurança por parte de alguns alunos. No entanto, a sequência permitiu que os mesmos conseguissem automatizar o uso do método. Apresentaram também dificuldades em converter a situação-problema no registro de representação na língua natural para o registro algébrico, e dificuldades frente aos cálculos algébricos, esse último foi resolvido diante das relações estabelecidas quando os exercícios envolviam somente cálculos aritméticos.

Battaglioli (2009) investigou a abordagem de sistemas de equações lineares 3×3 nos livros didáticos do Ensino Médio para identificar quais os registros de representação semiótica e quais as conversões de registros são explorados.

Para a sua análise selecionou três livros do Ensino Médio: *Matemática, Contexto e Aplicações* (2007), *Matemática – Ensino Médio* (2003) e *Matemática Completa* (2002) e constatou o predomínio da linguagem algébrica nos três livros e que dois, apresentam o registro de representação gráfica apenas como texto explicativo, esse fato pode ser devido a falta de um instrumento tecnológico para a visualização dos gráficos das equações no plano.

Por fim deparamo-nos com o trabalho de Jordão (2010) que formulou e analisou uma sequência didática proposta aos alunos do Ensino Médio, com propósito de investigar a interferência do uso de um *software* matemático quanto à resolução de sistemas de equações lineares 3×3 , dando sequência ao estudo realizado por Battaglioli (2009).

Para a sua análise, Jordão (2010) realizou atividades em sala de aula e no laboratório de informática com auxílio do computador, utilizando o *software* Winplot. Suas atividades foram divididas em duas partes. A primeira parte continha uma

questão contextualizada e duas não-contextualizadas, as mesmas questões foram realizadas tanto em sala de aula quanto no laboratório de informática referente ao estudo de sistema de equações lineares 2×2 . A segunda parte continha uma questão contextualizada e outra não, referente ao estudo de sistemas de equações lineares 3×3 , realizada da mesma forma que a primeira.

Os dados foram coletados por meio das produções orais e escritos dos alunos e os relatórios da pesquisadora ao final de cada atividade.

Jordão (2010) constatou que os alunos não apresentaram dificuldades nos cálculos algébricos e aritméticos referentes aos sistemas de equações lineares 2×2 , porém, não conseguiram combinar duas a duas as equações dos sistemas lineares 3×3 . Tiveram dúvidas quanto ao conjunto solução dos sistemas indeterminados e estabeleceram a solução de forma incorreta quando não realizaram todas as etapas do método de adição.

Com relação ao uso do *software*, a pesquisadora concluiu que o instrumento contribui para a compreensão do significado das equações obtidas no tratamento algébrico, porém quando o aluno realiza a operação algebricamente e classifica o sistema de equação linear de forma correta não obtêm a mesma resposta quando realiza seu registro gráfico. Segundo a pesquisadora pode ser devido à digitação da equação equivocada. Tiveram dificuldades também em visualizar e interpretar sistemas cujos gráficos com três planos interceptavam dois a dois, mesmo movimentando os planos não ficou claro para os alunos. Finalizando suas análises, a pesquisadora identificou a limitação do *software* utilizado quanto à visualização do ponto de intersecção dos três planos.

Constatamos em nossa revisão bibliográfica que o estudo de sistemas equações lineares vem sendo trabalhado tanto nos livros antigos quanto nos atuais, no entanto vem passando por algumas mudanças com relação ao seu ensino, como por exemplo houve a redução quanto aos métodos de resolução nos livros atuais. Na década de 80 já se via em alguns materiais o ensino de sistemas de equações lineares por meio da representação gráfica das equações no plano cartesiano. E atualmente, fica evidente a preocupação dos autores de livros didáticos em coordenar o ensino por meio de diferentes representações, por exemplo, aritmética, algébrica, de tabela e gráfica, mantendo os métodos de substituição e adição na maior parte dos livros e a evidente extinção de outros métodos, como de Cramer e de Bézout.

Com relação à aprendizagem, observamos nestas pesquisas a constatação de algumas dificuldades apresentadas pelos alunos, tais como:

- a interpretação da situação-problema;
- a transcrição da situação-problema na língua materna para a linguagem algébrica;
- a transcrição do exercício da linguagem algébrica para a representação gráfica;
- a transcrição do exercício da linguagem algébrica para a língua materna;
- a operação dos cálculos algébricos;
- não verificam as soluções encontradas e não têm clareza do que elas representam;
- fazem confusão a respeito do que seja a solução de um sistema linear do tipo indeterminado ou impossível;
- não têm clareza do que seja parâmetro e incógnita no sistema de equação linear;

Diante desses fatos, observamos a preocupação desses pesquisadores com relação ao ensino de sistemas de equações lineares e seus resultados contribuíram para o desenvolvimento de nosso tema de investigação.

CAPÍTULO IV

ANÁLISES DAS COLEÇÕES DE LIVROS DIDÁTICOS

Para realizarmos as análises dos Cadernos do Professor de Matemática da rede pública de São Paulo de 2008 e 2009 consideramos necessário, além de investigarmos o que os documentos oficiais recomendam para o ensino de sistemas de equações lineares, investigar também de que forma é abordado esse tema em livros didáticos aprovados pelo Plano Nacional do Livro Didático (PNLD) direcionados aos professores para fins de comparação.

Nosso critério para a seleção dos livros didáticos baseou-se na escolha de uma coleção do mesmo autor que contemplasse tanto o Ensino Fundamental quanto o Médio, para identificar como esse aborda os conteúdos de sistema de equações lineares.

A escolha partiu de uma lista de dez livros aprovados pelo PNLD de 2011 referentes ao Ensino Fundamental e outra com sete, aprovados pelo PNLD de 2012 referentes ao Ensino Médio. Dentre esses, quatro coleções produzidas pelos mesmos autores fazem parte do Ensino Fundamental e Médio, e para o efeito de nossa análise, selecionamos a coleção *Matemática e Realidade* do Ensino Fundamental e a coleção *Ciência e Aplicações* do Ensino Médio, devido esses fazerem parte dos livros escolhidos pela escola estadual que leciono.

Escolhidas as coleções dos livros didáticos para a análise, fizemos uma leitura completa dos volumes para identificar em quais capítulos nosso tema de pesquisa é abordado.

Após a recolha dos dados passamos à fase da análise com o propósito de investigar como esses autores abordam os conteúdos de sistemas de equações lineares, em especial se esses fazem a conexão do tema do Ensino Fundamental para o Médio.

A seguir, descrevemos de que forma os autores da coleção *Matemática e Realidade* abordam sistemas de equações lineares nos livros destinados ao Ensino Fundamental.

4.1 – Análise da Coleção *Matemática e Realidade*

A coleção *Matemática e Realidade* de Iezzi, Dolce e Machado (2009) que está em sua 6ª edição, é composta por quatro volumes, cada um relativo a um ano do Ensino Fundamental. Os volumes estão compostos por capítulos organizados em unidades. Estas unidades em sua maioria contêm exercícios; desafios; notícias de jornais, revistas e artigos relacionando a Matemática; e em algumas, temas da história da Matemática. Ao final de cada volume encontram-se as respostas dos exercícios e o manual do professor.

No manual do professor dos quatro volumes, os autores ressaltam que:

[...] a obra procura estimular o aluno a compreender as definições mais importantes e as propriedades centrais da Matemática em nível elementar. Os conceitos são introduzidos a partir de exemplos concretos. As propriedades são quase sempre deduzidas em linguagem coloquial e enunciadas *a posteriori*. Na medida do possível, evitam-se definições formais e receitas prontas (IEZZI *et al*, 2009, p.2).

Referentes aos conteúdos de sistema de equações lineares os autores abordam o tema no 7º ano, 8º ano e 9º ano, com maior ênfase no volume destinado ao 8º ano.

No volume destinado ao 7º ano do Ensino Fundamental, o tema é abordado no vigésimo quarto capítulo da sexta unidade, após o estudo de equações do 1º grau e anterior ao estudo de inequações do primeiro grau.

Neste volume o estudo de sistemas de equações lineares tem início por meio de um problema, para que duas equações sejam escritas para então formar um sistema de equações, e a seguir apresentam dois métodos de resolução para esse sistema: o método de substituição e o método de comparação.

A Figura 5 ilustra o problema apresentado pelos autores e a Figura 6 ilustra passo a passo a resolução pelos métodos de substituição e comparação.



A festa da classe



Dona Luana e seu Ênio, pais de Ingo, promoveram uma festinha dos amigos de classe do filho. Cada menino levou mais dois meninos convidados, e cada menina, mais uma menina convidada. Ao todo, compareceram os 25 alunos da classe e mais 35 convidados.

Quantos meninos e quantas meninas compõem a classe do Ingo?

Problemas com duas incógnitas

Nesse problema, temos duas incógnitas:

x = número de meninos da classe
 y = número de meninas da classe

Para resolvê-lo, precisaremos montar duas equações:

Figura 5 – Problema com duas incógnitas

Fonte: IEZZI *et al*, 2009a, p.192

Resolução pelo método de substituição

Podemos resolver o sistema (calcular as incógnitas) do seguinte modo:

1º passo: Escolhemos uma das equações e isolamos uma das incógnitas no primeiro membro.

2º passo: Na outra equação, substituímos a incógnita isolada (no 1º passo) pela expressão obtida e resolvemos a equação resultante.

3º passo: Calculamos a outra incógnita na expressão obtida no 1º passo e damos a resposta.

Na primeira equação, vamos isolar y no primeiro membro:

$$x + y = 25$$

$$y = 25 - x$$

Na segunda equação, substituímos y por $(25 - x)$ e resolvemos:

$$2x + y = 35$$

$$2x + (25 - x) = 35$$

$$2x + 25 - x = 35$$

$$2x - x = 35 - 25$$

$$x = 10$$

Calculamos y em $y = 25 - x$:

$$y = 25 - x$$

$$y = 25 - 10$$

$$y = 15$$

Resposta: A classe tem 10 meninos e 15 meninas.

Essa forma de resolução do sistema de equações denomina-se *método de substituição*.
 Lembre-se: Você sempre pode conferir se resolveu o sistema corretamente, verificando se os valores encontrados satisfazem ambas as equações.
 (Para $x = 10$ e $y = 15$, temos $x + y = 10 + 15 = 25$ e $2x + y = 2 \cdot 10 + 15 = 35$)
 Vejamos outro modo de resolver o sistema.

Resolução pelo método de comparação

1º passo: Escolhemos uma das incógnitas e a isolamos no primeiro membro de cada equação.

2º passo: Igualamos as duas expressões obtidas para a mesma incógnita e resolvemos a equação resultante.

3º passo: Calculamos a outra incógnita numa das expressões obtidas no 1º passo e damos a resposta.

Vamos isolar y nas duas equações:

1º) $x + y = 25$
 $y = 25 - x$

2º) $2x + y = 35$
 $y = 35 - 2x$

Igualamos as duas expressões obtidas para y e resolvemos:

$$25 - x = 35 - 2x$$

$$-x + 2x = 35 - 25$$

$$x = 10$$

Calculamos y em $y = 25 - x$:

$$y = 25 - x$$

$$y = 25 - 10$$

$$y = 15$$

Resposta: A classe tem 10 meninos e 15 meninas.

Figura 6 – Resolução do sistema de equações pelos métodos de substituição e comparação

Fonte: IEZZI *et al*, 2009, p.192

Apesar de os autores mostrarem preocupação em mobilizar o aluno a transcrever o enunciado da língua materna para a linguagem algébrica, assim como recomendam os documentos oficiais que ressaltam ser esse método a peça central para o ensino de Matemática, e logo em seguida, propõem a aplicação de métodos para a resolução do problema. Neste caso, os autores poderiam propor uma atividade anterior à apresentação dos métodos, no qual exigisse do aluno a resolução do problema, engajando-os ativamente no enfrentamento do desafio, assim como foi feito no trabalho de Bianchini e Almouloud (1996).

Os autores prosseguem o estudo apresentando quatro exercícios para que os alunos resolvam pelos métodos de substituição e comparação, e em seguida propõem problemas para que sejam escritas na forma de sistemas de equações. Entre esses problemas, os autores pedem que o aluno retorne ao capítulo anterior e resolva dois exercícios por meio de sistemas de equações.

Chamamos atenção para os exercícios 119 e 120 da página 195, em que os autores sugerem a aplicação de sistemas de equações lineares para os exercícios do capítulo anterior, *Resolução de problemas* do primeiro grau, uma forma de mostrar ao aluno que há diferentes maneiras de resolver o mesmo problema.

119 Resolva o exercício 91, na página 189 (partilha de R\$ 810,00 entre Rubens e Paula), montando um sistema de equações. R\$ 389,00

120 Resolva o exercício 95 da página 190 (partilha de R\$ 560,00 entre Marlene, Lúcia e Flávia) montando um sistema de equações. Atenção: Use três incógnitas; o sistema deve ter três equações.
Marlene: R\$ 250,00; Lúcia: R\$ 180,00; Flávia: R\$ 130,00

Figura 7 - Exercícios propostos
 Fonte: IEZZI *et al*, 2009, p.192

No volume destinado ao 8º ano do Ensino Fundamental, o tema de sistemas de equações lineares é abordado no vigésimo primeiro capítulo da oitava unidade, após os estudos de equações do primeiro grau e anterior aos estudos de inequações do primeiro grau.

Neste volume são apresentados: métodos de resolução, a interpretação geométrica das retas no plano cartesiano, testes para avaliar os conhecimentos do aluno, desafios, um recorte de uma notícia de jornal acompanhada de três questões e um texto referente às coordenadas cartesianas.

Semelhante ao procedimento utilizado no volume destinado ao 7º ano os autores apresentam um problema para que o aluno escreva duas equações para

então formar um sistema e em seguida, apresentam a resolução do sistema de equações pelo método de adição.

A Figura 8 ilustra o problema apresentado pelos autores e a Figura 9 ilustra passo a passo a resolução pelo método adição.

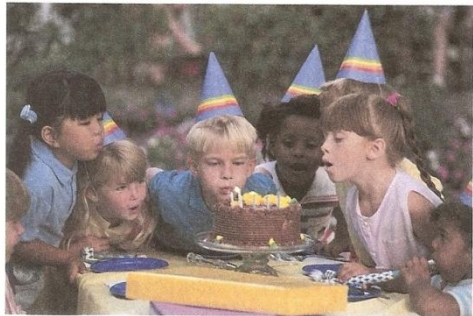


A festa de Lucas

Laís é a mãe de Lucas. Para ajudar a organizar a festa de aniversário dele, ela chamou sua amiga Laura.

Laís notou que se colocasse 3 cadeiras em cada mesa sobriariam 14 das cadeiras disponíveis, mas se colocasse 4 em cada mesa faltariam 8 cadeiras para preencher todos os lugares.

Depois, Laura ficou se perguntando: quantas eram as mesas e quantas as cadeiras?



Problemas com duas incógnitas

No problema acima temos duas incógnitas:

x = número de mesas
 y = número de cadeiras

Como se trata de mesas e cadeiras, x e y devem ser números inteiros positivos. Para resolver, precisamos montar duas equações:

Figura 8 - Problema com duas incógnitas

Fonte: IEZZI et al, 2009b, p.262

Com as equações ① e ② formamos um *sistema de equações*, em que a chave substitui a conjunção e:

$$\begin{cases} -3x + y = 14 \\ 4x - y = 8 \end{cases}$$

Para calcular as incógnitas, podemos adicionar as equações membro a membro:

$$\begin{array}{r} -3x + y = 14 \\ + \\ 4x - y = 8 \\ \hline x = 22 \end{array} \quad \text{ou} \quad x = 22$$

Achamos $x = 22$; agora podemos calcular y na primeira equação:

$$y = 14 + 3x = 14 + 3 \cdot (22) = 14 + 66 = 80 \Rightarrow y = 80$$

Portanto, são 22 mesas e 80 cadeiras.

Obtido o valor de x , poderíamos calcular y também na segunda equação:

$$4x - y = 8 \Rightarrow 4 \cdot (22) - y = 8 \Rightarrow 88 - y = 8 \Rightarrow y = 80$$

Figura 9 - Resolução do sistema de equações pelo método da adição

Fonte: IEZZI et al, 2009b, p.263

Neste capítulo, os autores apresentam também a resolução de sistemas de equações lineares pelo método de adição quando os coeficientes das incógnitas não são simétricos e retomam os métodos de substituição e de comparação, estudados na série anterior.

Após a apresentação de cada método são propostos quatro exercícios e três problemas para que sejam resolvidos pelos métodos ensinados.

Nesta parte do capítulo os autores propõem dois exercícios interessantes, um para que o aluno invente um problema e resolva-o por meio de um sistema de equações e outro, para que invente um problema para o sistema de equações lineares determinado pelos autores.

A Figura 10 mostra os exercícios.

74 Invente um problema que possa ser resolvido por um sistema de equações e depois resolva-o. *Resposta pessoal.*

75 Invente um problema que possa ser resolvido pelo sistema abaixo e resolva-o. *Resposta pessoal.*

$$\begin{cases} x = y + 200 \\ 4x + 5y = 3500 \end{cases} \quad x = 500; y = 300$$

Figura 10 – Problemas propostos para que o aluno invente
Fonte: IEZZI *et al*, 2009b, p.270

Consideramos os exercícios interessantes, pois exige a criatividade, a estratégia e os conhecimentos adquiridos até então, para a resolução dos problemas.

Seguindo conforme a apresentação do livro, os autores iniciam o estudo do significado geométrico a partir de uma equação com duas incógnitas, e explicam o significado de par ordenado da seguinte forma:

[...] o par de números é indicado pelos parênteses e os números são separados por ponto e vírgula (ou apenas por vírgula, se ficar bem claro quais são os dois números do par). Além disso, o primeiro número adotado é o que vai no lugar da primeira incógnita, x , e o segundo número é o que vai no lugar da segunda incógnita, y . Por isso, dizemos que é um *par ordenado* de números (IEZZI *et al*, 2009b, p.272).

Finalizam esta parte apresentando mais exemplos de pares ordenados que satisfaçam ou não a solução do problema proposto e mais oito exercícios, os quais os alunos são motivados a verificar se os pares ordenados satisfaçam ou não a solução da equação linear com duas incógnitas, escrever a equação linear e apresentar pares ordenados que satisfaçam a solução da equação e pares ordenados que não e encontrar o valor do segundo membro da equação linear sabendo o valor dos pares ordenados.

Em seguida os autores fazem a representação de dois pares ordenados no plano cartesiano, concomitante às explicações a respeito dos termos que representam as abscissas e que representam as ordenadas.

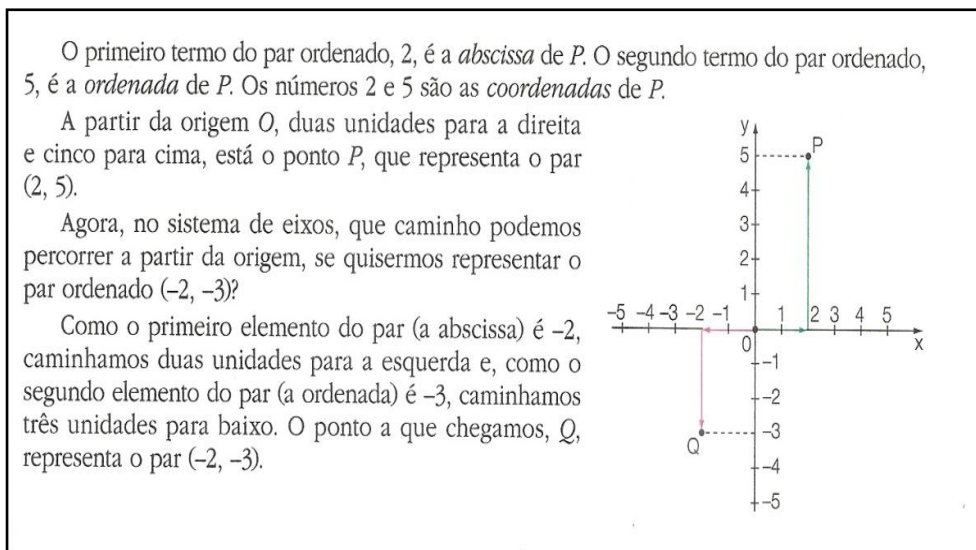


Figura 11 – Interpretação dos pares ordenados no plano cartesiano
Fonte: IEZZI *et al*, 2009b, p.275

Os autores prosseguem o estudo da interpretação gráfica utilizando tabelas para encontrar os pares ordenados da equação e definem gráfico da equação da seguinte forma:

[...] O gráfico da equação $ax+by=c$, com $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, é uma reta. Todo ponto dessa reta representa um par ordenado que é solução da equação. Toda solução da equação é representada num ponto dessa reta (IEZZI *et al*, 2009b, p.277).

A Figura 12 ilustra a solução de um sistema de equações lineares determinado por um ponto que pertence as duas retas.

Considere o sistema de equações linear apresentado pelos autores:

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

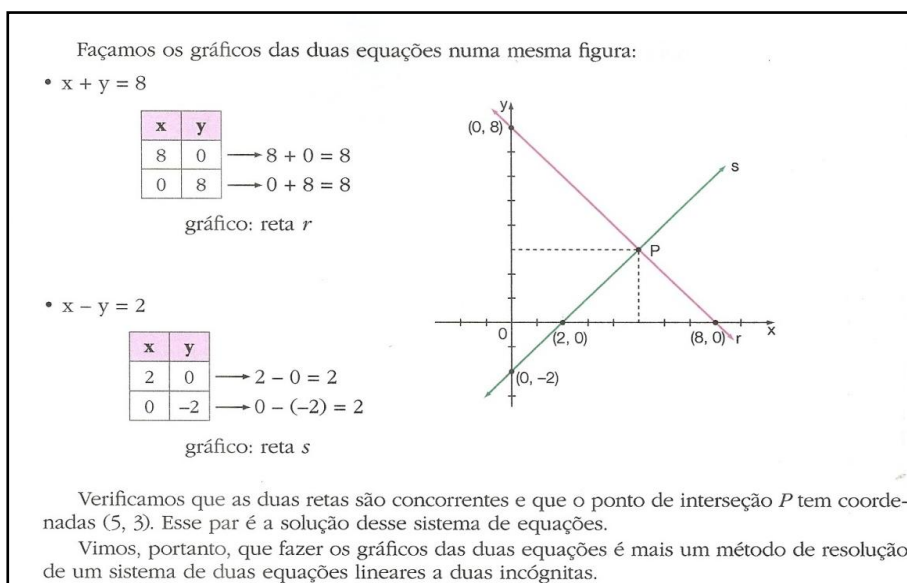


Figura 12 - Interpretação geométrica de um sistema de duas equações lineares a duas incógnitas

Fonte: IEZZI *et al*, 2009b, p.278

Para abordagem de sistema de equações que não tem solução e que têm infinitas soluções, os autores utilizaram o método de adição e a visualização de sua representação gráfica, conforme podemos observar nas Figuras 13, 14 e 15.

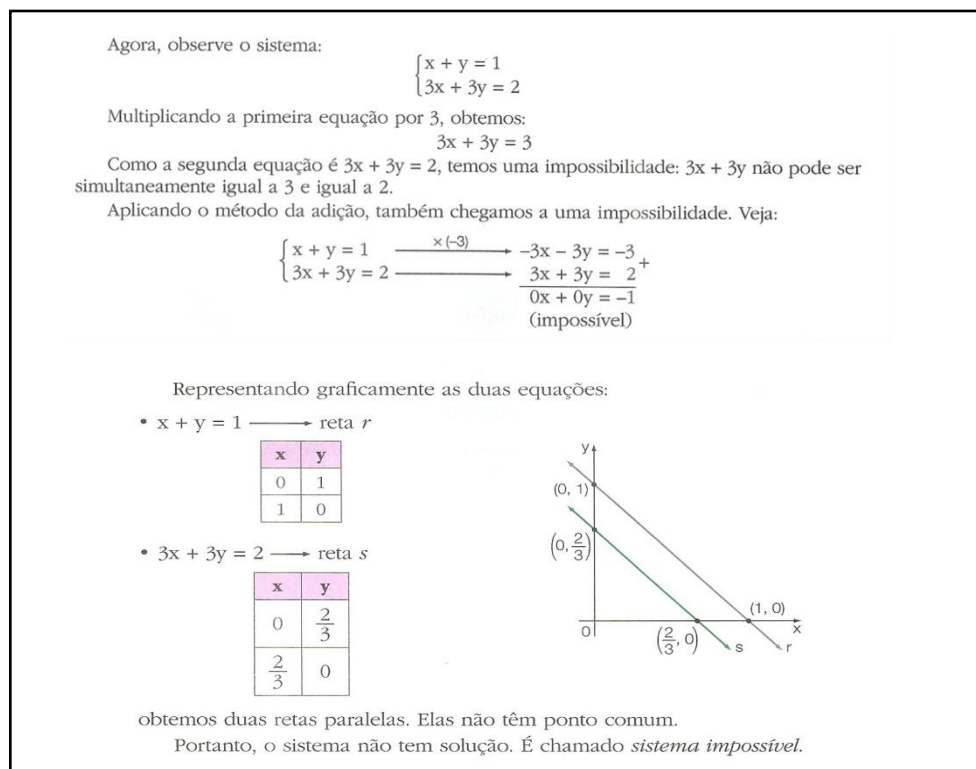


Figura 13 - Resolução pelo método da adição e a interpretação da solução geométrica de um sistema de equações lineares

Fonte: IEZZI *et al*, 2009b, p.278

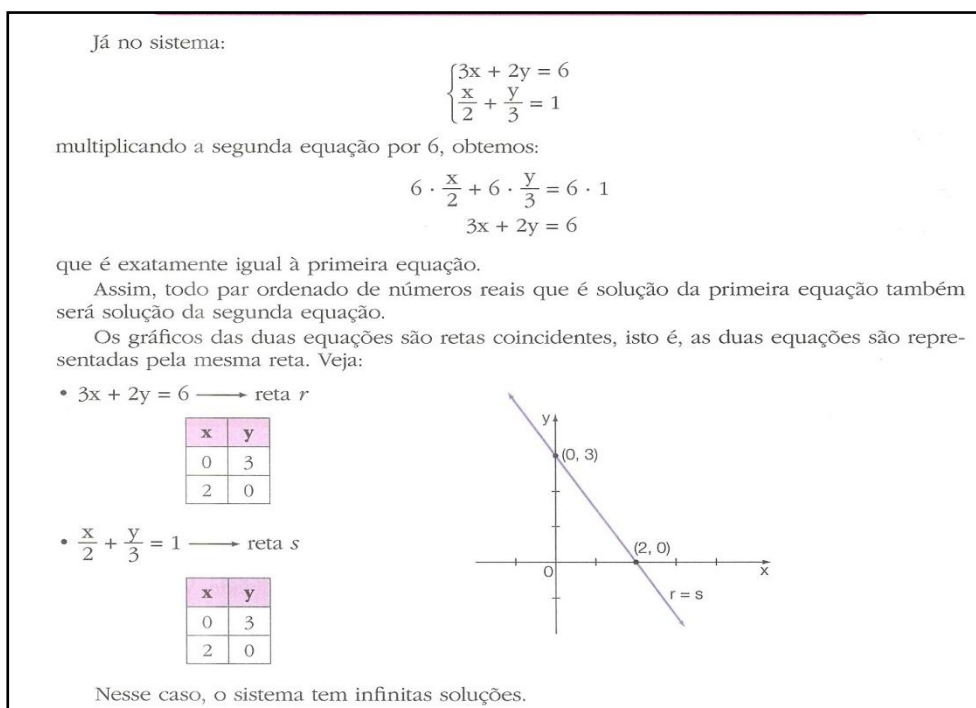


Figura 14 - Interpretação geométrica de um sistema de equações lineares com infinitas soluções
Fonte: IEZZI et al, 2009b, p.280

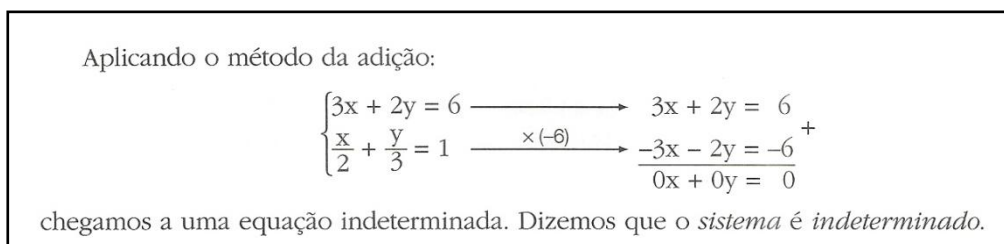


Figura 15 – Resolução pelo método da adição e classificação do sistema de equações lineares
Fonte: IEZZI et al, 2009b, p.281

Entre os exercícios propostos destacamos um que merece comentário, no qual os autores propõem condições para que o aluno encontre o valor desconhecido para determinar a solução do sistema de equações lineares. A Figura 16 ilustra o exercício proposto.

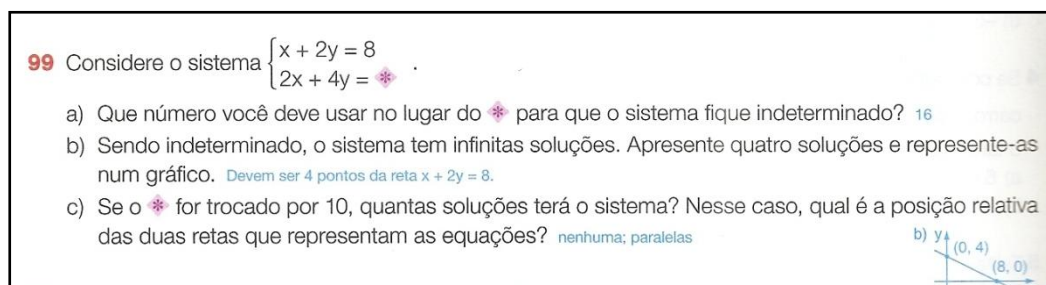


Figura 16 – Exercício proposto
Fonte: IEZZI et al, 2009b, p.281

No encerramento deste capítulo os autores apresentam um texto que aborda a história da criação e do desenvolvimento do estudo das coordenadas cartesianas, além de utilizá-la para estimular o gosto pela leitura, os autores propõem também uma visão abrangente da história das descobertas matemáticas (Manual do Professor 2009).

Segundo os PCNEF (1998), a História da Matemática é um dos recursos para ensino de qualquer disciplina, principalmente a Matemática. Por meio dela é possível o aluno compreender que o avanço tecnológico não seria possível sem as heranças passadas.

[...] A História da Matemática pode oferecer uma importante contribuição ao processo de ensino e aprendizagem dessa área do conhecimento. Ao revelar a Matemática como uma criação humana, ao mostrar necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, ao estabelecer comparações entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente, o professor cria condições para que o aluno desenvolva atitudes e valores mais favoráveis diante desse conhecimento. (BRASIL, 1998, p. 42).

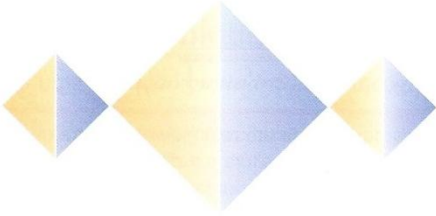
Ainda segundo os PCNEF (1998), isto não significa que em cada conteúdo trabalhado o professor deva utilizar este recurso, mas encare como uma das muitas possibilidades para desenvolver diversos conceitos, sem resumi-las a fatos, datas ou nomes a serem memorizados.

No volume destinado ao 9º ano do Ensino Fundamental, no oitavo capítulo, os autores abordam de forma breve o estudo de sistemas de equações do 2º grau, após os estudos de equações do segundo grau e anterior aos estudos de equações fracionárias. Neste capítulo, também contém o estudo de equações biquadradas, equações irracionais, dois artigos acompanhados de cinco questões, testes para avaliar os conhecimentos do aluno, quatro desafios, e um texto referente à fórmula de Bhaskara.

Os autores iniciam o tema utilizando um problema acompanhado de três figuras geométricas para o estudo de sistemas de equações do 2º grau, e em seguida sua resolução pelo método da substituição, conforme ilustram as Figuras 17 e 18.

 **As medidas do logotipo**

Na figura, desenhamos o logotipo de uma empresa, formado por três quadrados, sendo dois do mesmo tamanho. Se o perímetro total é de 12 cm e a área total é de 3,375 cm², quais são as medidas dos lados dos quadrados?



Sistemas de equações

Para resolver esse problema, temos que considerar duas incógnitas:

x = lado dos quadrados menores (em cm)
 y = lado do quadrado maior (em cm)

Vamos montar as equações a que x e y devem satisfazer:

Figura 17 - Problema com duas incógnitas

Fonte: IEZZI *et al*, 2009c, p.262

Temos, então, o sistema de equações:

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 2x^2 + y^2 = 3,375 \end{cases} \quad (\text{a chave substitui o conectivo e})$$

Para resolvê-lo usamos o *método da substituição*: isolamos uma incógnita na primeira equação e a substituímos na segunda equação.

1ª equação: $2x + y = 3 \rightarrow y = 3 - 2x$

Na 2ª equação: $2x^2 + y^2 = 3,375 \rightarrow 2x^2 + (3 - 2x)^2 = 3,375 \rightarrow 6x^2 - 12x + 5,625 = 0$
 $\Delta = (-12)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 5,625 = 144 - 135 = 9$

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 6} = \frac{12 \pm 3}{12} \begin{cases} x_1 = 1,25 \\ x_2 = 0,75 \end{cases}$$

Agora calculamos y na primeira equação.

Para $x = 1,25$: $y = 3 - 2x = 3 - 2 \cdot 1,25 = 3 - 2,5 = 0,5$. Essa resposta não convém, pois y deve ser maior que x .

Para $x = 0,75$: $y = 3 - 2x = 3 - 2 \cdot 0,75 = 3 - 1,5 = 1,5$.

Portanto, o lado dos quadrados menores mede 0,75 cm e o do quadrado maior mede 1,5 cm.

Figura 18 - Resolução do sistema de equações pelo método da substituição

Fonte: IEZZI *et al*, 2009c, p.281

Com sete exercícios os autores finalizam o estudo de sistemas de equações no Ensino Fundamental.

Nossas considerações baseiam-se no que está escrito no Quadro 1 das páginas 34 e 35, sendo que, para essa Coleção iremos confrontar com as recomendações nos PCNEF (1998).

Constatamos nesta coleção que os autores tiveram a preocupação de iniciar os conteúdos de sistemas de equações lineares em todos os volumes por meio de situações-problema, utilizaram diversos exercícios que contemplam a transcrição do enunciado, tais como na língua materna para a linguagem algébrica, na linguagem algébrica para a linguagem gráfica e na linguagem algébrica para a língua materna. Seguindo ao encontro às recomendações dos PCNEF (1998) com relação ao eixo organizador do processo de ensino aprendizagem de Matemática:

[...] a situação-problema é o ponto de partida da atividade matemática e não a definição. No processo de ensino e aprendizagem, conceitos, idéias e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las. (BRASIL, 1998, p.40).

No 8º ano do Ensino Fundamental, abordam o tema com maior ênfase, apresentam o método de adição e retomam os métodos de substituição e comparação apresentados no volume anterior. Discutem também neste volume, as soluções e as classificações dos sistemas na linguagem algébrica e na representação gráfica e finalizam o tema no volume destinado ao 9º ano, com sistemas de equações do 2º grau, apresentando o método de substituição para a sua resolução.

Há de se ressaltar nesta coleção, artigos de jornais e revistas acompanhados de questões relacionadas à Matemática, textos que abordam a história da criação e do desenvolvimento de um tema matemático, com o propósito de que o aluno compreenda o que foi proposto e de uma resposta aplicando procedimentos estudados, além de desenvolver no aluno o hábito de leitura, assim como recomendam os documentos oficiais.

Em síntese, os métodos que os autores apresentaram em sua coleção destinada ao Ensino Fundamental são: substituição e comparação no 7º ano; adição, substituição, comparação e representação gráfica das equações dos sistemas no 8º ano; e no 9º apresentam o método de substituição. Constatamos também oitenta exercícios ao todo nestes volumes, referentes a sistemas de

equações, os quais vinte estão presentes no volume destinado ao 7º ano, cinquenta e três no 8º ano e sete no 9º ano.

Notamos que os autores dessa coleção apresentam a abordagem de sistemas de equações lineares de forma espiral⁷, ou seja, o conteúdo é retomado em outro volume e posteriormente aprofundado, ou ainda, é apresentado como uma ferramenta para a resolução de problemas de outro tema da própria Matemática.

A seguir descrevemos a abordagem de sistemas de equações lineares na Coleção *Matemática Ciência e Aplicações* destinada ao Ensino Médio.

4.2 – Análise da Coleção *Matemática: Ciência e Aplicações*

A segunda coleção a ser analisada foi *Ciência e Aplicações* de Iezzi, Dolce, Desenszajn, Périgo e Almeida (2010) que está em sua 6ª edição. A coleção é composta por três volumes, cada um relativo a uma série do Ensino Médio. Os volumes estão organizados em capítulos que são encerrados com um desafio. Em cada capítulo discute-se um conteúdo acompanhado de exercícios resolvidos, propostos e sugestões de exercícios complementares. Em alguns capítulos estão presentes textos de introdução e em outros textos referentes à história do conteúdo em questão. No final de cada volume encontram-se as respostas dos exercícios, o índice dos conteúdos por ordem alfabética e o manual do professor.

Assim como na coleção do Ensino Fundamental, a introdução de vários conteúdos nesta coleção é feita por meio de situações-problema, que segundo os autores tem como objetivo

[...] mobilizar o aluno na busca de soluções e motivá-lo para a construção dos conceitos que serão trabalhados e que poderão auxiliá-lo na busca de caminhos para resolver os problemas propostos. (MANUAL DO PROFESSOR, 2010, p.6)

Ainda segundo os autores, além de situações-problema reais e do cotidiano do aluno, os artigos apresentados nos volumes têm como propósito mostrar aos alunos que os conhecimentos matemáticos adquiridos podem ser aplicados em outros campos, estabelecendo o elo entre a Matemática e outras áreas.

A preocupação dos autores é desenvolver no aluno habilidades que possibilitem a competição no mercado de trabalho, assim como adaptação a novas

⁷ Abordagem espiralada, o que significa dizer que os grandes temas podem aparecer tanto nas séries do Ensino Fundamental quanto nas do Ensino Médio, sendo que a diferença será a escala de tratamento dada ao tema. (SÃO PAULO, SEE, p.46, 2008a)

profissões, proporcionando-lhes a continuação de seus estudos em cursos tecnológicos ou universitários, além de adquirir uma formação científica geral a partir dos conhecimentos básicos assimilados da Matemática. (MANUAL DO PROFESSOR, p. 8-9)

Referentes aos conteúdos de sistema de equações lineares, os autores abordam o tema no sétimo capítulo do 2º ano do Ensino Médio, após o estudo de Matrizes e anterior aos estudos de áreas de figuras planas.

Para a introdução de sistema de equações lineares os autores retomam todo o conteúdo estudado no Ensino Fundamental, bem como as soluções de uma equação com duas e três incógnitas, os procedimentos de resolução do método de adição, a interpretação e a classificação dos sistemas lineares por meio da representação geométrica, para então iniciar o estudo de sistema de equação linear $m \times n$.

Segundo Iezzi *et al.* (2010), “um conjunto de m equações lineares e n incógnitas $x_1, x_2, \dots, x_n$ é chamado sistema linear de m equações e n incógnitas (p.109)”. E “a sequência de números reais $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ é solução de um sistema linear de n incógnitas quando é solução de cada uma das equações lineares”. (p.110).

Após as definições, os autores propõem o estudo de sistema linear associando a representação matricial, retomando as propriedades de multiplicação de matrizes estudada no capítulo anterior deste volume.

Para a resolução dos exercícios propostos, os autores solicitam ao aluno a verificação se a terna ordenada é a solução das equações lineares, propõem também exercícios que exigem a transcrição de sistemas lineares da representação algébrica para a representação matricial e vice-versa, e ainda, nos últimos exercícios dessa seção, propõem ao aluno encontrar o valor do parâmetro para determinar a solução dos sistemas lineares.

Para iniciar a discussão referente ao método de escalonamento, os autores apresentam dois tipos de sistemas de equações lineares escalonados e suas resoluções. As Figuras 19 e 20 ilustram os exemplos propostos.

1º tipo: Sistema com número de equações igual ao número de incógnitas

Seja o sistema escalonado:

$$\begin{cases} x - 2y + z = -5 \\ y + 2z = -3 \\ 3z = -6 \end{cases}$$

Partindo da última equação, obtemos z . Substituindo esse valor na equação anterior, obtemos y . Por fim, substituindo y e z na 1ª equação, obtemos x .

Acompanhe:

$$\begin{aligned} 3z = -6 &\Rightarrow z = -2 & (1) \\ y + 2 \cdot (-2) = -3 &\Rightarrow y - 4 = -3 \Rightarrow y = 1 & (2) \\ x - 2 \cdot 1 + (-2) = -5 &\Rightarrow x - 4 = -5 \Rightarrow x = -1 & (3) \end{aligned}$$

Assim, a solução do sistema é $(-1, 1, -2)$.

Quando um sistema escalonado apresenta número de equações igual ao número de incógnitas, ele é possível e determinado, isto é, ele tem uma única solução.

Figura 19 - Resolução de sistemas com número de equações igual ao número de incógnitas
Fonte: IEZZI *et al*, 2010, p.112

2º tipo: Sistema com número de equações menor que o número de incógnitas

Considere o seguinte problema:
Determine três números reais cuja soma é 100, sabendo que um deles é igual ao dobro do outro.
Chamando de x , y e z os números procurados, obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ y = 2z \end{cases} \quad \text{ou ainda:} \quad \begin{cases} x + y + z = 100 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$$

Observe que o último sistema está escalonado. Podemos, por tentativa, encontrar algumas soluções desse sistema, seguindo os passos a seguir:

Escolha um número qualquer (z)	O outro número (y) é o dobro do escolhido ($y = 2z$)	O terceiro número (x) é calculado fazendo $100 - \text{soma dos dois anteriores}$ ($x = 100 - (y + z)$)
10	20	70
30	60	10
4,5	9	86,5
-30	-60	190
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
Em geral: α ($\alpha \in \mathbb{R}$)	2α	$100 - 3\alpha$

Desse modo, o problema proposto possui infinitas soluções, isto é, o sistema $\begin{cases} x + y + z = 100 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$ é possível e indeterminado e sua solução geral é formada por todas as triplas ordenadas da forma $(100 - 3\alpha, 2\alpha, \alpha)$, sendo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Vamos, agora, apresentar um procedimento que permitirá obter diretamente a solução geral de um sistema escalonado que possui número de equações menor que o número de incógnitas.

Para isso, vamos utilizar o mesmo sistema proposto no problema anterior: $\begin{cases} x + y + z = 100 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$

Acompanhe os passos:

- Devemos identificar a incógnita que não aparece no início de nenhuma das equações, chamada **incógnita livre** (ou **variável livre**).
A única variável livre desse sistema é z .
- Transpomos a variável livre z para o 2º membro em cada equação e obtemos:

$$\begin{cases} x + y = 100 - z & (1) \\ y = 2z & (2) \end{cases}$$
- Se atribuirmos um valor para z , obteremos um sistema do 1º tipo; portanto, determinado. Resolvendo-o, encontraremos uma solução do sistema.
Se atribuirmos outro valor para z , obteremos outro sistema, também determinado, que, resolvido, fornecerá outra solução do sistema. E assim por diante.
Façamos, então, $z = \alpha$ (α é um número real qualquer) e em (1) teremos:

$$\begin{cases} x + y = 100 - \alpha & (2) \\ y = 2\alpha & (3) \end{cases}$$
- Substituímos (3) em (2):

$$x + 2\alpha = 100 - \alpha \Rightarrow x = 100 - \alpha - 2\alpha \Rightarrow x = 100 - 3\alpha$$
- Por fim, as soluções do sistema podem ser representadas pela solução geral $(100 - 3\alpha, 2\alpha, \alpha)$, em que $\alpha \in \mathbb{R}$.
Esse tipo de sistema apresenta sempre infinitas soluções, sendo, então, um sistema possível e indeterminado (SPI).
Atribuindo valores reais para α , obtemos algumas de suas soluções: $\alpha = 0 \rightarrow (100, 0, 0)$; $\alpha = 10 \rightarrow (70, 20, 10)$; $\alpha = 20 \rightarrow (40, 40, 20)$; etc.

Figura 20 - Resolução de sistemas com número de equações menor que o número de incógnitas
Fonte: IEZZI *et al*, 2010, p.112-113

Observa-se que na Figura 18 os autores apresentam um sistema de equações escalonado do tipo 3x3, isto é, três equações com três incógnitas e definem que nesse tipo de sistema a solução é possível e determinada. Já na Figura 19 o sistema linear é do tipo 3x2, três equações com duas incógnitas. Neste caso colocam as incógnitas x e y em função de z , assim esse sistema tem infinitas soluções, então, um sistema possível e indeterminado.

Na Figura 21 apresentamos os procedimentos realizados pelos autores para resolução de sistemas impossível pelo método de escalonamento.

Vamos escalar e resolver o sistema $\begin{cases} 2x - y + z = -1 \\ -5x - 20y - 15z = 11 \\ 3x + 3y + 4z = 3 \end{cases}$

Precisamos anular os coeficientes de x na 2ª e na 3ª equações:

$5 \times (1^\text{a eq.}) + 2 \times (2^\text{a eq.}):$

$$\begin{array}{r} 10x - 5y + 5z = -5 \\ -10x - 40y - 30z = 22 \\ \hline -45y - 25z = 17 \end{array} \quad (+)$$

$(-3) \times (1^\text{a eq.}) + 2 \times (3^\text{a eq.}):$

$$\begin{array}{r} -6x + 3y - 3z = 3 \\ 6x + 6y + 8z = 6 \\ \hline 9y + 5z = 9 \end{array} \quad (+)$$

Repetimos o processo para a 2ª e a 3ª equações, fixando a 1ª equação. É interessante, entretanto, dividir os coeficientes da 2ª equação por 5, a fim de facilitar os cálculos:

$$\begin{cases} 2x - y + z = -1 \\ -9y - 5z = \frac{17}{5} \\ 9y + 5z = 9 \end{cases}$$

que equivale a:

$(2^\text{a eq.}) + (3^\text{a eq.}):$

$$\begin{array}{r} -9y - 5z = \frac{17}{5} \\ 9y + 5z = 9 \\ \hline 0 = \frac{62}{5} \end{array}$$

A 3ª equação do sistema acima obtido é sempre falsa, pois, para quaisquer x, y e z , $0 \neq \frac{62}{5}$. Logo, o sistema é impossível, isto é, não admite nenhuma solução.

Figura 21 - Resolução de um sistema impossível
Fonte: IEZZI *et al*, 2010, p.118

Continuando a análise, os autores apresentam um problema, transcrevem da língua materna para a linguagem algébrica e apresentam os procedimentos da resolução. Encerram o estudo de escalonamento apresentando mais quatro exemplos e suas resoluções, sendo dois referentes aos sistemas de equações lineares de soluções possíveis e indeterminados e dois sistemas de equações lineares de soluções impossíveis. E ainda propõem mais dezessete exercícios e um texto a respeito da origem dos determinantes.

A seguir, apresentam a regra de Sarrus, que consiste em copiar ao lado da matriz as suas duas primeiras colunas, e em encontrar o determinante por meio da multiplicação dos elementos das diagonais.

Prosseguem apresentando a regra de Cramer para a resolução de sistemas de equações lineares 2×2 e 3×3 . Apesar das OCEM (2006) recomendarem o abandono da utilização da regra de Cramer para a resolução de sistemas de equações lineares, os autores apresentam dois exemplos, ressaltando que o uso dessa regra só é possível se o determinante da matriz for diferente de zero, caso contrário o sistema teria que ser resolvido por escalonamento.

Outro fato de sua utilização não ser indicada para o ensino de sistemas de equações lineares $m \times m$, ou seja, o número de equações é igual ao de incógnitas, é a quantidade de operações matemáticas envolvida para se obter a resolução de um sistema de equações lineares 3×3 , ao todo trinta e seis operações de multiplicação e três de divisão. Acrescenta-se a isso, o fato de não ser possível determinar a solução de um sistema de equação linear quando o determinante da matriz formado pelos coeficientes das incógnitas for igual a zero.

Os autores prosseguem os estudos de sistemas de equações lineares discutindo os possíveis valores do parâmetro para se obter um sistema possível e determinado, possível e indeterminado e de solução impossível. Apresentamos um dos três exemplos proposto pelos autores.

8. Discuta, em função de m , o sistema $\begin{cases} x - y - z = 1 \\ 2x + y + 3z = 6 \\ mx + y + 5z = 13 \end{cases}$.

Solução:

Temos: $D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ m & 1 & 5 \end{vmatrix} = -2m + 10$.

- Se $D \neq 0$, isto é, $m \neq 5$, temos SPD.
- Se $D = 0$, isto é, $m = 5$, podemos ter SPI ou SI.

Levando $m = 5$ ao sistema e o escalonando, vem:

$$\begin{cases} x - y - z = 1 \\ 2x + y + 3z = 6 \\ 5x + y + 5z = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y - z = 1 \\ 3y + 5z = 4 \\ 6y + 10z = 8 \end{cases}$$

Como os coeficientes da 2ª e 3ª equações são proporcionais, podemos retirar a 3ª equação, obtendo o sistema $\begin{cases} x - y - z = 1 \\ 3y + 5z = 4 \end{cases}$, que é possível e indeterminado.

Assim, $\begin{cases} m \neq 5 \rightarrow \text{SPD} \\ m = 5 \rightarrow \text{SPI} \end{cases}$.

Figura 22 – Discussão das possíveis soluções do sistema em função do parâmetro
Fonte: IEZZI et al, 2010, p.129

Neste caso, observa-se que os autores utilizam a regra de Sarrus para encontrar o determinante da matriz. Escalonam o sistema e propõem os possíveis valores de m para que se possa discutir quanto à sua classificação.

E finalizam os estudos de sistemas de equações lineares apresentando as discussões sobre sistemas homogêneos que são sistemas que apresentam os termos independentes das equações iguais a zero. A Figura 23 mostra três exemplos e uma propriedade característica dos sistemas homogêneos e na Figura 24 um exercício resolvido pelos autores.

$$S_1 \begin{cases} 4x + 3y = 0 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases} \quad S_2 \begin{cases} x + 2y + 2z = 0 \\ 3x + y - z = 0 \\ -x + 5y + \frac{1}{2}z = 0 \end{cases} \quad S_3 \begin{cases} 3x + y = 0 \\ x + y = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$$

Pense nisto: O sistema $\begin{cases} x + y - z + 3 = 0 \\ 2x - y + z - 1 = 0 \\ x - z + 2 = 0 \end{cases}$ não é homogêneo!

Vamos observar uma propriedade característica dos sistemas homogêneos:

- Em S_1 , o par ordenado $(0, 0)$ é uma solução, pois verifica as duas equações.
- Em S_2 , a tripla ordenada $(0, 0, 0)$ é uma solução, pois verifica as três equações.
- Em S_3 , o par ordenado $(0, 0)$ é uma solução, pois verifica as três equações.

De modo geral, um sistema homogêneo com n incógnitas sempre admite a sequência $(0, 0, \dots, 0)$ como n zeros solução. Essa solução é chamada solução **nula**, **trivial** ou **imprópria**. Desse modo, um sistema homogêneo é sempre possível, pois possui, ao menos, a solução nula.

Se o sistema só possui a solução nula, ele é possível e determinado.

Havendo outras soluções, além da solução nula, ele é possível e indeterminado. Essas soluções recebem o nome de **soluções próprias ou não triviais**.

Figura 23 - Discussão das soluções do sistema homogêneo

Fonte: et al IEZZI, 2010, p.130

Exercício resolvido

10. Para que valores reais de m o sistema $\begin{cases} mx + y - 3z = 0 \\ my + 2z = 0 \\ -mx + z = 0 \end{cases}$ admite soluções próprias?

Solução:

Como o sistema homogêneo é sempre possível, podemos afirmar que, sendo o número de equações igual ao número de incógnitas, vale a regra:

$D \neq 0 \rightarrow$ SPD

$D = 0 \rightarrow$ SPI

Assim, devemos ter $D = 0$, isto é:

$$\begin{vmatrix} m & 1 & -3 \\ 0 & m & 2 \\ -m & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2m^2 - 2m = 0 \Rightarrow m = 0 \text{ ou } m = -1.$$

Figura 24 – Discussão das soluções do sistema homogêneo

Fonte: et al IEZZI, 2010, p.131

Constatamos nesta coleção que os autores tiveram a preocupação de iniciar os conteúdos de sistemas de equações retomando, de forma sintetizada, a resolução de sistemas de equações lineares 2x2 pelo método de adição, a discussão da

interpretação gráfica e das classificações dos sistemas no plano cartesiano, conteúdo ensinado no Ensino Fundamental, para então iniciar os estudos de sistemas de equações lineares 3×3 .

Nesta coleção os autores apresentam exercícios resolvidos e propostos que contemplam a transcrição do enunciado conforme as recomendações dos documentos oficiais destinados ao Ensino Médio, utilizando diferentes representações, tais como da língua materna para a linguagem algébrica, da linguagem algébrica para a numérica matricial, da numérica matricial para linguagem algébrica e da linguagem algébrica para a língua materna.

Estão dispostos neste volume em torno de setenta exercícios, entre resolvidos e propostos, referentes a sistemas de equações lineares. Não constatamos a representação gráfica do sistema de equações lineares 3×3 em nenhum desses exercícios. Assim como Battaglioli (2009), achamos viável a recomendação dessa representação Matemática, para que o aluno compreenda que além da representação gráfica de sistemas de equações lineares 2×2 , estudada no Ensino Fundamental, também há a representação gráfica de sistemas lineares 3×3 .

Há de se ressaltar nesta coleção textos que abordam a história de um tema matemático, com o propósito de desenvolver no aluno o hábito de leitura.

Em síntese, os métodos que os autores apresentaram em sua coleção destinada ao Ensino Médio são: adição, representação gráfica das equações dos sistemas lineares 2×2 , regra de Cramer, método de escalonamento, uma discussão ampla a respeito de valores a serem determinados para o parâmetro a fim de classificar os sistemas de equações lineares.

Constatamos também exercícios que motivam o aluno a representar, conjecturar, classificar, formular, analisar a partir de determinadas informações.

A seguir descrevemos a abordagem de sistemas de equações lineares nos Cadernos do Professor de Matemática de 2008 e 2009.

CAPÍTULO V

ANÁLISES DOS CADERNOS DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

Em 2008 a Secretaria de Educação do Estado de São Paulo (SEE/SP) implantou uma nova proposta curricular, e que hoje é Currículo Oficial do Estado de São Paulo, visando oferecer um material didático estruturado para o aluno e subsídios para o professor de todas as disciplinas do currículo. Este material foi elaborado com base em constatações apontadas nos resultados no SARESP (2005), referentes às habilidades a serem desenvolvidas em todas as disciplinas do Ensino Fundamental e do Médio. (SÃO PAULO, 2008b, p.6)

Esse material tem como propósito não se afastar dos conteúdos usualmente ensinados nas escolas ou ensinados pelos livros didáticos, e sim inovar a forma de abordagem, dando destaques à contextualização, às competências e às habilidades.

De acordo com a Proposta Curricular (SÃO PAULO, 2008a):

[...] O primeiro aspecto que deve ser ressaltado é o de que a proposta não pode ser compreendida como algo fechado e inflexível. A organização curricular, como será apresentada adiante, tem o objetivo de estabelecer uma articulação de conteúdos, entre inúmeras formas possíveis. Na organização proposta, a lista de conteúdos selecionados para cada série não se afasta muito da que é usualmente apresentada nos diversos sistemas de ensino. Coerentemente com o princípio de que os conteúdos são meios para o desenvolvimento das competências pessoais, optamos por não alterar significativamente a lista de matérias a serem ensinadas, ainda que se pretenda uma abordagem essencialmente distinta da usual, em muitos dos temas apresentados. As sugestões que serão apresentadas nos Cadernos dos Professores, para o desenvolvimento dos trabalhos em cada bimestre letivo, buscarão explicitar formas de tratamento dos diversos temas consentâneas com a visão geral desta proposta. (p. 47-48)

Com relação aos conteúdos disciplinares dos Cadernos do Professor de Matemática do Ensino Fundamental e do Médio estão organizados em quatro blocos temáticos: números; geometria; medidas; representação de dados e tratamento da informação. Cada um dos blocos está diretamente ou indiretamente presente em todas as séries do Ensino Fundamental e Médio. São apresentados também quatro Situações de Aprendizagem e uma visão panorâmica do conteúdo do bimestre subdivididos em oito unidades.

Compõem estes Cadernos propostas de avaliações a serem realizadas, orientações para recuperação, recursos que podem auxiliar a compreensão do conteúdo e conteúdos considerados indispensáveis àquele bimestre.

Para a análise destes Cadernos, primeiramente fizemos uma leitura completa nestes materiais para identificar em que série/ano e bimestre é abordado sistema de equações lineares. Após esta primeira leitura retomamos os materiais que contemplam nosso tema para investigação de sua abordagem. Para fins de esclarecimento, identificamos nosso tema de pesquisa no terceiro bimestre do 8º ano do Ensino Fundamental e no segundo bimestre da 2ª série do Ensino Médio. Após a recolha dos dados partimos para a fase da análise que apresentaremos a seguir e que iremos comparar com o Quadro 1 da página 34 e 35, no qual identificamos algumas recomendações dos documentos oficiais referentes ao nosso tema de pesquisa.

5.1 - Sistemas de Equações Lineares no Caderno do Professor do 8º ano do Ensino Fundamental de 2008

O estudo de sistemas de equações lineares é tema do 3º bimestre da 7ª série, atual 8º ano, do Ensino Fundamental. O tema é abordado após o estudo de coordenadas cartesianas e transformações no plano e anterior ao estudo de equações com soluções inteiras e suas aplicações.

Como mencionamos, todo Caderno está dividido em quatro Situações de Aprendizagens, e esses subdivididos em unidades.

A Figura 25 mostra os conteúdos organizados em unidades.

Quadro geral de conteúdos do 3º bimestre da 7ª série do Ensino Fundamental
Unidade 1: Equações do 1º grau (problemas). Unidade 2: Equações e inequações do 1º grau (problemas). Unidade 3: Sistema de coordenadas cartesianas. Unidade 4: Transformações geométricas no plano. Unidade 5: Sistemas de equações lineares (método da adição). Unidade 6: Sistemas de equações lineares (método da substituição). Unidade 7: Sistemas de equações lineares (interpretação gráfica). Unidade 8: Equações com soluções inteiras.

Figura 25 – Quadro Geral dos Conteúdos do 3º bimestre do 8º ano do Ensino Fundamental
Fonte: SÃO PAULO, 2008c, p.10

Segundo os autores, não será aprofundada nesta série a discussão de sistemas lineares, pois será feita com maior ênfase no Ensino Médio. Pretende-se, nesta série, desenvolver no aluno a compreensão do uso das linguagens algébricas e o da representação gráfica aliada à análise e interpretação de um problema por meio de equações lineares (SÃO PAULO, 2008c, p.10).

5.2 - Análise do Caderno do Professor de Matemática do 8º ano do Ensino Fundamental de 2008

A Figura 26 apresenta os conteúdos por série/bimestre proposto para todas as séries/anos do Ensino Fundamental, e destaca os conteúdos de outros bimestres e de outras séries/anos que estão diretamente relacionados aos conteúdos deste 3º bimestre.

 CONTEÚDOS DE MATEMÁTICA POR SÉRIE/BIMESTRE DO ENSINO FUNDAMENTAL				
	5ª série	6ª série	7ª série	8ª série
1º bimestre	NÚMEROS NATURAIS - Múltiplos e divisores. - Números primos. - Operações. - Introdução às potências. FRAÇÕES - Representação. - Comparação e ordenação. - Operações.	NÚMEROS NATURAIS - Sistemas de numeração na Antiguidade. - O sistema posicional decimal. NÚMEROS INTEIROS - Representação. - Operações. NÚMEROS RACIONAIS - Representação fracionária e decimal. - Operações com decimais e frações.	NÚMEROS RACIONAIS - Transformação de decimais finitos em fração. - Dízimas periódicas e fração geratriz. POTENCIAÇÃO - Propriedades para expoentes inteiros. TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO - A linguagem das potências.	NÚMEROS REAIS - Conjuntos numéricos. - Números irracionais. - Potenciação e radiciação em $\mathbb{R}$. - Notação Científica.
2º bimestre	NÚMEROS DECIMAIS - Representação. - Transformação em fração decimal. - Operações. SISTEMAS DE MEDIDAS - Comprimento, massa e capacidade. - Sistema métrico decimal.	GEOMETRIA/MEDIDAS - Ângulos. - Polígonos. - Circunferência. - Simetrias. - Construções geométricas. - Poliedros.	ÁLGEBRA - Equivalências e transformações de expressões algébricas. - Produtos notáveis. - Fatoração algébrica.	ÁLGEBRA - Equações do 2º grau: resolução e problemas. - Noções básicas sobre funções; a ideia de interdependência. - Construção de tabelas e gráficos para representar funções de 1º e 2º graus.
3º bimestre	GEOMETRIA/MEDIDAS - Formas planas e espaciais. - Noção de perímetro e área de figuras planas. - Cálculo de área por composição e decomposição.	NÚMEROS/ PROPORCIONALIDADE - Proporcionalidade direta e inversa. - Razões, proporções, porcentagem. - Razões constantes na geometria: π. TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO - Gráficos de setores. - Noções de probabilidade.	ÁLGEBRA/EQUAÇÕES - Equações do 1º grau. - Sistemas de equações e resolução de problemas. - Inequações do 1º grau. - Sistemas de coordenadas (plano cartesiano).	GEOMETRIA/MEDIDAS - Proporcionalidade, noção de semelhança. - Relações métricas em triângulos retângulos. - Razões trigonométricas.
4º bimestre	TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO - Leitura e construção de gráficos e tabelas. - Média aritmética. - Problemas de contagem.	ÁLGEBRA - Uso de letras para representar um valor desconhecido. - Conceito de equação. - Resolução de equações. - Equações e problemas.	GEOMETRIA/MEDIDAS - Teoremas de Tales e Pitágoras: apresentação e aplicações. - Área de polígonos. - Volume do prisma.	GEOMETRIA/MEDIDAS - O número π; a circunferência, o círculo e suas partes; área do círculo. - Volume e área do cilindro. TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO - Contagem indireta e probabilidade.

O sombreado assinala os conteúdos relacionados aos trabalhados neste bimestre.

Figura 26 – Conteúdos do 8º ano do Ensino Fundamental

Fonte: SÃO PAULO, 2008c, p.63

Todo Caderno do Professor divide-se em quatro Situações de Aprendizagem, com tempo previsto para cada conteúdo, tema, competências, habilidades e estratégias a serem desenvolvidas no bimestre.

Com relação ao terceiro bimestre do 8º ano do Ensino Fundamental este Caderno do Professor é composto da seguinte forma: Situação de Aprendizagem 1 – Expandindo a linguagem das equações; Situação de Aprendizagem 2 – Coordenadas cartesianas e a transformações no plano; Situação de Aprendizagem 3 – Sistemas de equações lineares; Situação de Aprendizagem 4 – Equações com soluções inteiras e suas aplicações.

Na Situação de Aprendizagem 1 – **Expandindo a linguagem das equações** - estão propostos os estudos de equações e inequações de 1º grau.

De acordo com os autores, os objetivos dessa Situação são de, primeiro, transpor de forma correta um problema da língua materna para a linguagem algébrica e vice-versa.

Segundo os autores, boa parte dos estudantes universitários não consegue transpor uma situação-problema da língua materna para a linguagem algébrica. Veja o exemplo apresentado pelos autores:

[...] Usando as variáveis A para número de alunos e P para o de professores, escreva uma equação para representar a afirmação “ha seis vezes mais alunos do que professores nesta universidade”. A resposta correta não é $6A = P$, apesar de boa parte dos estudantes ter assinalado essa alternativa. Se essa fosse a resposta, para um total de 10 alunos teríamos 60 professores, exatamente o contrário do que afirma o enunciado. O correto seria $A = 6P$. (SÃO PAULO, 2008b, p.12)

Ainda de acordo com os autores, uma estratégia para amenizar essa dificuldade seria o professor promover discussões com relação a verificação da solução do problema proposto. E prosseguindo nesta Situação de Aprendizagem 1, apresentam estratégias de resolução de equações e inequações do 1º grau.

A Situação de Aprendizagem 2 - ***Coordenadas cartesianas e transformações no plano*** – tem como propósito a exploração e a formalização do sistema de coordenadas cartesianas e se apropriar dos termos da Matemática para localizar um objeto, tais como: ponto de origem, a reta numérica, os eixos coordenados, os pares ordenados, plano cartesiano, etc.

A Situação de Aprendizagem 3 – ***Sistemas de equações lineares*** – tem como objetivo discutir o significado das equações com duas incógnitas e os métodos de resolução, ilustrar os métodos da substituição e adição concomitantes com a analogia das balanças de pratos e explorar a representação gráfica de equações com duas incógnitas no plano cartesiano.

Segundo os autores, duas equações com duas incógnitas são chamadas de sistemas de equações lineares, pois as equações podem ser representadas no plano cartesiano por retas. (SÃO PAULO, 2008c, p.38).

Descreveremos e analisaremos a seguir a abordagem do conteúdo de Sistema de Equações Lineares. As realizações das atividades estão previstas para três semanas.

Esta Situação de Aprendizagem contém onze atividades referentes a sistema de equações lineares e considerações a respeito da avaliação final. O tema tem início ressaltando os conhecimentos prévios relativos à resolução de equações de 1º

grau que os alunos adquiriram na série anterior e aprofundados na Situação de Aprendizagem 1, apresentada neste mesmo Caderno do Professor.

A seguir apresentamos a atividade, a resolução sugerida pelos autores do Caderno do Professor e a análise.

Na Atividade 1 – **Equações e Incógnitas** – são propostos quatro problemas, a Figura 27 apresenta o primeiro.

1. Considere a seguinte questão: a soma das idades de João e Maria é 28 anos. Qual a idade completa de cada um deles?

Figura 27 – Problema 1 – Atividade 1
Fonte: SÃO PAULO, 2008c, p.39

Nesta atividade, os autores propõem um problema com o intuito de que o aluno transcreva o enunciado da língua materna para uma linguagem simbólica (equações, gráficos, diagrama, fórmulas tabelas, etc.) com o intuito de buscar uma solução para o problema. Os autores sugerem a transcrição do enunciado para a linguagem algébrica e a construção de uma tabela com algumas soluções possíveis. Observe a Figura 28 a tabela sugerida pelos autores.

João (x)	Maria (y)	João (x)	Maria (y)
1	27	15	13
2	26	16	12
3	25	17	11
4	24	18	10
5	23	19	9
6	22	20	8
7	21	21	7
8	20	22	6
9	19	23	5
10	18	24	4
11	17	25	3
12	16	26	2
13	15	27	1
14	14		

Figura 28 – Representação na forma de tabela – Atividade 1
Fonte: SÃO PAULO, 2008c, p.39

Após a construção da tabela e comparando seus resultados com de outros, o aluno pode concluir que não é possível determinar as idades dos personagens, pois há mais de uma solução para esse caso. Observamos neste início de atividade que os autores utilizam duas representações para a resolução do problema: a representação algébrica e a atribuição de números na tabela. E ainda, despertam a atenção do aluno que há a necessidade de obter mais informações para determinar as idades dos personagens.

É importante fazermos uma observação a esta tabela, os pares em destaque referem-se a valores que satisfazem a solução do segundo e terceiro problema, este último não apresentamos por ser semelhante ao segundo. As Figuras 29 e 30 apresentam o segundo e quarto problema, respectivamente.

2. Se o enunciado também informasse que João é 4 anos mais velho que Maria, mais uma equação seria acrescentada ao problema, delimitando o número de soluções.

Figura 29 – Problema 2 – Atividade 1
Fonte: SÃO PAULO, 2008c, p.39

4. Consideremos, agora, o caso em que a idade de Maria é o dobro da idade de João.

Figura 30 – Problema 4 - Atividade 1
Fonte: SÃO PAULO, 2008c, p.39

Para a resolução dos problemas apresentados, os autores sugerem que o aluno transcreva os problemas para a linguagem algébrica, obtendo assim duas equações com duas incógnitas, e observe na tabela anterior o único par de valores que satisfaz ambas as equações.

No problema 2 é possível o aluno identificar o único par de valores $x=16$ e $y=12$ que satisfaz ambas as equações ($x+y=28$ e $x=y+4$ ou, de forma equivalente, $x-y=4$). No entanto, o quarto problema, nenhum par de valores inteiros apresentados na tabela satisfaz a solução de ambas as equações ($x+y=28$ e $2x=y$), tornando inviável a solução visualizando a tabela. Para este caso os autores propõem a substituição o

valor de y da primeira equação ($x+y=28$) por $2x$, obtendo uma equação com uma incógnita: $x+2x=28$.

A forma como os autores abordam este início do tema diferencia-se daquelas apresentadas nos livros didáticos. Os autores do Caderno do Professor propõem uma atividade que o aluno elabora uma forma de resolver o problema e analisa a solução anterior a apresentação de algum método de resolução.

Na Atividade 2 – **As balanças e o método da substituição** – os autores apresentam o método de substituição utilizando uma figura que representa uma balança de pratos. Nesta atividade os mesmos apresentam cinco etapas para a resolução e caracterizar o método utilizado. A Figura 31 mostra a primeira.

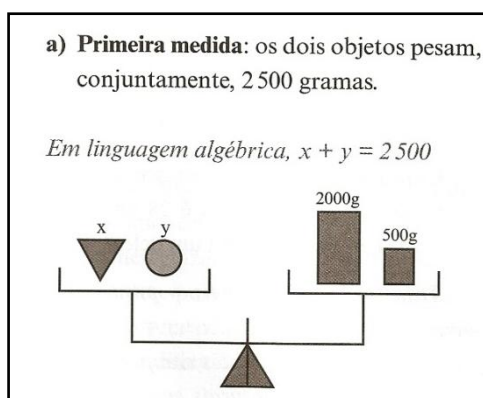


Figura 31 – Linguagem materna, linguagem algébrica e representação figural - Atividade 2
Fonte: SÃO PAULO, 2008c, p.40

Podemos observar que, os autores transcrevem o enunciado em língua materna para a linguagem algébrica ($x+y=2500$) e esperam que o aluno visualize a semelhança entre a linguagem algébrica e a figura (o equilíbrio da balança entre os pesos de dois objetos representados por x e y com dois objetos que equivalem a 2000g e 500g). A Figura 32 mostra a sequência da proposta.

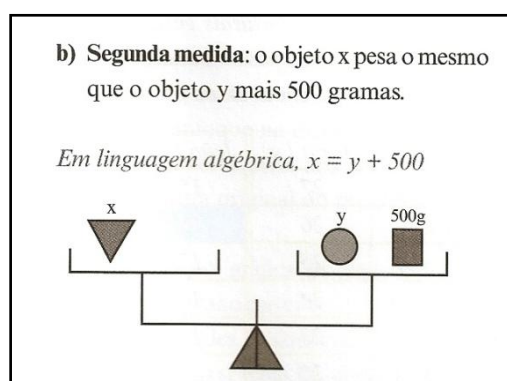


Figura 32 – Linguagem materna, linguagem algébrica e representação figural - Atividade 2
Fonte: SÃO PAULO, 2008c, p.40

Seguindo a sequência dos autores, os mesmos transcrevem o enunciado em língua materna para a linguagem algébrica ($x=y+500$) e esperam que o aluno visualize a semelhança entre a linguagem algébrica e a figura (o equilíbrio da balança entre o peso de um objeto representado por x equivale à soma dos pesos de um objeto representado por y com um objeto que equivale a 500 gramas). Na Figura 33 continua a proposta.

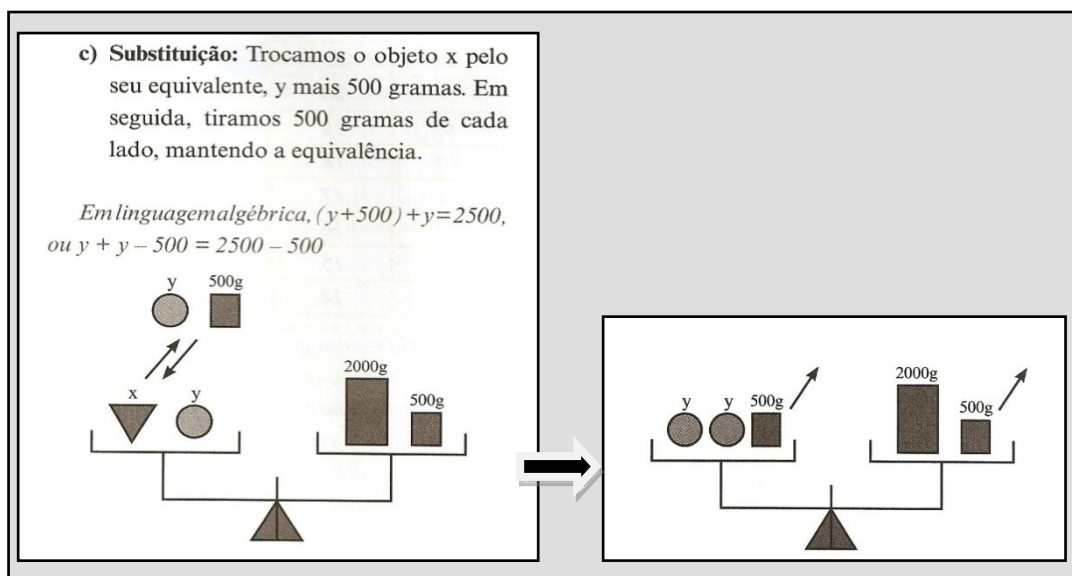


Figura 33 – Linguagem materna, linguagem algébrica e representação figurar - Atividade 2
Fonte: SÃO PAULO, 2008c, p.40-41

Continuando, os autores substituem o objeto x pelo seu equivalente y mais 500, visto a equivalência na etapa anterior, obtendo uma equação com uma incógnita $(y+500)+y=2500$ e visualize a substituição dos objetos nas figuras (dois pesos representados por y com um objeto de 500 gramas equivale a um objeto de 2000 gramas e outro de 500 gramas).

Ainda observando a Figura 32, é possível visualizar a retirada de 500 gramas tanto na linguagem algébrica quanto na figura, que representa uma balança de pratos, no entanto observa-se a falta de um valor $(+500)$ no primeiro membro da linguagem algébrica na passagem da resolução.

Para solucionar o problema, os autores apresentam a transcrição do problema da língua materna para a linguagem algébrica, conforme mostra a Figura 34.

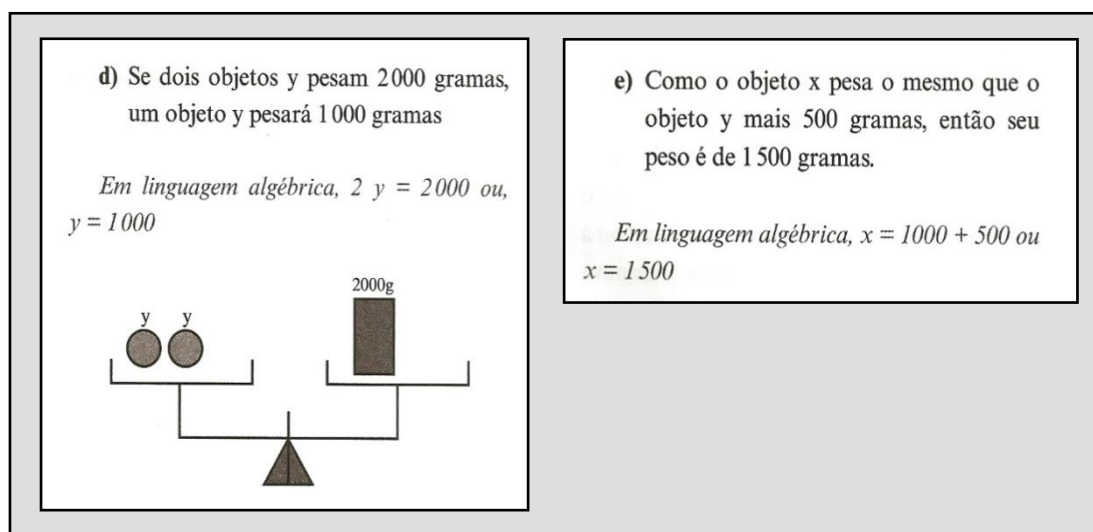


Figura 34 – Linguagem materna, linguagem algébrica e representação figural - Atividade 2
Fonte: SÃO PAULO, 2008c, p.41

Assim, finalizam algebricamente (a soma de dois y correspondem a 2000 gramas) e que x equivale a y mais 500, substituindo o valor de y na equação, então x equivale a 1500 gramas. E a visualização dos pesos na figura (o peso de dois objetos representados por y equivalem a um objeto de 2000 gramas).

A estratégia utilizada nesta atividade tem como propósito transcrever os problemas da língua materna para a linguagem algébrica a cada etapa realizada, e utilizar a resolução algébrica concomitantemente com a visualização da figura, que representa uma balança de pratos. Para a resolução, os autores procederam por meio de substituição de valores de uma das incógnitas pelo seu equivalente em termos da outra, caracterizando o método de substituição, que segundo os autores, pode ser transferido para outros problemas, não necessariamente envolvendo medidas.

Na Atividade 3 – **Procedimentos de resolução de sistemas lineares pelo método da substituição** – são propostos dois sistemas de equações lineares, e para a sua resolução os autores apresentam as etapas a serem realizadas. Na Figura 36 apresentam as resoluções dos sistemas utilizando o método da substituição.

Consideremos os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} x+2y=5 \\ x-y=-1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x-2y=8 \\ 5x+y=9 \end{cases}$

Figura 35 – Exercícios propostos - Atividade 3
Fonte: SÃO PAULO, 2008c, p.41

- 1ª etapa:** escrever uma incógnita em termos da outra. Nesta etapa, devemos orientar o aluno a **escolher** a incógnita mais apropriada para ser isolada, de preferência com coeficiente unitário ou inteiro.
- 2ª etapa:** substituir a incógnita isolada pelo seu equivalente em termos da outra, obtendo uma nova equação com apenas uma incógnita.
- 3ª etapa:** resolver a nova equação e obter o valor de uma das incógnitas.
- 4ª etapa:** substituir o valor da incógnita obtido na 3ª etapa em uma das equações, para obter o valor da outra incógnita.
- 5ª etapa:** verificar se a solução obtida satisfaz as equações originais.

Figura 36 – Etapas do método da substituição - Atividade 3
Fonte: SÃO PAULO, 2008c, p.42

a) $\begin{cases} x+2y=5 \\ x-y=-1 \end{cases}$ 1ª: Neste caso, uma escolha possível é escrever x em termos de y, por exemplo, $x = 5 - 2y$. 2ª: Substituindo esse valor na outra equação: $(5 - 2y) - y = -1$. 3ª: Resolvendo a equação, obtemos que $y = 2$. 4ª: Substituindo esse valor na 1ª equação, temos $x + 2.2 = 5$, ou seja, $x = 1$. A solução do sistema é $x = 1$ e $y = 2$. 5ª: Verificação: $1 + 2.2 = 5$ e $1 - 2 = -1$. A solução encontrada satisfaz as duas equações.	b) $\begin{cases} 3x-2y=8 \\ 5x+y=9 \end{cases}$ 1ª: Neste caso, a escolha mais apropriada é escrever y em função de x a partir da 2ª equação: $y = 9 - 5x$. 2ª: Substituindo na 1ª equação, temos $3x - 2.(9 - 5x) = 8$. 3ª: Resolvendo a equação, obtemos $x = 2$. 4ª: Substituindo esse valor na 2ª equação, temos $5.2 + y = 9$, ou seja, $y = -1$. 5ª: Verificação: $3.2 - 2.(-1) = 8$ ou $6 + 2 = 8$ e $5.2 + (-1) = 9$ ou $10 - 1 = 9$. A solução encontrada satisfaz as duas equações.
---	--

Figura 37 – Procedimentos de resolução do método da substituição
Fonte: SÃO PAULO, 2008c, p.42

Na Atividade 4 – **Somando e subtraindo equivalências** – os autores apresentam um problema e utilizam uma figura que representa uma balança de pratos, semelhante a figura utilizada na Atividade 2, para resolver um sistema de equações lineares pelo método da adição.

Na Figura 38 apresentamos o problema proposto pelos autores:

1. André e Júlia foram a uma lanchonete. André comeu dois mistos e tomou um refrigerante, e gastou R\$ 6,60. Já Júlia comeu um misto e também tomou um refrigerante, gastando R\$ 4,10. Qual é o preço do misto e do refrigerante nesta lanchonete?

Figura 38 – Problema 1 – Atividade 4
Fonte: SÃO PAULO, 2008c, p.42-43

Seguindo a sequência, os autores ilustram os procedimentos de resolução pelo método de adição usando a analogia com as figuras que representam uma balança.

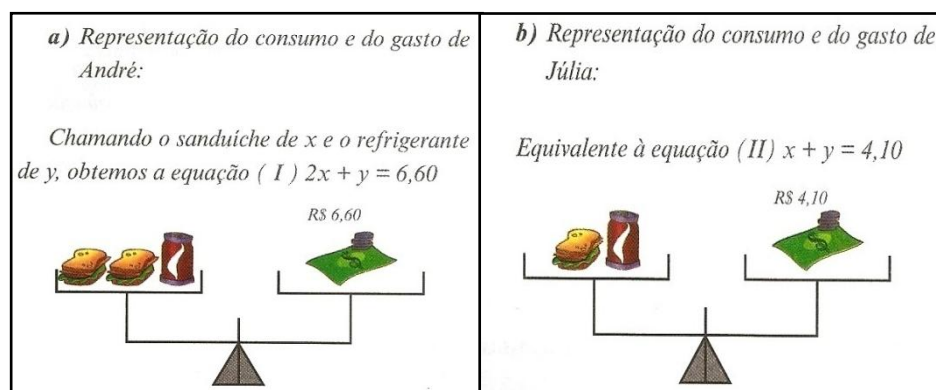


Figura 39 – Linguagem materna, linguagem algébrica e representação figural – Atividade 4
Fonte: SÃO PAULO, 2008c, p.43

Os autores transcrevem o problema da língua materna para a linguagem algébrica e esperam que o aluno possa observar a semelhança nas representações utilizadas. O quanto André e Júlia consumiram e gastaram visualizando tanto por meio da linguagem algébrica (a soma de dois x com y resultam em 6,60) e (a soma

de x com y resultam em 4,10) quanto por meio da ilustração das balanças de pratos (dois sanduíches e um refrigerante equivalem a R\$6,60) e (um sanduíche e um refrigerante equivalem a R\$4,40).

A proposta dos autores para a resolução do problema consiste em retirar o consumo e gasto de Júlia do consumo e gasto de André para obter o preço de um dos itens.

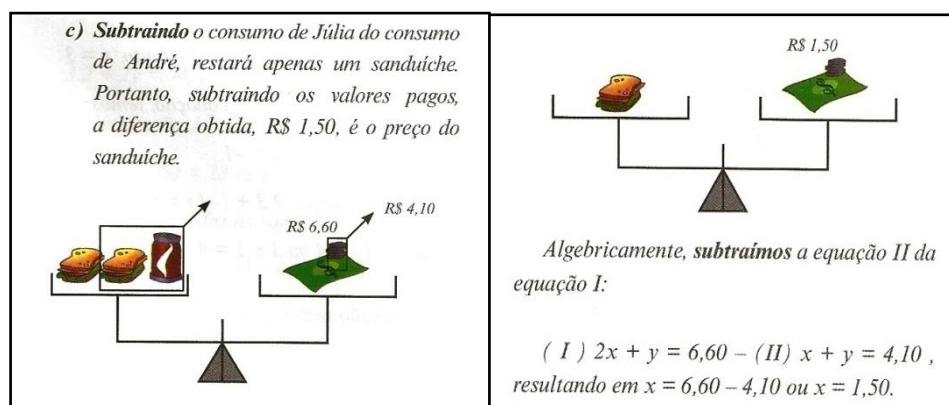


Figura 40 - Linguagem materna, linguagem algébrica e representação figural – Atividade 4
Fonte: SÃO PAULO, 2008c, p.43

Prosseguindo, os autores expõem o término do problema e mostram em termos algébricos sua resolução completa.

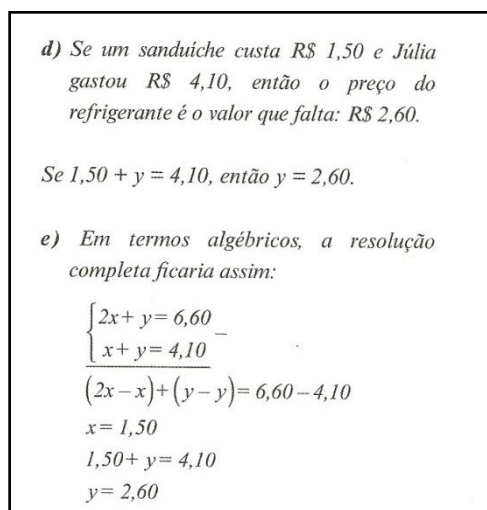


Figura 41 – Linguagem materna, linguagem algébrica e resolução pelo método da adição – Atividade 4
Fonte: SÃO PAULO, 2008c, p.43

A ideia central dos autores é que o método de substituição se caracteriza pela soma ou subtração das equações sem que comprometa o princípio de equivalência,

além da utilização de figuras, que representam balanças de pratos, concomitante com a linguagem algébrica para a resolução do problema.

A importância de ter diferentes estratégias de resolução é permitir ao aluno escolher a melhor maneira em relação ao cálculo, assim dando-lhes, instrumentos e maiores possibilidades para a resolução de problemas.

Encontramos nesta atividade um equívoco nos resultados obtidos, ao invés de $x=6,60-4,10$ resultarem em $x=2,50$ e $y=1,60$ são expostos outros valores que não satisfazem a solução das equações, $x=1,50$ e $y=2,60$. Este poderia ser evitado se a solução encontrada fosse verificada em ambas as equações, esta seria a quinta etapa do procedimento de resolução dos sistemas de equações lineares pelos métodos de substituição e adição, etapa que o aluno verifica se a solução obtida satisfaz as equações originais. Esses procedimentos são apresentados pelos autores na atividade a seguir.

Na Atividade 5 – ***Procedimentos para a resolução de sistemas lineares pelo método da adição*** – os autores apresentam três sistemas de equações lineares e em seguida as cinco etapas do procedimento de resolução pelo método da adição.

Consideremos os seguintes sistemas:

$$\begin{array}{ll}
 a) \begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - y = 4 \end{cases} & b) \begin{cases} 3x + 5y = -6 \\ x - 2y = -2 \end{cases} \\
 c) \begin{cases} 3x + 2y = -4 \\ 4x - 3y = 23 \end{cases} &
 \end{array}$$

Figura 42 – Exercícios propostos – Atividade 5
Fonte: SÃO PAULO, 2008c, p.44

Segundo os autores:

[...] Para resolver um sistema de equação pelo método de adição é preciso que, quando somamos as equações, pelo menos uma das incógnitas das equações seja anulada. Isso ocorre quando somamos um termo ao seu oposto. Por exemplo: $2x + (-2x) = 0$ ou $(-5y) + 5y = 0$. (SÃO PAULO, 2008, p.44).

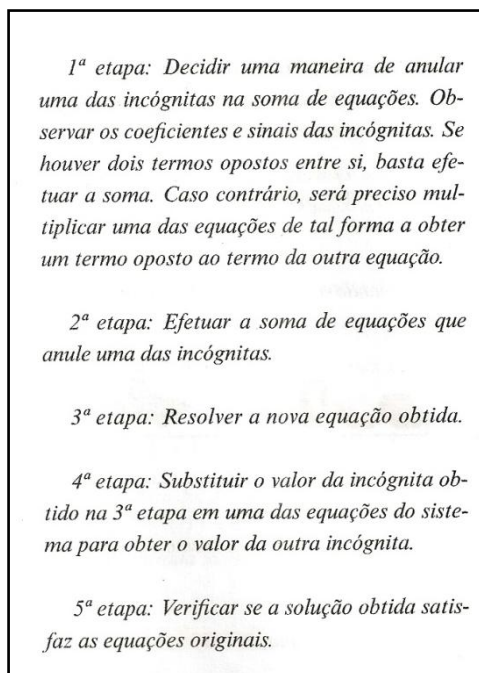


Figura 43 – Etapas do método da adição – Atividade 5
 Fonte: São Paulo, 2008c, p.45

Observamos nas resoluções dos sistemas lineares que cada um tem uma particularidade. No item *a* os autores sugerem que se efetue a adição das equações (somando-se os termos semelhantes) para anular uma das incógnitas, nesse caso o y e $-y$.

No item *b*, como não há termos opostos os autores sugerem que se multiplique uma equação por um número determinado, diferente de zero, para obter uma equação equivalente e um termo oposto em uma das equações. Nesse caso foi recomendado que se multiplicasse a segunda equação por -3 , assim obtêm-se os termos opostos $3x$ e $-3x$.

No item *c*, como não há termos opostos os autores sugerem que se multiplique as duas equações por números determinados, diferente de zero, para obter equações equivalentes às originais e um termo oposto em uma das equações, nesse caso multiplica-se a primeira equação por 3 e a segunda por 2 , assim obtêm-se os termos opostos $6y$ e $-6y$, para então adicionar as equações e anular uma das incógnitas.

Nesta atividade o objetivo, segundo os autores, é de mostrar ao aluno que qualquer equação pode ser transformada em outra equivalente, adicionando ou subtraindo um mesmo número nos dois lados da igualdade, ou então, multiplicar ou

dividir por um mesmo número nos dois lados da igualdade, desde que seja diferente de zero.

Na Atividade 6 – **A escolha do método** – são propostos seis sistemas de equações lineares para que o aluno escolha qual a maneira mais adequada de resolução.

a) $\begin{cases} 2x - y = 7 \\ x + 3y = -7 \end{cases}$ a) $x = 2$ e $y = -3$	b) $\begin{cases} x + 5y = 1 \\ 3x - y = -13 \end{cases}$ b) $x = -4$ e $y = 1$
c) $\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 6x - 4y = 13 \end{cases}$ c) $x = \frac{3}{2}$ e $y = -1$	d) $\begin{cases} x = 3y - 1 \\ 2x + y = 12 \end{cases}$ d) $x = 5$ e $y = 2$
e) $\begin{cases} 2y = 4 + x \\ 5x - 3y = 15 \end{cases}$ e) $x = 6$ e $y = 5$	f) $\begin{cases} 5x - 2y = 0 \\ -2x + 3y = \frac{1}{2} \end{cases}$ f) $x = 1$ e $y = \frac{5}{2}$

Figura 44 – Exercícios propostos – Atividade 6
Fonte: SÃO PAULO, 2008c, p.45

O propósito dessa atividade é o de saber se o aluno consegue decidir qual o melhor método de resolução, no entanto, os autores ressaltam que não há uma norma para se usar um método ou outro, porém é possível propor exercícios que permitem delinear algumas características que facilitam um ou outro método mais apropriado para cada situação. Em outras palavras, quando houver duas equações com termos opostos espera-se que o aluno empregue o método da adição, e espera-se que ele utilize o método da substituição quando uma incógnita de preferência com coeficiente unitário for a mais apropriada para ser isolada.

Continuando nossa análise, percebemos que a solução da situação f apresentada no Caderno do Professor não está correta, ao invés de $x = \frac{1}{11}$ e $y = \frac{5}{22}$, sugerem outro par de valores $x = 1$ e $y = \frac{5}{2}$, que satisfaz apenas uma das equações.

Apesar de as atividades estarem de acordo com o currículo, ou seja, propor como ponto de partida situações-problema para o processo de ensino e aprendizagem de Matemática, abordar a resolução de sistemas de equações lineares por meio dos métodos de substituição e adição, acreditamos que outras atividades podem contribuir para sua aprendizagem. Neste caso poderia ser

proposta uma atividade anterior à Atividade 2 neste Caderno do Professor, em que o aluno possa verificar se pares ordenados satisfazem ou não a solução das equações, deixando a cargo do aluno a análise, e ainda propor exercícios que o aluno transcreva sistemas de equações lineares da linguagem algébrica para a língua materna.

Na Atividade 7 – **Equações tabelas e gráficos** – o propósito, segundo os autores, é de preparar os alunos para os estudos de funções e, além disso, trazem mais um recurso para resolução de sistemas de equações lineares, a representação gráfica. Observe o problema proposto pelos autores e a seguir a representação dos pares ordenados tanto numa tabela quanto no plano cartesiano.

1. Problema: A soma de dois números inteiros e positivos é 12 e a diferença entre eles é 4.

Traduzindo em linguagem algébrica, escrevemos as equações I e II:

$$\begin{cases} x + y = 12 & (I) \\ x - y = 4 & (II) \end{cases}$$

Figura 45 – Problema 1 - Atividade 7

Fonte: SÃO PAULO, 2008c, p.46

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
y	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
x + y	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12

x	5	6	7	8	9	10	11
y	7	6	5	4	3	2	1
x - y	4	4	4	4	4	4	4

Agora, para cada par ordenado (x, y) das tabelas, localizaremos um ponto no plano cartesiano, obtendo os seguintes gráficos das equações I e II:

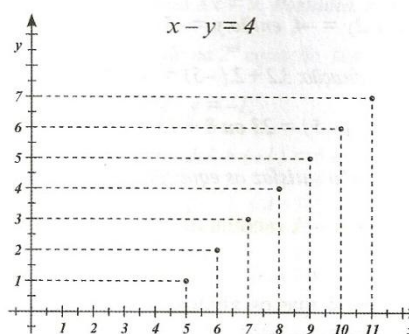
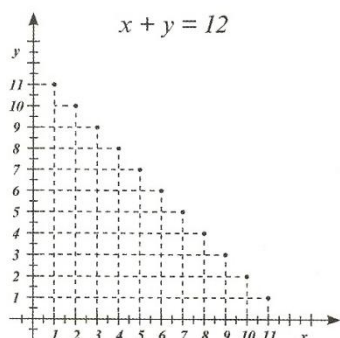


Figura 46 – representação na forma de tabela e representação gráfica - Atividade 7

Fonte: SÃO PAULO, 2008c, p.46

Como pudemos observar, os autores propõem para a resolução do problema a construção de uma tabela formando pares ordenados, e assim representá-los num plano cartesiano, permitindo a visualização na representação na forma de tabela da possível solução e sua representação gráfica.

Nesta atividade os autores têm como objetivo permitir a visualização das possíveis soluções de uma equação linear com duas incógnitas por meio da representação gráfica, além disso, possibilitar discussões explorando um problema que resulte em um sistema linear desse tipo.

Os autores ressaltam ainda que o problema não deve se restringir apenas a soluções inteiras, e sim incluir números inteiros negativos, racionais e irracionais, e que não há necessidade de o professor aprofundar a formalização do conceito de reta real, pois será feita na 8ª série/9º ano, bastando apenas o aluno compreender que há pontos intermediários entre os inteiros, e esses podem ser representados por uma reta.

Seguindo a sequência da atividade, os autores sugerem que o aluno verifique outros pontos, fora do domínio inicial do problema, que estão contidos na reta, um exemplo dado foi de verificar que os pares ordenados $(-1,13)$, $(7,5)$, $(4,5)$, $(15,-3)$, e outros pertencem a reta e satisfazem à equação $x+y=12$.

A Figura 47 mostra os pontos que representam os pares ordenados obtidos das equações I e II no mesmo plano.

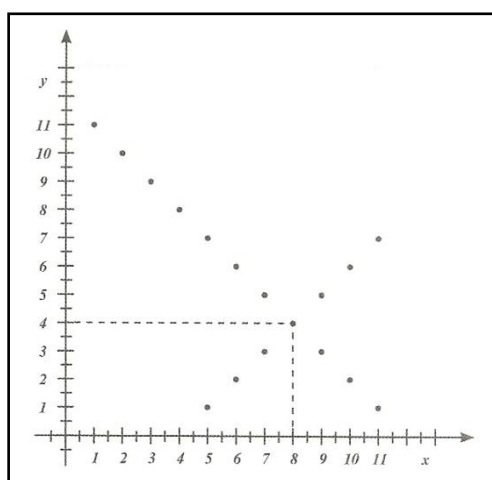


Figura 47- Representação gráfica - Atividade 7
Fonte: SÃO PAULO, 2008c, p.47

A solução desse sistema pode ser visualizada pelo ponto em comum obtido das equações representadas no mesmo plano cartesiano (8,4), ou seja, $x=8$ e $y=4$.

No processo de ensino e aprendizagem de Matemática, este tipo de atividade permite ao aluno um ensino com significado, a partir do momento que o aluno consegue transcrever um enunciado em diferentes linguagens matemáticas ele demonstra sua capacidade de percepção acerca do tema matemático estudado.

Além da língua materna e da linguagem algébrica, os autores utilizam a representação na forma de tabela e a representação gráfica, mostrando uma preocupação em articular essas representações com os princípios e conceitos do tema estudado. De acordo com os PCNEF (1998), essa forma de ensino tem importância e deve ser estimulada.

[...] no ensino da Matemática, destacam-se dois aspectos básicos: um consiste em relacionar observações do mundo real com representações (esquemas, tabelas, figuras, escritas numéricas); outro consiste em relacionar essas representações com princípios e conceitos matemáticos. Nesse processo, a comunicação tem grande importância e deve ser estimulada, levando-se o aluno a “falar” e a “escrever” sobre Matemática, a trabalhar com representações gráficas, desenhos, construções, a aprender como organizar e tratar dados.

Na Atividade 8 – **Soluções de um sistema** - os autores apresentam as possíveis soluções de um sistema de equação linear, conforme podemos observar na Figura 48 a solução pode ser possível e determinada ou possível e indeterminada, ou então, solução impossível.

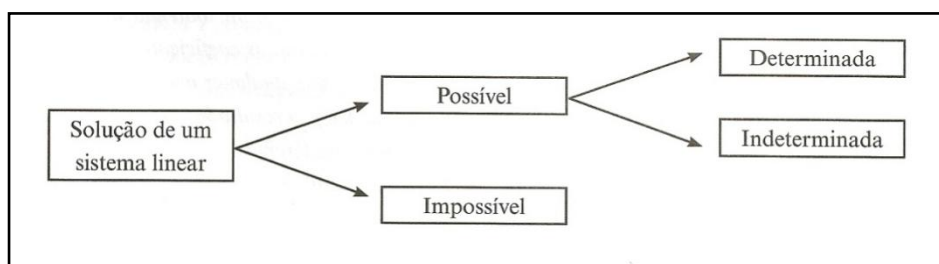


Figura 48 - Soluções de um sistema linear – Atividade 8
Fonte: SÃO PAULO, 2008c, p.47

A seguir os autores apresentam três tipos de soluções utilizando a representação gráfica para investigar os padrões nas equações dos sistemas em que a solução é possível e determinada ou indeterminada ou a solução é impossível.

Na Atividade 9 – **Sistema possível e determinado** – pede-se ao aluno que resolva o sistema de equação linear por meio do método de adição, e em seguida,

que represente as duas equações num mesmo plano cartesiano. Apresentamos o sistema de equação linear proposto pelos autores:

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - y = 6 \end{cases}$$

$$3x = 9$$

$$x = 3 \quad y = 3$$

Figura 49 – Resolução pelo método da adição – Atividade 9

Fonte: SÃO PAULO, 2008c, p.47

Os autores sugerem também que o aluno escreva uma tabela com apenas dois pares ordenados para cada equação para a construção dos gráficos. Observe na Figura 50 a tabela proposta pelos autores e na Figura 51 as duas retas que representam uma de cada equação no plano cartesiano.

$2x + y = 3$		$x - y = 6$	
x	y	x	y
0	3	0	-6
1,5	0	6	0

Figura 50 – Representação na forma de tabela – Atividade 9

Fonte: SÃO PAULO, 2008c, p.48

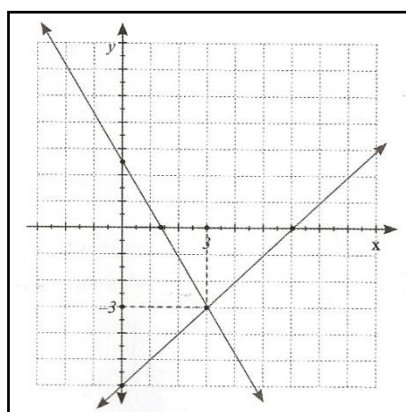


Figura 51 - Representação gráfica – Atividade 9

Fonte: SÃO PAULO, 2008c, p.48

Observando o ponto em comum das equações no plano cartesiano, espera-se que o aluno, diante dessa observação, possa concluir que esse sistema deve ser classificado como possível e determinado, ou seja, que existe apenas uma solução.

Observa-se que a solução algébrica apresentada anteriormente não está correta, ao invés de $x=3$ e $y=-3$ é apresentada outra solução, $x=3$ e $y=3$, valores que não satisfazem nenhuma das equações. No entanto o ponto em comum obtido das representação gráfica das equações dos sistemas no plano cartesiano permite ao aluno observar as soluções expostas nas diferentes de representações Matemáticas, e chegar a uma decisão sobre a solução correta.

Na Atividade 10 - **Sistema possível e indeterminado** – pede-se ao aluno que resolva o sistema de equação linear por meio do método de adição, e em seguida, que represente as duas equações num mesmo plano cartesiano. Apresentamos o sistema de equação linear dado pelos autores e sua resolução:

$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 4x + 2y = 6 \end{cases}$	$\begin{array}{r} \begin{cases} -4x - 2y = -6 \\ 4x + 2y = 6 \end{cases} + \\ \hline 0x + 0y = 0 \end{array}$
---	---

Figura 52 – Resolução pelo método da adição – Atividade 10
Fonte: SÃO PAULO, 2008c, p.48

Conforme podemos observar, a primeira equação foi multiplicada por -2 para obter outra equação equivalente cujos termos se tornem opostos, desta forma percebe-se que a outra incógnita e o termo independente também se anularam, resultando na igualdade $0x+0y=0$, isto é, qualquer que seja o valor das incógnitas x e y o resultado sempre será zero igual a zero.

Da mesma maneira que a atividade anterior, os autores sugerem que o aluno elabore uma tabela com dois pares ordenados para a construção do gráfico. Observe nas Figuras 53 a tabela proposta pelos autores e na Figura 54 as duas retas coincidentes que representam uma de cada equação no plano cartesiano.

$2x + y = 3$		$4x + 2y = 6$	
x	y	x	y
0	3	0	3
1,5	0	1,5	0

Figura 53- Representação na forma de tabela – Atividade 10
Fonte: SÃO PAULO, 2008c, p.48

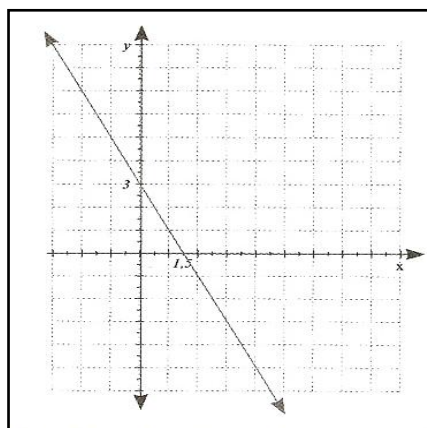


Figura 54- Representação gráfica - Atividade 10
Fonte: SÃO PAULO, 2008c, p.49

Observa-se nessa atividade a primeira vez que o aluno defronta-se com uma situação na qual a solução de um sistema de equação linear é possível, porém indeterminada.

Os autores esperam que o aluno perceba que as duas retas que representam as equações no plano cartesiano são duas retas coincidentes, ou seja, as equações $2x+y=3$ e $4x+2y=6$ são equivalentes (a mesma equação), portanto uma equação com duas incógnitas possui infinitas soluções, assim a solução desse sistema linear torna-se possível e indeterminada.

Na Atividade 11 - **Sistema impossível** – pede-se ao aluno que resolva o sistema de equação linear por meio do método de adição, e em seguida, que represente as duas equações num mesmo plano cartesiano. Apresentamos o sistema de equação linear dado pelos autores e sua resolução.

$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 4x + 2y = 10 \end{cases}$	$\begin{array}{r} -4x - 2y = -6 \\ + \quad 4x + 2y = 10 \\ \hline 0x + 0y = 4 \end{array}$
--	--

Figura 55- Resolução pelo método da adição - Atividade 11

Fonte: SÃO PAULO, 2008c, p.49

Conforme podemos observar para a resolução do sistema, a primeira equação foi multiplicada por -2 para obter outra equação e cujos termos se tornaram opostos, desta forma percebe-se que a outra incógnita também se anula, resultando na igualdade $0x+0y=4$, isto é, qualquer que seja o valor das incógnitas x e y o resultado sempre será igual a zero no primeiro termo, enquanto que no segundo termo vale quatro, obtendo assim uma sentença falsa, pois $0 \neq 4$.

Para a construção do gráfico os autores sugerem que o aluno construa uma tabela com apenas dois pares ordenados. Observe na Figura 56 a tabela proposta pelos autores e na Figura 57 as duas retas paralelas que representam uma de cada equação no plano cartesiano.

$2x + y = 3$		$4x + 2y = 10$	
x	y	x	y
0	3	0	5
$1,5$	0	$2,5$	0

Figura 56- Representação na forma de tabela - Atividade 11

Fonte: SÃO PAULO, 2008c, p.49

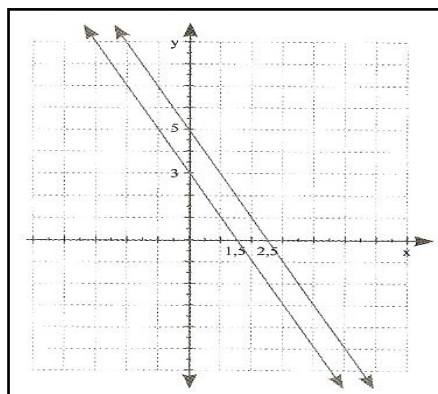


Figura 57- Representação gráfica - Atividade 11

Fonte: SÃO PAULO, 2008c, p.49

Nessa atividade, os autores esperam que o aluno observe que as retas que representam as equações no plano cartesiano são paralelas, portanto não haverá ponto de intersecção, permitindo concluir que esse sistema de equações linear não possuiu solução.

A forma como os autores elaboraram as Atividades 8, 9, 10 e 11 neste Caderno do Professor é semelhante àquela apresentada no livro didático destinado ao 8º ano do Ensino Fundamental, analisado no quarto capítulo deste trabalho.

Em comparação aos livros didáticos analisados, este Caderno do Professor apresenta uma quantidade menor de exercícios, uma abordagem diferente referente ao ensino dos métodos de substituição e adição, utilizando figuras que representam uma balança de pratos concomitante com a linguagem algébrica como estratégia para apresentar os métodos citados.

Outra constatação é que o Caderno do Professor não aborda o método de comparação para a resolução, apresentado em dois dos quatro livros analisados, que seria mais uma forma de o aluno resolver um problema. Não encontramos exercícios que possam ser transcritos da linguagem algébrica para a língua materna, atividade recomendada pelos documentos oficiais, e não encontramos exercícios que promovam a discussão quanto à classificação dos sistemas de equações lineares a partir de um valor desconhecido para determinar a sua solução, assim como ilustramos um exercício proposto pelos autores da coleção *Matemática e Realidade* na Figura 16 da página 49.

Outra observação são os termos utilizados pelos autores do Caderno do Professor, tais como “o lado direito ou o lado esquerdo da equação”, ao invés de o primeiro membro ou o segundo membro da equação, a utilização de setas nas retas para representar ou mostrar que as retas são infinitas nos planos cartesianos. Ao final dessa Situação de Aprendizagem 3, nas **Considerações sobre a avaliação final**, os autores sugerem ao educador que altere momentos de problematização e sistematização com atividades e exercícios relativos aos conteúdos ensinados. Proponha atividades de avaliação que contemple a tradução do problema para linguagem algébrica, situações que visam resoluções pelos métodos estudados. Propõe também avaliar se os alunos constroem as tabelas e representam corretamente as equações no plano cartesiano e se identificam as soluções possíveis determinadas e indeterminadas e soluções impossíveis.

Na Situação de Aprendizagem 4 – **Equações com soluções inteiras e suas aplicações** – os autores apresentam um série de problemas adaptados da *Revista do Professor de Matemática*⁸ para o estudo de equações diofantinas⁹ utilizando tabelas, padrões e regularidades para identificar suas soluções, trabalhos

⁸ Revista editada pela Sociedade brasileira de matemática. Disponível em: <http://www.rpm.org.br/novo/home.htm>. (SÃO PAULO, 2008, p.51)

⁹ Nome dado em homenagem ao matemático Diofanto de Alexandria, que viveu por volta do ano de 250 d.C., que buscava soluções inteiras positivas de problemas que envolviam uma equação com mais de uma incógnita (SÃO PAULO, 2008, p.52).

envolvendo a ideia de múltiplos, divisores e de máximo divisor comum e trabalhos envolvendo indiretamente o raciocínio de contagem e um texto “*Nota histórica*” referente à principal obra de Diofanto.

Segundo os autores, nesta série o estudo a respeito de sistema de equações lineares normalmente está voltado para a discussão, compreensão e sistematização dos métodos de resolução (adição e substituição). Porém, há uma necessidade do estudo de resolução de sistemas com mais incógnitas do que equações e sistemas que aceitam apenas soluções inteiras positivas.

E, ao final deste Caderno do Professor, segundo as considerações finais, os objetivos centrais do terceiro bimestre do oitavo ano do Ensino Fundamental são de aprofundar a discussão a respeito de equações de primeiro grau; apresentar o plano cartesiano e suas possibilidades; e introduzir a ideia de sistemas de equações lineares e seus métodos de resolução.

5.3 – Considerações a respeito do Caderno do Professor de Matemática do Ensino Fundamental do 8º ano de 2009

Segundo as informações contidas na Proposta Curricular de São Paulo (SÃO PAULO, 2009, p.5), ressaltamos que hoje é Currículo Oficial do Estado de São Paulo, todos os Cadernos do Professor de 2009 foram revistos, e apresentam sugestões e críticas referentes à primeira fase de implantação da proposta.

Referente à abordagem de sistemas de equações lineares, observamos que as onze Atividades e as considerações a respeito da avaliação se repetem neste Caderno do Professor de 2009. Além disso, houve a correção dos valores de x e y da Atividade 4, a exclusão de dois exercícios e e f da Atividade 6 e a correção do valor de y na Atividade 9. Com a exclusão, a quantidade de exercícios passou a ser menor neste Caderno do Professor.

5.4 - Sistemas de Equações Lineares no Caderno do Professor de Matemática do Ensino médio da 2ª série de 2008

O propósito de nossa pesquisa neste ponto é de investigar como é a abordagem de sistemas de equações lineares nos Cadernos do Professor de Matemática no Ensino Médio, se contemplam o que os documentos oficiais propõem

para o seu ensino, compará-la com a abordagem apresentada nos livros didáticos da coleção *Matemática Ciência e Aplicações*, e ainda se há conexão do conteúdo do 8º ano para este Caderno do Professor.

O estudo de sistemas de equações lineares é tema do 2º bimestre da 2ª série do Ensino Médio. O tema é abordado após o estudo de Matrizes de Codificação e finaliza com a Situação de Aprendizagem 4 propondo a discussão a respeito dos métodos de resolução de sistemas de equações lineares por meio da notação matricial (escalonamento) e determinantes associado ao sistema (regra de Cramer).

Como mencionamos, todo Caderno do Professor está dividido em quatro Situações de Aprendizagens, e esses subdivididos em unidades.

A Figura 58 mostra os conteúdos organizados em unidades.

Quadro geral de conteúdos do 2º bimestre da 2ª série do Ensino Médio

A organização do trabalho do bimestre, com base nas considerações anteriores, pode ser distribuída nas oito unidades a seguir:

- Unidade 1:** Matrizes – apresentação, tipos, igualdade e operações (adição, subtração e multiplicação por uma constante).
- Unidade 2:** Matrizes – diferentes significados; multiplicação entre duas matrizes.
- Unidade 3:** Matrizes – operações e equações matriciais.
- Unidade 4:** Determinantes – um número associado a uma matriz quadrada; método de Sarrus.
- Unidade 5:** Determinantes – método de Laplace.
- Unidade 6:** Sistemas lineares – resolução por escalonamento.
- Unidade 7:** Sistemas lineares – discussão de parâmetros.
- Unidade 8:** Problemas resolvíveis por intermédio de sistemas lineares.

Figura 58 - Quadro Geral dos Conteúdos do 2º bimestre da 2ª série do Ensino Médio

Fonte: SÃO PAULO, 2008d, p.11

Podemos observar na Figura 59 o conteúdo de Matemática por série e bimestre do ensino médio, e em destaque, os conteúdos relacionados ao segundo bimestre, e particularmente ao nosso tema de pesquisa.

CONTEÚDOS DE MATEMÁTICA POR SÉRIE/BIMESTRE DO ENSINO MÉDIO			
	1ª série	2ª série	3ª série
1º Bimestre	NÚMEROS E SEQÜÊNCIAS - Conjuntos numéricos. - Regularidades numéricas: seqüências. - Progressões aritméticas e progressões geométricas.	TRIGONOMETRIA - Fenômenos periódicos. - Funções trigonométricas. - Equações e inequações. - Adição de arcos.	GEOMETRIA ANALÍTICA - Pontos: distância, ponto médio e alinhamento de três pontos. - Reta: equação e estudo dos coeficientes; problemas lineares. - Ponto e reta: distância. - Circunferência: equação. - Reta e circunferência: posições relativas. - Cônicas: noções e aplicações.
2º Bimestre	FUNÇÕES - Relação entre duas grandezas. - Proporcionalidades: direta, inversa, direta com o quadrado. - Função de 1º grau. - Função de 2º grau.	MATRIZES, DETERMINANTES E SISTEMAS LINEARES - Matrizes: significado como tabelas, características e operações. - A noção de determinante de uma matriz quadrada. - Resolução e discussão de sistemas lineares: escalonamento.	EQUAÇÕES ALGÉBRICAS E NÚMEROS COMPLEXOS - Equações polinomiais. - Números complexos: operações e representação geométrica. - Teorema sobre as raízes de uma equação polinomial. - Relações de Girard.
3º Bimestre	FUNÇÕES EXPONENCIAL E LOGARÍTMICA - Crescimento exponencial. - Função exponencial: equações e inequações. - Logaritmos: definição e propriedades. - Função logarítmica: equações e inequações.	ANÁLISE COMBINATÓRIA E PROBABILIDADE - Raciocínio combinatório: princípios multiplicativo e aditivo. - Probabilidade simples. - Casos de agrupamentos: arranjos, combinações e permutações. - Probabilidade da reunião e/ou da interseção de eventos. - Probabilidade condicional. - Distribuição binomial de probabilidades: o triângulo de Pascal e o Binômio de Newton.	ESTUDO DAS FUNÇÕES - Qualidades das funções. - Gráficos: funções trigonométricas, exponencial, logarítmica e polinomiais. - Gráficos: análise de sinal, crescimento e taxa de variação. - Composição: translações e reflexões. - Inversão.
4º Bimestre	GEOMETRIA – TRIGONOMETRIA - Razões trigonométricas nos triângulos retângulos. - Polígonos regulares: inscrição, circunscrição e pavimentação de superfícies. - Resolução de triângulos não retângulos: lei dos senos e lei dos cossenos.	GEOMETRIA MÉTRICA ESPACIAL - Elementos de geometria de posição. - Poliedros, prismas e pirâmides. - Cilindros, cones e esferas.	ESTATÍSTICA - Gráficos estatísticos: cálculo e interpretação de índices estatísticos. - Medidas de tendência central: média, mediana e moda. - Medidas de dispersão: desvio médio e desvio padrão. - Elementos de amostragem.

O sombreado assinala os conteúdos relacionados aos trabalhados neste bimestre.

Figura 59 - Conteúdos de Matemática do Ensino Médio

Fonte: SÃO PAULO, 2008d, p.32

Os conteúdos que investigamos estão presentes no 2º bimestre da 2ª série do Ensino Médio, mais precisamente, nas Situações de Aprendizagem 3 e 4.

5.5 - Análise do Caderno do Professor de Matemática do Ensino Médio da 2ª Série de 2008

O Caderno do Professor de Matemática do segundo bimestre da segunda série do Ensino Médio de 2008 tem 32 páginas. Nele há Orientação geral sobre o

Caderno do Professor, contém também conteúdos básicos do bimestre, além disso, apresentam quatro Situações de Aprendizagem: Situação de Aprendizagem 1 – Matrizes: diferentes significados; Situação de Aprendizagem 2 – Matrizes de codificação: desenhando com matrizes; Situação de Aprendizagem 3 – Sistemas Lineares em situações-problema; Situação de Aprendizagem 4 – Resolução de sistemas de equações lineares: Escalonamento x Cramer, considerações sobre avaliação final, recursos para ampliar a perspectiva do aluno e do professor para compreensão do tema.

Cada Situação de Aprendizagem é dividida em unidades, com recomendações sobre o tempo previsto para a realização dos conteúdos e temas, competências e habilidades, estratégias para desenvolver e resolver e confrontar os resultados obtidos a partir de um problema proposto.

A seguir faremos uma breve descrição das Situações de Aprendizagem, dentre estas com mais detalhe à abordagem dada a sistemas de equações lineares.

Na Situação de Aprendizagem 1 – **Matrizes: seus diferentes significados** – os autores sugerem ao professor que proponha as atividades ao aluno por meio de situações-problema sem qualquer comentário sobre como calcular o produto de duas matrizes e os resultados obtidos sejam utilizados para a introdução de seu conceito. Da mesma forma, é proposta a segunda atividade buscando a ideia de matrizes de compensação¹⁰, e ao fim dessa Situação de Aprendizagem 1, abordam a resolução de imagens em aparelhos digitais associando o conceito de *pixel* à ideia de matrizes. O objetivo dessa primeira Situação de aprendizagem é promover condições ao aluno de interpretar corretamente os dados numéricos registrados em uma matriz.

Na Situação de Aprendizagem 2 – **Matriz de Codificação: desenhando com matrizes** – os autores abordam a possibilidade do uso de matrizes para codificar sequência de ligação entre pontos do plano, objetivando a formação de determinadas imagens.

Na Situação de Aprendizagem 3 – **Sistemas Lineares em situações-problema** – os autores apresentam cinco propostas contextualizadas com o objetivo de transformar as equações e os sistemas lineares em uma ferramenta em busca de

¹⁰ Segundo os autores do Caderno, matriz de compensação refere-se ao tipo um de matriz que cada elemento pode revelar explicitamente a frequência de um evento, ao mesmo tempo em que pode, implicitamente, revelar a frequência de outro evento, complementar ao primeiro. (SÃO PAULO, 2008d, p.9)

soluções, e ressaltam que esse tema matemático não seja proposto ao final do curso em um único bloco, mas que gradativamente permeie uma construção conceitual planejada para o bimestre, além disso, advertem o professor que priorize procedimentos que mobilizem os alunos à diversidade de estratégias de raciocínio em lugar de habilidades de memorização.

Ao iniciar essa Situação de Aprendizagem 3, os autores propõem uma atividade na qual recomendam a resolução de situações-problema que envolva a determinação de duas ou mais incógnitas. Na Figura 60 mostramos a primeira atividade proposta pelos autores:

Atividade 1 – Duas locadoras de automóveis A e B estipulam a remuneração de seus serviços da seguinte maneira:

Locadora A: valor fixo de R\$ 80,00 mais R\$ 1,20 por quilômetro rodado;

Locadora B: valor fixo de R\$ 120,00 mais R\$ 1,00 por quilômetro rodado.

Com base nesses dados, determine:

a) O valor a ser pago às locadoras A e B pelo aluguel de um veículo que rodou 140 km.

R\$ 248,00 e R\$ 360,00.

b) O valor a ser pago às locadoras A e B pelo aluguel de um veículo que rodou 300 km.

R\$ 440,00 e R\$ 420,00.

c) A partir de quantos quilômetros rodados torna-se mais econômico alugar o automóvel na locadora B do que em A.

200 km.

Figura 60 - Atividade 1
Fonte: SÃO PAULO, 2008, p.21

Conforme observamos, os autores visam saber se o aluno, após calcular os valores a serem pagos às locadoras por uma determinada quilometragem percorrida, consegue verificar qual a locadora mais vantajosa para alugar um carro. Para isso, propuseram um problema para que o aluno transcrevesse o enunciado da língua materna para a linguagem simbólica (tabela, gráfico, diagrama, equação,

expressão, etc.) neste caso, para a linguagem algébrica, para então resolver e analisar os resultados.

De acordo com a Proposta Curricular do Estado de São Paulo,

[...] A língua verbal, oral e escrita, representada pela língua materna, viabiliza a compreensão e o encontro dos discursos utilizados em diferentes esferas da vida social. É com a língua materna e por meio dela que as formas sociais e arbitrárias de visão do mundo são incorporadas e utilizadas como instrumento de conhecimento e comunicação. (SÃO PAULO, 2008a, p.14).

Paramos um momento para fazer uma observação. Notamos a retomada do conteúdo ensinado no Ensino Fundamental, porém segundo os autores, a recomendação apresentada no Caderno do Professor de Matemática de 2009, referente a esta Atividade, é que seja resolvido pelo método de comparação. Como já mencionamos este material foi revisado no ano citado, no entanto, em nossa análise esse método não foi discutido ou apresentado nos Cadernos do Professor Matemática de 2008.

Apresentamos na Figura 61 a Atividade 2.

Atividade 2 – Uma loja de eletrodomésticos está fazendo uma promoção para a compra conjunta de dois tipos de produtos, de maneira que o consumidor interessado pague:

- ▶ R\$ 590,00 por um forno de microondas e um aspirador de pó
- ▶ R\$ 1.300,00 por um forno de microondas e uma geladeira
- ▶ R\$ 1.250,00 por um aspirador de pó e uma geladeira

Quanto a loja está cobrando por cada tipo de aparelho, se o preço unitário de cada um é constante em todos os casos?

R\$ 320,00; R\$ 270,00; R\$ 980,00.

Figura 61 – Atividade 2
Fonte: SÃO PAULO, 2008, p.21

O objetivo dessa situação é de encontrar o valor cobrado por cada tipo de aparelho, e para isso os autores recomendam que o aluno transcreva o problema da língua materna para a linguagem algébrica. Nesse caso o problema passará a ter três equações com três incógnitas.

É importante mencionar que este tipo de atividade passa a ser um momento inédito para o aluno, pois ao ler e interpretar o enunciado e convertê-lo da língua materna para a linguagem algébrica, a situação passa a ter três equações com três incógnitas, sendo que os problemas propostos até então conduziam a duas equações com duas incógnitas.

A maneira como foi formulada essa atividade possibilita a escolha de estratégias, e assim o aluno pode examinar suas próprias ideias e analisar os resultados obtidos, pois se trata de uma situação muito próxima da realidade, possibilitando um maior interesse ao aluno e contrariando o ensino voltado à memorização e aplicação de regras.

Continuando a atividade, a Figura 62 apresenta as Atividades 3 e 4.

Atividade 3 – Um funcionário recém-contratado por uma empresa recebeu a seguinte tabela contendo as quantidades de três tipos de produtos, A, B e C, recebidos ou devolvidos em três lojas da empresa, acompanhadas dos respectivos valores que cada loja deveria remeter à matriz pela transação.

Tipo	Quantidade			Valor da transação (em mil R\$)
	A	B	C	Total
Loja 1	3	4	-1	8
Loja 2	4	5	2	20
Loja 3	1	-2	3	6

Ajude o funcionário a calcular o valor unitário de cada tipo de produto.

R\$ 1000,00; R\$ 2000,00; R\$ 3000,00.

$$\begin{cases} 3a + 4b - c = 8 \\ 4a + 5b + 2c = 20 \\ a - 2b + 3c = 6 \end{cases}$$

Atividade 4 – Quatro escolas participaram de um torneio esportivo em que provas de dez modalidades foram disputadas. Aos vencedores de cada prova foram atribuídas medalhas de ouro, de prata ou de bronze, respectivamente aos 1º, 2º e 3º lugares. A quantidade de medalhas de cada escola, ao final da competição, é apresentada na tabela seguinte, assim como o total de pontos conseguidos pelas escolas, considerando que a cada tipo de medalha foi atribuída uma pontuação.

Escolas	Medalhas			Pontuação final
	Ouro	Prata	Bronze	
A	4	2	2	46
B	5	3	1	57
C	4	3	3	53
D	3	3	7	53

Qual foi a pontuação atribuída a cada tipo de medalha?

Ouro: 8 pontos; prata: 5 pontos; bronze: 2 pontos.

$$\begin{cases} 4x + 2y + 2z = 46 \\ 5x + 3y + z = 57 \\ 4x + 3y + 3z = 53 \\ 3x + 3y + 7z = 53 \end{cases}$$

Figura 62 – Atividades 3 e 4
Fonte: SÃO PAULO, 2008, p.21-22

As Atividades 3 e 4 são apresentadas por meio da representação de tabela, e têm como propósito que o aluno transcreva os dados da tabela para a linguagem algébrica, convertendo as tabelas para sistemas de equações lineares, sendo elas de três equações com três incógnitas e quatro equações com três incógnitas, respectivamente.

A Figura 63 ilustra a Atividade 5, última dessa Situação de Aprendizagem 3.

Atividade 5 – O técnico de uma equipe de futebol estima que ao final de 12 partidas sua equipe consiga 24 pontos. Sabendo que a quantidade de pontos por vitória é 3, por empate é 1 e por derrota é 0, determine:

a) O número de pontos da equipe se vencer quatro jogos, empatar quatro e perder quatro.
16 pontos.

b) O número máximo de pontos que a equipe pode conseguir.
36 pontos.

c) Uma combinação possível de números de vitórias, empates e derrotas para que a equipe consiga os almejados 24 pontos.
Por exemplo, sete vitórias, três empates e duas derrotas.

d) Todas as possibilidades para que a equipe consiga atingir 24 pontos.
(8, 0, 4), (7, 3, 2) e (6, 6, 0).

Figura 63 - Atividade 5

Fonte: SÃO PAULO, 2008, p.22

De acordo com as análises realizadas até o momento, observamos que a abordagem do conteúdo é diferente da utilizada pelos livros: enquanto o livro didático do Ensino Médio revisa todo o conteúdo do Ensino Fundamental, bem como as soluções de uma equação com duas e três incógnitas, a solução de sistemas de equações 2×2 , a interpretação geométrica e a sua classificação, anterior aos estudos dos sistemas lineares $m \times n$, os autores dos Cadernos do Professor propõem a resolução sistemas de equações lineares por meio de uma série de problemas contextualizados que envolvam a determinação de duas ou mais incógnitas sem retomar os métodos de resolução propostos no Ensino Fundamental.

Notamos a semelhança de alguns exercícios que propõem a transcrição dos valores de uma tabela para a linguagem algébrica, convertendo as situações para sistemas de equações 3x3 e 4x3, assim como apresentado nos livros didáticos.

Na Situação de Aprendizagem 4 – **Resolução de Sistemas lineares: Escalonamento X Cramer** – autores pretendem avaliar os procedimentos operatórios e as dificuldades que envolvem os métodos de escalonamento e a regra de Cramer para a resolução de sistema de equações lineares.

Para o início dos estudos dos métodos citados, os autores retomam o método de adição para exemplificar que os procedimentos utilizados são semelhantes aos do método de resolução de sistemas lineares por escalonamento. Na Figura 64 apresentamos os procedimentos realizados pelos autores referentes ao método de adição para a resolução de um sistema de equação linear 2x2.

$$\begin{array}{rcl}
 2x - 3y = 11 & \rightarrow & 2x - 3y = 11 \\
 x + 2y = 2 & & -2x - 4y = -4 \\
 \hline
 0x - 7y = 7 & \rightarrow & y = -1 \\
 y = -1 & \rightarrow & x = 4 \\
 \text{(substituindo y por -1 em qualquer uma} \\
 \text{das equações iniciais)}
 \end{array}$$

Figura 64 – Resolução pelo método da adição
Fonte: SÃO PAULO, 2008, p.23

Fazemos uma observação nesse exemplo proposto, a maneira como foi apresentada sem as chaves nas equações aparentam não ter conexão alguma, e a forma implícita como os autores realizaram a passagem de um sistema para o outro, sem indicações de que a segunda equação foi multiplicada por -2 acontecem de forma com pouco significado, mesmo que os alunos já o tenham visto no Ensino Fundamental.

Continuando, apresentamos o exemplo proposto pelos autores referentes aos procedimentos do método de escalonamento. Nota-se que o sistema linear é o mesmo do exemplo anterior.

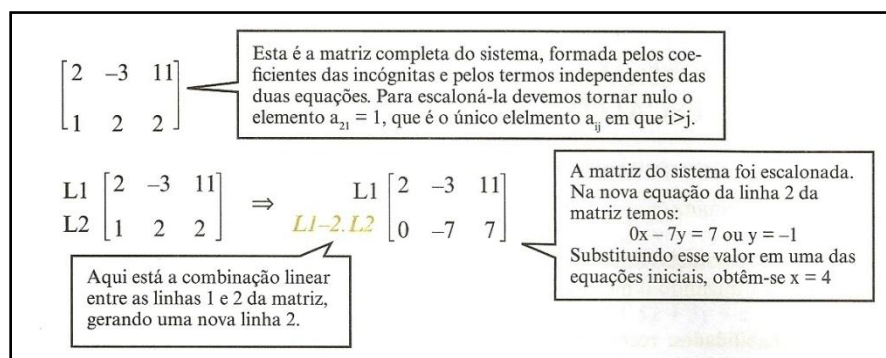


Figura 65 – Resolução pelo método de escalonamento matricial

Fonte: SÃO PAULO, 2008, p.24

Observa-se na Figura 65 que os autores transcreveram o sistema linear da linguagem algébrica para a notação matricial. Multiplicaram a L2 (segunda linha da matriz) por -2, resultando em uma nova equação, em seguida efetuaram a adição das equações para que um dos coeficientes se anule. Apresentamos a seguir o procedimento utilizado pelos autores para chegar a matriz escalonada.

$$\begin{array}{ccc} 2 & -3 & 11 \\ -2 & -4 & -4 \\ \hline 0 & -7 & 7 \end{array}$$

Observa-se que, somando a primeira linha com a segunda, o coeficiente de x se anula, resultando na combinação desejada pelos autores: $(0 \quad -7 \quad 7)$. Continuando a resolução, retornaram as incógnitas aos seus respectivos coeficientes $(0x - 7y = 7)$ para obter os valores de x e y .

Os autores ressaltam a importância desse método para a resolução de sistemas de equações lineares que consiste em:

[...] realizar combinações lineares entre as equações do sistema de maneira que algumas delas possam ser escritas com um número de incógnitas menor do que na escrita original. [...] Dizemos que o sistema linear está escalonado quando realizamos as combinações lineares entre as linhas da matriz completa de modo a zerar todos os elementos a_{ij} da matriz em que $i > j$. (SÃO PAULO, 2008d, p.23).

Observamos que esta apresentação retoma os estudos adquiridos no Ensino Fundamental referente ao método de adição, porém achamos necessário abordar o tema um pouco mais, visto que do 8º ano para a 2ª série do Ensino Médio não encontramos nos demais Cadernos do Professor, neste período, a apresentação de

sistemas de equações lineares ao menos como uma ferramenta para a resolução de exercícios.

A Figura 66 mostra os procedimentos de resolução de um sistema 3x3 pelo método de escalonamento utilizando apenas os coeficientes das incógnitas.

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y - 2z = 2 \\ x + 2z = 4 \end{cases} \quad M_{\text{completa}} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Na matriz escalonada deverão ser nulos os elementos destacados

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{L1-L3}]{-2\text{L1-L2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & -4 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\text{L2}-3\text{L3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 7 & 7 \end{bmatrix}$$

Figura 66 - Resolução pelo método de escalonamento matricial
Fonte: SÃO PAULO, 2008, p.24

Percebemos que as passagens estão implícitas para a resolução do sistema de equações linear apresentada na Figura 66, neste caso, os procedimentos implícitos ficam a cargo do professor verificar os procedimentos e esclarecer as dúvidas dos alunos. Um exemplo disso é observar a multiplicação da 1ª linha por -2 e a segunda por -1, realizada pelos autores, que o coeficiente de x da segunda linha não foi anulado, permanecendo o coeficiente 2 de x na segunda linha da última matriz. Além disso, as indicações das operações, entre as linhas um e dois, não estão corretas. Foram feitas $-2L1 - L2$ e $L1 - L3$ ao invés de $-2L1 + L2$ e $L3 - L1$, respectivamente. Contrariando o destaque da Figura 66: “Na matriz escalonada deverão ser nulos os elementos destacados”.

Para o término da resolução, informam que a última linha da matriz resulta na equação $7z=7$, ou seja, $z=7$. E substituindo o valor de z nas demais equações é possível encontrar $y=0$ e $x=2$, assim a solução do sistema proposto é $S = \{(2,0,1)\}$.

Os autores utilizam o mesmo sistema de equações lineares para mostrar a regra de Cramer e ressaltam que esse método só é possível para os sistemas lineares quadrados, ou seja, sistemas com o número de equações igual ao número de incógnitas, e ainda, para a realização desse método é necessário encontrar alguns determinantes formados pelos coeficientes ou termos independentes das incógnitas. A Figura 67 apresenta os procedimentos da regra de Cramer proposto pelos autores.

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -7 \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -14 \quad x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-14}{-7} = 2$$

Figura 67 - Resolução pelo método de Cramer
Fonte: SÃO PAULO, 2008, p.25

Observa-se que na apresentação deste método, os procedimentos estão implícitos, assim como na Figura 65. Primeiro, encontra-se o determinante da matriz formada pelos coeficientes das incógnitas resultando em $\Delta = -7$. Segundo, trocam-se os termos independentes no lugar dos coeficientes de x para encontrar o determinante de x ($\Delta_x = -14$), divide-se o valor do determinante da matriz formada pelos coeficientes das incógnitas pelo valor do determinante de x . Este será o valor da incógnita x .

Assim como o livro didático analisado, os autores apresentam a regra de Cramer como um método de resolução de sistemas de equações lineares, no entanto, o livro aborda a regra com mais profundidade, e os autores do Caderno do Professor fazem uma breve discussão a respeito de sua utilização comparando-a com o método de escalonamento, apesar de as OCEM (2006) recomendarem o abandono dessa regra por ser um procedimento custoso e de pouco significado para o aluno.

Assim como o livro didático analisado, os autores apresentam os procedimentos de resolução de sistema possível e determinado e sistema possível e indeterminado. Com relação à resolução de sistema impossível, os autores apresentam um sistema linear 3x3 e ressaltam que entre os métodos estudados, apenas o método de escalonamento permite classificar qualquer sistema de equação linear, ao contrário da regra de Cramer. A Figura 68 apresenta um exemplo de um sistema linear que ilustra este caso.

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + 4y + 6z = 2 \\ 3x + 6y + 9z = 4 \end{cases}$$

Figura 68 – Exercício proposto
Fonte: SÃO PAULO, 2008, p.26

Segundo os autores, utilizando a regra de Cramer obtêm-se os seguintes determinantes: $\Delta=0$ referente ao determinante formado pelos coeficientes das incógnitas e $\Delta_x=0$ obtido na troca dos termos independentes no lugar dos coeficientes de x , resultando em um sistema impossível e não indeterminado. Como se poderia supor, neste caso, pode-se perceber a impossibilidade do uso dessa regra. Por fim, apresentam um exemplo para discussão da classificação de sistemas lineares (determinado, indeterminado ou impossível) de acordo com o valor do parâmetro introduzido na equação. A Figura 69 apresenta a situação-problema proposta pelos autores e a sua resolução.

Encontre o valor de a para que o sistema

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = a \\ x + 2y - z = 3 \\ 7x + 4y + 3z = 13 \end{cases}$$

seja possível. Para o valor encontrado de a ache a solução geral do sistema, isto é, ache expressões que representem todas as soluções do sistema. Explícite duas dessas soluções.

A última equação do sistema escalonado ficou reduzida a $0x + 0y + 0z = 4 - 2a$, ou, simplificada, $0 = 4 - 2a$.

$$\left[\begin{array}{cccc} 2 & -1 & 3 & a \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 7 & 4 & 3 & 13 \end{array} \right] \xrightarrow[\substack{2L2 - L1 \\ 7L2 - L1}]{\substack{2L2 - L1 \\ 7L2 - L1}} \left[\begin{array}{cccc} 2 & -1 & 3 & a \\ 0 & 5 & -5 & 6 - a \\ 0 & 10 & -10 & 8 \end{array} \right] \xrightarrow{2L2 - L3} \left[\begin{array}{cccc} 2 & -1 & 3 & a \\ 0 & 5 & -5 & 6 - a \\ 0 & 0 & 0 & 4 - 2a \end{array} \right]$$

Assim, se $a = 2$ o sistema é **possível e indeterminado**, pois a igualdade anterior se reduziria a $0 = 0$, que é verdadeira sempre. No caso em que $a \neq 2$ o sistema é **impossível**.

Para obter a solução geral do sistema, tomaremos $a = 2$, faremos $z = k$ e escreveremos as respostas em função de k , de acordo com o seguinte procedimento:

2ª equação: $5y - 5z = 6 - a \Rightarrow 5y - 5z = 4$

$$5y - 5k = 4 \Rightarrow y = \frac{4 + 5k}{5}$$

1ª equação: $2x - y + 3z = a \Rightarrow 2x - y + 3z = 2$

$$2x - \frac{4 + 5k}{5} + 3k = 2 \Rightarrow x = \frac{7 + 5k}{5}$$

Assim, a resposta geral do sistema é esta:

$$S = \left\{ \left(\frac{7 + 5k}{5}, \frac{4 + 5k}{5}, k \right) \mid k \in \mathbb{R} \right\}$$

Atribuindo valores a k , podemos obter algumas das soluções, como:

Para $k = 0$, $S = \left\{ \left(\frac{7}{5}, \frac{4}{5}, 0 \right) \right\}$ Para $k = -1$, $S = \left\{ \left(\frac{2}{5}, \frac{-1}{5}, -1 \right) \right\}$

Figura 69 - Resolução pelo método de escalonamento matricial
Fonte: SÃO PAULO, 2008, p.26

A resolução da situação-problema é realizada pelo método de escalonamento com o propósito de anular os elementos destacados na matriz completa. Percebe-se que todos os coeficientes das incógnitas na última linha da terceira matriz se anulam após os procedimentos efetuados.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & a \\ 0 & 5 & -5 & 6-a \\ 0 & 0 & 0 & 4-2a \end{bmatrix}$$

Figura 70 – Matriz escalonada
Fonte: SÃO PAULO, 2008, p.26

Para obter a solução geral do sistema, os autores propõem a discussão do valor do parâmetro. Para $a=2$ o sistema é possível e indeterminado e no caso de $a \neq 2$ o sistema é impossível. Assim tomaram $a=2$ e as incógnitas x , y e z em função de k , para que se possa obter a solução geral do sistema.

$$S = \left\{ \left(\frac{7+5k}{5}, \frac{4+5k}{5}, k \right) \mid k \in \mathbb{R} \right\}$$

Finalizam esta atividade atribuindo valores a k para obter algumas soluções e nove exercícios para que os alunos resolvam, sendo três referentes às classificações dos sistemas de acordo com o valor parâmetro inserido na equação.

As situações propostas neste Caderno do Professor se assemelham àquelas apresentadas no livro didático analisado, por exemplo, a retomada do método de adição para a resolução de sistemas de equações lineares 2×2 , a discussão referente utilização do método de escalonamento e da regra de Cramer para a resolução de um sistema de equação linear 3×3 e o estudo da classificação dos sistemas de acordo com o valor do parâmetro inserido na equação.

Cabe ressaltar que o método de adição poderia ser explorado com mais ênfase neste Caderno do Professor antes de apresentar os sistemas de equações lineares 3×3 , por ser uma ferramenta importante para o estudo do método de escalonamento, visto que o método de adição foi proposto apenas no 8º ano do Ensino Fundamental. Observamos também a falta do método de Sarrus por considerar mais uma ferramenta importante ao aluno para o estudo da classificação dos sistemas a partir de parâmetros.

Outro fato observado, é não retomada dos métodos de substituição e a representação gráfica de sistemas lineares 2×2 vistos no Ensino Fundamental, não notamos também a utilização da história da Matemática neste Caderno do Professor, contrariando as recomendações dos PCNEM (1999), PCN+ (2002) e OCEM (2006).

Apesar dos documentos oficiais não recomendarem, achamos importante a utilização da representação gráfica dos sistemas de equações lineares 3×3 . De acordo com os resultados apresentados na pesquisa de Jordão (2010), a visualização dos três planos no espaço contribui para que os alunos do Ensino Médio compreendam o significado das equações encontradas na representação algébrica, mesmo sabendo que há a necessidade do uso do computador para representar a posição relativa dos três planos no espaço tridimensional para um estudo mais aprofundado.

Em síntese, os autores apresentaram no Ensino Médio o conteúdo de sistemas de equações lineares a partir de situações-problema contextualizados, apresentam a regra de Cramer comparando-a com o método de escalonamento, propõem uma discussão a respeito de valores a serem determinados para o parâmetro a fim de classificar os sistemas de equações lineares, discussão que poderiam ser mais explorada.

Constatamos também, nove exercícios propostos, sendo três referentes a sistemas lineares possíveis e determinados, um exercício referente a sistema linear de solução impossível, dois referentes à solução indeterminada e três com o objetivo de classificar os sistemas lineares em função do parâmetro.

5.6 - Análise do Caderno do Professor de Matemática da 2ª série do Ensino Médio de 2009

Conforme mencionamos no capítulo anterior, todos os Cadernos do Professor de 2009 foram revistos, apresentam sugestões e críticas referentes à primeira fase de implantação da proposta.

Referente à abordagem de sistemas de equações lineares observamos o tempo previsto para o estudo dos conteúdos da Situação de Aprendizagem 3 passou de uma semana no Caderno do Professor de 2008 para duas semanas nesta nova

versão no Caderno do Professor de 2009. Foram acrescentados conteúdos, resoluções de algumas atividades e comentários

Na Situação de Aprendizagem 3, além das cinco atividades propostas, os autores incluíram uma sexta. Nesta nova versão, os autores apresentaram a resolução e comentários de cada uma das atividades.

Na Situação de Aprendizagem 4, apresentaram diversas modificações, entre elas corrigiram os erros apresentados no Caderno do Professor de 2008, acrescentaram o estudo do método de Sarrus, seis problemas e uma atividade.

Para o estudo do método de Sarrus os autores ressaltam que, além de sua utilização para a resolução de sistemas de equações lineares, é possível utilizá-la para o cálculo de áreas de polígonos representados no plano cartesiano, quando são conhecidas as coordenadas de seus vértices. A Figura 71 mostra a proposta dos autores.

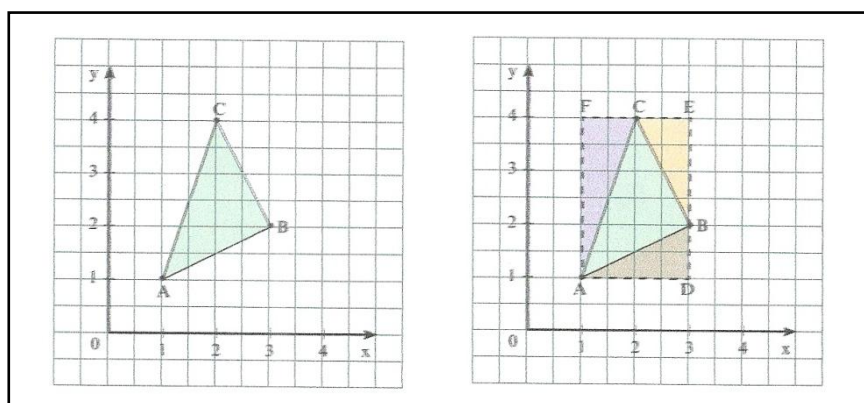


Figura 71 – Áreas de polígonos representados no plano cartesiano
Fonte: SÃO PAULO, 2009, p.39

Contornando o triângulo ABC por um retângulo ADEF, podemos determinar a área de ABC subtraindo as áreas dos triângulos retângulos AFC, ABD e BCE da área do retângulo ADEF.

$$\text{Área(ADEF)} = 2 \cdot 3 = 6 \text{ u}$$

$$\text{Área(AFC)} = \frac{(3 \cdot 1)}{2} = 1,5 \text{ u}$$

$$\text{Área(ABD)} = \frac{(2 \cdot 1)}{2} = 1 \text{ u}$$

$$\text{Área(BCE)} = \frac{(2 \cdot 1)}{2} = 1 \text{ u}$$

A área do triângulo ABC será igual a:

$$\text{Área(ABC)} = 6 - (1,5 + 1 + 1) = 2,5 \text{ unidades de área.}$$

Nesse processo será realizada uma série de multiplicações entre resultados de subtrações entre abscissas e entre ordenadas dos pontos A, B e C, além de uma divisão por 2. As etapas desse cálculo podem ser resumidas a um determinante de ordem 3, formado pelas coordenadas desses pontos, da seguinte forma:

Área (ABC) = metade do valor absoluto de

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{2 + 2 + 12 - (4 + 4 + 3)}{2} = \frac{5}{2} = 2,5$$

Figura 72 - Resolução aritmética e resolução pelo método de Sarrus
Fonte: SÃO PAULO, 2009, p.39

Nota-se neste caso que os autores propõem o método de Sarrus para a resolução da atividade. Primeiro, transcreveram as coordenadas dos vértices do polígono representado no plano cartesiano pelos pontos A(1,1), B(3,2) e C(2,4) para uma representação matricial, acrescentando na terceira coluna o valor unitário para encontrar o valor do determinante matriz, segundo os autores obedecendo a seguinte formatação.

$$\begin{pmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{pmatrix}$$

Esta proposta mostrou-se diferente da apresentada no livro didático. O objetivo é de mostrar o aluno que há diferentes representações matemática para se resolver um problema, que possibilite uma aprendizagem mais significativa a partir de uma atividade que provoque uma reflexão dos procedimentos utilizados.

Prosseguindo, os autores apresentam mais um problema semelhante ao anterior com a resolução e comentários. Retomam os nove exercícios apresentados no Caderno do Professor de 2008 e mais seis situações-problema.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo desta pesquisa foi investigar a abordagem dos conteúdos de sistemas de equações lineares nos Cadernos dos Professores de Matemática do Ensino Fundamental e Médio de 2008 e 2009 da rede pública do Estado de São Paulo.

Esta pesquisa qualitativa do tipo documental, originou-se da constatação apresentada no Relatório Pedagógico de Matemática do Sistema de Avaliação e Rendimento Escolar do Estado de São Paulo (2010), no qual os alunos do Ensino Médio apresentam um nível maior de dificuldades de aprendizagem que os alunos do Ensino Fundamental (SÃO PAULO, 2010, p.230). Optamos então por investigar um tópico que contemplasse tanto o Ensino Fundamental quanto o Ensino Médio. Este direcionamento nos levou a investigar como é feita a abordagem de sistemas de equações lineares nos Cadernos do Professor de Matemática de 2008 e 2009.

Este trabalho foi desenvolvido com o intuito de responder às seguintes questões:

- 1- Os Cadernos do Professor de Matemática de 2008 e 2009 da rede pública do Estado de São Paulo contemplam as recomendações dos documentos oficiais?
- 2- De que forma os livros didáticos abordam esse tema no Ensino Fundamental e Médio?
- 3- Há conexão entre os Cadernos do Professor de Matemática do Ensino Fundamental para o Ensino Médio?

Para respondermos a primeira questão fizemos um levantamento nos documentos oficiais para identificar o que estes recomendam para o ensino de sistemas de equações lineares, em especial, nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental (PCNEF) de 1998, nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM) de 1999, nos Parâmetros Curriculares Nacionais Mais do Ensino Médio (PCN+) de 2002, nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio (OCEM) de 2006 e na Proposta Curricular de São Paulo (PCESP) de 2008 descrito no capítulo III.

Enquanto os PCNEF (1998), PCNEM (1999) e PCN+ (2002) recomendam desenvolver os conteúdos matemáticos por meio de situações-problema, transcrever

o enunciado na língua materna para a linguagem simbólica (equações, tabela, gráfico, e outros), utilizar diferentes procedimentos para a resolução dos sistemas lineares, as PCESP (2008) fazem uma referência explícita quanto aos procedimentos e métodos a serem trabalhados no Ensino Fundamental e Médio.

Apesar de as OCEM (2006) recomendarem a extinção do uso da regra de Cramer observamos sua presença nos materiais analisados. No livro *Matemática: Ciência e aplicações* é proposto um estudo com reflexões a respeito de seu uso, enquanto que os Cadernos do Professor de Matemática propõem uma comparação com o método de escalonamento.

É importante destacar que nenhum documento recomenda a utilização da representação gráfica para os sistemas de equações lineares 3×3 , porém algumas pesquisas em Educação Matemática, como as de Battaglioli (2009) e Jordão (2010) indicaram que a representação gráfica dos sistemas lineares 3×3 , aliada a um ambiente computacional, pode contribuir para que os alunos do Ensino Médio compreendam a sua resolução.

Para respondermos a segunda questão investigamos duas Coleções de Matemática com o objetivo de fazermos comparações de sua abordagem referentes aos conteúdos de sistemas de equações lineares com a do Caderno do Professor de Matemática de 2008 e o de 2009. Foram selecionadas as Coleções: *Matemática e Realidade* de Iezzi et al (2009) do Ensino Fundamental e a *Matemática: Ciência e Aplicações* de Iezzi et al de (2010) do Ensino Médio.

Em nossa análise constatamos na Coleção *Matemática e Realidade* que os estudos de sistemas de equações são contemplados no 7º, 8º e 9º ano. Em todos esses volumes citados o tema inicia-se por meio de situações-problema contextualizados. Apresentam para a resolução os métodos de adição, comparação e substituição, sendo este último apresentado nos três volumes.

Identificamos oitenta exercícios distribuídos nestes volumes, sendo a maior parte no 8º ano, nos quais alguns possibilitam o aluno transcrevê-los em diferentes representações matemáticas, como da linguagem algébrica para a língua materna e um exercício que propõem, implicitamente, a classificação do sistema em função do parâmetro, assunto proposto na maior parte dos livros didáticos no Ensino Médio, e não encontramos nenhum exercício que contemplasse a transcrição da representação gráfica para a língua materna ou para a linguagem algébrica.

Comparando os materiais, os Cadernos do Professor de Matemática do Ensino Fundamental propõem uma abordagem do conteúdo de sistemas de equações semelhante ao livro didático, apresentam o tema de forma contextualizada, fazem uma ampla discussão referente à representação gráfica das equações dos sistemas, além de apresentarem para a resolução os métodos de adição e de substituição. A diferença ocorre na forma como o Caderno do Professor aborda os métodos de adição e substituição, utilizando a analogia de uma figura representada por uma balança de pratos, para apresentar os métodos. Não verificamos o método de comparação no Caderno do Professor de Matemática e não encontramos em outro Caderno do Professor do Ensino Fundamental a retomada do conteúdo.

Já no Ensino Médio, os autores do livro didático retomam todo o conteúdo estudado do Ensino Fundamental, para então, abordar o tema de sistemas de equações lineares 3×3 , também utilizam diferentes representações, assim como sugerem os documentos oficiais, e diferentes métodos para a resolução dos sistemas de equações lineares, bem como, a regra de Cramer, o escalonamento matricial e o escalonamento algébrico. Está presente também a regra de Sarrus como uma ferramenta para a resolução de sistemas lineares $m \times m$.

Constatamos também neste material, exercícios que motivam o aluno a representar, conjecturar, classificar, formular a partir de determinadas informações e uma ampla discussão a respeito de valores a serem determinados para classificação dos sistemas de equações lineares em função do parâmetro introduzido na equação.

Em comparação com os livros didáticos, os Cadernos do Professor de Matemática de 2009 do Ensino Médio apresentam uma quantidade menor de exercícios, porém de forma semelhante à abordagem dos conteúdos de sistemas de equações lineares 3×3 . A diferença ocorre na retomada do tema, enquanto os livros apresentam todo o conteúdo do Ensino Fundamental, os Cadernos do Professor de Matemática apresentam o tema no Ensino Médio de forma contextualizada, apresentando situações-problema que traduzem o enunciado na língua materna para sistemas lineares 2×3 , 3×3 e 3×4 .

Por fim, respondendo a última questão, observamos que há uma conexão do conteúdo do Ensino Fundamental para o Médio em relação ao método de adição em sistemas 2×2 no Ensino Fundamental e 3×3 e 3×4 no Ensino Médio, porém abordam esse método com pouca profundidade. Não retomam o método de substituição para

a resolução dos de sistemas lineares e não retomam a representação gráfica dos sistemas lineares 2×2 .

Em relação aos Cadernos do Professor de Matemática de 2009, observamos uma mudança significativa no material destinado ao Ensino Médio, com inclusões de atividades, correções de alguns erros, e principalmente, todas as atividades referentes ao estudo de sistemas de equações lineares estão acompanhadas de comentários.

Concluimos que os Cadernos do Professor de Matemática contemplam parcialmente as recomendações dos documentos oficiais. Utilizam diferentes representações matemáticas para a compreensão do conteúdo estudado. Propõem exercícios que permitem diferentes procedimentos de resolução e a transcrição da língua materna para a linguagem simbólica (tabelas, algébrica, gráfica e numérica), porém não propõem atividades que permitem a transcrição da linguagem simbólica para a língua materna.

O tema no Ensino Fundamental é abordado semelhante aos livros didáticos. A maior diferença foi detectada nos materiais destinados ao Ensino Médio. Enquanto nos livros didáticos a abordagem dos conteúdos esta acompanhada de exercícios, os autores dos Cadernos do Professor de Matemática se preocupam com a contextualização do conteúdo estudado com relação a realidade do aluno, por outro lado os conteúdos são abordados com pouca profundidade no Caderno do Professor, um exemplo disso é a falta de uma discussão mais abrangente da classificação dos sistemas lineares em função de um parâmetro.

Acreditamos ter respondido às questões formuladas no início desta pesquisa, e por ser um material formulado recentemente deixamos uma sugestão para trabalhos posteriores, como por exemplo, pesquisar o tema sistemas lineares tal como está proposto nos Cadernos do Professor do Ensino Fundamental e do Médio com alunos desses respectivos níveis de ensino. Consideramos que investigações com este material distribuído a toda rede pública de ensino precisam ser feitas.

Após a conclusão do mestrado profissional em Ensino de Matemática percebemos uma melhora significativa em nossa prática docente. Pudemos perceber algumas dificuldades apresentadas pelos alunos que antes não conseguimos identificar, discussões em sala de aula ao invés de muitos exercícios incentivam nossos alunos a uma reflexão do tema estudado.

A utilização de outros recursos pedagógicos podem contribuir de uma forma positiva quando apresentamos e aprimoramos novas propostas para os estudantes.

Esperamos que essas reflexões contribuam para uma melhora do ensino da Matemática e que possam contribuir para o nosso Grupo de Pesquisa em Educação Algébrica (GPEA) para futuras pesquisas.

REFERÊNCIAS

- BATTAGLIOLI, C. S. M. **Sistemas lineares na segunda série do ensino médio: um olhar sobre nos livros didáticos**. Dissertação de Mestrado. PUC-SP, 2009.
- BIANCHINI, B. L. AUMOULOU, S. A. **O erro ligado ao ensino aprendizagem de sistemas lineares** in Anais do IV EPEM – p.216-223. São Paulo: SBEM, 1996.
- BISOGNIN, E. CURY, H. N. **Análise de soluções de um problema representado por um sistema de equações**. BOLEMA, RIO CLARO, n.33, pag.1-22, 2009.
- BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**, v. 3. Brasília: MEC/SEF, 1998.
- _____. Secretaria da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais Para o Ensino Médio – Matemática**. Brasília: MEC, 1999.
- _____. Secretaria da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio**, v.2. Brasília: MEC/SEB, 2006.
- _____. Ministério da Educação. **Guia de livros didáticos: PNLD 2011: Matemática**. – Brasília : Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2010.
- _____. Ministério da Educação. **Guia de livros didáticos: PNLD 2012: Matemática**. – Brasília : Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2011.
- BOGDAN, R. C. BLIKEN, S. K. **investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos**. Tradução de Maria J. Alves, Sara B. dos Santos e Telmo M. Baptista. Portugal: Porto Editora, 1994. p.336. (Coleção Ciências da Educação, 12)
- COSTA, M. C. **Possibilidade de articulação dos ostensivos e não ostensivos da noção de sistemas de equações de duas variáveis e duas incógnitas**. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. UNIBAN/SP, 2008.
- GRECCO, M. C. S. **O uso de padrões e sequências: uma proposta de abordagem para a introdução à álgebra para alunos de sétimo ano do Ensino Fundamental**. Dissertação de Mestrado. PUC-SP, 2008.
- HENRIQUE, A. ATTIE, J. P. FARIAS, L. M. S. **A noção de registros de representação semiótica**. In: Educação Matemática Pesquisa. v.9, n.1, ed. São Paulo: EDUC, p.67-81, 2007.
- IEZZI, G. DOLCE, M. MACHADO, A. **A Matemática e Realidade**. 7º ano. 6ª edição, São Paulo: Atual, 2009.

_____. **A Matemática e Realidade**. 8º ano. 6ª edição, São Paulo: Atual, 2009.

_____. **A Matemática e Realidade**. 9º ano. 6ª edição, São Paulo: Atual, 2009.

IEZZI, G. *et al.* **Matemática – Ciências e Aplicações**. 2ª série. 6ª edição. São Paulo: Editora Saraiva, 2010.

JORDÃO, A. L. I. **Um estudo sobre a resolução algébrica e gráfica sobre sistemas lineares 3x3 no 2º do Ensino Médio**. Dissertação de Mestrado. PUC-SP, 2010.

LOJOLO, M. **Livro Didático um (quase) manual do usuário**. Em Aberto. Brasília. v.6, n.69, p.3-9, jan/mar., 1996.

MANUAL DO PROFESSOR. In: IEZZI, G. DOLCE, M. MACHADO, A. **A Matemática e Realidade**. 6ª edição, São Paulo: Atual, 2009.

PANTOJA, L. F.L. **A conversão de Registro da Representação Semiótica no Estudo de Sistemas de Equações Algébricas Lineares**. Dissertação de Mestrado em Educação em Ciências e Matemática. NPADC-UFPA/Belém, 2008.

RAMOS, F.C. **O livro e os recursos didáticos no ensino da Matemática**. Vydia. Santa Maria. v.24, n.42, p.145-162, jul/dez., 2004.

REIS, E. S. **O estudo de sistemas de equações do primeiro grau em livros didáticos utilizados em escolas brasileiras**. Dissertação de Mestrado. UFMS-Campo Grande. 2010.

SÃO PAULO. Secretaria da Educação. **Proposta curricular do Estado de São Paulo: Matemática (Ensino Fundamental- Ciclo II e Médio)**. São Paulo, SEE, 2008a.

_____. Secretaria da Educação. **Caderno do Professor – Matemática da 7ª série do Ensino Fundamental**. 3º bimestre de 2008. São Paulo, SEE, 2008b.

_____. Secretaria da Educação. **Caderno do Professor – Matemática da 2ª série do Ensino Médio**. 2º bimestre de 2008. São Paulo, SEE, 2008c.

_____. Secretaria da Educação. **Proposta curricular do Estado de São Paulo: Matemática (Ensino Fundamental- Ciclo II e Médio)**. São Paulo, SEE, 2009a.

_____. Secretaria da Educação. **Caderno do Professor – Matemática da 7ª série do Ensino Fundamental**. 3º bimestre de 2009. São Paulo, SEE, 2009b.

_____. Secretaria da Educação. **Caderno do Professor – Matemática da 2ª série do Ensino Fundamental**. 2º bimestre de 2009. São Paulo, SEE, 2009c.

_____. Secretaria da Educação. **Relatório Pedagógico SARESP 2009 - Matemática**. Coordenação Geral, Maria Inês Fini – São Paulo: SEE, 2010.

VALENZUELA, S. T. F. **O uso de dispositivos didáticos para o estudo de técnicas relativas à de sistemas de equações lineares no ensino fundamental.** Dissertação de Mestrado. UFMS-Campo Grande, 2007.

Site visitado:

Metas da Educação SP. Disponível em:

<http://www.saopaulo.sp.gov.br/acoes/educacao/metas/#>.

(acesso em 15.01.2011)