

**PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC/SP**

Gilberto Pereira Paulo

**Uma Proposta para o Ensino e Aprendizagem dos
Conceitos de Área de Círculo de Perímetro de
Circunferência**

MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

SÃO PAULO

2012

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC/SP

Gilberto Pereira Paulo

**Uma Proposta para o Ensino e Aprendizagem dos
Conceitos de Área de Círculo e Perímetro de
Circunferência**

*Dissertação apresentada à Banca Examinadora da
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como
exigência parcial para obtenção do título de **MESTRE
PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA**,
sob a orientação do **Professor Doutor Saddo Ag
Almouloud**.*

SÃO PAULO

2012

Banca Examinadora

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Tese por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura _____ Local e Data _____

*Dedico este trabalho a minha mãe
Josefina Pereira Paulo,
por sempre ter me incentivado aos
estudos e a conquista de novos horizontes.*

AGRADECIMENTOS

A minha esposa, Ângela Maria de Moraes e filhos Rodrigo de Moraes Paulo, Bruno de Moraes Paulo e Julia de Moraes Paulo, por compreender as longas horas de ausência do convívio familiar.

Aos meus irmãos e irmãs, principalmente ao Professor Mestre João Pereira Paulo por ser um modelo de pessoa a ser seguido.

Aos meus amigos André Ricardo Cardoso da Silva pela acolhida em sua residência e companheirismo na produção deste texto. Maurício Pereira e Reni Gomes da Silva por serem desbravadores do mundo acadêmico em meu convívio social, e principalmente a professora mestra Erika de Cássia Capella pela colaboração incomensurável nesta pesquisa e por ter me motivado do início ao final.

Aos colegas de curso, Antonia, Edson, Valdirene Rosa, e em especial Sandra Regina pelas horas de trabalho em conjunto e colaboração no entendimento das dificuldades.

A professora coordenadora pedagógica da Unidade Escola onde foi realizada a pesquisa, Elisa Novais.

Aos professores do Programa de Estudo Pós-Graduados em Educação Matemática Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Dra. Cileda de Queiroz e Silva Coutinho, Dra. Barbara Lutaif Bianchini, Dra. Maria Jose Ferreira, Dr. Fumikazu Saito, Dr. Gerson Pastre de Oliveira, Dr. Armando Traldi Junior, Dra. Ana Lucia Manrique, com os quais cursei as disciplinas do programa.

A Dra. Renata Rossini e Dr. Andre Ricardo Magalhães, pelas contribuições e comentários sobre o projeto deste trabalho durante o exame de qualificação.

Ao professor doutor Saddo Ag Almouloud, pelo trabalho de orientação, desenvolvido com muita competência, dedicação e paciência.

O autor

RESUMO

Esta pesquisa teve como objetivo estudar os processos de ensino e aprendizagem dos conceitos de área de círculo e perímetro de circunferência no Ensino Fundamental II. Para desenvolver a investigação, buscou-se responder à seguinte questão: uma sequência didática, com atividades que permitam ao aluno à comparação de área do círculo e perímetro da circunferência com a área e perímetro de outras figuras, minimizaria as dificuldades na compreensão e diferenciação desses dois objetos matemáticos? O pesquisador apoiou-se na teoria das situações didáticas, na dialética ferramenta-objeto e nos registros de representação semiótica, assim como nos princípios da Engenharia Didática. O público-alvo do estudo compôs-se de alunos de 9º ano do Ensino Fundamental. Seus resultados indicaram um avanço na compreensão do significado de área como grandeza e na diferenciação entre circunferência e círculo, assim como entre área e perímetro.

Palavras-chave: Aprendizagem, área, círculo, circunferência, ensino, perímetro.

ABSTRACT

This research had the purpose of studying the teaching and learning processes of concepts of circumference perimeter and circle areas on Junior High School. To develop the investigations, we sought to answer the following question: a didactic sequence with activities enabling the student to compare circumference perimeter and circle areas with perimeter area of other figures would minimize difficulties in the comprehension and differentiation of these two mathematical objects? Researches grounded in the didactic situation theory, in the dialectic of tool-object and semiotic presentation records, as well as principles of didactic Engineering. Target-public of the study is composed by students on 9th year of Junior High School. Its results indicated an advance in the comprehension of the meaning of area as greatness and differentiation between circumference and circle, as well as between area and perimeter.

Keywords: Area, perimeter, circumference, circle, teaching, learning.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	14
Apresentação do problema	14
Justificativa	16
Questão de pesquisa	18
Objetivo da pesquisa	18
Estrutura da pesquisa	18
CAPÍTULO I	22
FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	22
Teoria das Situações Didáticas	22
Registro de Representação Semiótica	26
A Dialética Ferramenta-Objeto	29
CAPÍTULO II	32
REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	32
CAPÍTULO III	38
ESTUDO DO OBJETO MATEMÁTICO	38
Circunferência	39
Círculo	44
CAPÍTULO IV	48
BREVE ESTUDO HISTÓRICO E ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS	48
Análise histórica da noção de áreas de figuras planas	48
Breve estudo histórico da noção do número π	54
Análise de livros didáticos	57
Análise dos PCNs	72

CAPÍTULO V	76
METODOLOGIA E PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS	76
Metodologia	76
Procedimentos Metodológicos	78
CAPÍTULO VI	82
ANÁLISE A PRIORI E A POSTERIORI	82
Apresentação da sequência com análise a priori	82
Descrição da experimentação e análise a posteriori das atividades propostas	84
Reflexões e perspectivas	126
REFERÊNCIAS	130
ANEXOS	134
Anexo I - Comunicado da coordenação aos professores da unidade escolar	134
Anexo II - Produto para aplicação	135

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Polígonos circunscritos	16
Figura 2 - Diferenciação entre registro e códigos	26
Figura 3 - Representações de circunferência	28
Figura 4 - Etapas de organização da dialética ferramenta-objeto	30
Figura 5 - Hexágonos regulares, inscrito e circunscrito	42
Figura 6 - Ilustração de Apótema	46
Figura 7 - Vaso de cerâmica decorada com motivos geométricos de Dimini, ano 4300-3300 a.C	49
Figura 8 - Mapa com a localização dos rios Nilo no Egito, e Eufrates na Mesopotâmia	50
Figura 9 - Papiro de Rhind – Museu Britânico	51
Figura 10 - Plimpton322	52
Figura 11 - Esticadores de cordas, túmulo de Menna (século XIV a.C.)	53
Figura 12 - Perímetro como contorno	61
Figura 13 - Área como grandeza	61
Figura 14 - Aproximações para o valor de π	62
Figura 15 - Perímetro de polígono regular inscrito e circunscrito	63
Figura 16 - Definição de Círculo	64
Figura 17 - Aumento do número de lados de polígonos	64
Figura 18 - Área do Círculo	65
Figura 19 - Matemática em Notícia	69
Figura 20 - Para Ler, Pensar e Divertir-se	71
Figura 21 - Protocolos dos alunos referentes ao item 1 da atividade 1	89
Figura 22 - Protocolos dos alunos referentes ao item 4 da atividade 1	90
Figura 23 - Protocolos dos alunos referentes ao item 1 da atividade 2	93
Figura 24 - Protocolos dos alunos referentes ao item 3 da atividade 2	94
Figura 25 - Protocolos dos alunos referentes ao item 1 da atividade 3	97
Figura 26 - Protocolos dos alunos referentes ao item 3 da atividade 3	98
Figura 27 - Protocolos dos alunos referentes ao item 4 da atividade 3	98

Figura 28 - Protocolos dos alunos referentes ao item 6 da atividade 3	100
Figura 29 - Protocolos dos alunos referentes ao item 4 da atividade 4	104
Figura 30 - Protocolos dos alunos referentes ao item 5 da atividade 5	108
Figura 31 - Protocolos dos alunos referentes ao item 6 da atividade 5	108
Figura 32 - Protocolos dos alunos referentes ao item 2 da atividade 6	116
Figura 33 - Protocolos dos alunos referentes ao item 7 da atividade 6	116
Figura 34 - Protocolos dos alunos referentes ao item 8 da atividade 6	117
Figura 35 - Protocolos dos alunos referentes ao item 1 da atividade 7	121
Figura 36 - Protocolos dos alunos referentes a interpretação da proposição de Arquimedes	122
Figura 37 - Protocolos dos alunos referentes ao item 2 da atividade 7	122
Figura 38 - Protocolos dos alunos referentes ao item 5 da atividade 7	123
Figura 39 - Protocolos dos alunos referentes ao item 6 da atividade 7	124
Figura 40 - Protocolos dos alunos referentes ao item 9 da atividade 7	124
Figura 41 - Protocolos dos alunos referentes ao item 11 da atividade 7	125

LISTA DE QUADROS

Quadro I - Comparativo de características do objeto	59
Quadro II - Comparativo das coleções em relação ao uso das teorias	65
Quadro III - Características e Objetivos de uma Situação-Problema	67

INTRODUÇÃO

Para iniciar esta pesquisa descrevemos a apresentação do problema que passa primeiramente pela origem do pensamento que nos motivou a realizá-la. Quando começamos a frequentar o grupo de estudo de investigações denominado Processo de Ensino e Aprendizagem em Matemática – PEAMAT – deparamo-nos com uma observação de Saddo Ag Almouloud, quando declara o baixo nível de aproveitamento dos alunos de Matemática, em específico, no conteúdo de geometria. Isso nos motivou a iniciar o estudo, pois pudemos perceber que esta mesma constatação está mencionada nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de Matemática. Ainda nesta introdução apresentamos as justificativas pessoais e o objetivo da pesquisa.

Apresentação do problema

A iniciativa para a realização desta pesquisa baseou-se no pressuposto que os alunos, geralmente, apresentam desempenho fraco ou insatisfatório na resolução de problemas que envolvem as áreas do círculo e do comprimento da circunferência (perímetro). Fato esse já mencionado por Almouloud e Mello em seu artigo: Iniciação à Demonstração Apreendendo Conceitos Geométricos.

Um dos problemas enfrentados pelo sistema de ensino brasileiro refere-se ao baixo desempenho dos alunos do Ensino Fundamental, em Matemática. As recentes avaliações feitas pelo SAEB/MEC pela Secretaria de Educação de São Paulo evidenciam que esse desempenho torna-se ainda mais baixo quando o tema abordado é a Geometria (ALMOULOU; MELLO, 2000, p. 1).

A introdução desse conceito nas séries iniciais do Ciclo II do Ensino Fundamental está prevista; no entanto, percebemos que esse saber chega fragmentado, incompleto e até mesmo equivocado nas séries finais.

Observamos também que os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (1998) enfatizam a importância da geometria no quarto ciclo (7^a e 8^a séries), como também a construção de situações-problema que favoreçam o raciocínio dedutivo e a introdução da demonstração, apresentando verificações empíricas:

Os problemas de geometria vão fazer com que o aluno tenha seus primeiros contatos com a necessidade e as exigências estabelecidas por um raciocínio dedutivo. Isso não significa fazer um estudo absolutamente formal e axiomático da geometria (PCN, 1998, p. 86).

Por estarem previstos nos PCNs, os currículos de Matemática elaborados pelas secretarias estaduais também abordam esses conceitos. A Proposta Curricular de São Paulo (2008) traz no volume 4 da 8^a série do Ensino Fundamental, em 2009, as orientações de trabalho de cálculos métricos, envolvendo o círculo e o cilindro com as medidas do perímetro, da área e do volume de figuras circulares que estão diretamente ligadas ao número π (ρ).

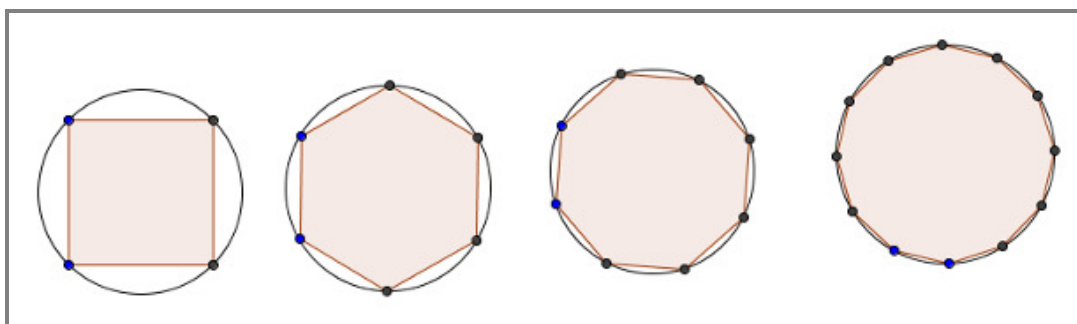
Pensamos que a geometria tem sido negligenciada e até esquecida no ensino da Matemática, talvez porque os professores tiveram elementos insuficientes em sua formação e, por sua vez, fazem abordagens superficiais sobre a referida temática. Almouloud e Mello (2000, p. 1) apontam essa negligência quando afirmam que “na prática, vem sendo dada à geometria menos atenção do que ao trabalho com outros temas e, muitas vezes, confunde o seu ensino com o de medidas”.

A história da Matemática também nos revela o quão importante é o ensino de medidas de áreas de figuras planas para a resolução de problemas, envolvendo terrenos ou problemas criados para o desenvolvimento do ensino do conceito de área de figuras planas.

O estudo de áreas do círculo por aproximação foi vastamente usado para solucionar problemas de áreas de terrenos circulares e/ou setores que são proporcionais à circunferência.

O cálculo de área de círculo também pode ser feito por aproximação, utilizando-se as áreas de polígonos regulares circunscritos, ou seja, com os vértices coincidentes na circunferência.

Figura 1 – Polígonos circunscritos



Os conceitos de perímetros e áreas são muito utilizados na construção civil, acabamentos e na indústria mecânica, sendo importantes para qualquer cidadão. Já na vida escolar, são inúmeras as situações de uso, como são vistos nos exames de avaliações externas, trabalhos acadêmicos e desenvolvimento das disciplinas dos cursos de Engenharia, Matemática, Física e outros.

Justificativa

Este estudo vem ao encontro das inquietações profissionais geradas pelas dificuldades encontradas no ensino de geometria da Educação Básica nas escolas públicas onde trabalhamos e, posteriormente, em conversas informais com os professores de Matemática, percebemos que existe uma problemática mais profunda do que pressupúnhamos.

Pesquisando o assunto, verificamos que outros profissionais da área da educação também têm essas preocupações e que já existem trabalhos acadêmicos abordando o assunto, servindo como um fomento para prosseguir,

acreditando ser possível uma melhora do ensino e aprendizagem com novas técnicas e sequências pedagógicas.

Nunes refere a Ausubel,

A aprendizagem significativa preconiza que as ideias novas sejam relacionadas às informações previamente adquiridas pelos discentes através de uma relação não arbitrária e substantiva. Uma relação não arbitrária e substantiva significa que as novas informações serão relacionadas a conceitos relevantes existentes na estrutura cognitiva do aluno, denominados *conceitos subsunçores*, de forma que este consiga com interpretação própria conceituar o objeto em estudo (NUNES, 2007, p. 28).

Concordamos com Nunes por entendermos que os novos conhecimentos derivados de uma aprendizagem significativa são construídos com base nos conhecimentos prévios dos alunos, ou seja, esses conhecimentos serão usados como ferramenta para aquisição de um novo conhecimento. Em nossa pesquisa, pensamos que, para o aluno conceituar área de círculo e perímetro de circunferência, seja necessário que ele tenha claro o conceito de área como grandeza e que saiba diferenciar área e perímetro, como ressalta Facco:

Para definir uma aplicação entre, uma superfície plana e número, é necessário antes de construir a área como uma grandeza autônoma, deixar claro para o aluno as diferenças existentes entre área e perímetro (FACCO, 2003, p. 28).

A autora citada (2003. p. 31) ainda comenta que “os professores de Matemática, apoiados nos livros didáticos introduzem o conceito de área como um número associado a uma superfície e passam rapidamente ao cálculo da área, utilizando fórmulas”.

Concordamos com autora que os professores estão, geralmente, apoiados nos livros didáticos para preparação de suas aulas, e que quase sempre usam fórmulas que têm pouco significado aos alunos.

Sendo assim, pensamos ser relevante este estudo que tem como produto final uma sequência didática, cujos resultados permitirão responder a questão de pesquisa.

Questão de pesquisa

Nossa preocupação foi buscar respostas à seguinte questão: Uma sequência didática, com atividades que permitam aos alunos a comparação de área do círculo e perímetro da circunferência com a área e perímetro de outras figuras, minimizaria as dificuldades na compreensão e diferenciação desses dois objetos matemáticos?

Objetivo da pesquisa

Esta pesquisa tem como objetivo geral auxiliar os processos de ensino e aprendizagem da noção de área de círculo e comprimento da circunferência, no que diz respeito aos alunos do Ensino Fundamental ciclo II. Visamos a desenvolver atividades que permitam ao aluno construir o raciocínio que o conduza à descoberta das expressões para o cálculo da medida da área do círculo e do comprimento da circunferência, diferenciando-os e construindo também seus significados.

Apoiados nas análises, histórica da noção de áreas de figuras planas, do objeto matemático (área de círculo e perímetro de circunferência) e na forma como estão apresentados os objetos matemáticos em livros didáticos, bem como as orientações apresentadas nos PCN, produzimos e validamos empiricamente uma sequência didática para o ensino da área do círculo e comprimento da circunferência. Esta sequência tem por objetivo contribuir para a compreensão do aluno em relação a esse conteúdo.

Estrutura da pesquisa

Este trabalho está organizado em seis capítulos.

No capítulo I – Fundamentação Teórica – serão abordadas as ideias das teorias que foram usadas como norteadoras de nosso trabalho, como já foi

mencionado nesta introdução. O referencial teórico escolhido será composto de três teorias:

A Teoria das Situações Didáticas idealizada pelo pesquisador Guy Brousseau (2008), tem como objetivo promover mudanças no conhecimento dos participantes em relação a um objeto matemático, proporcionando um melhor entendimento sobre o assunto. Na sequência proposta nesta pesquisa, o aluno será conduzido a fazer conjecturas com base nas análises feitas. As situações deverão ser motivadoras para novas descobertas e, ao final, o aluno deverá alcançar o objetivo usando o conhecimento recém-adquirido.

Outra teoria, que usaremos, é a Teoria de Registros de Representação Semiótica do pesquisador Raymond Duval (2003). Conforme o autor existem alguns tipos de representações para o mesmo objeto matemático, tais como: registro na língua natural, algébrico, figural ou gráfico; ao fazer com que o aluno transite entre as formas de registro de representação, possibilitará que possa conceituar melhor o objeto matemático. As conversões de registros de representação auxiliam na diferenciação entre o objeto e suas diferentes representações.

Ainda utilizaremos a Dialética Ferramenta-Objeto e o Jogo de Quadros de Régine Douady (1986 *apud* ALMOULOU, 2007) que diferenciam o estatuto de um conceito estudado de um determinado conteúdo, que ora será o objeto de estudo por ser o foco da aprendizagem, ora será ferramenta de resolução em outra situação, quando esse mesmo objeto já foi conceituado e fará parte dos conhecimentos que o aluno poderá utilizar.

No capítulo II – Revisão bibliográfica – explicitaremos as pesquisas de Facco (2003) e Chiummo (1998) que são importantes para o desenvolvimento de nossa pesquisa, por terem similaridades em relação ao quadro teórico e à metodologia, além de que essas pesquisas tratam de áreas de figuras planas, que é parte de nosso objeto matemático, pois abordamos a área de círculo.

No capítulo III, faremos um breve estudo histórico e uma análise dos documentos oficiais e do objeto matemático, em busca da origem do conceito de área de figuras planas e o número π , a fim de subsidiar nossa sequência didática,

além de nos situarmos de como têm sido entendidas e tratadas nas escolas de Ensino Fundamental a área do círculo e perímetro de circunferência.

No capítulo IV – Metodologia e Procedimentos Metodológicos – relatamos como foi realizada nossa pesquisa com explicação dos procedimentos adotados, da ordem de realização, do público-alvo escolhido, além da metodologia escolhida.

A metodologia utilizada é a Engenharia Didática, de acordo com Michèle Artigue (1988 *apud* ALMOULOU, 2007) que tem como principal característica um esquema experimental com realizações didáticas em sala de aula, que visam a facilitar a compreensão de um objeto matemático pelos alunos e o estudo dos fatores relacionados aos processos de ensino e aprendizagem do objeto matemática em jogo. Esta metodologia é composta por fases, como por exemplo: análises prévias do objeto matemático, construção das situações de aprendizagem, análise a priori, aplicação das atividades, análise a posteriori e das observações feitas pelo professor que acompanha o processo, chegando à validação, ou seja, concluir se a sequência proposta atende às necessidades de aprendizagem do objeto estudado e se respondem às questões de pesquisa levantadas. Estas fases serão discutidas no Capítulo VI.

No capítulo V – Análise a Priori e a Posteriori – a primeira é uma análise prévia feita antes da experimentação e tem por objetivo levantar hipóteses sobre a resolução das situações propostas. Em seguida, será comparada com a análise a *posteriori* para validarmos nossas hipóteses de pesquisa e se as atividades necessitam de adequações para alcançar o objetivo, que é a construção do conhecimento a respeito do objeto matemático, considerando os registros dos alunos e professor-observador.

Nas Reflexões e Perspectivas, apresentamos os resultados obtidos, as conclusões sobre a questão da pesquisa e sugestões para desenvolvimento de novos estudos.

CAPÍTULO I

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo, faremos um breve resumo das teorias que serão utilizadas na pesquisa.

Teoria das Situações Didáticas (Guy Brousseau 2008)

A Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau é a primeira a ser citada e também constitui nosso principal quadro teórico. Começamos por uma definição daquilo que Brousseau chamou de Situação: “Uma situação é um modelo de interação de um sujeito com um determinado *milieu*¹ (Brousseau, 2008, p. 21)”, e essa situação está relacionada a uma situação didática que busca relacionar o saber; o professor e o aluno com o *milieu*. A apresentação de uma situação didática tem como objetivo promover mudanças no conhecimento dos participantes em relação a um objeto matemático, proporcionando um melhor entendimento sobre o assunto.

Dentro do conjunto de situações didáticas, existe um subconjunto denominado situações adidáticas. Uma situação adidática é aquela na qual “a

¹ O termo *milieu* será usado para se referir ao termo meio, por sua tradução não atender a ideia que a palavra precisa ter neste contexto. Esse meio é composto por tudo que o aluno pode lançar mão como ferramenta de resolução para uma situação problema: tecnologias de informação, livros didáticos, conceitos prévios, saberes prévios, seus ou de outros participantes do processo que também fazem parte deste meio, como os alunos e o professor (ALMOULOU, 2007).

intenção de ensinar não é revelada ao aprendiz, mas foi imaginada, planejada e construída pelo professor para proporcionar a este, condições favoráveis para a apropriação do novo saber que se deseja ensinar” (ALMOULOU, 2007, p. 33). Essas situações devem conduzir o aluno ao pensamento matemático desejado pelo professor.

Em uma situação adidática, em que o aluno depara-se com um problema, é possível identificar algumas características do papel do *milieu*, como por exemplo, o desequilíbrio e a ruptura com o saber antigo, pois é preciso fazer uma desconstrução daquilo que já era sabido, para assim gerar um novo conhecimento.

Por estar em uma situação diferente, o aluno tenta adaptar-se ao *milieu* e toma para si o problema, divide as responsabilidades e aumenta sua motivação e participação no processo de aprendizagem.

Para Brousseau (*apud* ALMOULOU, 2007, p. 33), uma situação adidática tem as seguintes características:

- O problema matemático é escolhido de modo que possa fazer o aluno agir, falar, refletir e evoluir por iniciativa própria;
- O problema é escolhido para que o aluno adquira novos conhecimentos que sejam inteiramente justificados pela lógica interna da situação e que possam ser construídos sem apelo as razões didáticas (o aluno aprende por uma necessidade própria e não por uma necessidade aparente do professor ou da escola);
- O professor, assumindo o papel de mediador, cria condições para ser o principal ator da construção de seus conhecimentos a partir das atividades propostas.

Para desenvolver uma fase adidática, existiria conforme Brousseau, um conjunto restrito de situações que pode ser considerado fundamental, porque essas situações são mais adequadas ou indicadas para a compreensão do objeto novo em construção, envolvido na situação proposta.

Na Teoria das Situações Didáticas, podemos observar quatro principais dialéticas que são: Ação, Formulação, Validação e Institucionalização que explicaremos.

Na fase da Ação, uma situação-problema é apresentada ao aluno e requer que ele tente resolver com os conhecimentos prévios, mas a melhor solução é o conhecimento que o professor tem por objetivo ensinar. Nesta fase, o apropriado é que o professor faça o mínimo de intervenções, ou seja, o aluno deve ter o controle sobre suas ações e ao perceber que sua ação não obteve êxito, ele pode melhorar ou abandonar sua ação em busca de soluções mais eficientes, assim provocando uma adaptação ao *milieu*.

Em nossa pesquisa essa fase está prevista em todas as atividades que compõem nossa sequência, como por exemplo, nas atividades 1 e 2 (Ver Capítulo VI), nas quais é solicitado ao aluno medir o perímetro de uma figura dada de várias formas.

Passada a fase da Ação, chegamos à segunda a de Formulação, que para Almouloud (2007), é aquela em que “o aluno troca informações com uma ou várias pessoas, que serão os emissores e receptores, trocando mensagens escritas ou orais. Estas mensagens podem estar redigidas em língua natural ou matemática, segundo cada emissor” (ALMOULOU, 2007, p. 38). Em outras palavras, por perceber que suas ações geraram sucesso ou insucesso, o aluno é levado a expor suas conjecturas e compará-las com as dos demais alunos, ouvindo, expondo, argumentando, refutando argumentações e, por fim, convencendo ou sendo convencido.

Os alunos devem chegar a um consenso que esteja baseado em verdades, nesse momento, se for necessário, deve haver a intervenção do professor, para que as conclusões erradas não gerem concepções também errôneas.

Na fase de formulação, o aluno cria condições de se expressar com os registros de língua materna, algébrica ou figural de forma que seja compreensiva e coerente sobre o objeto matemático em estudo.

Na sequência proposta nesta pesquisa, o aluno é conduzido a fazer conjecturas com base nas análises feitas sobre a resolução das atividades. Como por exemplo, quando as atividades requerem que o aluno elabore uma maneira de pensar e exponha suas ideias e conclusões. Isso pode ser identificado, por

exemplo, na atividade 3.3 “Duas figuras podem ter a mesma área e perímetros diferentes? Discuta com as outras duplas”.

Na próxima fase, chamada de Validação que, para Almouloud (2007, p. 39) “é a etapa na qual o aprendiz deve mostrar a validade do modelo por ele criado, submetendo a mensagem matemática (modelo da situação) ao julgamento de um interlocutor”. Ou seja, após as conclusões tiradas do debate com os participantes do *milieu*, o aluno submete suas conjecturas nas atividades propostas, para que sejam validadas. Isso pode ser percebido, por exemplo, na atividade 4.3 “As fórmulas elaboradas funcionaram? Elas funcionariam para qualquer retângulo ou triângulo? Como você justifica?” Além de verificar a validação para uma atividade pontual, o aluno é levado a um pensamento de generalização na qual o resultado elaborado pode ser utilizado em outras atividades.

A última fase é conhecida com Institucionalização, que Almouloud (2007, p. 40) define como “aquela em que o professor fixa convencionalmente e explicitamente o estatuto cognitivo do saber. Uma vez construído e validado o novo conhecimento vai fazer parte do patrimônio matemático da classe, embora não tenha ainda o estatuto de saber social”. Em outras palavras, quando o aluno passa pelo processo de ação, formulação e validação, então, o professor deve fazer um fechamento baseado nas conclusões feitas pelos alunos, aliado a uma teoria matemática que pode ser subtraído inclusive dos livros didáticos, ou seja, o professor poderá comparar as conclusões dos alunos com as definições que estão expostas nos livros didáticos.

Quando o aluno percebe que suas conclusões estão muito próximas das definições adotadas pela comunidade científica, então, o saber recém-construído passa a ter mais significado e ganha o *status* de um saber científico, incorporando esse saber em seus esquemas mentais, poderá utilizá-lo na resolução de novos problemas matemáticos (ALMOULOU, 2007).

Ao final de nossa sequência, quando o aluno alcançar o objetivo que é compreender e diferenciar o comprimento da circunferência e a área de círculo, o professor poderá definir e caracterizar o objeto matemático estudado e submeter os alunos às novas atividades que exigem o uso dos conhecimentos/saberes recém-adquiridos.

Registro de Representação Semiótica

Para retratarmos os fundamentos teóricos dos registros de representação semiótica de Duval (2003), usaremos as análises expressas no artigo de Damm (1999) e no capítulo do livro de Almouloud (2007) que discorrem sobre a Teoria de Registros de Representação Semiótica.

Para Duval, (*apud* ALMOULOU, 2007, p. 71), um “Registro de Representação é um sistema semiótico que tem as funções cognitivas fundamentais no funcionamento cognitivo consciente”.

Duval, (*apud* ALMOULOU, 2007) aponta a necessidade da diferenciação entre registros e códigos, já que o código é mais limitado, e essas diferenças ficam evidenciadas no esquema proposto por ele, como também a existência de dois níveis de fundamento cognitivo: o consciente e o não consciente.

Figura 2 - Diferenciação entre registro e códigos



Fonte: Fonte: ALMOULOU, 2007, p. 72.

Os registros são considerados como fundamentais para essa teoria e conforme Damm (1999) existem vários tipos de registros de representação para o mesmo objeto, e ao transitar de um registro para outro, os alunos podem fazer outros tipos de tratamento. É importante que o aluno saiba transitar naturalmente por diferentes registros de representação para não mais confundi-los com os objetos. Para Almouloud (2007), uma conversão de registro tem vantagens do

ponto de vista do tratamento podendo facilitar a compreensão ou a descoberta. Ainda conforme o autor,

Um tratamento é a transformação de uma representação em uma outra do mesmo registro, isto é, uma transformação estritamente interna a um registro. Existem tratamentos que são específicos a cada registro e que não precisam de nenhuma contribuição externa para serem feitos ou justificados.

Uma conversão é uma transformação de uma representação de um registro D em outra representação de um registro A, conservando, pelo menos, a referência ao mesmo objeto ou à mesma situação representada, mas mudando, de fato, o conteúdo da representação (DUVAL apud ALMOULOU, 2007, p. 72)

Para nossa pesquisa, pensamos ser importante o exemplo dado por Almouloud (2007, p. 73) “os tratamentos figurais, por reconfiguração, para alguns problemas de geometria, implicam determinações de área. Segundo Duval esses tratamentos podem ser feitos sem o menor conhecimento ou justificativa matemática (p. 73)”. Esses tratamentos serão requisitos para a resolução de problemas que estão em nossa sequência.

Os chamados Registros de Representação Semiótica estão sempre presentes no ensino da Matemática, sobretudo quando fazemos uma conversão da linguagem da forma figural para a algébrica ou da língua natural para a forma figural, ou quando fazemos algum tratamento nas informações dadas.

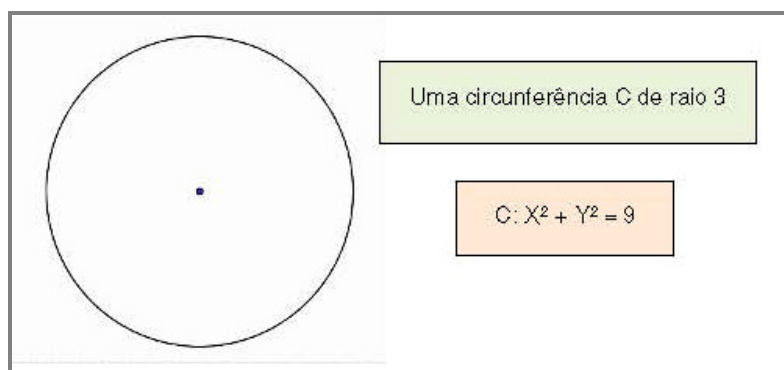
A Matemática tem a vantagem de poder mobilizar mais de um registro de representação ao mesmo tempo, dando ao aluno uma melhor percepção dos conceitos exigidos. Uma das grandes dificuldades dos alunos é a confusão da representação do objeto com o próprio objeto matemático. Ao fazer com que o aluno transite entre as formas de representação, possibilita-se que ele possa conceituar melhor o objeto matemático, então, as mudanças de registros de representação auxiliam na diferenciação entre o objeto e o registro.

Duval (apud ALMOULOU, 2007) destaca que as conversões de registros de representação semiótica são qualificadas, como congruentes e não congruentes, ou seja, podem ser mais naturais e de fácil compreensão ou com um grau maior de dificuldade na visualização, respectivamente.

Para Damm (1999) as conversões de registros ou a mobilização simultânea de vários registros causam bloqueios e até fracassos de alguns alunos, agravados, quando as conversões requeridas são não congruentes. A construção de uma sequência com tarefas que valorizam tanto a conversão de registros de representação semiótica como o tratamento dos registros com casos de congruências ou não, são necessários, para que os alunos identifiquem os objetos e suas várias formas de representação, podendo lidar melhor com os conceitos matemáticos (DAMM, 1999).

A autora citada aponta certas vantagens na coordenação entre registros de representação, por exemplo, alguns têm tratamentos mais econômicos e poderosos que outros do mesmo objeto e ainda existem os que se complementam. Portanto, para conceituar um objeto é preciso uma coordenação de registros de representação. A Figura 3 ilustra o objeto matemático circunferência de três formas de registro diferentes: a representação figural, algébrica e na língua materna. Ao visualizar as três formas, os alunos têm maior chance de não confundir o objeto matemático com seu registro, já que esse objeto pode ser representado por mais de uma forma, ou seja, a circunferência não existe no mundo real, por se tratar de uma ideia. O que nós vemos são registros de representação para a visualização do objeto em questão.

Figura 3 – Representações de circunferência



Entendemos que o uso desta teoria para a construção da nossa sequência facilitaria os processos de ensino e aprendizagem, já que os alunos no desenvolvimento das atividades que propusemos precisam efetuar tratamento de

informação dentro do mesmo registro de representação e as conversões do registro de representação do algébrico para o geométrico e vice-versa.

A Dialética Ferramenta-Objeto

Régine Douady (1986) introduziu na didática matemática, a dialética ferramenta-objeto e o jogo de quadros que se tornaram ótimos instrumentos para a análise de fenômenos de ensino e aprendizagem e eles têm sido usados em muitas pesquisas na educação matemática (ALMOULOU, 2007).

Para fazer a distinção entre a ferramenta e o objeto, a autora citada classificou o objeto como o conhecimento que se busca desenvolver em uma situação de aprendizagem, portanto é um conhecimento que o aluno ainda não possui. Já a ferramenta é quando um conhecimento deve ser utilizado para resolver outras situações-problema.

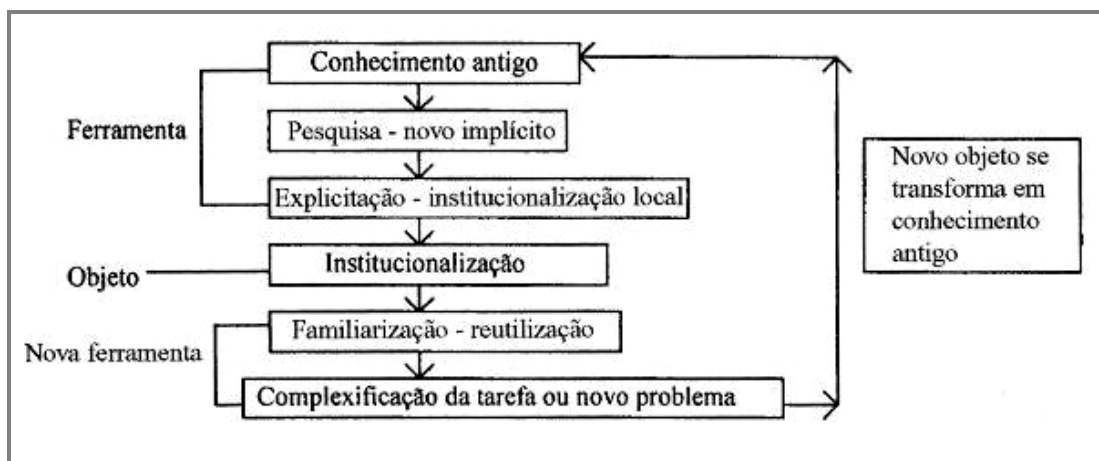
Almouloud (2007) indica a proposta da autora de uma organização de ensino em várias etapas:

- Antigo: dada uma situação problema em que o enunciado está bem claro para o entendimento de todos, os alunos podem utilizar os objetos conhecidos de saber, como ferramentas de resolução da situação problema ou pelo menos parte do problema.
- Pesquisa – novo implícito: o aluno pode não conseguir resolver totalmente o problema porque a ferramenta ótima necessária é o objeto de ensino.
- Explicitação – institucionalização local: nesta etapa o professor tem um papel mais contundente, pois precisa dar as ferramentas agora utilizadas, o *status* de objeto ao transformar o conhecimento em saber da classe.
- Institucionalização – estudo do objeto: nas várias atividades (situações didáticas ou adidáticas) propostas pelo professor, ele seleciona algumas para ser descontextualizadas, transformando-as em quadro algébrico, geométrico, aritmético, etc. Assim o aluno poderá utilizar na resolução de outros problemas.

- Familiarização – reutilização numa situação nova: dada uma nova situação problema, utiliza o conhecimento institucionalizado agora como ferramenta explícita, passando então a ser considerado conhecimento antigo.
- Complexificação da tarefa em novo problema: agora que o aluno já utiliza o objeto como ferramenta, chega a hora de testar em situações mais complexas que pode ser uma atividade retirada das avaliações externas (ALMOULOU, 2007, p. 63).

A dialética ferramenta – objeto foi esquematizada como mostra o esquema abaixo ilustrado por Almouloud (2007, p. 64),

Figura 4 – Etapas de organização da dialética ferramenta-objeto



Fonte: Almouloud, 2007, p. 64.

Em algumas atividades da sequência proposta nesta pesquisa, tanto a visualização como a resolução estão em um determinado quadro – domínio – da Matemática que requer uma estratégia de resolução, pois, ao passar desse quadro para outro, o aluno poderá ter outra visão do problema e pensar em diferentes estratégias, porque tal quadro poderá oferecer-lhe outras condições de perceber a solução do problema dado. Também cabe ressaltar que algumas estratégias só estão disponíveis em determinados quadros matemáticos.

Quando o aluno é capaz de mudar de quadro para solucionar um problema, pensamos ser um sinal de que ele tem clareza, tanto do objeto de estudo como da situação de aprendizagem envolvida.

Além de usarmos os pressupostos das teorias neste capítulo citado, também achamos importante a análise de algumas pesquisas realizadas pelo grupo de estudos PEAMAT (Programa de Estudos e Aprendizagem em Matemática) da PUC-SP. No próximo capítulo essas pesquisas serão analisadas.

CAPÍTULO II

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo, apresentamos sínteses de dissertações que foram importantes para o desenvolvimento de nossa pesquisa, por conterem atividades que abordam o conceito de área ou de circunferência, além da metodologia e o quadro teórico.

Apresentamos uma síntese das dissertações de Facco (2003) e de Chiummo (1998), que são registros de pesquisas que, de alguma forma, abordam ou permeiam o objeto matemático que escolhemos.

Conceito de Área: Uma Proposta de Ensino-Aprendizagem de Sonia Facco (2003)

A pesquisa de Sonia Facco teve como objetivo o estudo dos fenômenos que interferem no ensino e aprendizagem do conceito de área para o Ensino Fundamental (EF) e apresenta uma sequência didática envolvendo composição e decomposição de figuras planas no intuito de fazer uma reflexão sobre a aprendizagem do conceito de área.

A autora optou por trabalhar, sobretudo com duas teorias didáticas que subsidiaram sua pesquisa. A primeira é a Dialética Ferramenta-Objeto e o jogo de Quadros proposto por Régine Douady (1992); e a outra, é a Teoria de Registro de Representação Semiótica de Duval (2003).

É importante ressaltar que a definição de conceito de área usado por Facco (2003) é a mesma de Douady e Perrin-Glorian, ou seja, a área como grandeza e “utilizam o termo grandeza, no sentido ingênuo e não buscam defini-la”. Sem realizar a definição, as autoras usam a expressão “tem a mesma área” para comparar as figuras que reconfiguradas sobrepõem-se sem nenhuma diferença, ou aquelas que têm as mesmas medidas. Nesse aspecto, Facco utiliza a área como grandeza, ou seja, na comparação de figuras que têm a mesma superfície e as mesmas medidas. (FACCO, 2003, p. 25).

Em outras palavras, suponha que exista uma figura com uma forma geométrica e queremos compará-la com outra de forma geométrica diferente. Ao fazer um processo de reconfiguração e sobreposição, notamos que as duas figuras possuem a mesma superfície sem precisar fazer medições apenas por comparação. Mas, por outro lado, podemos afirmar que duas superfícies têm a mesma área, quando as duas são comparadas com a mesma unidade de medida e obtém-se o mesmo número. Um bom exemplo para explicar essa comparação é supor um retângulo com medida de duas unidades de largura por oito unidades de comprimento e compará-lo a outro retângulo com quatro unidades de largura por quatro unidades de comprimento, ou seja, ambos possuem 16 unidades quadradas de área.

Facco (2003) cita Douady e Perrin-Glorian (1992) que afirmam ser necessário distinguir a área de superfície e de medidas, antes de construir o conceito de área como grandeza.

A sequência didática que norteou as análises da pesquisa de Facco (2003) segue o pressuposto da Engenharia Didática elaborada por Artigue (1988). Esta é composta por sete atividades, cada uma com vários exercícios e foi aplicada a uma turma de 5ª série de 32 alunos durante 14 encontros.

Antes da construção da sequência didática, foi realizado o teste piloto para alunos da 5ª série que mostrou um grau de dificuldade relevante em relação à diferenciação de área e perímetro. Também foi feito um levantamento das concepções dos professores do grupo de estudo, da oficina do projeto de Geometria da PUC. Facco (2003) preparou uma sequência de atividades e

discutiu-as com professores, que também faziam parte da rede pública de ensino do Estado de São Paulo, considerando aspectos matemáticos e didáticos.

Com os resultados obtidos pelo teste-piloto e os dados coletados no levantamento das concepções de professores, foi elaborada a questão de pesquisa: “uma sequência de atividades com o uso da decomposição e composição de figuras planas, como processo de ensino-aprendizagem, facilitaria o aprendizado do aluno ao conceito de área?” (FACCO, 2003, p. 32)

Após análise dos resultados obtidos, a pesquisadora afirma ter validado a hipótese da pesquisa em relação ao conceito de área e ainda assevera ser viável a aplicação da sequência didática proposta, por considerar os resultados significativos. Para terminar, indica a necessidade de melhorar a capacitação do professor para trabalhar a reconfiguração de figuras, usando a decomposição e a composição de figuras planas. Destaca também ser preciso dar maior atenção aos estudos de geometria.

A maior contribuição da dissertação de Facco (2003) para a nossa pesquisa, é que usaremos o mesmo conceito de área que ela utilizou. Em nossa sequência iniciamos com a comparação de superfícies que, ao serem reconfiguradas ajustam-se sem nenhuma diferença para afirmar que estas superfícies têm a mesma área, somente depois faremos o uso das fórmulas que os alunos deverão elaborar e validar.

O conceito de áreas de figuras planas: capacitação para professores do Ensino Fundamental de Ana Chiummo (1998)

Chiummo realizou uma pesquisa cujo objetivo foi “detectar o problema de aprendizagem que envolve os conceitos de área e perímetro e a utilização de uma metodologia adequada que auxilie os professores a desenvolver um bom trabalho em sala de aula” (1998, p. 47), assim, contribui com os processos de ensino e aprendizagem do conceito de área de figuras planas por meio de uma sequência didática norteada por teóricos. Esta sequência prioriza o Ensino Fundamental nos ciclos I e II por ser o instante em que se inicia a construção do

pensamento matemático necessário a esse conteúdo e por estar previsto nos PCNs.

A metodologia utilizada segue os pressupostos da Engenharia Didática.

A pesquisa realizada está fundamentada na Teoria das Situações Didáticas, sobretudo na noção de Obstáculos epistemológicos e didáticos, como também no Contrato Didático, além da Transposição Didática, Dialética Ferramenta-Objeto e o Jogo de Quadros.

A pesquisa apoiou-se nas seguintes hipóteses:

- A abordagem proposta por certos professores não desenvolve nos alunos uma concepção do conceito de área que permita relacionar o conceito área e suas diferentes representações numéricas?
- Uma capacitação para professores que considera os aspectos estudados pode induzir os professores a construir situações de ensino-aprendizagem do conceito de área que levem os alunos: a desenvolver noção de superfície e área trabalhando o ladrilhamento, a composição e a decomposição, a sentirem após esse estágio, a necessidade de passar do quadro geométrico para o quadro numérico, apresentando-lhes as fórmulas do conceito em questão?
- É indispensável diferenciar área de perímetro, para uma melhor aquisição do conceito de área?
- Um estudo das fórmulas de área e de perímetro de superfícies usuais, feito em relação com os invariantes geométricos das figuras, favorece a construção da noção de área como grandeza?
- A construção de situações para a sala de aula nas quais o ponto de vista dinâmico intervém favorece o estudo dos invariantes geométricos que permitem conservar uma área e por consequência, a aprendizagem do conhecimento relacionado a comprimentos e áreas? (1998, p. 135)

A primeira hipótese foi validada quando foi observado que, na aplicação da sequência, os profissionais mais tradicionais não mudam suas posturas de ensino; para a segunda hipótese, os professores que desconheciam o ladrilhamento, a composição e decomposição de figuras acharam-na bastante válida e passaram a aplicar em suas atividades; na terceira hipótese as atividades propostas na sequência mostram-se satisfatórias para minimizar o problema da

confusão que os alunos fazem entre área e perímetro; a quarta hipótese também foi validada, pois trata do estudo das fórmulas de área e perímetro para a construção da noção de área como grandeza; e, para a última hipótese, foi constatado que a construção de situações para a sala de aula nas quais o ponto de vista dinâmico intervém, favorece o estudo dos invariantes geométricos que permitem conservar uma área e a aprendizagem do conhecimento relacionado a comprimento e áreas.

Os professores que participaram do processo e, posteriormente, aplicaram a sequência em seus alunos relataram que obtiveram êxito na construção dos conceitos de área e perímetro de figuras planas.

Ao nos depararmos com os resultados das análises feitas pela pesquisadora, pensamos ser coerentes as atividades elaboradas para nossa sequência, além de nos direcionarmos às atividades que abordam ladrilhamento, composição e decomposição de figuras, para minimizar a confusão que os alunos fazem entre área e perímetro. A autora também usou o conceito de área como grandeza da mesma forma como Facco (2003) fez, e isso reforça nosso intuito de trabalhar o conceito de área do mesmo modo.

CAPÍTULO III

ESTUDO DO OBJETO MATEMÁTICO

Antes de iniciarmos a análise do objeto, consideramos importante salientar que o conceito de área que adotamos é o de área como grandeza, o mesmo usado por Chiummo (1998) e Facco (2003), ideias retiradas de Douady (1992).

Este conceito fica explicitado por Duarte (2004) ao citar Lima² (1995):

O termo superfície significa um subconjunto limitado do plano euclidiano. Considera uma função, dita função área, definida num conjunto S de superfícies, com valores no conjunto dos números reais não negativos, e que apresenta certas propriedades que caracterizam a grandeza área: **positividade** – se uma figura que possua interior não vazio tem área positiva; **aditividade** – se duas figuras A e B têm em comum no máximo pontos de suas fronteiras, então a área da figura $A \cup B$ (união de A e B) é a soma da área de A com a área de B; **invariância por Isometrias** - se uma figura plana A é transformada em outra B, de modo que a distância entre dois pontos quaisquer de A fica inalterada em B, então A e B têm a mesma área (DUARTE, 2004, p. 3).

Ou seja, o autor descreve a superfície como uma parte do plano euclidiano que pode ser medida e atribui a ela um valor numérico positivo, chamando-a de área. A área como grandeza apresenta três características: a positividade, a aditividade e a invariância por isometria, que se estiverem presentes ao mesmo tempo garantirão a validade matemática desse conceito.

² LIMA, P. F. *Considerações sobre o ensino de área*. Anais da I Semana de Estudos em Psicologia da Educação Matemática, Recife, 1995.

Duarte (2004) também apresenta outra definição de área como grandeza, mencionada como modelo didático concebido por Douady (1989 *apud* ALMOULLOUD, 2007) que seria compatível com a caracterização de Lima (1995):

Nesse modelo, a autora distingue três quadros: **o quadro geométrico**, constituído por superfícies planas como o triângulo, o quadrado e o retângulo; **o quadro numérico**, consistindo nas medidas das superfícies, que pertencem ao conjunto dos números reais não negativos e **o quadro das grandezas**, contexto próprio da noção de área, que integra os dois primeiros, sendo caracterizadas, formalmente, como classes de equivalência de superfícies de mesma área (DUARTE, 2004, p. 03).

Duarte (2004) apresenta o conceito de área como grandeza com base na ideia de superfície de figuras aliado a um valor numérico que possa ser atribuído a essa superfície. Esta definição está coerente com a nossa, segundo a qual a área é uma grandeza.

Os principais objetos matemáticos sobre os quais nos debruçaremos serão: circunferência e círculo.

Iniciamos com algumas definições de circunferências que podem ser diferentes em algum aspecto em razão das características que se queira evidenciar e, em seguida, trataremos de círculo, por admitir nesta pesquisa, que são objetos diferentes.

Nesta análise, empregaremos as ideias de autores que nos fornecem definições e demonstrações para auxiliar na compreensão do objeto matemático em questão nesta pesquisa: Bongiovanni e Watanabe (1991); Sangiorgi (1965); Almouloud (2007); Garbi (2010), além da obra GEOMETRIA (1924).

Circunferência

Na coleção FTD no volume GEOMETRIA Elementar para o Curso Superior (1924), temos a seguinte definição: “circunferência é o lugar dos pontos do plano equidistantes de outro ponto dado desse plano. O ponto dado é o centro da circunferência” (1924, p. 54).

Gilberto Garbi (2010) apresenta uma definição bastante usada nos livros didáticos:

Dados dois pontos C e A , denomina-se circunferência o conjunto de todos os pontos P do plano tais que o segmento de reta CP é congruente com a segmento CA . O ponto C é chamado centro da circunferência e cada segmento CP é chamado raio da circunferência (GARBI, 2010, p. 47).

Almouloud (2007) em seu capítulo 9º apresenta algumas definições de Artigue e Robinet (1982) da circunferência que nos remetem a algumas características diferentes. Optamos por citar algumas delas pelas às semelhanças do ponto de vista abordado com o que nós utilizamos na elaboração da sequência didática:

D1: A circunferência de centro O e de raio medindo R é, no plano, o conjunto dos pontos situados à distância R de O .

D2: Chamamos circunferência toda curva plana que admite uma infinidade de eixos de simetria.

D3: Uma curva plana g é uma circunferência se, e somente se existe um ponto O do plano e um real positivo d tais que: – g determina em toda reta passando por O um segmento de comprimento d , – O é o ponto médio deste segmento.

D4: Uma circunferência é uma figura plana contida numa linha só, chamada circunferência e tal que todas as retas que ligam essa circunferência e um dos pontos interiores a essa figura sejam iguais entre elas (Euclides).

D5: Uma linha em movimento colocada de modo que dois de seus pontos A e B sejam imóveis e um outro ponto qualquer, C , dessa linha descreva uma circunferência (Leibniz).

D6: Uma circunferência é uma linha curva em que todos os pontos são equidistantes de um ponto interior chamado centro da circunferência (Legendre) (ARTIGUE e ROBINET *apud* ALMOULOU, 2007, p. 164).

Atualmente, a definição D1 é a mais utilizada nos livros de Matemática, mas uma circunferência pode estar bem definida de outras maneiras. As definições D4, D5, D6 são atribuídas, respectivamente, a Euclides, Leibniz e Legendre (ALMOULOU, 2007).

Algumas definições de circunferência são vistas, como conjunto de pontos e outras como uma curva, e isso acontece, conforme a necessidade das aplicabilidades do objeto matemático, além de também terem uma diferenciação quanto à visão estática ou dinâmica dos elementos que a compõem. Também podemos perceber que nas definições 1, 3 e 6 o raio ou centro estão mencionados, já em outras não se faz necessário.

A definição mais usual dos livros didáticos, que relacionam os pontos de uma circunferência a seu centro, pode ser acrescida de outras que apresentam outras caracterizações de circunferência e, além disso, pensamos que a aprendizagem da circunferência não se restringe apenas ao uso do compasso e fixação de fórmulas empregadas.

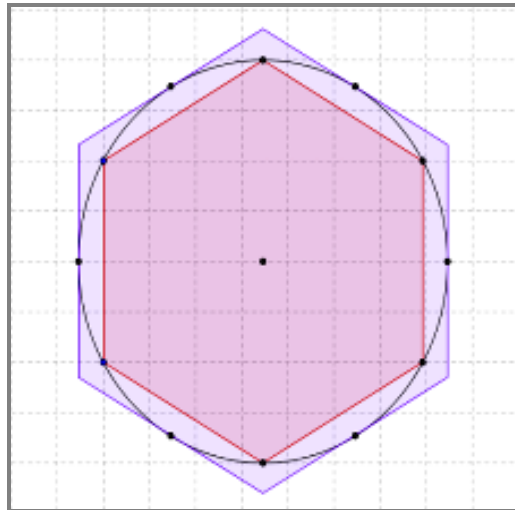
Ao analisar as várias definições de circunferência, pensamos ser adequada uma que contemple o maior número de características possíveis assim, para esta pesquisa, adotaremos a definição: circunferência é uma curva no plano, fechada, composta por infinitos pontos que estão equidistantes a um ponto do plano e essa distância é denominada raio.

O objeto comprimento de uma circunferência tem sido desenvolvido ao longo da história como explicitaremos no Capítulo III. De acordo com Garbi (2010), essa noção se originou com base na compreensão do conceito de limite na Grécia do século V a.C. Algumas décadas depois de Tales e Pitágoras, os gregos “deram-se conta da existência de certas grandezas variáveis que podem aproximar-se continuamente de outras de modo que a diferença entre elas possa ser feita tão pequena quanto quisermos” (GARBI, 2010, p. 161).

Para melhor explicar a medida da circunferência de que tratamos em nossa sequência de aprendizagem, referimo-nos ao método da exaustão, formalizado por Eudócio (408-355 a.C.), mas cuja essência fora percebida por Briso e Ântifon, método mais tarde utilizado por Euclides no livro *Elementos* para demonstrar que as áreas de dois círculos estão entre si como os quadrados dos respectivos raios (GARBI, 2010). Partindo desse conceito, Arquimedes (287-212 a.C.) desenvolve o primeiro resultado científico (BONGIOVANNI e WATANABE, 1991).

Arquimedes parte de dois hexágonos regulares, um inscrito (dentro da circunferência) e outro circunscrito (fora da circunferência). É importante ressaltar que os vértices do hexágono inscrito pertencem à circunferência, assim como os pontos médios dos segmentos que são os lados do hexágono circunscrito, também pertencem à circunferência.

Figura 5 – Hexágonos regulares, inscrito e circunscrito



O método da exaustão utilizado por Arquimedes será descrito abaixo na ótica de Garbi (2010), Sangiorgi (1965) e GEOMETRIA (1924).

Garbi (2010, p. 165) enuncia e demonstra o Teorema sobre perímetros de polígonos inscritos e circunscritos na mesma circunferência: “o perímetro de qualquer polígono circunscrito a uma circunferência é maior do que o perímetro de qualquer polígono inscrito na mesma circunferência”, sendo assim a medida do comprimento da circunferência é maior que a do perímetro do hexágono inscrito e menor que a do perímetro do hexágono circunscrito.

Conforme vamos duplicando o número de lados desses polígonos, de acordo com Sangiorgi, (1965, p. 162):

- 1º – Os perímetros dos polígonos inscritos vão crescendo. E conseqüentemente se aproximando cada vez mais do comprimento da circunferência;
- 2º – Os perímetros dos polígonos circunscritos vão decrescendo, e conseqüentemente se aproximando, cada vez mais, do comprimento da circunferência;

3º – A diferença entre os perímetros dos dois polígonos, o do circunscrito e do inscrito, pode tornar-se menor que qualquer quantidade, tão pequena quanto quisermos. Daí a definição:

O comprimento de uma circunferência é o limite comum para o qual tendem os perímetros de dois polígonos regulares convexos, um inscrito e outro circunscrito, quando o número de lados desse polígono cresce indefinidamente.

Partindo da ideia de que o quociente do perímetro (P) de um polígono pelo diâmetro (D) da circunferência a que o polígono está inscrito ou circunscrito é uma constante (k), podemos firmar que $\frac{P}{D} = k$, com o aumento indefinidamente os perímetros tendem ao comprimento da circunferência (C), então $\frac{C}{D} = k$, como o diâmetro é duas vezes o raio $\frac{C}{D} = k$, esta constante foi denominada π , logo $\frac{C}{2R} = \pi$. Esta demonstração está apoiada nas ideias propostas por Garbi que, por sua vez, está amparada pelo seguinte Teorema, “os comprimentos de duas circunferências estão entre si como os respectivos raios (ou diâmetros)” (GARBI, 2010, p. 169).

A partir deste Teorema, Garbi (2010) apresenta uma demonstração para provar que $\frac{C}{C'} = \frac{R}{R'}$, e que sua consequência é a conclusão de uma fórmula para comprimento de uma circunferência com base nos polígonos inscritos e circunscritos a uma circunferência.

Sejam duas circunferências de raios e comprimentos respectivamente R e R' e C e C'. Uma forma intuitiva, mas pouco rigorosa de se demonstrar este Teorema é imaginar em cada uma das circunferências famílias de polígonos inscritos e circunscritos, respectivamente semelhantes. Chamando genericamente os perímetros de tais polígonos de P_i, P_c, P'_i e P'_c podemos escrever P_i<C<P_c e P'_i<C'<P'_c ou

$$\frac{P_i}{R} < \frac{C}{R} < \frac{P_c}{R} \quad \text{e} \quad \frac{P'_i}{R'} < \frac{C'}{R'} < \frac{P'_c}{R'} \quad (170).$$

Para fazer a prova dessa proporcionalidade entre a circunferência e o raio, o autor utiliza a redução ao absurdo, ou seja, procura-se provar que $\frac{C}{C'} < \frac{R}{R'}$, ou $\frac{C}{C'} > \frac{R}{R'}$, como não se consegue realizar essa prova, então só resta a possibilidade de $\frac{C}{C'} = \frac{R}{R'}$. Após chegar a essa conclusão, conclui em uma fórmula para a circunferência:

E se $\frac{C}{R}$ é constante, $\frac{C}{2R}$ também o é. Como $2R$ é o diâmetro da circunferência, a relação entre o comprimento da circunferência e o seu diâmetro é uma constante, a mais celebre da matemática, universalmente conhecida por número π . Assim, se $\frac{C}{2R}$ é igual a π , então $C = 2\pi r$ (GARBI, 2010, p. 171).

O autor citado afirma que os Elementos de Euclides não tratavam nem de comprimento da circunferência, nem de área de círculo, isso quem o fez foi Arquimedes (286 a.C. - 212 a.C.) de Siracusa acerca de 50 anos depois de Euclides, em seu livro chamado *A Medida de um Círculo*.

Essa fórmula que é objeto de nosso estudo deverá ser alcançada pelos alunos participantes da pesquisa ao final da atividade sete do processo de aprendizagem.

Círculo

A definição de círculo está bem expressa por um teorema citado por Lima: “a área do círculo é o número real cujas aproximações por falta são as áreas dos polígonos regulares nele inscrito e cujas aproximações por excesso são as áreas dos polígonos regulares a ele inscritos” (LIMA, 1991, p. 50), ou seja, é o limite das áreas dos polígonos regulares nele inscrito ou circunscrito quando o número de lados cresce indefinidamente.

Na coleção FTD com o volume *Geometria Elementar (1924, p. 54)*, para o Curso Superior, apresenta a seguinte definição: “círculo é a superfície limitada pela circunferência”.

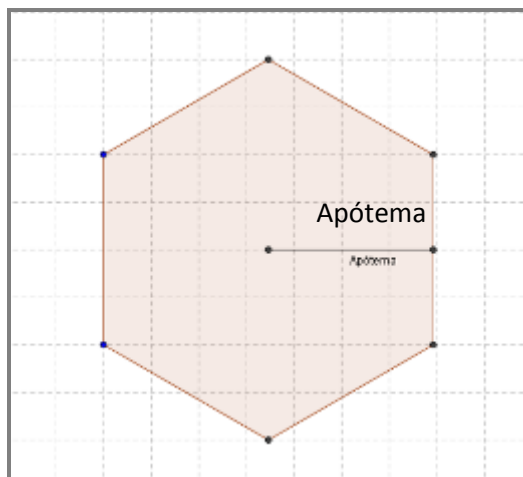
Já para Sangiorgi (1965, p. 187) a definição de área de círculo é: “área do círculo é igual ao produto de π pelo quadrado da medida do raio”.

Para Garbi (2010, p. 175) “a área de círculo cujo raio mede R é o número πR^2 . (Em outras palavras, a área do círculo é o limite ao qual tendem as áreas dos polígonos inscritos e circunscritos a ele, quando os números de lados tendem ao infinito)”. Outra informação importante encontrada em seu livro é que o número πR^2 também é a área de um triângulo de altura congruente ao raio e base congruente ao comprimento da circunferência.

O método da exaustão descrito por Euclides também dá conta da área do círculo, da mesma forma como feito para desenvolver o comprimento da circunferência, e descrito no item anterior, ou seja, começando baseado em um hexágono regular inscrito e circunscrito a uma circunferência, a área do círculo é menor que a do hexágono circunscrito.

Ao aumentar indefinidamente o número de lados dos polígonos inscritos e circunscritos, as suas áreas tendem à área do círculo. A área de um polígono regular circunscrito “é igual ao semi-produto das medidas de seu perímetro e seu raio” (SANGIORGI, 1965, p. 184); nesse caso, o raio coincide com o apótema.

Para deduzir a área do círculo, Sangiorgi (1965) parte da fórmula da área de um polígono regular qualquer $S = p \cdot a$ “onde p (semiperímetro do polígono regular inscrito) tende a $\frac{C}{2}$ (semicomprimento da circunferência) e a (apótema do polígono regular inscrito, que é o segmento que une o ponto central ao ponto médio do lado do polígono) tende a R (raio da circunferência). Substituindo estes valores na fórmula acima, obtemos: $S = \frac{C}{2} R$ e como $C = 2\pi r$, vem $S = \frac{2\pi r \cdot R}{2} = \pi r^2$. Ou seja, $S = \pi R^2$ ” (p. 188).

Figura 6 – Ilustração de Apótema

Esta fórmula que também é objeto de nossa pesquisa deverá ser alcançada pelos alunos que participam da aplicação da sequência.

Para sermos coerentes com as atividades de nossa pesquisa adotaremos a definição de circunferência como: uma curva fechada, formada por infinitos pontos que estão equidistantes de um ponto no plano, e usaremos a definição de círculo, como o conjunto dos infinitos pontos internos a uma circunferência em união com os pontos que formam a circunferência.

CAPÍTULO IV

BREVE ESTUDO HISTÓRICO E ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS

Faremos aqui uma breve análise histórica e epistemológica, iniciando com o surgimento da escrita, passando pela História Antiga, Moderna e Contemporânea. Para isso, retrataremos a noção de áreas de figuras planas em geral, circulares e do número π que nos servirá de norteador, para a construção da sequência didática que alcance os objetivos da pesquisa.

Esses períodos foram escolhidos, porque antes da escrita não havia registros, foi na Antiguidade que os conceitos trabalhados nesta pesquisa foram desenvolvidos e, posteriormente, aprimorados nos períodos Moderno e Contemporâneo.

Análise histórica da noção de área de figuras planas

De acordo com Carl Boyer (1974, p. 4), não é possível precisar a época da origem da geometria, pois não há registros que possamos nos embasar. A arte de escrever e fazer registros foram desenvolvidos nos últimos seis milênios. Apoiados nesses registros podemos analisar e afirmar qualquer coisa sobre Matemática, geometria e os conceitos de área e superfícies, porém, é facilmente dedutível que os conceitos precederam à escrita. Inclusive as escritas do começo

da história nos mostram um conceito já bem formado e desenvolvido levando-o a concluir que esses conceitos já existiam antes da origem da escrita.

Boyer (1974) ainda afirma que existem evidências que sugerem uma preocupação com as relações espaciais na arte da Era Neolítica 7.000 a.C. a 3.000 a.C., percebida nos potes, tecidos e cestas. Se considerarmos que no Paleolítico 5.000.000 a.C. a 10.000 a.C., as formas e desenhos eram naturalistas, posteriormente, passaram a ser simplificadas e esquemáticas. Durante o Período Neolítico, os grupos humanos já dominavam o fogo e passaram a produzir peças de cerâmica, normalmente, vasos, decorados com motivos geométricos em sua superfície.

Figura 7 – Vaso de cerâmica decorada com motivos geométricos de Dimini, ano 4300-3300 a.C.



Fonte: S. Karouzou, National Museum, Athens, 1999.

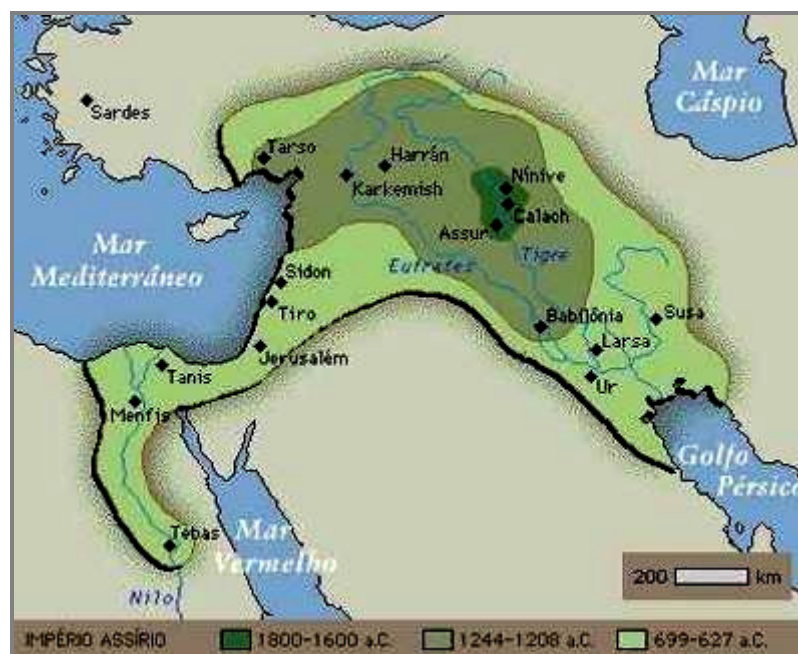
Na Figura 7, identificamos um vaso de cerâmica confeccionado no Período Neolítico 7.000 a.C. a 3.000 a.C. que demonstra figuras geométricas de forma assimétrica. Na ilustração há indícios que mostram linhas paralelas, triângulos, circunferências e proporcionalidade, que são conceitos matemáticos importantes desenvolvidos naquela época.

Em BOYER (1974) existe um esquema de desenhos sequenciais ilustrando evidências que as áreas dos triângulos estão entre si como os quadrados sobre um lado. A motivação desse pensamento, de acordo com Boyer, pode ter origem no sentimento estético e no prazer da beleza das formas, ou uma

protogeometria relacionada com ritos religiosos, políticos e sociais. Com isso, podemos identificar que o começo da matemática é mais antigo que as mais antigas civilizações, porém a falta de registros não nos permite ir além de conjecturas.

Ainda conforme o autor, por volta de 4000 a.C., surgem formas de escrita primitiva, como as que temos ao longo dos rios: Nilo no Egito, Tigre e Eufrates na Mesopotâmia – hoje Iraque – Indo na Índia e Yang Tse na China. E “os registros cronológicos das civilizações nos vales dos rios Indo e Yang Tse não merecem confiança” (BOYER, 1974, p. 6).

Figura 8 – Mapa com a localização dos rios Nilo no Egito, e Eufrates na Mesopotâmia



Fonte: historiadomundo.com.br.

No mapa anterior, identificamos a região que abrange as civilizações da Mesopotâmia (terra entre rios) e Egito Antigo, que se localizavam ao redor dos rios Tigre, Eufrates e Nilo, respectivamente.

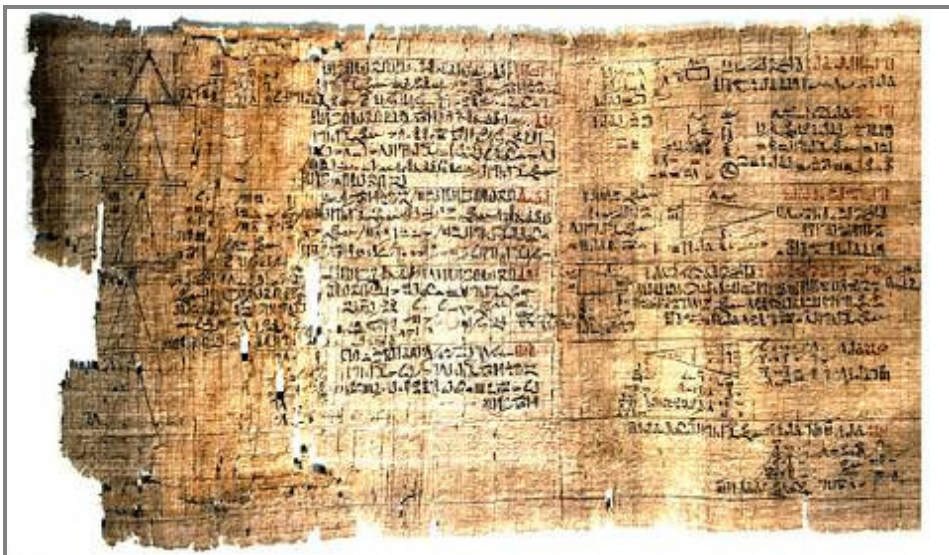
No Egito, temos alguns registros como os Papiros de Berlin de Moscou, de Kahum e, sobretudo o de Ahames ou Rhind (1650 a.C.), que, particularmente, nos interessa por conter problemas que se referem ao tema aqui abordado.

1650 a.C. essa é a data aproximada do *papiro Rhind* (ou *Ahmes*), um texto matemático na forma de manual prático que contém 85 problemas copiados em escrita hierática pelo escriba Ahmes de um trabalho mais antigo. O papiro foi adquirido no Egito pelo egiptólogo escocês, A. H. Rhind (1833-1863), sendo mais tarde comprado pelo Museu Britânico. (...) Esse papiro e o papiro Moscou são nossas principais fontes de informações referentes à matemática egípcia antiga. (...) Tem cerca de 18 pés de comprimento por cerca de 13 polegadas de altura (EVES, 2004, p. 69).

Eves (2004) ressalta que no problema 50, o escriba Ahmes assume que a área de um campo circular com diâmetro de nove unidades é a mesma de um quadrado com lado de oito unidades. O problema 51 mostra que a área de um triângulo isósceles era achada, tomando a metade do que chamaríamos base e multiplicando isso pela altura.

O papiro de *Rhind* é uma fonte primária rica sobre a matemática egípcia antiga; descreve os métodos de multiplicação e divisão dos egípcios, o uso que faziam das frações unitárias, seu emprego da regra de falsa posição, sua solução para os problemas da determinação da área de um círculo e muitas aplicações da matemática a problemas práticos (EVES, 2004, p. 70).

Figura 9 – Papiro de Rhind – Museu Britânico



Fonte: antigoegito.org.

Na Mesopotâmia, os registros eram diferentes, denominados registros cuneiformes que eram tabletas de barro com muita resistência aos efeitos do tempo, melhor que os papiros egípcios. O nome cuneiforme deve-se ao fato de ser feito de sinais na forma de cunha, isto é, confeccionados a partir do ato de cunhar o barro, além disso, podemos destacar que esse tipo de escrita foi usada por quase 3 mil anos pelos povos da região (EVES, 2004).

Dentre essas tabletas, podemos citar algumas, como: a de Plimpton 322, de Susa, e do museu de Bagdá que se referem à semelhança de triângulos. Eves (2004) cita a existência de problemas na tableta de Susa que se referem: à comparação de áreas e os quadrados dos lados de polígonos regulares de 3, 4, 5, 6 e 7 lados; a razão entre o perímetro de um hexágono regular e a circunferência do círculo circunscrito a ele; e também o problema “determine o raio do círculo circunscrito ao triângulo de lados 50,50 e 60” (EVES, 2004, p. 80).

Figura 10 – Plimpton322



Fonte: fundamentalmatsv.blogspot.com.

Na Figura 10 que ilustra a tableta de Plimpton 322, ao lado direito, temos três colunas sendo a da extrema direita composta de registros que servem para numerar as linhas. As outras duas colunas são de números que correspondem à hipotenusa e a um cateto de triângulos retângulos de lados inteiros (EVES, 2004).

Na Grécia, dois filósofos Heródoto (485 a.C. - 420 a.C.) e Aristóteles (384 a.C. - 322 a.C), têm ideias diferentes sobre o surgimento da geometria. Para Heródoto, a geometria teria surgido pela necessidade de medir terras (áreas) antes e depois do alagamento do rio Nilo no Egito, pois os impostos cobrados eram proporcionais à terra que os habitantes possuíam. Para Aristóteles (384 a.C. - 322 a.C), a geometria originou-se da existência no Egito de uma classe sacerdotal com lazes (tempo para se dedicar aos pensamentos), assim conduzindo ao estudo da geometria. Além disso, os dois autores fizeram referências aos esticadores de corda (agrimensores), que estão presentes nos desenhos egípcios, como se pode ver na figura 11.

Figura 11 – Esticadores de cordas, túmulo de Menna (século XIV a.C.)



Fonte: Artigo Instrumentos de Topografia, recordando sua história UFRGS de José Luis de La Cruz Gonzáles e José Luis Mesa Mingorance.

Ainda na Grécia, podemos citar pensadores que contribuíram para a matemática e o conceito de área na geometria, como: Tales de Mileto (624 ou 625 a.C. - 556 ou 558 a.C.), Pitágoras (571 ou 570 a.C. - 497 ou 496 a.C.), Platão (428 a.C. - 348 a.C.), Aristóteles (384 a.C.- 322 a.C.), Eudoxo (390-338 a.C.) (método da exaustão para aproximação de área de círculo por polígonos de n lados), Dinostrato (390 a.C - 320 a.C.) (quadratura do círculo), Arquimedes (287 a.C. - 212 a.C.) (medida da área do círculo por segmento parabólico), Ptolomeu (87 d.C. - 165 d.C.), Herão de Alexandria (por volta de 50 d.C.) (área do triângulo) e sobretudo Euclides (por volta de 300 a.C.) em seus trabalhos como *Os Elementos* em que ele axiomatiza o pensamento e traz proposições como as de número um, quatro, seis e dez que falam de divisões de figuras compondo outras (EVES, 2004).

Outros pensadores na história da humanidade, entre o período da História Antiga a Contemporânea, contribuíram para a evolução da Matemática, no entanto, nesta pesquisa, por não conseguirmos retratar todos os pensamentos, optamos por nos debruçarmos apenas na Antiguidade.

No tópico seguinte, descreveremos os matemáticos dos períodos Medieval, Moderno e Contemporâneo, pois trata-se da noção do número π .

Breve estudo histórico da noção do número π

A história da área do círculo e do perímetro da circunferência sempre esteve ligada a seu uso e estudo da constante $\frac{P}{D}$, em que P é o perímetro e D é diâmetro de uma circunferência. Essa constante recebeu o nome de π , sempre despertou o interesse de matemáticos e pesquisadores por toda a história. Citaremos alguns trechos da história desta constante tão estudada.

Os pesquisadores Bongiovanni; Watanabe (1991) dividem a história desse número em quatro períodos, que são diferenciados não por ordem cronológica, mas, pelos métodos utilizados para sua determinação, pelos objetivos do cálculo e pelas ferramentas disponíveis para cada época. A princípio, o estudo é relacionado com a razão entre o comprimento da circunferência e seu diâmetro, em seguida, na segunda fase, com a evolução do cálculo conseguiu-se uma melhor aproximação. Na terceira fase, a preocupação não estava no valor de π , mas, sim em sua natureza; nesse período, provou-se que π é irracional e solucionou-se o problema da quadratura do círculo; já no quarto e último período, a aproximação volta a ser o foco principal agora com o uso de tecnologia computacional. A seguir, estes períodos serão melhor abordados.

O primeiro período,

É o período “geométrico” e vai desde as primeiras estimativas da razão entre o comprimento da circunferência e seu diâmetro até o surgimento do cálculo, em meados do século 17. O objetivo era encontrar uma expressão racional para π e as principais ferramentas, o princípio de exaustão e a determinação de perímetros e áreas de polígonos regulares inscritos e circunscritos a uma circunferência (BONGIOVANNI; WATANABE, 1991. p. 1).

Os autores citados asseveram que o Papiro de Rhind escrito pelo escriba egípcio Ahames (por volta de 1650 a.C) contém informações que apontam para a área de um círculo ser igual a de um quadrado cujo lado é o diâmetro do círculo diminuído de sua nona parte ($\pi r^2 = (2r - \frac{2r}{9})^2 \rightarrow \pi = 16^2 / 9^2 = 256 / 81 \cong 3,1604$).

Na mesma época, “os babilônios já tinham observado que o valor de π se situa entre $3\frac{1}{8}$ e $3\frac{1}{7}$, ou seja, $25/8 < \pi < 22/7$.” Em frações decimais, isto dá $3,125 < \pi < 3,142$ (LIMA, 1991, p. 18). Até mesmo no velho testamento existe uma menção com uma aproximação de $\pi = 3$ (1 REIS VII, 23 e 2 CRONICAS IV, 2).

Na Grécia, um resultado notável obtido por Arquimedes (287 a.C. – 212 a.C.), usando o método da exaustão, descrito no livro dez de Euclides “Arquimedes partiu de um hexágono regular e calculou os perímetros e áreas de polígonos regulares de 6, 12, 24, 48 e 96 lados inscritos e circunscritos a uma circunferência e mostrou que $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70}$ (BONGIOVANNI; WATANABE, 1991, p. 2), isso equivale dizer que π está entre 3,1404 e 3,14285, foi um resultado muito expressivo, tanto que o método desenvolvido por ele foi usado por séculos afora e ainda é bastante respeitado e empregado pelas instituições escolares, para que os alunos formulem a noção da constante π .

No mesmo período, não podemos deixar de mencionar Ptolomeu, na Grécia (87 d.C. - 165 d.C.) que obteve para π o valor aproximado de 3,14166 com o cálculo de cordas de ângulos.

Na Índia, Aryabhata (≈ 500 d.C.) e, posteriormente, Bhaskara (≈ 1140 d.C.) também obtiveram $\pi \cong 3,1416$; já para Brahmagupta (≈ 628 d.C.) π seria igual a $\sqrt{10}$. “Na China, no século XII a.C., o valor de π era 3 e, no início da era cristã, $\sqrt{10}$. Tsu Ch’ung-Chih (439-501 d.C.) obteve para π o valor $355/113 \cong 3,1415929$ ”. Nos séculos XV e XVI, os matemáticos utilizando o método de Arquimedes (287 a.C.) calcularam π com 35 casas decimais. (BONGIOVANNI; WATANABE, 1991, p. 3)

No segundo período, já no século XVII, com o desenvolvimento do cálculo, que foi utilizado como ferramenta, substituindo a geometria, surge um novo e mais preciso método de aproximação do π . Inicialmente com John Wallis, em 1655 que desenvolveu

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9}$$

ou Gregory, em 1670, e Leibniz em 1674, que chegaram separadamente a $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots$ utilizando o mesmo método, Sharp, em 1699, obteve 72 casas decimais, Machin, em 1706, calculou 100 casas decimais. Euler, em 1755, conseguiu calcular 20 casas decimais em apenas 1 hora, tempo impressionante para aquela época. Dase calculou 200 casas em 2 meses e “Shanks, em 1873, usando a fórmula de Machin e após 15 anos de trabalho, obteve π com 707 casas decimais (527 corretas)” (BONGIOVANNI; WATANABE, 1991, p. 4).

O símbolo π foi utilizado pelos matemáticos ingleses Willian Oughtred, Isaac Barrow e David Gregory para designar a circunferência de um círculo. O primeiro a empregar esse símbolo para a razão entre perímetro e diâmetro foi o inglês Willian Jones, em uma publicação em 1706. O símbolo π só encontrou aceitação geral depois que Euler adotou-o em 1737 (BONVIOVANNI; WATANABE, 1991).

No terceiro período, que não é caracterizado pelo valor de π , mas relativo à sua natureza, Johann Heinrich Lambert (1728-1777), matemático suíço autodidata

dotado de extraordinária imaginação foi o primeiro a provar que o número π é irracional. “Ele mostrou que se x é racional, $x \neq 0$, então, $\operatorname{tg} x$ não pode ser racional; e como $\operatorname{tg} \pi/4 = 1$, segue-se que $\pi/4$ não pode ser racional; logo, o mesmo acontece com o π ” (EVES, 2004, p. 478).

Conforme Bongiovanni; Watanabe (1991, p. 5), em 1882, Ferdinand Lindemann (1852-1939), matemático alemão provou que o π não é raiz de nenhum polinômio com coeficientes racionais e, com isso resolveu de vez o problema da quadratura do círculo que vinha desde a antiguidade, sendo impossível a construção de um quadrado com a mesma área de um círculo, usando apenas régua não graduada e compasso.

No quarto período, no século XX, com o uso de computadores ressurgiu o interesse pela aproximação do valor de π , já que essa nova ferramenta possibilita a determinação de um grande número de casas decimais com um tempo muito menor. Em 1949, o primeiro cálculo do π por computadores calculou 2.036 casas decimais em 70 horas; em 1988, D. H. Bailey determinou com o uso de um computador, 29 milhões de casas decimais em 28 horas, um ano depois David e Gregory Chudnoviski calcularam π com 1 bilhão de algarismos decimais exatos (BONGIOVANNI; WATANABE, 1991, p. 6).

Esta análise tem fundamental importância para nosso trabalho, já que para a determinação das fórmulas de área de círculo e perímetro de circunferência, o número π é de grande valia. Por meio da análise histórica, identificamos a importância do número π para a Matemática e o avanço na descoberta da aproximação de algarismos decimais exatos.

Análise de livros Didáticos

A análise de livros didáticos é um norteador de como algum objeto matemático está sendo abordado nas escolas, dando-nos sugestões das possíveis dificuldades na aprendizagem.

Assim, optamos por fazer análise de livros didáticos com enfoque para a forma, como são apresentadas as noções de circunferência, círculo e das áreas de figuras planas, sobretudo a área do círculo. Além disso, os dados do quadro I ilustram a comparação entre as principais características apresentadas em cada coleção, assim trata-se de uma síntese das ideias apresentadas pelos autores.

Ainda, optamos por analisar a presença dos pressupostos teóricos que adotamos para esta pesquisa que são: as dialéticas de ação, formulação, validação, institucionalização de Brousseau; familiarização, ferramenta-objeto e mudança de quadro de Douady; e conversão de registro de representação semiótica de Duval. Os dados do Quadro 2 apontam a presença ou não dos pressupostos teóricos nas coleções analisadas.

Para nossa análise, escolhemos duas coleções: *Matemática e Realidade* de Gelson Iezzi; Oswaldo Dolce; Antonio Machado, de 2009, que trataremos por coleção número 1; e *Tudo é Matemática* de Luiz Roberto Dante, de 2009, que trataremos por coleção 2. A escolha destas coleções deu-se por serem as duas opções mais citadas pelos professores da escola onde foi realizada a pesquisa e fazem parte de um conjunto de coleções que foram indicadas para a escolha do Plano Nacional dos Livros Didático (PNLD) de 2010, além de serem autores bem conhecidos da classe de professores e seus trabalhos difundidos nas entidades educacionais.

Nesta análise, também apresentamos algumas definições de objetos matemáticos, de acordo com seus autores, que nos serão úteis para definir os objetos de nossa pesquisa.

Quadro I – Comparativo de características do objeto

CARACTERIZAÇÃO DOS OBJETOS	COLEÇÃO ANALISADA	
	<i>Coleção 1</i>	<i>Coleção 2</i>
Definição de perímetro	“O perímetro de um polígono é a soma dos comprimentos de todos os lados do polígono” (p. 249, volume 6º ano).	“No caso específico dos polígonos, o perímetro é a soma das medidas do comprimento dos lados” (p. 294, volume 6º ano). “Em matemática, perímetro indica a medida do comprimento de um contorno.” (p. 230, volume 8º ano)
Perímetro como contorno	A definição do perímetro como contorno não foi identificada nesta coleção.	“Em matemática, perímetro indica a medida do comprimento de um contorno.” (p. 230, volume 8º ano)
Área como grandeza	“O conjunto de pontos internos de uma curva é chamado interior da curva. É a região interior da curva” (p. 252, volume 6º ano). “Dizemos que as figuras são equivalentes quando possuem áreas iguais” (p. 190, volume 9º ano) e também utiliza decomposição e reconfiguração de figuras para facilitar a compreensão da noção de área.	Destacamos a definição de medir que é dada na seguinte forma: “medir é comparar duas grandezas de mesma espécie, verificando quantas vezes uma contém a outra (unidade de medida)” (p. 263, volume 6º ano). Área é a medida de uma superfície (p. 233, volume 8º ano)
Área como medida	“Para qualquer retângulo, a área é o produto da medida da base pela medida da altura” (p. 144, volume 7º ano). “A área do triângulo é igual ao produto da medida da base pela medida da altura relativa a essa base dividido por 2” (p. 152, volume 7º ano).	“Calcular a área de uma figura plana é medir a região ou porção do plano ocupada por essa figura. Isso é feito comparando-se a figura plana com uma unidade de área” (p. 298, volume 6º ano). Para calcular a área de qualquer região retangular basta multiplicar a medida da base (comprimento) pela medida da altura (largura) (p. 300, volume 6º ano).
O número π (Pi)	Com auxílio de uma tabela, o autor sugere que, com o aumento de número de lados do polígono, a razão do perímetro pelo diâmetro ($2r$) também se aproxima do número irracional 3,141592..., denominado π (p. 228, volume 9º ano).	Para chegar a constante π o autor se refere ao quociente entre a medida do perímetro da circunferência pela medida do seu diâmetro (p. 296, volume 6º ano). O autor apresenta o número irracional π como o quociente da medida do comprimento de uma circunferência pela medida de seu diâmetro e cujo valor é próximo de 3,1416 (p. 31, volume 8º ano)
Definição de circunferência	“Circunferência é o conjunto de pontos de um plano que estão a uma dada distância constante de um ponto fixo no plano” (p. 303, volume 8º ano).	“Circunferência é a figura formada por todos os pontos de um plano que têm a mesma distância em relação a um ponto dado desse plano (centro)” (p. 254, volume 6º ano).

Perímetro da circunferência como medida	“O comprimento da circunferência é igual a 2π vezes o raio, sendo o $\pi = 3,141592\dots$ ” (p. 229, volume 9º ano).	“O perímetro ou a medida do comprimento de uma circunferência é dado pela fórmula $C = 2 \cdot \pi \cdot r = 2 \cdot \pi \cdot r$ ” (p. 230, volume 8º ano) Para tratar de perímetro de uma circunferência, o autor se refere a relação entre a medida do comprimento de uma circunferência (c) e a medida do seu diâmetro (d)” (p. 225, volume 9º ano),
Como determinar a fórmula que permite calcular a medida do perímetro da circunferência?	Para responder a estas perguntas, o autor sugere a compreensão da noção de comprimento de uma circunferência por meio de figuras poligonais regulares inscritas e circunscritas com o número de lados aumentando de modo que os perímetros vão se aproximando do comprimento da circunferência (p. 228, volume 9º ano).	O autor sugere que os alunos façam várias medições de comprimento de objetos de formas circulares e seu diâmetro; em seguida, calcule o quociente da medida do contorno pela medida do diâmetro. Ele denomina a razão entre o comprimento da circunferência (C) pela medida do diâmetro (d) como π (Pi) e tem aproximação de 3,14. Fazendo a operação inversa: comprimento da circunferência (C) é igual ao produto de π (Pi) pela medida do diâmetro (d) chegando à fórmula $C = \pi \cdot d$. Se o diâmetro (d) equivale a duas vezes o raio (r), ao substituímos teremos: $C = 2\pi r$ (p. 296, volume 6º ano).
Definição de círculo	“Círculo é a reunião da circunferência com o conjunto dos seus pontos internos” (p. 305, volume 8º ano).	“Círculo é a região plana limitada por uma circunferência.” (p. 240, volume 7º ano)
Como determinar a fórmula que permite calcular a medida da área do círculo?	“Por meio de figuras de polígonos que com o aumento do número de lados o perímetro do polígono se aproxima do perímetro da circunferência e a medida do apótema se aproxima da medida do raio, chegando a fórmula que é apresentada $A = \pi r^2$ ” (p. 237, volume 9º ano).	O autor inicia com a comparação das áreas das regiões de quadrados inscritos, circunscritos e da circunferência e em seguida apresenta dois exemplos: o primeiro se trata da reconfiguração de um círculo dividida em setores para uma figura que se assemelha a um quadrilátero. O outro exemplo sugere o cálculo por meio da expressão de área de polígonos regulares que quando aumentam o número de lados indefinidamente “o apótema passa a ser o raio (r) e o perímetro passa a ser o comprimento da circunferência ($2\pi r$). Assim, a área do círculo pode ser representada por $A = \pi r^2$ ”

As duas coleções abordam o conceito de perímetro com a definição de perímetro de polígonos. Na coleção 1, no volume do 6º ano, temos a figura 12. Esta abordagem pode resultar em uma concepção limitada dos conceitos de área,

pois em nosso estudo notamos que os alunos usam essa definição para todas as figuras planas. A coleção 2, o volume 8º ano, traz uma definição relacionada com a medida do contorno, que é mais próxima daquela que adotamos.

Figura 12 – Perímetro como contorno

1. MEDIDA DO COMPRIMENTO DE UM CONTORNO: PERÍMETRO


PERÍMETRO DE UM POLÍGONO

No caso específico dos polígonos, o perímetro é a soma das medidas do comprimento dos lados.

ATIVIDADES

1 Na cidade onde Camilo mora há três praças. Duas têm perímetros iguais. Quais são?

a)  $136,4 \text{ m } (32,7 + 51,0 + 52,7)$

b)  $135,4 \text{ m } (32,0 + 43,0 + 32,0 + 28,2)$

c)  $136,4 \text{ m } (4 \cdot 34,1)$

Fonte: Dante, 2009, vol. 6º ano, p. 294.

Em relação ao conceito de área como grandeza, as duas coleções apresentam definições e figuras que sugerem a ideia abordada conforme a Figura 13, embora também apresentem e usem com mais frequência a área como medida.

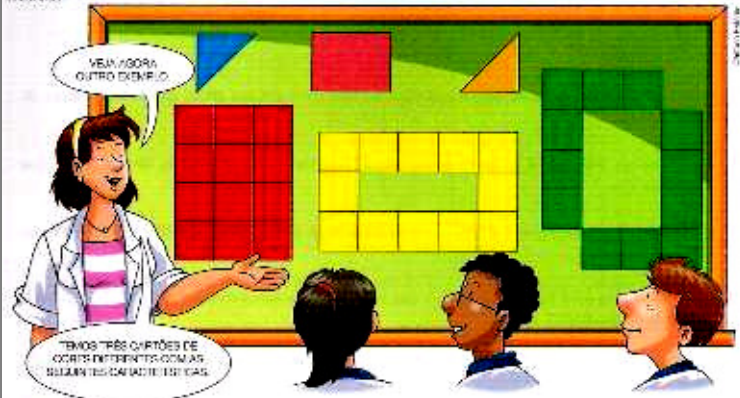
Figura 13 – Área como Grandeza

Dizemos que as figuras são *equivalentes* quando possuem áreas iguais.

As figuras acima são equivalentes porque todas são compostas por 12 cartões iguais. Dizemos que essas figuras são *equicompostas* (compostas por partes iguais em igual quantidade).

VEJA AGORA OUTRO EXEMPLO.

TENEMOS TRÊS QUADROS DE CORES DIFERENTES COM AS MESMAS DIMENSÕES E ÁREAS.



Fonte: Iezzi, Dolce e Machado, 2009, vol. 9º ano, p. 190.

Antes de nos referirmos às definições de círculo e circunferência pensamos ser necessário ponderar sobre o número π . As duas coleções introduzem de forma similar, o número π . Por exemplo, na coleção 1, o autor com auxílio de uma tabela sugere que com o aumento de número de lados do polígono a razão do perímetro pelo diâmetro ($2r$) também se aproxima do número irracional 3,141592..., denominado π . Conforme a Figura 14.

Figura 14 – Aproximações para o valor de π


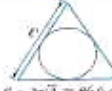
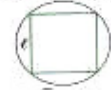
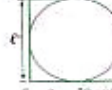




Número de lados do polígono	$\frac{2p}{2r}$	$\frac{2p'}{2r}$
3	$\frac{3r\sqrt{3}}{2r} \approx 2,6$	$\frac{6r\sqrt{3}}{2r} \approx 5,20$
4	$\frac{4r\sqrt{2}}{2r} \approx 2,83$	$\frac{8r}{2r} = 4,00$
6	$\frac{6r}{2r} = 3,00$	$\frac{4r\sqrt{3}}{2r} \approx 3,46$
8 ↓ aumenta	$4\sqrt{2 - \sqrt{2}} \approx 3,06$ ↓ aumenta	$8(\sqrt{2} - 1) \approx 3,31$ ↓ aumenta
Grande número de lados	$\frac{2p}{2r} \approx 3,14$	$\frac{2p'}{2r} \approx 3,14$

Fonte: Iezzi, Dolce e Machado, 2009, vol. 9º ano, p. 228

$$\text{Se } \frac{2p}{2r} \approx \pi \approx \frac{2p'}{2r} \text{ e } \frac{2p}{2r} \approx \frac{C}{2r} \approx \frac{2p'}{2r} \text{ logo } \frac{C}{2r} = \pi$$

Só após esse passo, chegamos à definição de circunferência que está presente nas duas coleções, como um conjunto de pontos que estão à mesma distância de um ponto dado no plano. O perímetro também é introduzido como medida em ambas as coleções; no entanto, para determinar a fórmula que permite calcular a medida do perímetro da circunferência, os autores fazem-no de forma diferente. Na coleção 1, o autor usa o aumento no número de lados de polígonos, conforme a Figura 15.

Figura 15 – Perímetro de polígono regular inscrito e circunscrito

Polígono	Perímetro do polígono inscrito	Perímetro do polígono circunscrito
triângulo equilátero	 $l = r\sqrt{3} = 43,3 \text{ cm}$ $2p = 3l = 129,9 \text{ cm}$	 $l = 2r\sqrt{3} = 86,6 \text{ cm}$ $2p' = 3l' = 259,8 \text{ cm}$
quadrado	 $l = r\sqrt{2} = 35,3 \text{ cm}$ $2p = 4l = 141,2 \text{ cm}$	 $l = 2r = 50 \text{ cm}$ $2p' = 4l' = 200 \text{ cm}$
hexágono regular	 $l = r = 25 \text{ cm}$ $2p = 6l = 150 \text{ cm}$	 $l = \frac{2r\sqrt{3}}{3} = 28,8 \text{ cm}$ $2p' = 6l' = 172,8 \text{ cm}$
octógono regular	 $l = r\sqrt{2 - \sqrt{2}} = 19,1 \text{ cm}$ $2p = 8l = 152,8 \text{ cm}$	 $l = 2r(\sqrt{2} - 1) = 20,7 \text{ cm}$ $2p' = 8l' = 165,6 \text{ cm}$
○ número de lados aumenta.	○ perímetro aumenta.	○ perímetro diminui.

Fonte: lezzi, Dolce e Machado, 2009, vol. 9ºano, p. 227.

Já na coleção 2, a fórmula da circunferência é introduzida a partir de uma atividade empírica na qual os alunos deveriam encontrar a medida do contorno (c) de algum objeto que fosse ligado ao dia a dia deles e que tivesse a forma circular.

Em seguida, deveriam medir o comprimento do diâmetro (d) desse objeto. E finalmente calcular o quociente de c por d (c/d). Os alunos, personagens da ilustração, obtiveram as medidas de objetos diferentes e de forma distinta; no entanto, chegaram a quocientes aproximados, 3,15 para um e 3,12 para outro.

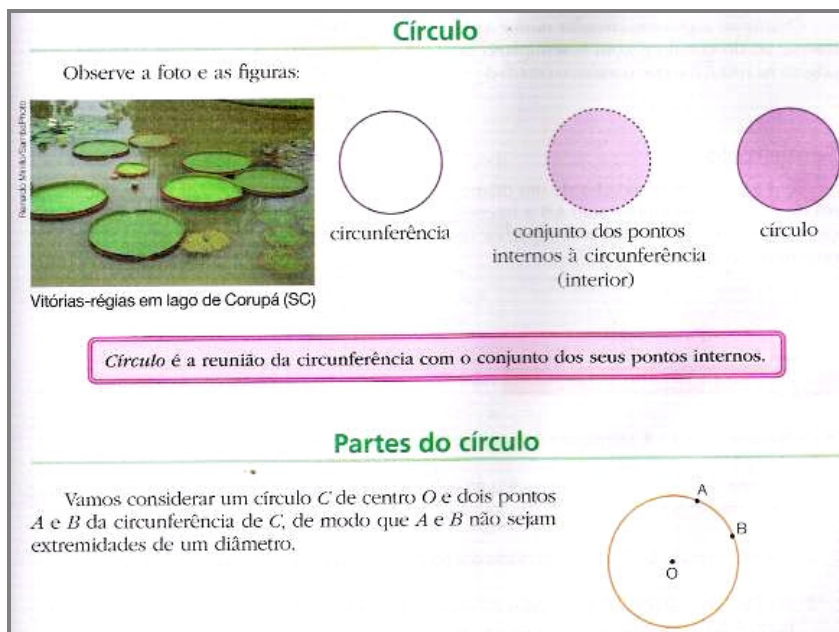
Os autores aproveitam para afirmar que o quociente do contorno (c) pelo diâmetro (d) de uma circunferência é sempre uma constante denominada π e tem valores aproximados de $22/7$ ou 3,14.

Como $\frac{c}{d} = \pi$, então, $c = \pi d$.

Como $d = 2r$, então, $c = \pi 2r$

As definições para círculo também estão bem próximas nas coleções 1 e 2 e mencionam uma região ou um conjunto de pontos que estão limitados por uma circunferência, como ilustrada pela Figura 16.

Figura 16 – definição de Círculo



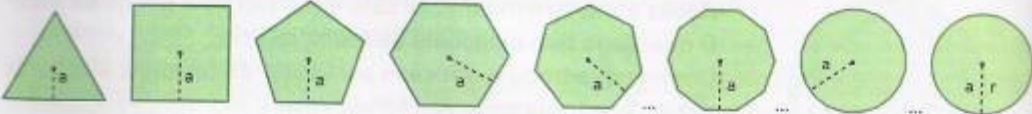
Fonte: lezzi, Dolce e Machado, 2009, vol. 8ºano, p. 305.

Para determinar a fórmula que permite calcular a medida da área do círculo, as coleções 1 e 2 partem da fórmula do cálculo da área de polígonos regulares. Com o aumento do número de lados, a figura que representa a área do polígono aproxima-se de um círculo. Observe a figura 17.

Figura 17 – Aumento do número de lados de polígonos

Exemplo 2
Usando polígonos regulares

Já vimos que a área da região determinada por um polígono regular é dada por $A = \frac{aP}{2}$, em que a é a medida do apótema e P é o perímetro.
Analisar esta sequência.



Você deve ter percebido que à medida que aumentamos o número de lados dos polígonos regulares, a tendência é chegar ao círculo, no qual o apótema passa a ser o raio (r), e o perímetro passa a ser o comprimento da circunferência ($2\pi r$).

Assim, a área do círculo pode ser representada por:

$$A = \frac{aP}{2} = \frac{r \cdot 2\pi r}{2} = \pi r^2, \text{ ou seja, } A = \pi r^2$$

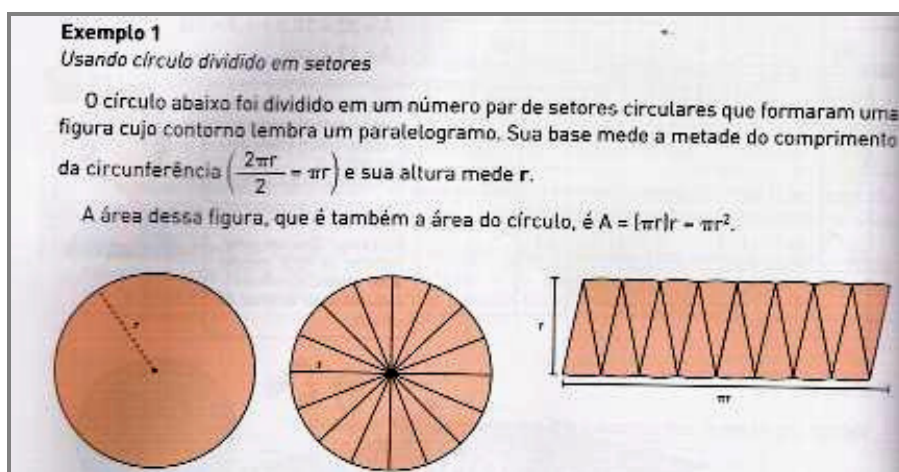
Fonte: Dante, 2009, vol. 9º ano, p. 244.

$$A = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{r \cdot 2 \cdot \pi \cdot r}{2} = \pi r^2. \text{ Para terminar, Dante (2009) ressalta as fórmulas}$$

de comprimento da circunferência e a área de círculo. $C = 2\pi r$ e $A = \pi r^2$.

Além desta definição, a coleção 2 mostra outro exemplo no qual o autor faz a divisão do círculo em setores (Figura 18) que se assemelha a triângulos que posicionados formam uma figura que lembra um paralelogramo. A área desta figura também é área do círculo.

Figura 18 – Área do círculo por aproximação da área do paralelogramo



Fonte: Dante, 2009, vol. 9º ano, p. 244.

Outra forma de representar as análises das duas coleções apresentamos no Quadro Comparativo 2 que aponta a presença ou não de alguns pressupostos das teorias que usamos nesta pesquisa.

Quadro 2 – Comparativo das coleções em relação ao uso das teorias

Teóricos	Pressupostos das teorias	Coleção analisada			
		1-Matemática e Realidade		2-Tudo é matemática	
		Não atende	Atende	Não atende	Atende
Brousseau	Ação		X		X
	Formulação	X			X
	Validação	X			X
	Institucionalização	X		X	
Douady	Familiarização		X		X
	Ferramenta-objeto		X		X
	Mudança de quadro	X		X	
Duval	Mudança de registro		X		X

Nos dados do Quadro Comparativo 2, indicamos que na Coleção 1, os pressupostos de formulação, validação e institucionalização não estão abordados de forma que possam ser identificados, como também não está prevista a mudança de quadro para resolução das atividades. Os pressupostos de ação, familiarização e conversão de registro estão de alguma forma presentes, porém de forma superficial.

Ressaltamos que, de forma geral, as atividades propostas têm uso de medidas de grandezas e têm como melhor estratégia para a resolução do problema o uso das fórmulas e definições dadas. Os autores não parecem ter como prioridade o desenvolvimento do pensamento matemático para a formação dos saberes dos alunos envolvidos.

Na *Coleção 2*, não foi possível identificar a institucionalização do conhecimento como também a mudança de quadro, já os pressupostos de ação, formulação, validação, familiarização e conversão de registro estão de alguma forma contemplados na sequência proposta pelo autor. Observamos que nas referências do autor não constam nenhum dos teóricos trabalhados nesta pesquisa, embora as atividades contemplem parcialmente as ideias desses teóricos.

Nessa coleção observamos que as atividades propostas necessitam do uso da concepção do objeto matemático, um conhecimento sobre suas características e as propriedades dos objetos envolvidos, como exemplo, a atividade 74 “se K é o valor da razão entre as medidas de grandezas lineares correspondentes em duas regiões planas semelhantes: Qual é o valor da razão entre os perímetros? E as áreas?” (volume 9º ano, p. 247). Todavia a maior parte da familiarização faça uso de medidas e fórmulas.

A construção de uma situação-problema deve levar em consideração algumas características e objetivos conforme Almouloud (2007, p. 174). Para esta análise, escolhemos algumas, que são as mesmas que serão observadas na construção de nossa sequência e estão apresentadas nos dados do Quadro 3.

Características:

1. Os alunos entendem facilmente os dados do problema e podem se engajar em sua resolução, usando seus conhecimentos disponíveis;
2. Os conhecimentos antigos dos alunos são insuficientes para a resolução completa dos problemas;
3. Os conhecimentos, objeto de aprendizagem, são ferramentas que devem ser mobilizadas, em última instância, para obter a solução final; e
4. O problema pode envolver vários domínios de conhecimento: álgebra, geometria, domínio numérico, entre outros.

Objetivos:

1. Auxiliar o aluno na construção de conhecimentos e saberes de uma maneira construtiva e significativa;
2. Desenvolver habilidades como saber ler, interpretar e utilizar as diferentes representações matemáticas, bem como desenvolver o raciocínio dedutivo.

Quadro 3 – Características e Objetivos de uma Situação-Problema

Características e Objetivos	Coleção analisada					
	1-Matemática e Realidade			2-Tudo é Matemática		
	Não atende	Atende parcialmente	Atende	Não atende	Atende parcialmente	Atende
Característica 1	X				X	
Característica 2	X				X	
Característica 3	X					X
Característica 4	X			X		
Objetivo 1	X					X
Objetivo 2		X				X

Análise da coleção1:

A característica 1 não está contemplada nesta coleção, porque a estrutura de ensino montada pelo autor prioriza a “aprendizagem por ostensão, ou seja, aprendizagem pela observação de modelos prontos” (ALMOULOU, 2007, p. 47), que traz as definições, os exemplos e, por último, as atividades propostas para o

aluno. Assim, o conhecimento mobilizado pelo aluno, geralmente, é proveniente da ostensão feita na introdução do objeto de estudo. Mas, nas situações que estão presentes na coleção, os dados apresentados são claros, o que pode facilitar o entendimento do problema pelos alunos.

A disposição dos problemas, das definições e exemplos não permite identificar se os conhecimentos antigos dos alunos são suficientes para a resolução dos problemas dados.

A maneira como estão apresentados os objetos não parece proporcionar condições, para que o aluno se engaje em resoluções diferentes daquelas propostas pelo autor.

Os domínios usados para as resoluções das atividades desta coleção são bem distintos, ou seja, há indícios de uma articulação entre os quadros algébrico e geométrico na resolução de alguns problemas e na introdução de noções relacionadas com o estudo da área de círculo e o perímetro de circunferência.

Em nossa análise, o objetivo 2 está parcialmente contemplado. Um exemplo que pode ser citado é o quadro Matemática em notícia, presente ao final de cada unidade em que o aluno é conduzido à leitura e interpretação de uma notícia e com a leitura das várias representações que pode desenvolver o raciocínio lógico, como ilustra a Figura 19.

Figura 19 – Matemática em notícia



Fonte: Iezzi, Dolce e Machado, 2009, vol. 9ºano, p. 298.

Análise da coleção 2:

Nas atividades em que o objeto é apresentado por meio de uma situação, atende à característica 1, porém nem todas as atividades são apresentadas por uma situação contextualizada, e um caso em que é apresentada é no início do capítulo que trata de perímetros, áreas e volumes.

Carlos quer colocar uma cerca do tipo alamedado, no pasto onde fica seu gado. O pasto tem forma retangular de dimensões 100m por 140m. Ele pretende pôr um mourão a cada 20 m para prender a cerca. Quantos metros de cerca e quantos mourões Carlos precisa comprar? (v. 9, p. 222)

As atividades propostas pelo autor atendem parcialmente às características número 2, pois em algumas situações em que o autor apresenta o objeto, os conhecimentos dos alunos são suficientes, já em outras atividades, não. Na atividade em que o autor introduz a noção de área do círculo, fica claro que para responder é preciso o conhecimento que se espera alcançar. “Imagine que um show de rock fosse acontecer numa praça circular, com 20m de raio. Como faríamos para saber quantas pessoas cabem na praça, considerando 5 pessoas por metro quadrado?” (v. 9, p. 242)

As atividades em que o conhecimento mobilizado pelo aluno não é suficiente para resolver por completo o problema, atendem às características número 3 em que o objeto de estudo deve ser utilizado para obter solução final.

Os domínios usados para as resoluções das atividades desta coleção são bem distintos, ou seja, um problema de álgebra resolvido pela fórmula algébrica, um problema de geometria resolvido pela forma geométrica e, assim, sucessivamente, portanto, não atende às características do item número 4.

Como o autor optou por apresentar o objeto de estudo por meio de situação contextualizada, o aluno pode ser motivado na resolução para a construção dos saberes de maneira construtiva. Nesta coleção percebemos que ao final de cada capítulo o autor apresenta uma situação denominada: Para Ler, Pensar e Divertir-se. A Figura 20 ilustra uma dessas situações.

Figura 20 – Para Ler, Pensar e Divertir-se

PARA LER, PENSAR E DIVERTIR-SE

LER

XADREZ E POTÊNCIAS

O jogo de xadrez é um dos mais antigos do mundo. Ele foi inventado há séculos na Índia. Seu tabuleiro tem 64 casas (8 por 8).

Conta uma lenda que um rei muito entusiasmado com jogo de xadrez quis dar uma recompensa ao seu inventor, Lahur Sessa. O inventor, grande conhecedor de Matemática, fez ao rei um pedido aparentemente simples: queria 1 grão de trigo pela 1ª casa, 2 grãos pela 2ª casa, 4 grãos pela 3ª casa, 8 grãos pela 4ª casa, 16 grãos pela 5ª casa, e assim sucessivamente, sempre dobrando o número de grãos colocados na casa anterior, até a 64ª casa.

O rei não conseguiu atender a esse pedido simples! Sabe por quê?

O número total de grãos pedidos foi:

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^{63}$$

1ª 2ª 3ª 4ª 5ª 6ª ... 64ª

cujo resultado é: 18 446 744 073 709 551 616!

Dá para imaginar essa quantidade de grãos de trigo?

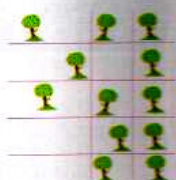
De acordo com John Wallis, matemático inglês, essa quantidade de grãos de trigo poderia encher um cubo que tivesse 9 400 metros de aresta. Se contássemos 5 grãos a cada segundo, trabalhando dia e noite sem parar, levaríamos 1 170 milhões de séculos para contar toda essa quantidade de grãos.

Fonte: Malba Tahan. O homem que calculava.

Quantos grãos de trigo o inventor deveria receber pela 9ª casa? E pela 15ª? Use calculadora.
256 grãos ($2^8 = 256$); 16 384 grãos ($2^{14} = 16 384$)

PENSAR

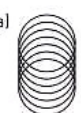
Um fazendeiro tem algumas árvores frutíferas dispostas conforme a figura ao lado. Ele quer separá-las com seis cercas de modo que cada árvore tenha seu próprio espaço. Assim, duas árvores não podem ficar juntas. Desenhe em seu caderno as cercas para o fazendeiro.
Há outras soluções.

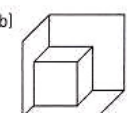



DIVERTIR-SE

ILUSÃO DE ÓPTICA

Fixe o olhar em cada figura por alguns minutos. Enquanto você a olha, ela não parece mudar de forma?

a) 

b) 

c) 

CAPÍTULO 3 95

Fonte: Dante, 2009, vol. 6º ano, p. 95.

Nos dois livros analisados, as definições de medida de área de figuras planas estão bastante próximas e dão a ideia de área, como superfície; e área, como grandeza.

Em nossa pesquisa, também utilizamos o conceito de área como grandeza, para que os alunos possam melhor compreender a área da figura plana.

Análise dos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) servem como norteadores para o ensino, indicando práticas que favoreçam a construção do conhecimento e a preparação do indivíduo para a vida social, profissional e cultural, ou seja, na formação do cidadão. Além disso, os PCN apontam que

A matemática está presente na vida de todas as pessoas, em situações em que é preciso, por exemplo, quantificar, calcular, localizar um objeto no espaço, ler gráficos e mapas, fazer previsões. Mostra que é fundamental superar a aprendizagem centrada em procedimentos mecânicos, indicando a resolução de problemas como ponto de partida da atividade matemática a ser desenvolvida em sala de aula (PCN, 1998, p. 59).

Para cumprir seus propósitos, os PCN enfatizam a exploração do espaço e de suas representações e a articulação entre a geometria plana e espacial, além de destacar a importância do desenvolvimento do pensamento indutivo e dedutivo. Este pensamento deveria ser desenvolvido pelo próprio aluno, como mencionado no PCN específico de Matemática, que menciona,

a importância de o aluno desenvolver atitudes de segurança com relação à própria capacidade de construir conhecimentos matemáticos, de cultivar auto-estima, de respeitar o trabalho dos colegas e de perseverar na busca de soluções (PCN, 1998, p. 15).

Como o público-alvo de nossa pesquisa é constituído de alunos da 8ª série (9º ano) do Ensino Fundamental, buscamos os Parâmetros destinados ao 4º ciclo nos tópicos Espaço e Forma e Grandezas e medidas. De acordo com os PCN,

Os conceitos geométricos constituem parte importante do currículo de matemática no ensino fundamental, por que, por meio deles, o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever, e representar, de forma organizada, o mundo em que vive (PCN, 1998, p. 51).

Para melhor apreensão do conhecimento, o professor pode utilizar construções com régua e compasso das figuras em discussão e ainda promover transformações, como as isometrias e homotetias, dando condições da percepção

das relações entre figuras. No bloco Grandezas e medidas, é mostrada a relevância da sua praticidade e utilidades, assim, o aluno consegue ver claramente o conhecimento matemático em ação, ou seja, em seu cotidiano.

Dos objetivos de Matemática para o quarto ciclo, queremos dar atenção para o desenvolvimento do pensamento geométrico e da competência métrica, sobretudo em “obter e utilizar fórmulas para o cálculo de áreas de superfícies planas (p. 82)”, que também está contemplado nas atividades de nossa pesquisa.

Na página 87 do documento há um quadro que mostra os conceitos e procedimentos para o 4º ciclo do Ensino Fundamental e citaremos apenas aqueles que estão envolvidos em nossa sequência didática.

Desenvolvimento da noção e semelhança de figuras planas partir de ampliações ou reduções, identificando as medidas que não se alteram (ângulos) e as que se modificam (dos lados, da superfície e perímetro);

Cálculo de área de superfícies planas por meio da composição e decomposição de figuras e por aproximações;

Construção de procedimentos para o cálculo de áreas e perímetros de superfícies planas (limitadas por segmentos de reta e/ou arcos de circunferência);

Cálculo da área de superfície total de alguns sólidos geométricos (prismas e cilindros);

Compreensão dos termos algarismo duvidoso algarismo significativo e erro de medição, na utilização de instrumentos de medida;

Estabelecimento da relação entre a medida da diagonal e a medida do lado de um quadrado e a relação entre as medidas do perímetro e do diâmetro de um círculo (PCN, 1998, p. 87).

Cabe ressaltar que a estrutura de nosso trabalho baseia-se também no empirismo e manipulação de objetos concretos ou materiais, como já previsto nos PCN “é desejável que não se abandonem as verificações empíricas, pois essas permitem produzir conjecturas e ampliar o grau de compreensão dos conceitos envolvidos (p. 87)”, essa prática torna-se necessária, para que haja melhor compreensão das noções desejadas.

Como nossa sequência é basicamente empírica, uma possível dificuldade seria a medição de segmentos de reta ou arcos de circunferência, pois, alguns tratam de números incomensuráveis, ou seja, não podem ser medidos por serem números irracionais, os números irracionais também estão previstos pelos PCN, que afirmam ser de extrema importância por toda a história, justificando o número π ter uma parte específica em nosso trabalho.

CAPÍTULO V

METODOLOGIA E PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Metodologia

Para desenvolver esta pesquisa optamos por usar a metodologia de Engenharia Didática proposta por Artigue (1998) apud Almouloud (2007). Esta metodologia tem como principal característica o esquema experimental com realizações didáticas em sala de aula.

Para realizarmos a construção desta sequência e garantir que siga os pressupostos de uma Engenharia Didática, precisamos contemplar algumas de suas fases.

A seguir, descreveremos as fases que utilizaremos nesta pesquisa para que atendam aos pressupostos da Engenharia Didática: análises prévias, questão de pesquisa, construção da sequência, análise a priori, experimentação, análise a posteriori e validação da sequência.

- Análises prévias – o pesquisador precisa identificar os problemas de ensino e aprendizagem daquilo que se quer ensinar; para isso, deve fazer um estudo da organização matemática que consiste em “identificar os métodos e/ou as estratégias de resolução de cada situação, evidenciando os conhecimentos e saberes matemáticos envolvidos” (ALMOULOUD, 2007, p. 176), e uma análise da organização didática do

objeto matemático escolhido em que é necessário analisar a pertinência das situações propostas, identificar as variáveis de comando, prever as dificuldades dos alunos, identificar os novos conhecimentos e métodos de resolução.

Para começar, buscamos na história a noção de figuras planas e de como elas têm sido tratadas e sua evolução ao longo dos tempos, aliada a uma análise dos PCNs nos quais procuramos identificar quais são os parâmetros que nos direcionam ao ensino dessa noção. Ainda fizemos uma análise dos livros didáticos, a fim de percebermos como o objeto matemático em questão é apresentado, e para finalizar a parte referente as análises, debruçamos-nos nas propriedades e definições da noção do comprimento da circunferência e da área do círculo.

No Capítulo II Revisão Bibliográfica, analisamos as pesquisas de Sonia Facco e Ana Chiummo na intenção de encontrar subsídios que pudessem nortear a nossa pesquisa. A escolha foi feita em razão de similaridades com o trabalho que pretendíamos desenvolver, dentre estas, podemos citar: o quadro teórico, a metodologia de pesquisa e também parte do objeto estudado, já que estas trabalham com áreas de figuras planas.

- Questão de pesquisa – após as análises prévias que permitiram identificar a problemática da pesquisa, formulamos a questão de pesquisa: uma sequência didática, com atividades que permitissem ao aluno a comparação de área do círculo e perímetro da circunferência com a área e perímetro de outras figuras, que minimizariam as dificuldades na compreensão e diferenciação desses dois objetos matemáticos?
- Construção da sequência – com o foco da atenção na questão de pesquisa e nas análises prévias, elaboramos uma sequência didática que privilegiasse situações de aprendizagem que conduzissem o aluno a uma reflexão e à construção do conhecimento do objeto matemático estudado.

- Análise a priori – após a construção da sequência, realizamos a análise a priori das atividades propostas em que devem constar qual seria a estratégia ótima esperada em relação ao objeto matemático ou outra estratégia que os alunos pudessem utilizar. Nessa análise, fizemos comentários sobre a resolução matemática propriamente dita e uma análise didática na qual procuramos identificar como as atividades podem modificar os processos de aprendizagem por parte dos alunos;
- Experimentação – é a fase da aplicação da sequência proposta na qual, além do professor aplicador, também se necessitou de um observador para fazer anotações dos procedimentos que nem sempre estão nos registros dos alunos.
- Análise a posteriori – é a fase em que o pesquisador analisa os registros feitos pelos alunos com relação às atividades da sequência proposta a fim de verificar se as respostas foram condizentes com as expectativas da análise a priori;
- Validação da sequência – após fazer a análise a posteriori e a análise dos registros do observador, então, o pesquisador pode validar ou não a sequência didática ao compará-la com a análise a priori e constatar se houve avanço na concepção em resolução das atividades propostas e ao mesmo tempo se a pesquisa permitiu responder à questão do estudo.

Procedimentos metodológicos

A unidade de ensino escolhida foi uma escola pública estadual na cidade de Mogi das Cruzes – SP com aproximadamente 2.800 alunos, sendo cerca de 950 no período da tarde, no qual este pesquisador trabalha com alunos do Ensino Médio, desde o ano 2004, como professor efetivo da rede pública do Estado de São Paulo.

A comunidade escolar tem uma característica de ter alunos de muitos bairros da cidade e até de outras cidades vizinhas.

Escolhemos dez alunos de 8^a série (9^o ano) do Ensino Fundamental da escola onde trabalhamos, tendo melhores chances de acompanhar o processo da pesquisa. A seleção foi feita com o auxílio da coordenação da escola com o objetivo de montar um grupo com alunos de vários níveis de aprendizagem com boa assiduidade às aulas, para garantir a continuidade da sequência didática proposta.

No trabalho montamos uma sequência didática para o estudo das áreas do círculo e perímetro da circunferência. Com a construção geométrica da circunferência, usando régua, compasso e recortes em papel e massinhas, visa-se a induzir o aluno a calcular a área do círculo por aproximação das áreas de polígonos regulares de n lados. Por meio de experimentos, encontrar o valor aproximado da constante π (PI), para depois provocar a dedução da fórmula de área do círculo junto com os alunos, em seguida calcular a área de um círculo.

No presente estudo desenvolvido com os alunos, utilizamos situações envolvendo um campo de problemas colocados em um ou vários domínios de saber.

Durante a aplicação das atividades, o professor deve proporcionar momentos em que exista o debate dos conceitos e das noções com base nas conclusões dos alunos e, após esse debate, o professor deverá fazer o fechamento das discussões com aquilo que Brousseau (2008) chama de institucionalização do conhecimento. Pensando ser importante após a institucionalização que o professor proponha outras atividades para conseguir uma familiarização com o objetivo de consolidar os conhecimentos recém-adquiridos.

Em seguida buscamos responder nossa questão de pesquisa pela análise do corpus constituído pelas produções dos alunos levando em consideração as atividades propostas e as informações coletadas no decorrer da experimentação.

Com base nessas análises, foi feita a retomada do problema com a síntese das conclusões e avaliação das limitações da pesquisa. Discutimos assim os principais resultados e as questões levantadas pela pesquisa e que podem ser objeto de outras pesquisas.

Ao final da pesquisa temos como produto, uma sequência didática validada, que poderá ser utilizada como objeto de estudo para outras pesquisas ou para introdução da noção de perímetro da circunferência e área de círculo. No próximo capítulo apresentamos esta sequência.

CAPÍTULO VI

ANÁLISE A PRIORI, DESCRIÇÃO DA EXPERIMENTAÇÃO E ANÁLISE A POSTERIORI

Neste capítulo apresentamos a sequência proposta, a descrição da experimentação, os registros dos alunos em relação à sua resolução, além dos comentários do professor observador, como também a análise a posteriori das atividades.

Cabe ressaltar que a questão de pesquisa explicitada na introdução é: uma sequência didática, com atividades que permitam ao aluno a comparação de área do círculo e perímetro da circunferência com a área e perímetro de outras figuras, minimizaria as dificuldades na compreensão e diferenciação desses dois objetos matemáticos?

Apresentação da sequência experimental com análise a priori

A análise a priori é uma análise prévia, feita antes da aplicação e tem por objetivo levantar hipóteses sobre a resolução das atividades propostas e, posteriormente, compará-las com a análise a *posteriori* para validarmos ou não nossas previsões.

Para a análise a priori, além de considerar a resolução matemática, também foram considerados os pressupostos do quadro teórico escolhido.

Como já foi citado anteriormente, os alunos escolhidos para participarem desta pesquisa eram alunos da 8ª série ou 9º ano do Ensino Fundamental.

Para melhor compreensão de área do círculo, achamos necessário realizarmos uma revisão do conceito de área de figuras planas por partirmos dos pressupostos que os alunos têm uma visão inadequada desse conceito. Conforme pesquisas anteriores apontam, o conceito de área tem sido tratado de forma extremamente métrica, nossa proposta foi introduzir o conceito de área como grandeza.

Em nossa pesquisa, assumiremos a noção de área como grandeza, ou seja, um ponto de vista ligado tanto à superfície como à métrica, conforme Baltar (1996, *apud* Almouloud e Facco, 2004),

Quando se define uma aplicação medida entre superfícies planas e números, é necessário antes de construir a área como grandeza autônoma, deixar claro para o aluno as diferenças existentes entre área e perímetro. Acreditamos que os diferentes conceitos sobre área são identificados por meio da verificação da medida da área, da comparação de áreas e superfícies, da construção de superfícies de mesma área de uma superfície dada, das superfícies de área mínima para um contorno fixo e da verificação das deformações que conservam a área (ALMOULOUD; FACCO, 2004, p. 03).

No estudo da noção de área como grandeza, antes de determinarmos ou atribuímos um valor numérico e estritamente positivo é necessário que o aluno perceba a diferença entre área e perímetro. Essa diferenciação se dá por meio de atividades que os levem à reflexão sobre área como uma superfície que faz parte do plano, e estas deve contemplar comparações entre figuras que podem ou não ocupar o mesmo espaço.

Em nossa sequência as atividades foram elaboradas pensando em proporcionar aos alunos condições de construir a noção de área como grandeza.

Descrição da experimentação e análise a posteriori das atividades propostas

Nesta etapa relatamos a experimentação, fase da aplicação da sequência proposta na qual, além do professor aplicador, também se necessita de um observador para fazer as anotações dos procedimentos que nem sempre estão nos registros dos alunos, como a linguagem não verbal, além das dificuldades encontradas ao longo da realização da sequência.

Em princípio o aplicador seria a professora que ministrava aulas em uma das salas de 8ª série/9º ano, porém esta se aposentou antes do início da aplicação da sequência. Optamos, então, pelo professor que a substituiu que também lecionava para duas outras salas da mesma série. Este profissional por não ser efetivo da Instituição de Ensino deixou as aulas, não nos dando outras opções, já que não sabíamos quando e quem o substituiria, portanto, optamos pelo próprio pesquisador como o aplicador, tendo em vista por este conhecer os procedimentos metodológicos escolhidos e os objetivos da sequência.

Em reuniões com a professora coordenadora e a observadora, explicamos o funcionamento de uma Engenharia Didática e as principais ideias dos autores que compõem a Fundamentação Teórica, além de esclarecer os objetivos da pesquisa, assim como os procedimentos metodológicos adotados. Quando houve consenso de todas as partes envolvidas no processo passamos ao próximo passo, a escolha dos alunos.

Esta seleção ficou a cargo do professor observador, por ministrar aulas às salas da 8ª série/9º ano na Instituição Escolar, fase de escolarização adequada aos conteúdos previstos na pesquisa. Considerando as premissas orientadas pelo professor pesquisador, foram selecionados dez alunos com níveis de aprendizagem e dificuldades diversas, por entender que o aluno que tem maior habilidade pode contribuir com o outro de menor habilidade dando sugestões e revelando estratégias para a solução da atividade. Já o aluno de menor habilidade, pode contribuir com suas dúvidas que levarão os dois à reflexão sobre a situação.

A quantidade de alunos deveu-se ao fato de que com este número reduzido, dispostos em cinco duplas, tínhamos uma melhor atenção despendida na aplicação e observação.

Antes do primeiro contato, o professor, aplicador e o observador, prepararam a sala em uma disposição que privilegiasse a formação das duplas, para que os pudessem ficar uma de frente para a outra, assim garantir uma boa comunicação nas discussões. Para tanto, foi escolhida a forma de semicircunferência.

No primeiro contato após as apresentações devidas, os alunos foram questionados sobre suas notas para que eles mesmos se classificassem. A partir dessas informações, o professor aplicador escolheu as duplas conforme o seguinte critério: desempenho forte com desempenho fraco.

Como os alunos eram menores de idade, para garantir sua integridade optamos por não citar nomes reais, então, eles escolheram seus pseudônimos que foram utilizados para identificá-los na pesquisa. As duplas foram formadas por: 1ª Alice e Sophia; 2ª Yasmin e Diego; 3ª Albert e Alice; 4ª Miki e Fernanda; 5ª Tiemy e Roberta.

No total foram sete encontros, sendo o primeiro de duas aulas, o segundo de uma aula e os demais de três aulas. A aplicação ocorreu entre 19 de outubro e 25 de novembro de 2011 no período da tarde, para que não houvesse problemas de ausência durante a aplicação.

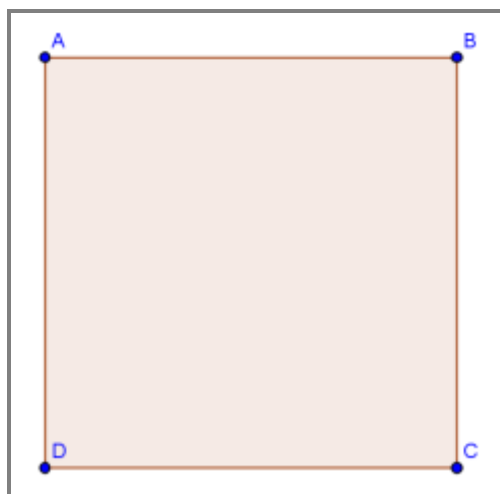
Um fator relevante para esta aplicação foi citado pelos alunos e está em conformidade com as informações oferecidas pela professora coordenadora nas primeiras discussões. Assim em outubro de 2011, foi detectado que os alunos de algumas salas participantes tiveram até três professores da disciplina de Matemática durante o ano letivo e estavam em defasagem em comparação aos das outras salas.

O professor aplicador explicou sobre os procedimentos e a importância da aplicação da sequência, tirando as dúvidas dos participantes. Esta atitude tem o intuito de motivar os alunos na participação do processo, como também

tranquilizá-los em relação àquilo que vai ser exigido nos procedimentos das atividades.

Atividade 1 - Medir o perímetro e encontrar a área de um quadrado dado

- 1.1- Dado o quadrado ABCD, com o auxílio de uma régua graduada, meça seu contorno e anote no espaço indicado. Contorno:- -----



- 1.2- Você poderia usar a régua graduada para medir o espaço interno do quadrado? Discuta sua resposta com as outras duplas.
- 1.3- Descreva uma maneira para medir o espaço interno do quadrado e exponha suas ideias.
- 1.4- Qual é o nome atribuído ao espaço interno e ao contorno da figura que você mediu?

Análise a priori da atividade 1

Esperamos que o aluno perceba a diferença entre área e perímetro. É possível que ele obtenha a medida dos lados do quadrado e, ao encontrar o produto das medidas dos lados, chegue à medida da área da figura, embora

consiga chegar a um resultado satisfatório, isso não nos garante que ele faça a diferenciação entre área e perímetro.

Na atividade 1, o aluno com os conhecimentos prévios que tem sobre as figuras geométricas e suas características e sistemas de medidas, deverá efetuar as medições e comparar os resultados obtidos. Quando na atividade é solicitado ao aluno medir o espaço interno com uma régua graduada, nós esperamos que ele perceba a impossibilidade de executar a atividade e, então, busque uma forma diferente para fazer a medição, por meio de figuras menores que completem a área do quadrado, adotando-as como unidade de medida para comparação.

Antes de realizar a atividade, o aluno precisa refletir sobre a situação e levantar hipóteses para uma possível solução.

Ao fazer as comparações dos resultados obtidos, os alunos podem inferir se estes são coerentes ou não.

Ao fazer conjecturas sobre as possíveis diferenças e se o aluno constatar que sua resposta está muito distante daquela encontrada pela maioria, ele poderá retomar sua ação de medição e efetuar uma nova formulação e, posteriormente, validar suas novas conjecturas, caso o resultado obtido seja coerente e aprovado na discussão.

O objetivo é fazer com que o aluno perceba a diferença existente entre área e perímetro, já que para calcular o perímetro ele mediu o contorno da figura e notou que a medida da área refere-se à superfície da figura plana e não ao contorno.

Nas atividades seguintes, os alunos também deverão trabalhar da mesma forma, ou seja, realizando uma ação, passando pela formulação de um pensamento matemático e, ao final das discussões, realizar uma validação das suas conjecturas. Sem esquecer que caberá ao professor efetuar a institucionalização do conhecimento ao final de cada atividade.

Para conseguir a medida do perímetro, é necessário que o aluno saiba manipular o instrumento de medição (régua) e efetue a soma das medidas encontradas. Estas medidas podem ser não inteiras, assim, ele deverá dominar a

adição em números inteiros e decimais, já para conseguir a medida da área o aluno deverá dominar a multiplicação de números inteiros e decimais.

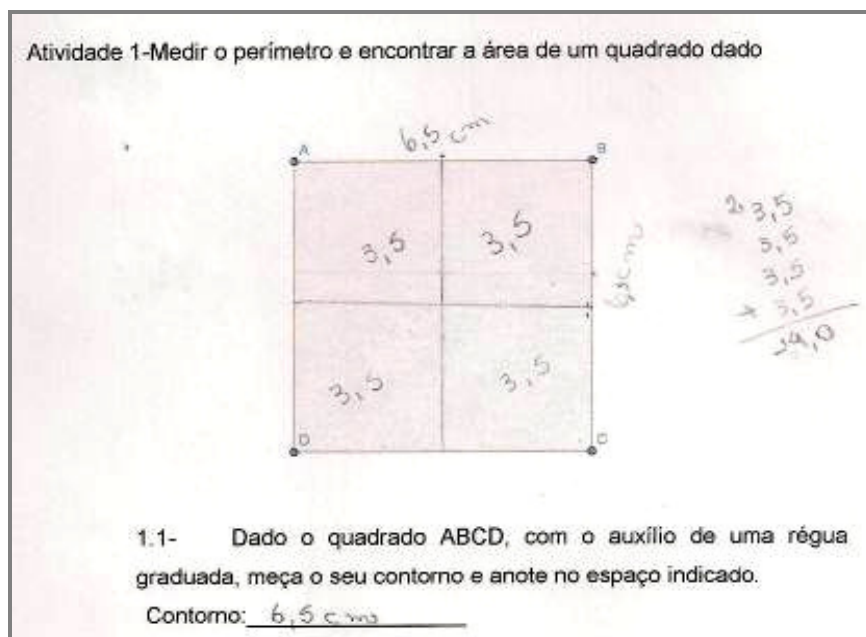
Descrição da experimentação e análise a posteriori da atividade 1

Para a realização da primeira atividade, os alunos receberam os materiais que julgamos ser necessários para a resolução, como as folhas impressas, contendo as atividades e a régua graduada.

A primeira atividade foi lida em voz alta e a comunicação entre os alunos deveria fluir de forma produtiva, com alto grau de atenção e interesse. No entanto, no enunciado 1.1 o aluno Diego teve dúvidas sobre a necessidade de registrar o valor de todos os lados do quadrado na própria figura.

As diferenças das concepções que cada aluno tinha sobre o objeto matemático em questão, tornaram-se claras, tendo em vista que as duplas optaram por métodos diferentes para responder à pergunta 1.1.

Quatro das cinco duplas alcançaram o objetivo de medir o contorno com a régua, porém uma delas não alcançou resultado porque se confundiu na leitura da régua graduada e também registrou a medida apenas de um lado da figura, demonstrando não ter clareza sobre o que é contorno, como pode ser observado na figura 21.

Figura 21 – Protocolos dos alunos referentes ao item 1 da atividade 1

Na Questão 1.2, duas duplas afirmaram poder medir o espaço interno do quadrado com uma régua e três disseram não poder medir, porém apenas uma delas alcançou o objetivo da atividade que, era perceber a impossibilidade de medir com régua a medida da área de um quadrado, pois sua resposta foi: *“Não! Com a régua só conseguimos medir o perímetro”*. Cabe aqui a observação de que até esse momento das atividades, não foi citada a palavra perímetro, portanto, este é um conceito adquirido previamente por um dos integrantes da dupla. As demais duplas demonstraram não ter compreendido a expressão: medir o espaço interno do quadrado.

Na Questão 1.3, duas duplas fizeram uso da ideia de área de um quadrado por meio de multiplicação dos lados e registraram resultados iguais, porém sem as unidades de medida de área, demonstrando indícios de que a ideia de área estava associada à de medida. Outras duas duplas dividiram o quadrado em quatro partes e afirmaram tê-los somado. Esta ação assemelhou-se aquela havíamos previsto da construção de figuras menores que associadas completariam a figura maior, todavia, esperávamos que os alunos adotassem esse quadrado menor, como uma unidade de medida. A observação mostrou que esse conceito já tinha sido estudado por esses alunos em séries anteriores.

Uma das duplas apresentou um registro ao lado do quadrado na Figura 21, referindo-se claramente à soma de quatro medidas todas iguais a 3,5 (sem mencionar a unidade de medida). Esta medida foi obtida ao medir a diagonal de cada quadrado menor construído por eles. A última dupla não apresentou resposta.

Percebemos que as discussões feitas com as duplas, após cada questão teriam levado os alunos a revisitar os conceitos até aqui abordados, pois na 1.4 quatro das duplas demonstraram ter obtido essa noção conforme, mostra a Figura 22.

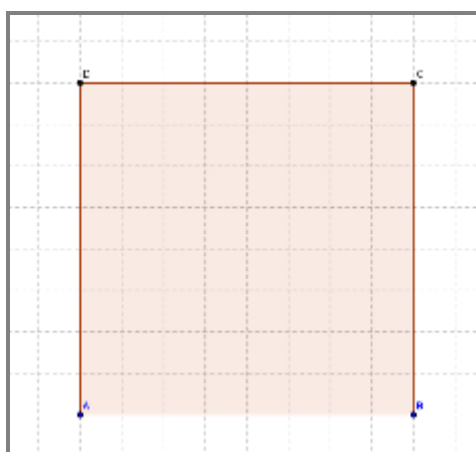
Figura 22 – Protocolos dos alunos referentes ao item 4 da atividade 1

1.4- Qual é o nome atribuído ao espaço interno e ao contorno da figura que você mediu?

O perímetro é o contorno e a área é o interior do quadrado.

Então, concluímos que a atividade alcançou seu objetivo principal, que foi a diferenciação entre área e perímetro de uma figura.

Atividade 2 - Determinação da medida do perímetro e área de um quadrado em folha quadriculada



- 2.1- Usando o quadriculado, determine a medida do perímetro do quadrado ABCD.
- 2.2- Ainda com o uso do quadriculado, determine a área do quadrado.
- 2.3- Qual é a unidade de medida que você está usando? Compare e discuta sua resposta com as outras duplas.
- 2.4- Elabore uma fórmula que permita calcular a medida da área de um quadrado qualquer. Compare e discuta com as outras duplas.

Análise a priori da atividade 2

O objetivo desta atividade é que o aluno possa diferenciar a área do perímetro e construa a ideia de área, usando uma unidade de medida.

Assim, o aluno deverá utilizar os quadrinhos como unidade de medida para determinar a medida do perímetro. Como não foi utilizada na resolução do problema uma medida, como por exemplo, centímetro ou metro, o aluno poderá perceber a área como uma superfície e não como medida.

Nesta fase de escolarização, 8ª série ou 9º ano do EF, o aluno deveria ter se deparado com as figuras apresentadas, como também com o conceito de área de figuras planas, previsto para os anos iniciais do ciclo II do EF. Optamos por conduzir o aluno à determinação de área por contagem simples, para tentar desconstruir o conceito de área como medida e conduzi-lo a uma reflexão sobre o conceito de área como grandeza.

Nessa etapa da atividade, é possível que os alunos lembrem-se de como calcular a medida da área do quadrado como $A = \ell \cdot \ell$ e façam um questionamento sobre a diferenciação entre área, como medida e área como superfície. Assim, caberá ao professor instigar os alunos a pesquisar sobre as definições de grandeza e de área de superfície plana.

Para alcançar o resultado esperado, propomos uma situação que envolva a conversão do registro figural para o registro algébrico, para determinar a fórmula que permita calcular a medida da área de um quadrado qualquer.

Para resolver esta atividade o aluno precisa de conhecimentos de contagem simples, de soma e multiplicação de números inteiros.

Descrição da experimentação e análise a posteriori da atividade 2

Na realização da atividade 2, foram utilizados lápis, borracha e caneta, além das folhas impressas contendo as atividades propostas.

Nesta atividade, percebeu-se que a leitura das questões aconteceu com mais atenção por parte dos alunos. Quanto ao comportamento das duplas pôde-se destacar: a dupla Alice e Sophia ficou parada na questão 2.1, por dificuldade de entendimento entre as duas alunas, pois tinham visões diferentes sobre os encaminhamentos que deveriam ser adotados para resolução da questão proposta; na segunda dupla Yasmin e Diego, o menino apresentou dificuldade e de forma mais lenta interagiu com sua companheira; na dupla Albert e Alice, os dois alunos demonstraram um debate ávido sobre as interpretações das atividades, entrando inclusive em conflito sobre as ideias. O professor aplicador preocupou-se com a dificuldade da aluna Miki da dupla 4, que estava sozinha, porém ao acompanhar o desempenho dessa aluna com mais atenção percebeu que ela desenvolvia com naturalidade a resolução da questão; a dupla Tiemy e Roberta demonstrou uma boa interação e troca de informações.

Na Questão 2.1, quatro das duplas procederam de maneira correta e chegaram ao valor da medida do perímetro esperado, inclusive, usando a contagem de unidades quadradas. A dupla Alice e Albert realizou a contagem de um dos lados e multiplicou por quatro, como ilustra a Figura 23. A dupla Tiemy e Roberta apresentou o valor do perímetro do quadrado, sendo 28 e nas discussões posteriores quando houve confronto das respostas dadas, elas perceberam o erro e alegaram ter se confundido na contagem de um dos lados.

Figura 23 – Protocolos dos alunos referentes ao item 1 da atividade 2

Atividade 2-Determinação da medida do perímetro e área de um quadrado em folha quadriculada

2.1- Usando o quadriculado, determine a medida do perímetro do quadrado ABCD.

8
 8 x 4
 32

O perímetro é de 32

Percebemos aqui a importância da etapa de formulação da TSD, pois nas discussões os alunos conseguem retificar os erros de procedimentos ou de concepções, reconstruindo assim as soluções das questões em jogo.

Ao analisar a Questão 2.2, constatamos que todas as duplas alcançaram o resultado esperado por meio de contagem das unidades quadradas como mostra a Figura 23.

Uma das principais preocupações que tínhamos, quando elaboramos a Questão 2.3 era desconstruir o conceito de área ligado a uma unidade de medida padronizada. Nesta atividade, apenas uma das duplas respondeu que a unidade de medida seria o centímetro, já os demais alunos alcançaram o objetivo e compreenderam que a unidade de medida usada era o quadradinho da malha, como demonstra a Figura 24.

Figura 24 – Protocolos dos alunos referentes ao item 3 da atividade 2

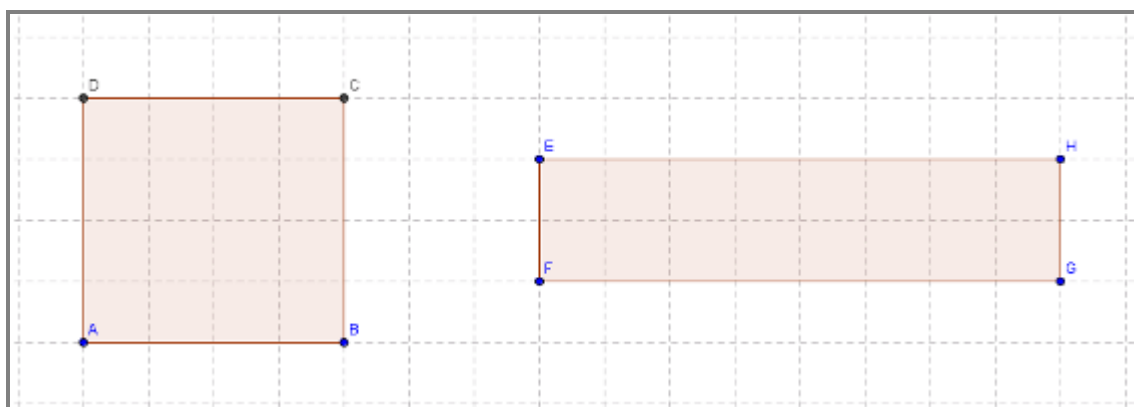
2.3- Qual é a unidade de medida que você está usando? Compare e discuta sua resposta com as outras duplas.

Estamos usando a quadriculada como unidade de medida.

A Questão 2.4, todas as duplas associaram à área do quadrado com a multiplicação do número de unidade das medidas dos lados, mas não apresentaram uma expressão algébrica, como fórmula da área de um quadrado. Portanto, os alunos alcançaram parcialmente os objetivos da atividade.

Globalmente, constatamos que foram alcançados os principais objetivos mesmo sem que os alunos elaborassem uma fórmula para a área do quadrado.

Atividade 3 - Comparar os perímetros e as áreas de duas figuras planas

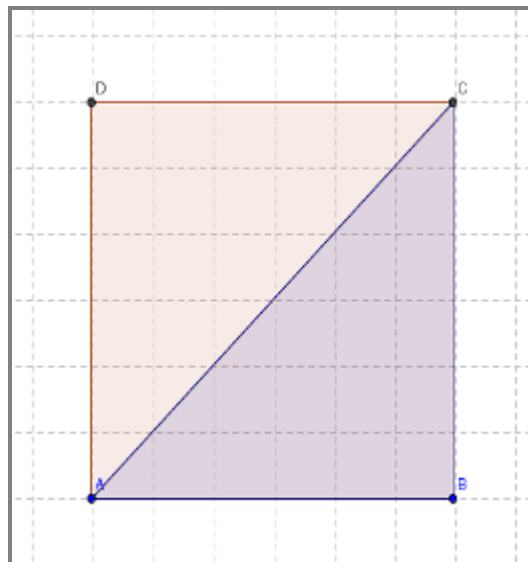


3.1- Dados o quadrado ABCD e o retângulo EFGH, compare as áreas e os perímetros de cada uma.

3.2- Você encontrou alguma semelhança em relação ao perímetro ou área das figuras? Caso afirmativo, justifique sua resposta.

3.3- Duas figuras podem ter a mesma área e ter perímetros diferentes?
Discuta com as outras duplas;

3.4- Analise as duas figuras que estão sobrepostas, o quadrado ABCD e o triângulo ABC, e determine o perímetro e área do quadrado ABCD e o triângulo-retângulo ABC.



3.5- Você notou alguma relação entre a área do quadrado e a do triângulo?

3.6- Caso afirmativo, elabore uma fórmula para determinar a medida da área de um triângulo.

Análise a priori da atividade 3

O objetivo é fazer com que o aluno perceba a existência de figuras que contêm a mesma área e perímetros diferentes e, que relacione a área do triângulo ABC com o quadrado ABCD, percebendo que se trata da metade da área.

Nesta atividade, o aluno deverá obter por princípio de contagem das unidades do contorno das figuras a medida do perímetro e as medidas das áreas das figuras estudadas. Posteriormente, concluir que duas figuras que possuem a mesma área não necessariamente possuem o mesmo perímetro, como foi apontado por Facco (2003).

Quando é pedido ao aluno identificar semelhanças entre as medidas dos perímetros e das áreas das figuras, esperamos que ele entenda que podem existir figuras que tenham o mesmo perímetro e áreas diferentes. Ao justificar sua resposta, precisará elaborar um argumento que seja coerente e convincente. O processo de argumentação poderá aumentar seu grau de compreensão sobre a distinção entre perímetro e área.

Ainda na mesma atividade, quando é proposto ao aluno obter a área do quadrado e a área do triângulo comparando-as, o aluno deverá perceber que a área do triângulo é a metade da área do quadrado. Se anteriormente ele obteve a área do quadrado como sendo $A = l \cdot l$, então a medida da área do triângulo deverá ser obtida, utilizando-se a fórmula $A = \frac{b \cdot h}{2}$.

Nesta atividade, o conhecimento matemático necessário para o aluno é a soma, a multiplicação e a divisão de números inteiros e o teorema de Pitágoras, além de uma percepção visual em relação à parte e o todo da figura.

Descrição da experimentação e análise a posteriori da atividade 3

Na realização da atividade 3, foram utilizados lápis, borracha e caneta, além das folhas impressas contendo as atividades propostas.

As alunas Carolina e Tiemy faltaram, e os alunos Diego e Fernanda não foram liberados pelo professor que ministrava aula no momento da atividade. As atividades foram iniciadas com a explanação do professor aplicador sobre a importância da construção do conhecimento e a relevância deles para o trabalho de pesquisa.

A aluna Miki já define que unidade de medida é algo que se usa para medir algo.

O professor aplicador percebeu a necessidade de mudar a forma de aplicação: nos primeiros encontros as atividades eram feitas por inteiro para depois efetuar as correções. Nesse momento, o procedimento era ler

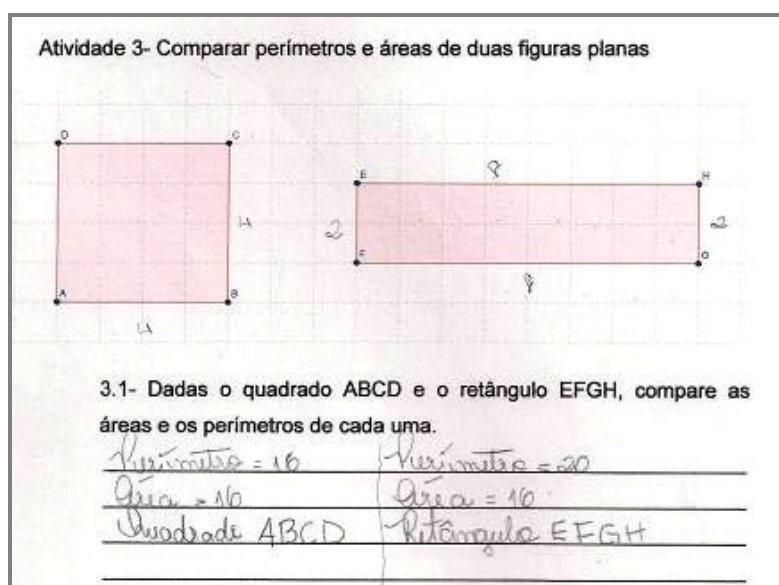
coletivamente cada tópico para melhor compreensão do que estava sendo pedido. Desta forma percebe-se a falta de compreensão da palavra sobreposta (atividade 3.4) que não fazia parte do *milieu* do aluno, assim dificultando o entendimento do que deveria ser feito.

A dupla Albert e Alice teve dificuldade em calcular o perímetro do triângulo na Questão 3.4, pois afirmou não saber como proceder.

Em razão da dificuldade que as alunas Roberta, Sophia, Miki e Yasmin tiveram para calcular a medida do perímetro do triângulo, o professor aplicador propôs um exercício extra, feito na lousa, no qual os alunos foram orientados a medir com uma régua graduada os lados dos dois triângulos retângulos de tamanhos diferentes, a fim de perceber a impossibilidade de a hipotenusa ter a mesma medida dos catetos.

A diferenciação entre área e perímetro pareceu ser um conceito já assimilado nesta etapa, tendo em vista que as três duplas que estavam presentes realizaram corretamente as Questões 3.1 e 3.2, alcançando o objetivo esperado. Duas das duplas efetuaram registros referentes às medidas dos lados do quadrado e do retângulo, pensamos que, desta forma, a visualização e o entendimento sobre perímetro e área ficaram mais fáceis, conforme demonstra a Figura 25.

Figura 25 – Protocolos dos alunos referentes ao item 1 da atividade 3



Uma das principais preocupações desta pesquisa foi que o aluno percebesse que a área e o perímetro não variam no mesmo sentido quando a figura sofre uma ampliação ou uma redução por uma dada transformação geométrica, como pode ser observado no trabalho realizado pela dupla Roberta e Sophia (Figura 26).

Figura 26 – Protocolos dos alunos referentes ao item 3 da atividade 3

3.3- Duas figuras podem ter a mesma área e ter perímetros diferentes? Discuta com as outras duplas.

Sim, pois nas figuras anteriores as áreas eram resultado igual que é 46, e o perímetro deu diferente um do outro.

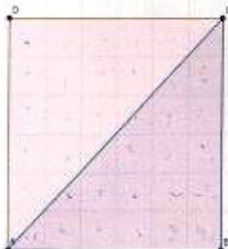
Determinar a área e o perímetro do quadrado ABCD não foi tarefa muito difícil para os alunos, já que todos chegaram ao resultado correto. Em relação ao triângulo ABC a dupla Alice e Albert alcançou o objetivo, usando a ideia da fórmula $A = \frac{b \cdot h}{2}$, ilustrada pela Figura 27. A dupla Roberta e Sophia chegou a um resultado aproximado, e os registros indicaram que teria usado a contagem de unidade quadradas; por isso, as alunas tiveram dificuldade na contagem dos quadradinhos não inteiros. Ao ter esse procedimento esta dupla demonstrou ter avançado no conceito de área, pois aos poucos foi desvinculando a ideia de área, como medida dos lados.

Figura 27 – Protocolos dos alunos referentes ao item 4 da atividade 3

3.4- Analise as duas figuras que estão sobrepostas, o quadrado ABCD e triângulo ABC, e determine o perímetro e área do quadrado ABCD e triângulo retângulo ABC.

<i>Quadrado ABCD:</i>	<i>Triângulo ABC:</i>
<i>Área = 36</i>	<i>Área = 18 (base=altura=2)</i>
<i>Perímetro = 24</i>	<i>Perímetro =</i>

*36 L²
16 18*



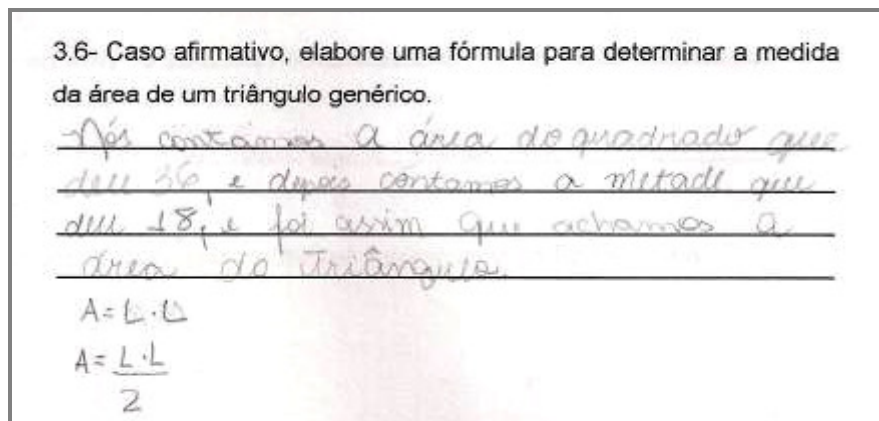
A dupla Yasmin e Miki atribuiu ao triângulo a mesma área do quadrado, revelando não ter clareza sobre como resolver a questão proposta.

O maior problema detectado para esta atividade foi referente ao perímetro do triângulo ABC. Como já relatamos anteriormente, a dupla Albert e Alice não apresentou nenhum resultado para o perímetro, alegando não se lembrar da fórmula referente ao Teorema de Pitágoras e que esse conteúdo havia sido-lhes apresentado no primeiro semestre. As outras duas duplas erraram a resposta por atribuírem à hipotenusa do triângulo retângulo a mesma medida dada aos catetos desse triângulo.

O aluno Albert voltou a explicar sobre a necessidade do uso do Teorema de Pitágoras. O professor aplicador optou por não dar continuidade a essa discussão, já que esse não era o objetivo principal da atividade. Embora em uma melhor análise pensamos que esse seria o momento de uma intervenção do professor aplicador fazer uma revisão ou explanação sobre o Teorema de Pitágoras, que seria uma ferramenta para resolução da situação.

As conclusões sobre as discussões do item anterior fizeram com que todas as duplas acertassem a Questão 3.5, concluindo que a área do triângulo ABC é exatamente a metade da área do quadrado ABCD.

Quando foi pedido às duplas para elaborarem uma fórmula para calcular a medida da área de um triângulo qualquer, a dupla Albert e Alice alcançou plenamente o objetivo, apresentando a expressão algébrica $A = \frac{b \cdot h}{2}$; a dupla Roberta e Sophia também alcançou o objetivo, pois, apresentou o resultado numérico equivalente à medida da área do quadrado e depois gerou uma fórmula, de acordo com o contexto do problema, como pode ser observado na Figura 28.

Figura 28 – Protocolos dos alunos referentes ao item 6 da atividade 3

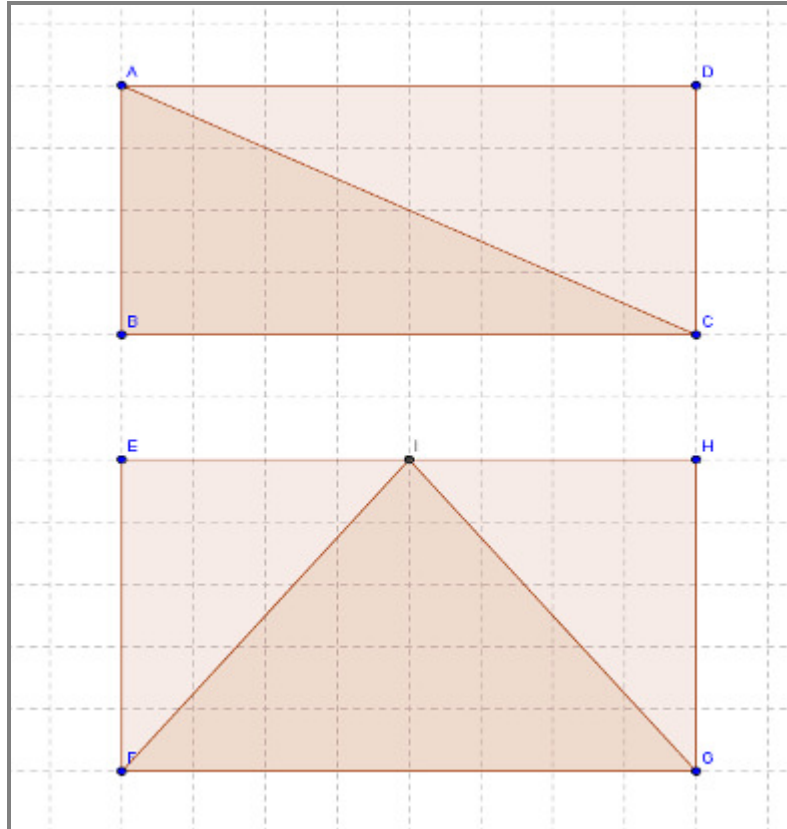
Nesse registro observamos que os alunos continuavam denominando área de uma figura em lugar de medida de área de uma figura. Pensamos que esse fato tenha ocorrido pela possibilidade dos alunos ainda não terem clareza do conceito de área como grandeza.

Em seus registros, a dupla Yasmin e Miki apresentou a mesma fórmula para a determinação da medida de área do quadrado, portanto, medida errada, todavia, no final, outro registro, agora mais coerente, relacionou $A = \frac{l \cdot l}{2}$. Como esse registro nos foi apresentado como errata, compreendemos que se tratou de uma reformulação do pensamento matemático, após as discussões entre as duplas.

Concluimos que, de modo geral, a atividade alcançou o objetivo e promoveu avanços na reconstrução dos conceitos abordados.

Atividade 4 - Confirmar as fórmulas de área do retângulo e do triângulo

- 4.1- Conte os quadradinhos que compõem a área do retângulo ABCD e do triângulo ABC;
- 4.2- Agora com uso das fórmulas elaboradas, determine a medida das áreas do retângulo ABCD e do triângulo ABC;
- 4.3- Faça o mesmo com o retângulo EFGH e o triângulo FGI;



- 4.4- A medida da área encontrada por meio de contagem é a mesma determinada por fórmulas para cada figura? Discuta com as outras duplas;
- 4.5- As fórmulas elaboradas funcionaram? Será que elas funcionariam para qualquer retângulo ou triângulo? Justifique sua resposta;
- 4.6- Calcule a medida da diagonal do retângulo; e
- 4.7- O valor encontrado é um número inteiro? Explique sua resposta.

Análise a priori da atividade 4

Nesta atividade, o aluno deverá comparar os resultados obtidos por contagem simples com os resultados alcançados pela expressão algébrica. Ao perceber que o resultado é o mesmo, considerará como válido os dois métodos para determinar a medida das áreas do triângulo e do retângulo.

O aluno mais uma vez deverá determinar as medidas das áreas das figuras apresentadas por meio de contagem. Em seguida, calcular as medidas das áreas das mesmas figuras com o uso das fórmulas por eles elaboradas e institucionalizadas pelo professor.

No item 4-4, esperamos que o aluno encontre as mesmas medidas de área dos triângulos utilizando, os dois métodos de resolução solicitados, ou seja, por contagem e por fórmulas. Na etapa de formulação, deverão discutir os motivos de encontrarem medidas iguais com métodos diferentes.

Um de nossos objetivos é que o aluno teste as fórmulas elaboradas e valide o procedimento de contagem. Assim poderá concluir que as fórmulas obtidas servem para calcular a medida da área de qualquer retângulo ou triângulo. Mas, apenas com dois exemplos e sem nenhuma demonstração ou prova mais rigorosa, não ficaremos surpresos se o aluno não conseguir observar essa generalização.

Ao pedir que o aluno calcule a medida da diagonal do retângulo, esperamos que ele utilize o Teorema de Pitágoras e conclua que o valor encontrado é um número irracional.

Nessa atividade, os conhecimentos matemáticos necessários para o aluno são: a adição, multiplicação e a divisão em números inteiros, o Teorema de Pitágoras, além das diferentes apreensões da figura.

Descrição da experimentação e análise a posteriori da atividade 4

Na realização da atividade 4, foram disponibilizados aos alunos lápis, borracha e caneta, além das folhas impressas contendo as atividades propostas.

Antes de iniciar a atividade 4, o professor aplicador retomou os conceitos abordados no encontro anterior referente à atividade número 3, em razão da ausência de grande parte dos alunos.

Com o início das discussões sobre perímetro, a definição da aluna Carolina, "*medida do contorno da figura*", foi contra todos os outros alunos que

definiram o perímetro como soma dos lados, gerando assim uma nova discussão entre eles. Como consequência do debate surge a fórmula $A = b \cdot h$, opção dada pela maioria, desencadeando que o professor aplicador a realizasse uma provocação ao desenhar na lousa um círculo e mostrar aos alunos o desafio de pensar como calcular a área dessa figura.

Ao final das discussões que serviram como revisão da atividade anterior, deu-se início a realização da atividade 4.

A aluna Tiemy teve dúvidas na introdução da atividade, pois esteve ausente na realização da anterior, o que levou o professor aplicador a instigar sua parceira a expor o que sabia sobre o assunto.

Após os alunos evidenciarem não ter compreendido a Questão 4.2, o professor aplicador constatou que a palavra “fórmula” deveria ser trocada por “expressão algébrica”. Desse modo, os alunos entenderam que a palavra substituída significava o registro do conceito matemático desenvolvido.

Acreditamos que o item 4.3 parece não ter sido bem concebido, pois os alunos não tinham entendido, o que realmente foi pedido. Assim o professor aplicador, no seu papel de mediador, explicou baseado em uma reformulação da questão o que era solicitado: *“Determine as áreas do retângulo EFGH e do triângulo FGI da mesma forma como fez no item anterior, ou seja, com o uso da expressão algébrica adequada”*.

A ideia da área do triângulo ter a metade da área de um retângulo como foi visto na atividade 3 continua sendo explorada na atividade 4. O fato pode ser observado no item 4.1 em que três duplas utilizaram o mesmo procedimento para calcular as medidas das áreas do retângulo e do triângulo, entretanto a dupla Tiemy e Roberta chegou a um valor aproximado por ter utilizado a contagem e encontrado dificuldades na contagem dos quadradinhos não inteiros.

Os alunos não demonstraram dificuldade para resolver os itens 4.2 e 4.3, aplicando as fórmulas anteriormente estudadas.

Na resolução do item 4.4, as duplas Carolina/Sophia e Albert/Alice afirmaram que se podia chegar a resultados iguais de formas diferentes. Tiemy e

Roberta disseram que as áreas encontradas por métodos diferentes também geraram resultados distintos, como ilustra a Figura 29. Todavia, notamos que a dupla tinha acertado o item anterior.

Figura 29 – Protocolos dos alunos referentes ao item 4 da atividade 4

4.4- A medida da área encontrada por meio de contagem é a mesma determinada por fórmulas para cada figura? Discuta com as outras duplas.

Não. Por que se contar os quadradinhos vai dar um resultado e se usar as fórmulas vai dar outro

Após as discussões a respeito do item 4.4, aparentemente as alunas Tiemy e Roberta assimilaram a funcionalidade das fórmulas, assim como todas as demais duplas.

Para a resolução do item 4.6, seria necessário o uso da fórmula do Teorema de Pitágoras e, aparentemente, nem as aulas da sala regular, nem a revisão feita pelo professor aplicador desta pesquisa surtiram o efeito desejado, já que apenas uma das duplas resolveu corretamente este item. No item 4.7, só uma dupla tentou resolvê-lo sem sucesso.

Como os itens 4.6 e 4.7 tiveram altos índices de insucesso, sugerimos, para uma futura aplicação, que fossem retirados do enunciado, já que não eram compatíveis com nossos objetivos principais.

Atividade 5 - A razão entre perímetro e diâmetro das circunferências

- 5.1- Com a fita métrica, meça o perímetro do LP (disco de vinil do século XX) e anote o valor;
- 5.2- Com a fita métrica meça, o diâmetro do disco e também anote;
- 5.3- Que relação existe entre a medida do perímetro do disco e seu diâmetro?

- 5.4- Compare suas conclusões ou medidas obtidas com as outras duplas. As medidas mesmo sendo muito próximas, terão algumas diferenças. Anote essas medidas;
- 5.5- Faça o mesmo com os outros objetos circulares que lhes foram oferecidos, o CD e Tampa de lata a vácuo que possui um furo no centro; e
- 5.6- Você observou alguma regularidade nos valores da razão entre os perímetros pelos diâmetros dos objetos analisados? Discuta com as outras duplas, tente chegar a alguma conclusão.

A aproximação obtida por meio das medições recebeu o nome de π (PI) e foi vastamente estudada por muitos pesquisadores em toda a história da Matemática.

$$\frac{P}{D} = \pi, \text{ ou } \frac{P}{2r} = \pi$$

Análise a priori da atividade 5

O objetivo é fazer com que aluno perceba que a razão entre o perímetro e o diâmetro da circunferência é, aproximadamente, igual a π . Para realizar esta atividade, são disponibilizados aos alunos os seguintes materiais: LP (disco de vinil), CD, tampa de lata a vácuo e fita métrica.

Esperamos que o aluno efetue as medições do perímetro da circunferência e do diâmetro com a fita métrica. Para essa atividade, ele necessita conhecer o instrumento utilizado, assim como o sistema de medidas que servirá como ferramenta para desenvolver a estratégia de resolução mais eficaz.

Ao executar a ação de dividir o perímetro pela medida do diâmetro, encontrará um valor aproximado para a constante π . Essa forma de determinação é uma aproximação grosseira do valor do número π e, por isso, sugerimos que o mesmo procedimento seja realizado com outros objetos que também tenham a forma circular.

Ao comparar e obter resultados parecidos no uso dos três tipos de objetos, e com as várias duplas, o aluno obterá uma melhor aproximação. Espera-se que esse procedimento possibilite aos alunos compreenderem que o valor de π pode ser obtido pela razão do perímetro da circunferência pela medida de seu diâmetro

Para a resolução desta atividade, o aluno necessitará conhecer sistemas de medidas, manusear o instrumento de medição saber fazer a divisão de números decimais e sobretudo comparar os resultados obtidos.

Descrição da experimentação e análise a posteriori da atividade 5

Na realização da atividade 5, os seguintes instrumentos e materiais foram usados: lápis, borracha, caneta, as folhas impressas contendo as atividades propostas, fita métrica, LP (disco de vinil), CD, tampa de lata a vácuo, tampa de achocolatado e de maionese, todos com furo no centro. No entanto, no decorrer da atividade objetos diversos (cesto de lixo e frasco de corretivo líquido) encontrados no ambiente da realização do processo foram usados para complementar a exemplificação.

Alguns alunos tinham dificuldade para usar a fita métrica no início da atividade e questionaram se existia *“uma forma mais inteligente de medir”*, pois a medição do LP com a fita necessita do empenho de dois alunos da dupla para segurar os objetos. Mas, os alunos não tiveram dificuldades no caso CD porque além de ser um objeto conhecido, o furo central facilitou a execução das medições.

Percebeu-se que os resultados obtidos nas medições dos objetos foram diferentes nas casas decimais, mas aqueles obtidos com base na divisão da medida do diâmetro pelo raio foram quase iguais.

Para continuar com a resolução dos exercícios, o professor aplicador chamou a atenção dos alunos sobre a diferença entre raio e diâmetro de uma circunferência, usando o exemplo da roda de uma bicicleta, mas apenas a aluna

Tiemy pareceu ter entendido o conceito de diâmetro. O que levou o professor aplicador a definir diâmetro.

No decorrer da atividade, foi colocada a existência do número π , que é de conhecimento dos alunos. Com o debate, eles perceberam que o valor aproximado de π que eles conhecem pode ser determinado baseado na execução das medições e que o resultado adquirido desta operação foi um número próximo de 3.

A medida alcançada pelas duplas mesmo com a dificuldade do manuseio do disco de vinil ficou em 95 cm para duas duplas, 96 cm para outras duas e 94 cm para a última dupla. Estas variações são admissíveis, dada a imprecisão dos instrumentos de medida usados. A medição dos discos ficou facilitada pelo fato de esses possuírem um furo central, orientando os alunos para o centro do círculo, com isso, todas as duplas chegaram ao mesmo resultado de 30 cm de diâmetro fazendo com que a atividade 5.2 fosse bastante fácil e sem muito debate.

Quando da leitura do item 5.3, os alunos permaneceram quase estáticos e olhando uns para os outros sem saber qual decisão tomar. Ficou claro que eles não entenderam a pergunta e o fato confirmou-se, quando o professor aplicador pediu para que se expressassem quanto ao entendimento da questão. Todos afirmaram não ter compreendido, o que deveria ser feito. Assim, o professor aplicador alterou a formulação da Questão 5.3 de forma que se apresentasse com mais clareza: *“Faça a divisão da medida do perímetro pela medida do diâmetro”*.

Com uma nova redação, a dupla Miki e Fernanda chegou ao resultado 3,133..., as duplas Alice/Albert e Yasmin/Diego apresentaram 3,1666..., já as duplas Robeta/Tiemy e Sophia/Caroline tiveram resultado 3,2. Para nosso entendimento, esses valores estavam adequados por estarem próximos de 3,1, valor esperado. Também devido à nova redação do item 5.3 se tornou-se desnecessário o desenvolvimento do item 5.4, já que no item anterior foram anotadas e discutidas as medidas alcançadas.

No item 5.5, os materiais oferecidos foram diferentes, mesmo assim para razão entre o perímetro da circunferência e seu diâmetro, os alunos obtiveram respostas bastante próximas ao esperado, conforme mostra a Figura 30.

Figura 30 – Protocolos dos alunos referentes ao item 5 da atividade 5

5.5- Faça o mesmo com os outros objetos circulares que foram lhes oferecidos, o CD e Tampa de lata a vácuo que possui um furo no centro.

CD - perímetro 38 cm diâmetro 12 cm
 $38 \div 12 = 3,166\dots$

Tampa de moionese - perímetro 21 cm diâmetro 6,1
 $21 \div 6,1 = 3,442$

tampa de melho - perímetro 22 cm diâmetro 7
 $22 \div 7 = 3,142$

No item 5.6, a palavra regularidade foi explicada pelo professor aplicador substituindo a formulação inicial por: “Os valores são próximos? Explique”. Tudo indicava que os alunos perceberam que os valores encontrados eram muito próximos, mas a maioria não soube explicar as razões. Apenas a dupla Miki e Fernanda afirmou que existia uma regularidade, porque todos os objetos eram circunferências, conforme ilustra a Figura 31.

Figura 31 – Protocolos dos alunos referentes ao item 6 da atividade 5

5.6- Você observou alguma regularidade nos valores da razão entre os perímetros pelos diâmetros dos objetos analisados? Discuta com as outras duplas, tente chegar a alguma conclusão.

Sim, porque são circunferências

Essa aproximação obtida por meio das medições recebe o nome de π (PI) e foi vastamente estudada por muitos pesquisadores em toda história da matemática.

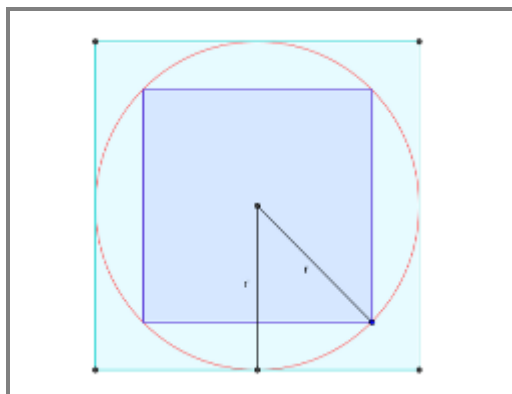
$$\frac{P}{D} = \pi, \text{ ou } \frac{P}{2r} = \pi$$

A atividade 5 como um todo foi de grande satisfação, tanto os alunos como ao professor aplicador, talvez por ser uma atividade experimental com o manuseio de diversos objetos e com conclusões de fácil aceitação.

Atividade 6 - Seguir os passos de Arquimedes para uma aproximação do número π .

Vamos fazer uma aproximação do número π imitando Arquimedes (287 a.C. – 212 a.C.), que foi um importante filósofo e matemático grego, essa aproximação feita na época foi muito respeitada e utilizada por muito tempo.

Observação: vamos escrever o perímetro das figuras geométricas em função da medida do raio da circunferência.



A medida do lado do quadrado menor (inscrito) equivale $\ell = r\sqrt{2}$.

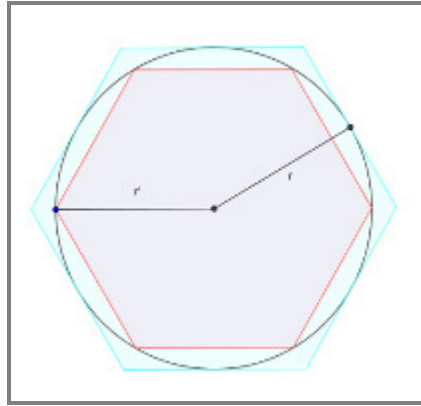
A medida do lado do quadrado maior (circunscrito) equivale $\ell = 2r$.

6.1- Você concorda que o perímetro da circunferência é menor que o perímetro do quadrado externo (circunscrito na circunferência) e maior que o interno (inscrito na circunferência)?

Como não conhecemos o perímetro da circunferência para determinarmos o valor de π , vamos efetuar as divisões dos perímetros dos quadrados que são conhecidos pela medida do diâmetro da circunferência;

6.2- Após encontrar o valor aproximado do número π referente aos perímetros dos quadrados maior e menor, o que você pode inferir em relação ao valor de π que seria obtido usando o perímetro da circunferência?

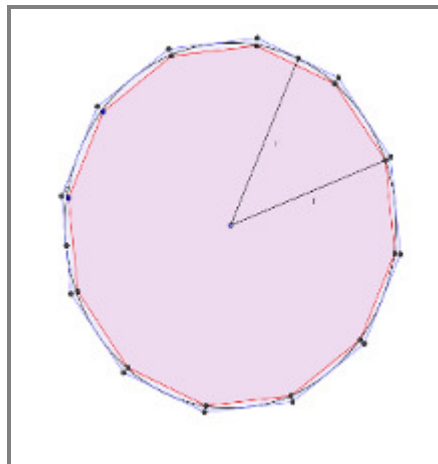
- 6.3- Encontre os valores aproximados do π referentes aos perímetros dos hexágonos externos (circunscrito) e internos (inscrito);
- 6.4- O que você pode inferir em relação ao π que seria obtido usando o perímetro da circunferência?



A medida do lado do hexágono inscrito: $l = r$.

A medida do lado do hexágono circunscrito: $l = \frac{2r \cdot \sqrt{3}}{3}$.

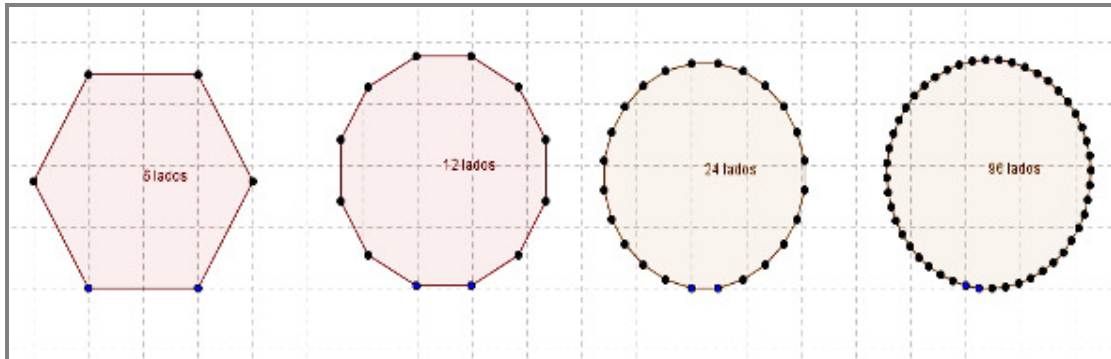
- 6.5- Encontre os valores aproximados do π referentes aos perímetros dos dodecágonos externos (circunscrito) e internos (inscrito);
- 6.6- O que você pode inferir em relação ao π que seria obtido, usando o perímetro da circunferência?



A medida do lado do dodecágono inscrito: $\ell = r\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

A medida do lado do dodecágono circunscrito: $\ell = 2r(2-\sqrt{3})$.

6.7- Começamos com uma figura de quatro lados, passamos para uma de seis lados e, posteriormente para uma de 12 lados. O que você pode deduzir se nós aumentarmos o número de lados? e



6.8- Qual seria o perímetro de uma figura com infinitos lados? Discuta com o seu parceiro e depois exponha sua conclusão às demais duplas.

Análise a priori da atividade 6

O objetivo é que o aluno perceba que o perímetro do hexágono inscrito é menor que o da circunferência, e o perímetro do hexágono circunscrito é maior que o da circunferência. Também esperamos que ele perceba que, com o aumento do número de lados dos polígonos a figura aproxima-se de uma circunferência e que as diferenças entre os perímetros dos polígonos inscritos e circunscritos vão diminuindo, e a medida do apótema aproxime-se de r .

As atividades do item 6 foram adaptadas das leituras feitas de Garbi (2010), Sangiorgi (1965), GEOMETRIA (1924), assim como da Revista de Educação Matemática de IREM Paris VII, e de notas de aula de Almouloud no grupo de pesquisa da PUC/SP em Educação Matemática (PEAMAT).

As adaptações foram feitas no sentido de tornar a atividade mais adequada aos alunos participantes da pesquisa, ou seja, 8ª série/9º ano do Ensino Fundamental. Optamos por fornecer os valores das medidas dos lados dos polígonos, a fim de focar o pensamento do aluno nas diferenças entre os quocientes dos perímetros pela medida do diâmetro da circunferência em relação aos polígonos inscritos e circunscritos.

Temos o objetivo de o aluno conseguir obter uma melhor aproximação do número π , utilizando o método descrito por Arquimedes. Optamos por oferecer as figuras e a medida de seus lados, por entender que o método de Arquimedes completo seria demasiadamente longo e faria com que os alunos perdessem o interesse e o foco da atividade.

Então, caberá ao aluno somar a medida dos lados encontrando o perímetro das figuras dadas e, posteriormente dividir pela medida do diâmetro. Esperamos que percebam que quanto maior o número de lados dos polígonos melhor será a aproximação do número π .

Ao final da atividade, esperamos que entenda que, com o aumento do número de lados dos polígonos, o perímetro de um polígono de n lados aproxime-se do perímetro de uma circunferência, e o apótema do raio.

Para iniciar a atividade, o aluno precisa perceber que, na figura dos quadrados inscritos e circunscritos, o perímetro da circunferência é menor que o do quadrado circunscrito e, ao mesmo tempo, é maior que o perímetro do quadrado inscrito, $P > L > P'$, onde P é o perímetro do quadrado circunscrito, L é o perímetro da circunferência e P' é o perímetro do quadrado inscrito. Ao chegar à conclusão acima, o aluno deverá efetuar os cálculos que comprovem nossas hipóteses.

O perímetro do quadrado circunscrito é obtido ao multiplicar a medida do lado ($\ell = 2r$) pelo número de lados ($n = 4$), $P = 2r \cdot 4 = 8r$.

O perímetro do quadrado inscrito é obtido ao multiplicar a medida do lado, ($\ell = r\sqrt{2}$) pelo número de lados ($n = 4$), $P = 4r\sqrt{2}$.

$$\frac{P}{D} > \frac{L}{D} > \frac{P'}{D}, \text{ então } \frac{8r}{2r} > \frac{L}{2r} > \frac{4r\sqrt{2}}{2r}, \text{ então, } 4 > \frac{\ell}{2r} > 2\sqrt{2}, \text{ então, } 4 > C > 2\sqrt{2},$$

ou seja, $4 > C > 2,828427\dots$.

O aluno deverá proceder de forma análoga para os polígonos inscritos e circunscritos de seis lados e de 12 lados, seguindo o exemplo acima, apresentaremos apenas os cálculos.

Para seis lados (hexágono),

$$\frac{P}{D} > \frac{L}{D} > \frac{P'}{D},$$

$$\text{então } \frac{4r\sqrt{3}}{2r} > \frac{L}{2r} > \frac{6r}{2r}, \text{ então } 2\sqrt{3} > C > 3, \text{ ou seja, } 3,464101615\dots > C > 3$$

Para 12 lados (dodecágono),

$$\frac{P}{D} > \frac{L}{D} > \frac{P'}{D},$$

$$\text{então } \frac{12r(2-\sqrt{3})}{2r} > \frac{L}{2r} > \frac{12r\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2r}, \text{ então, } 6(2-\sqrt{3}) > C > 6\sqrt{2-\sqrt{3}}, \text{ então } 12-6\sqrt{3} > C > 6\sqrt{2-\sqrt{3}}, \text{ ou seja, } 3,215390\dots > C > 3,105828\dots$$

Achamos necessário que os alunos, com o auxílio do professor aplicador e de uma calculadora, façam os encaixes a partir de aproximações com até seis casas decimais que pensamos ser uma boa aproximação.

A insegurança em trabalhar com números irracionais e/ou números decimais com muitas casas de aproximação pode ser uma dificuldade considerável nesta etapa do processo. A atividade 6.7 requer uma resposta que seja bastante conclusiva em relação ao conceito de circunferência.

Após está etapa, cabe ao professor institucionalizar o conhecimento, apresentando a fórmula que nos dá o comprimento (C) da circunferência, $C = 2\pi r$.

Para realizar esta atividade, é necessário que o aluno domine as propriedades das estruturas aditivas e multiplicativas no conjunto dos números reais e a propriedade da radiciação. Ao final da atividade, ele deverá comparar os resultados a fim de poder afirmar qual deles é o maior ou menor e se estão próximos.

Descrição da experimentação e análise a posteriori da atividade 6

Na realização da atividade 6, foi disponibilizado aos alunos o seguinte material: lápis, borracha, caneta e calculadora, além das folhas impressas contendo as atividades propostas.

A leitura desta atividade foi feita com mais atenção, devido à sua complexidade. Acreditando ser importante o professor aplicador relembrar as definições de raio, perímetro, em razão do intervalo de tempo entre um encontro e outro. Cabe salientar que, quando os alunos foram questionados sobre o valor de π , a resposta foi prontamente acertada.

Uma das dificuldades detectadas pelos alunos foi a interpretação quanto aos desenhos da atividade, assim o professor aplicador decidiu desenhar as figuras na lousa pausadamente, de forma que os alunos acompanhassem o raciocínio coletivamente. É importante observar que a atenção despendida pelos alunos agora se coloca cada vez maior, pois percebeu-se que a cada passo das atividades as dificuldades aumentavam.

Notou-se que os alunos tiveram muita dificuldade no item 6.3, relacionada à complexidade dos cálculos, além do mais tiveram problemas na compreensão e interpretação do item 6.4.

Na primeira figura desta atividade, foram apontados os vértices dos quadrados, externos ABCD e internos EFGH. Estas marcações auxiliaram na identificação do quadrado em questão, servindo como reforço de distinção do quadrado inscrito e circunscrito.

A redação do item 6.1 foi alterada por perceber a dificuldade de entendimento por parte dos alunos. Com a nova redação: “Qual é a medida do perímetro do quadrado ABCD? Qual é a medida do perímetro do quadrado EFGH?”. Conseguiram avaliar qual medida seria maior ou menor em relação à circunferência. Ressaltamos que a decisão de alterar a redação partiu do professor aplicador, tendo em vista o rumo das discussões dos alunos em relação à atividade, que questionavam a necessidade de haver medidas para fazer a comparação entre os perímetros dos quadrados, inscritos e circunscritos e a circunferência, pois, visualmente eles não tiveram segurança em fazer a comparação.

Após essas alterações, todas as duplas afirmaram concordar com o item 6.1, embora nossa expectativa fosse que eles pudessem fazer a comparação apenas observando a figura, sem necessidade do uso de medidas.

No decorrer da atividade, percebemos que o item 6.1 estava demasiadamente longo e, por isso, complexo. Optamos, então, por desmembrá-lo, a segunda parte que denominamos por 6.1b trata da relação entre o perímetro e o diâmetro das figuras. Como já haviam efetuado os cálculos no item anterior, então puderam comparar a diferença entre os quocientes utilizados. Esta parte da atividade atendeu plenamente às nossas expectativas tendo em vista que todos chegaram ao mesmo resultado com quatro casas de aproximação decimal. Cabe aqui ressaltar que, para essa atividade, utilizamos a calculadora.

No item 6.2, os alunos tiveram dúvidas na palavra *inferir* que era desconhecida, desta forma, o professor aplicador fez uma releitura do item explicando o significado do termo no contexto da situação. Ao final da releitura da atividade, todos os alunos alcançaram o objetivo do item, ao perceber que o número π está entre os quocientes encontrados, conforme ilustrado na Figura 32.

Figura 32 – Protocolos dos alunos referentes ao item 2 da atividade 6

menor 4 e maior 2,8284

6.2- Após encontrar o valor aproximado do número π referente aos perímetros dos quadrados maior e menor, o que você pode inferir em relação ao valor de π que seria obtido usando o perímetro da circunferência?

O π é maior que 2,82 e menor que 4.

Mesmo com dificuldades apontadas nos itens 6.3 e 6.4, com o uso da calculadora, todos os alunos chegaram a resultados aceitáveis para os itens citados como também aos itens 6.5 e 6.6.

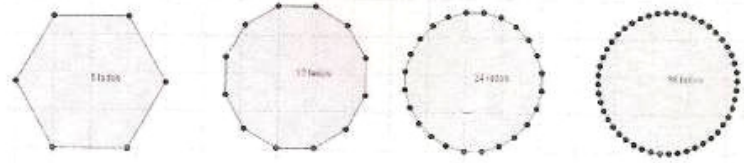
Na figura que ilustra o item 6.7 os alunos puderam observar o aumento do número de lados no qual conseqüentemente a figura aproxima-se de um círculo. Duas das duplas deram respostas que aproximaram da comparação entre o polígono interno e o polígono externo, já outras duas duplas afirmaram que os valores encontrados para π aproximaram-se do valor 3,14, conforme pode ser observado na Figura 33.

Figura 33 – Protocolos dos alunos referentes ao item 7 da atividade 6

6.7- Começamos com uma figura de quatro lados, passamos para uma de seis lados e posteriormente para uma de doze lados. O que você pode deduzir se nós aumentarmos o número de lados?

Chegamos mais perto do valor de π de uma circunferência.

$\pi = 3,14159265338 \dots$



Na questão 6.8, a pergunta não ficou clara o suficiente para os alunos. O professor aplicador esclareceu a questão e, passo a passo, analisou-a com os alunos até chegar a uma resposta. Todavia duas duplas atenderam plenamente à expectativa, como mostra o registro da dupla Miki e Fernanda, Figura 34, e ainda outras duas duplas alcançaram parcialmente o objetivo referindo-se ao número dos lados da figura como perímetro.

Figura 34 – Protocolos dos alunos referentes ao item 8 da atividade 6

<p>6.8- Qual seria o perímetro de uma figura com infinitos lados? Discuta com o seu parceiro e depois exponha sua conclusão para as demais duplas.</p> <p><i>Chegará ao valor de π achado pelo Arquimedes que é de 3,14...</i></p>
--

Essa atividade pareceu-nos a mais árdua e gerou as maiores dificuldades por parte dos alunos, necessitando de intervenções do professor aplicador. Todavia, acreditamos ser de extrema valia para a plena compreensão da última atividade da sequência. A nosso ver a atividade alcançou os objetivos, mesmo que os alunos tenham demonstrado dificuldade em sua resolução.

Atividade 7 - Construir a fórmula da área do círculo

(atividade baseada em uma atividade disponível em <http://videoaulaestudante.com/ensino-medio-matematica/111-16-comprimento-e-area-do-circulo.html>).

7.1- Proposição 1 de Arquimedes

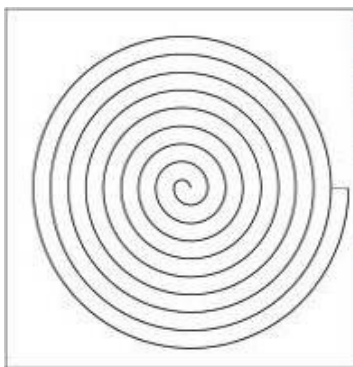
“Todo círculo é equivalente a um triângulo retângulo no qual a medida de um dos lados do ângulo reto é igual à medida do raio do círculo e a medida do outro lado do ângulo reto é igual ao perímetro da circunferência”.

Analise a proposição e discuta com seus colegas, a fim de compreender as afirmações.

7.2- Construa com compasso uma circunferência de raio qualquer e preencha a circunferência com fios de massinha de modelar, conforme a Figura A.

Observação: não faça uma circunferência muito pequena, pois dificultará o manuseio posteriormente.

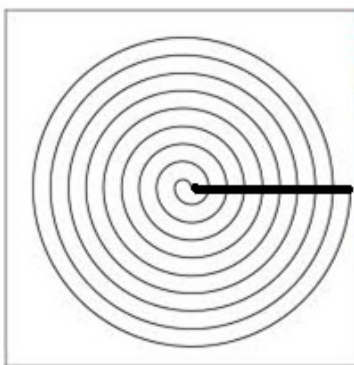
Figura A



7.3- Você concorda que a área preenchida pela massinha é equivalente à área do círculo formado, interno à circunferência dada?

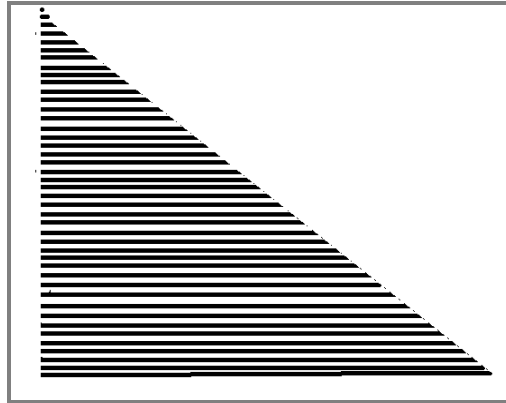
7.4- Recorte o fio que forma o círculo, partindo da extremidade para o centro, conforme a Figura B, formando vários fios com tamanhos diferentes.

Figura B



- 7.5- Com os pedaços de fios obtidos com o corte, monte um triângulo retângulo conforme a Figura C.

Figura C



- 7.6- Ao comparar a área do círculo com a área do triângulo, o que você percebe?
- 7.7- Comparar o cateto maior deste triângulo com o perímetro da circunferência, o que se pode afirmar?
- 7.8- Comparar o cateto menor deste triângulo com o raio da circunferência, o que se pode afirmar?
- 7.9- Escreva a medida do cateto maior em função do raio da circunferência;
- 7.10- Escreva a medida do cateto menor em função do raio da circunferência;
- 7.11- Escreva uma fórmula para determinar a área do triângulo montado; e
- 7.12- Tal fórmula também poderá ser usada para determinar a área do círculo? Justifique sua resposta.

Análise a priori da atividade 7

O objetivo principal da atividade é conduzir o aluno a percepção de que a área ocupada pelo círculo de massinha é a mesma ocupada pelo triângulo

retângulo, bem como que o aluno calcule a medida da área do círculo a partir da expressão algébrica correspondente à área do triângulo.

A atividade foi proposta no intuito de conduzir aluno à percepção de área de círculo como uma superfície, noção essencial para definir a área do círculo como uma grandeza.

Começamos a atividade apresentando aos alunos a primeira proposição de Arquimedes em relação ao círculo. Caberá ao aluno preencher uma circunferência dada com fios de massinha de modelar e inferir que a área preenchida pela massinha é igual à área do círculo que está contornada pela circunferência.

Ao recortar os fios que compõem a área do círculo e configurá-los em um triângulo retângulo, como mostra a Figura C da atividade, o aluno poderá validar experimentalmente a primeira proposição de Arquimedes. Na mesma atividade, pedimos para fazer comparação entre os catetos do triângulo obtido e o comprimento da circunferência e seu raio, os alunos deverão perceber que a medida do maior cateto do triângulo é igual à medida do perímetro da circunferência, e a medida do cateto menor é igual à medida do raio.

Como em atividades anteriores, ele já deduziu a fórmula da área de um triângulo, então, poderá substituir o valor da base pelo perímetro da circunferência e o valor da altura pelo raio e, assim, concluir que a fórmula da área do triângulo retângulo é a fórmula da área do círculo $A = \pi r^2$.

Como já definimos na atividade 4, a expressão algébrica que determina a área de um triângulo é dado por:

$$A = \frac{b \cdot h}{2}, \text{ se } b=C= 2\pi r \text{ e } h=r, \text{ então, } A = \frac{2\pi r \cdot r}{2}, \text{ ou } A = 2\pi r^2, \text{ que se refere}$$

à área do círculo, já que as duas figuras possuem a mesma área.

Para finalizar, o professor deverá institucionalizar o conhecimento dando-lhe *status* de saber e aplicar uma atividade que envolva o conhecimento sobre o objeto matemático.

Nesta atividade, os alunos necessitam saber operar com o compasso para a construção de uma circunferência e que ainda tenham conhecimento das características de uma circunferência. Os alunos devem também saber comparar áreas de figuras diferentes, dominar as propriedades das estruturas aditivas e multiplicativas.

Descrição da experimentação e análise a posteriori da atividade 7

Na realização da atividade 7, foram utilizados lápis, borracha, caneta, régua pautada, compasso, massinha de modelar e tesoura, além das folhas impressas contendo as atividades propostas.

Na Questão 7.1, após uma rodada de leitura, os alunos tiveram dificuldade para entender a proposição 1 de Arquimedes. Ao iniciar o debate sobre a proposição, o professor aplicador ajudou na leitura e interpretação dessa proposição. Tudo indica que a intervenção do aplicador não teria ajudado muito na compreensão dessa proposição, pois os registros dos alunos apontaram apenas para uma dupla ter alcançado o objetivo, como ilustra a Figura 35, e as demais duplas não responderam.

Figura 35 – Protocolos dos alunos referentes ao item 1 da atividade 7

7.1 Proposição 1 de Arquimedes

"Todo círculo é equivalente a um triângulo retângulo no qual a medida de um dos lados do ângulo reto é igual à medida do raio do círculo e a medida do outro lado do ângulo reto é igual ao perímetro da circunferência".

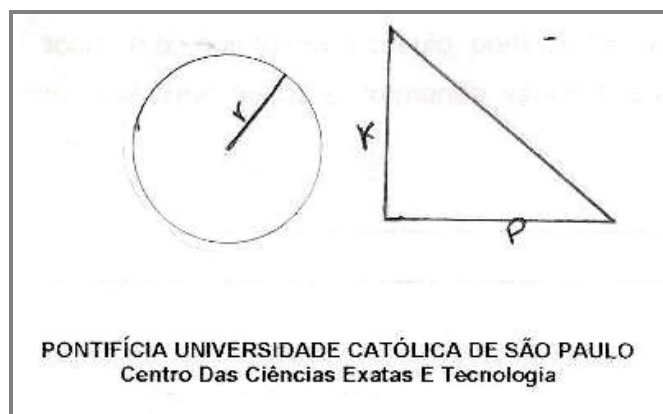
Analise a proposição e discuta com os seus colegas a fim de compreender as afirmações.

A medida dos catetos não é igual ao r do círculo e o outro lado é o perímetro do círculo.

Durante as discussões, o professor aplicador construiu as figuras de um círculo e de um triângulo retângulo, para que os alunos pudessem observar e

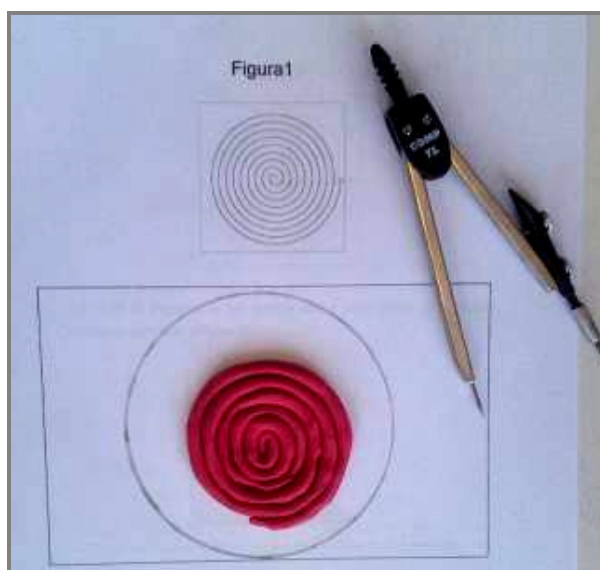
efetuar a substituição do perímetro e o raio pelos catetos. Estas Figuras foram também registradas na folha de resposta, conforme a Figura 36. O registro figural foi de suma importância para a compreensão da proposição de Arquimedes.

Figura 36 – Protocolos de alunos referentes à interpretação da proposição de Arquimedes



Apesar de todas as duplas terem o registro da figura proposta pelo professor, apenas uma respondeu à atividade, como já mencionamos anteriormente. No item 7.2, após observação, quando os alunos manusearam a massinha de modelar o professor percebeu que a colocaram na circunferência feita com compasso, nem sempre a figura era preenchida ou era maior. Para sanar esta dificuldade, os alunos construíram o círculo de massinha e, posteriormente, circundaram-na com compasso ou lápis.

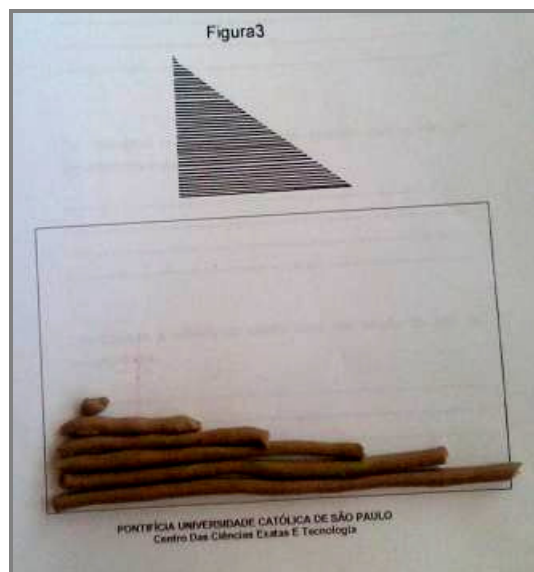
Figura 37 – Protocolos dos alunos referentes ao item 2 da atividade 7



Manusear a massinha pareceu uma forma divertida e agradável dos alunos produzirem conhecimento, fez com que todos percebessem a equivalência entre as áreas do círculo de massinha e do desenhado com compasso e, assim, obtivemos êxito no item 7.2, como também no item 7.3, que é a consequência do item anterior.

A Figura 38 representa o triângulo formado baseado nos fios obtidos pelo corte do círculo de massinha. Como podemos observar em um dos exemplos, a figura montada não se assemelha a um triângulo, embora os alunos tenham compreendido a intenção da montagem proposta no item. Pensamos que, para um melhor desenvolvimento da atividade, seria necessário que os fios de massinha fossem mais finos gerando assim uma quantidade maior de fios, a fim de haver diferenças entre tamanhos e, assim, facilitando a construção da imagem.

Figura 38 – Protocolos dos alunos referentes ao item 5 da atividade 7



A comparação entre a área do triângulo e área do círculo formado por massinha nos garantiu a concretização do entendimento dos alunos da concepção de área como grandeza. Na atividade 7.6, apenas uma das duplas apresentou registro de forma incoerente “*se somadas são iguais*”, que a nosso modo de entender demonstra uma parcial compreensão. Já as outras duplas alcançaram plenamente o objetivo, conforme registro da dupla Alice e Albert na Figura 39.

Figura 39 – Protocolos dos alunos referentes ao item 6 da atividade 7

7.6- Ao comparar a área do círculo com a área do triângulo o que você percebe?

Que eles possuem a mesma área só que com formas diferentes.

Comparar os catetos do triângulo com o raio e o perímetro da circunferência não se mostrou uma atividade difícil, porém houve a necessidade de o professor aplicador atentar para a figura que ainda estava na lousa referente à proposição de Arquimedes. A mesma dupla que apresentou resposta incoerente no item anterior, ou seja, Miki e Sophia, realizou registro confuso para o item 7.7 e errado para o item 7.8, e as demais duplas conseguiram fazer a comparação entre as medidas citadas.

No item 7.9, o professor aplicador precisou demonstrar na lousa os passos da demonstração para chegar à conclusão da resposta, pois os alunos afirmaram não entender qual o tipo de resultado era esperado. O professor aplicador partiu da razão entre perímetro e diâmetro, para determinar a expressão algébrica referente ao perímetro de uma circunferência. O fato pode ser observado na Figura 40 que, além de mostrar o pensamento inicial do aluno também consta o registro feito pelo professor aplicador na lousa.

Figura 40 – Protocolos dos alunos referentes ao item 9 da atividade 7

7.9- Escreva a medida do cateto maior em função do raio da circunferência.

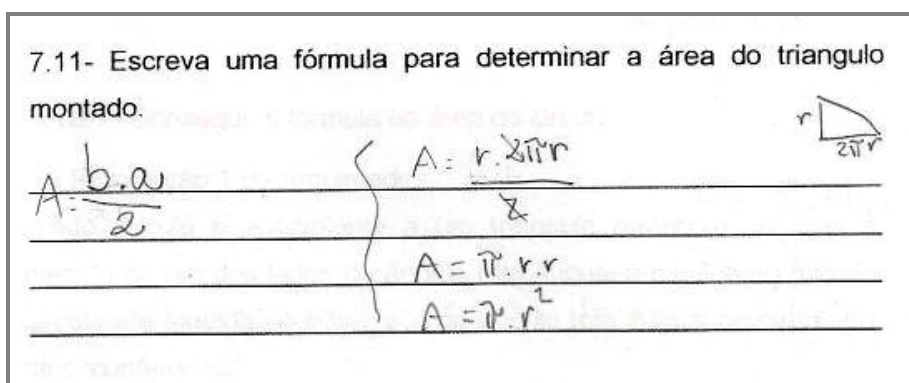
Que o cateto maior é o perímetro da circunferência

$\frac{P}{D} = \pi \quad \frac{P}{2r} = \pi \quad P = \pi \cdot 2r \quad | \quad P = 2\pi r$

Em consequência da ilustração referente à proposição de Arquimedes, comparar o cateto menor com o raio não foi difícil para os alunos, já que todos responderam corretamente ao item 7.10.

Para recordar como calcular a área de um triângulo o professor aplicador devolveu as folhas das outras atividades que os alunos entregaram. Todas as duplas escreveram a fórmula para determinar a área do triângulo, duas com registro algébrico e na língua materna e outras duas, apenas com registro algébrico. As duplas Roberta/Tiemy e Albert/Alice, de forma intuitiva ou por leitura do item posterior, realizaram o tratamento do registro algébrico a fim de alcançar a fórmula que determina a área do círculo, de acordo com a Figura 41.

Figura 41 – Protocolos dos alunos referentes ao item 11 da atividade 7



Quando perguntado se essa fórmula poderia ser usada para determinar a área do círculo, apenas uma dupla respondeu negativamente com a fala: “*não, pois para achar a área de um círculo é πr^2 e não $(\ell \cdot \ell) / 2$ ”*. Cabe ressaltar que, após as discussões sobre o item 7.12, essa dupla convenceu-se de que a resposta seria afirmativa.

Concluimos que a atividade 7 atingiu parcialmente seus objetivos, tendo em vista que uma das duplas errou o último item, que era conclusivo para a formação do conhecimento necessário, além de que o professor aplicador exerceu um papel determinante no desenvolvimento de alguns itens.

Reflexões e Perspectivas

O objetivo geral desta pesquisa foi contribuir para o avanço na melhoria da qualidade de aprendizagem dos alunos em relação à geometria, sobretudo na formação da noção de área do círculo como grandeza e a diferenciação entre o perímetro e a área de figuras planas.

Uma das maiores motivações para sua realização deu-se quando do início da participação do grupo de Estudos PEAMAT da PUC-SP, onde são abordadas discussões sobre aprendizagem. Em muitos trabalhos deste grupo, estão presentes reflexões sobre o estudo da geometria. Por isso, pensamos ser adequada a realização de uma pesquisa que focasse o olhar em direção à aprendizagem de geometria.

Ao realizar os créditos do curso de Mestrado Profissional em Educação Matemática, deparamos-nos com teorias que nos levaram a uma reflexão para o aprofundamento do objeto matemático escolhido “área de círculo e comprimento da circunferência”. Por meio de estudos históricos e epistemológicos, de livros didáticos, PCN e de algumas pesquisas em relação ao objeto chegamos à nossa questão de pesquisa: uma sequência didática, com atividades que permitam ao aluno a comparação de área do círculo e perímetro da circunferência com a área e perímetro de outras figuras, minimizaria as dificuldades na compreensão e diferenciação desses dois objetos matemáticos?

Optamos pela construção de uma sequência de atividades que seguisse os pressupostos da Engenharia Didática, uma metodologia bastante usada em pesquisas. Além de escolher a metodologia, também se fez necessário a contribuição de uma fundamentação teórica que norteasse nossos trabalhos, portanto em nossas atividades privilegiamos situações didáticas conforme previstas por Guy Brousseau em sua Teoria das Situações Didáticas, aliada as ideias desenvolvidas por Raymond Duval da Teoria de Registro de Representação Semiótica e, ainda, com as contribuições da Dialética Ferramenta-Objeto da pesquisadora Règeine Douady.

Partindo das teorias citadas e da questão de pesquisa formulada, passamos a construir a sequência das atividades para atender ao nível de ensino das séries finais do Ensino Fundamental do Ciclo II, ou seja, 8ª série/9º ano, optamos pela aplicação dessas atividades em uma escola pública na cidade de Mogi das Cruzes (SP).

As atividades foram aplicadas e aqui descreveremos de forma sucinta os resultados da presente pesquisa.

Os alunos empenharam-se muito na resolução das atividades propostas apesar de encontrarem, em algumas situações, dificuldades na realização das tarefas. Esse empenho foi importante para a construção dos conceitos de área de círculo e perímetro da circunferência.

No começo das atividades, percebemos que os alunos confundiam as noções de perímetro e área, além do que a noção de área estava inteiramente ligada às medidas de lado de polígonos. No decorrer do processo de aprendizagem, observamos o avanço dos alunos em relação aos equívocos iniciais e aos poucos conseguiram fazer a diferenciação entre perímetro de área de figuras planas e, ao mesmo tempo, consolidavam a noção de área como grandeza. Um dos fatores importantes foi a contribuição dos debates realizados, após cada item das atividades na formação do conhecimento dos sujeitos da pesquisa.

As etapas de ação, formulação, validação e institucionalização da TSD estiveram presentes em todas as atividades realizadas, sendo assim, a TSD além de nos nortear na construção da sequência foi primordial para a construção do conhecimento dos alunos.

O fato dos alunos utilizarem um conhecimento prévio ou recém-adquirido para realizar as atividades nos garantiu o uso das ideias de ferramenta-objeto de Douady (1986).

Uma etapa que acreditamos ter sido importante nas atividades foi a familiarização, a que o aluno é confrontado em outras atividades que exigem para sua resolução o uso do conhecimento recém-adquirido. Por esse motivo, o professor aplicador inseriu uma nova atividade, a fim de constatar o uso dos

conhecimentos sobre os objetos matemáticos estudados. Esta atividade foi uma adaptação de uma situação contida no volume 9º ano de Dante (2009).

O professor aplicador registrou na lousa a ilustração de um círculo com diâmetro 50m para representar uma praça onde o público ficaria acomodado para um *show de rock*, com o seguinte enunciado: Sabendo que em 1m^2 cabem cinco pessoas quantas cabem nesta praça? Para conter as pessoas, a polícia contornou a praça com uma corda. Qual o comprimento da corda?

Nesta atividade, os registros dos alunos nos indicaram que o uso do conhecimento adquirido atendeu parcialmente a nossos objetivos, tendo em vista que das quatro duplas que realizaram a atividade de familiarização, duas delas alcançaram o resultado previsto, ou seja, o número de 9.812,5 pessoas na área citada, pois as respostas foram: 9.812 e 9.810. As outras duas duplas apresentaram resultados de 7.800 pessoas e 2.500, e que os registros apontaram para uma confusão na resolução e substituição do raio pelo diâmetro.

Em relação ao comprimento da corda, estas duas duplas que acertaram a área e a quantidade de pessoas também acertaram o comprimento da corda, ao apresentar o resultado de, aproximadamente, 157 metros, e as duas duplas que não chegaram ao resultado adequado para área e quantidade de pessoas, não chegaram a um resultado para o perímetro do círculo, ou seja, comprimento da corda.

Refletindo sobre os resultados da atividade de familiarização e das atividades da sequência proposta, pensamos que as atividades desta pesquisa possam ser melhoradas, pois, conforme nosso ponto de vista, os conhecimentos aprendidos com base na realização da sequência didática proporcionaram aos alunos condições de sucesso parcial. Sugerimos que sejam levadas em consideração as reformulações das redações de algumas atividades, conforme já citado em nossa análise a posteriori. Além do mais, há necessidade de um tempo de aplicação maior que o dispensado em nossa pesquisa, a fim de favorecer mais discussões entre as duplas e uma institucionalização melhor construída por parte do professor. Também seria importante que a atividade de familiarização fosse feita de forma mais elaborada e com mais situações de resolução de problema.

Devemos ressaltar a necessidade de uma reflexão sobre a redação de algumas atividades que podem melhorar o entendimento dos alunos para alcançar os objetivos e o aprofundamento sobre o conceito e uso do teorema de Pitágoras, assim, como a medida da diagonal de uma figura retangular.

Com os resultados obtidos nesta pesquisa podemos concluir que houve a validação quase total tanto da questão de pesquisa como da sequência elaborada. Esperamos ainda que este estudo colabore para futuras investigações que envolvam os objetos matemáticos aqui abordados e no aprofundamento em pesquisas posteriores.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. A. *Fundamentos da didática da matemática e metodologia de pesquisa*. CEMA (Caderno de educação matemática). v. 3. São Paulo: PUC, 1997.

_____. *Fundamentos da Didática da Matemática*: Curitiba: Ed. UFPR, 2007, 2007.

_____. MELLO, E. G. S. Iniciação à demonstração aprendendo conceitos geométricos. 23^a Reunião Anual da ANPed, 23., 2000, Caxambu. *Anais*. Caxambu, 24-28 de setembro de 2000. Rio de Janeiro: ANPed, 2000, p. 1-18.

_____. FACCO, Sonia. *Uma abordagem de ensino-aprendizagem do conceito de área*. Anais do VIII Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM) – Comunicação Científica GT 1 – Educação Matemática nas Séries Iniciais. Universidade Federal de Pernambuco. Recife, de 15 a 18 de julho de 2004.

BÍBLIA. Português. **Bíblia sagrada**. Tradução João Ferreira de Almeida. São Paulo: Sociedade Bíblica Trinitariana do Brasil. 2004.

BONGIOVANNI, Vincenzo e WATANABE, Renate. *PI acaba?*. Revista do professor de matemática, nº 19, 1991.

BOYER, Carl B. *História da matemática*. Tradução por Elza F. Gomide. São Paulo: Edgar Blücher, 1974.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: 3º e 4º Ciclos do Ensino Fundamental: Introdução aos Parâmetros Curriculares Nacionais*. Brasília: MEC/SEF, 1998.

- BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. Brasília: MEC/SEF, 1998.
- BROUSSEAU, Guy. *Introdução ao estudo das situações didáticas*. São Paulo: Ática, 2008.
- CHIUMMO, A. O conceito de áreas de figuras planas: capacitação para professores do Ensino Fundamental. Dissertação Mestrado PUC-SP. 1998.
- DAMM, Regina Flemming. Registros de Representação. In: MACHADO, Silvia dias Alcântara. *Educação Matemática: uma introdução*. São Paulo: EDUC, 1999.
- DANTE, Luiz Roberto. *Tudo é matemática*. São Paulo: Ática, 2009.
- DUARTE, Jorge Henrique. *Análise de situações didáticas para construção do conceito de área como grandeza no ensino fundamental*. Anais do VIII Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM) – Comunicação Científica GT 1 – Educação Matemática nas Séries Iniciais. Universidade Federal de Pernambuco. Recife, de 15 a 18 de julho de 2004.
- DUVAL, Raymond. Registros de Representação Semiótica e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In: MACHADO, Silvia D. A. (Org.). *Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica*. 1. ed. Campinas, São Paulo: Papyrus, 2003.
- EVES, Howard. *Introdução à história da matemática*. Tradução por Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da UNICAMP, 2004.
- FACCO, Sonia Regina. *Conceito de Área: uma proposta de ensino-aprendizagem*. In: Dissertação de Mestrado pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo: 2003.
- GARBI, Gilberto G. *C. Q. D.: explicações e demonstrações sobre conceitos, teoremas e fórmulas essenciais da geometria*. São Paulo: Livraria da Física, 2010.
- GEOMETRIA Elementar para curso superior: coleção FTD, São Paulo: Livraria Paulo de Azevedo & CIA, 1924.

IEZZI, Gelson, DOLCE, Oswaldo e MACHADO, Antonio. *Matemática e Realidade*. São Paulo: Atual, 2009.

LIMA, Elon Lages. *Medida e forma em geometria: comprimento, área, volume e semelhança*. Rio de Janeiro: SBM, 1991.

Mathématiques approche par des textes historiques. N° 79. IREM de Paris VII, 1990, p. 35 a 55.

NUNES, José Messildo Viana. *História da Matemática e Aprendizagem Significativa da Área do Círculo: Uma Experiência de Ensino-Aprendizagem*. In: Dissertação de Mestrado pela Universidade Federal do Pará. Belém, 2007.

SANGIORGI, Osvaldo. *Matemática curso ginásial*. São Paulo: Nacional, 1965.

SÃO PAULO (Estado), Secretaria da Educação. Caderno do professor: matemática, ensino fundamental – 8ª série, 4º bimestre. São Paulo: SEE, 2008.

SÃO PAULO (Estado), Secretaria da Educação. Proposta Curricular para o ensino de matemática 1º. Coordenadoria e Estudos de Normas Pedagógicas – 4ª ed. 1992.

Sites Visitados

Karouzou, S. National Museum, Athens, 1999. Vaso de cerâmica decorada com motivos geométricos de Dimini. ano 4300-3300 a.C.. Disponível em: <http://greciantiga.org/img/index.asp?num=0737>. Acesso em: 15 de abril de 12.

Historia do mundo. Mapa com a localização dos rios Nilo no Egito, e Eufrates na Mesopotâmia. Disponível em: <http://www.historiadomundo.com.br/persa/mapa-do-imperio-persa-e-da-mesopotamia.htm>. Acesso em: 15 de abril de 12.

Antigoegito. Papiro de Rhind. Museu Britânico. Disponível em: <http://antigoegito.org/?p=1356>. Acesso em: 15 de abril de 2012.

Fundamentalmatsv. Plimpton322. Disponível em: <http://fundamentalmatsv.blogspot.com.br/p/historia-da-matematica.html>. Acesso em: 15 de abril de 2012.

González, J. L. C e Mingorance., J. L. M. Esticadores de cordas, túmulo de Menna (século XIV a.C.). Artigo Instrumentos de Topografia, recordando sua história. Disponível em: <http://fundamentalmatsv.blogspot.com.br/p/historia-da-matematica.html>. Acesso em 15 de abril de 2012.

ANEXOS

Anexo I

Comunicado da coordenação aos professores da unidade escolar



SECRETARIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO
 COORDENADORIA DE ENSINO DA REGIÃO METROPOLITANA DA GRANDE SÃO PAULO
 DIRETORIA DE ENSINO DE MOGI DAS CRUZES
 ESCOLA ESTADUAL "DR. WASHINGTON LUÍS"
 Rua Dom Antônio Cândido Alvarenga n.º 511 – Carmo – Tel. Fax (011) 4799.3699
 Mogi das Cruzes - Estado de São Paulo

OUTUBRO 2011

SENHORES PROFESSORES DAS 8^{as} SÉRIES B, C E D:

Informamos, através deste, que o Professor Gilberto P. Paulo, efetivo em matemática, nesta Unidade Escolar, está desenvolvendo um Projeto de Pesquisa sobre Aprendizagem Matemática, que é objeto de sua dissertação do curso de mestrado, pela PUC-SP, pertencendo ao Grupo de Estudos PEA-MAT do Centro das Ciências Exatas e Tecnológicas. Para efetivar esta atividade (pesquisa) solicita a participação dos alunos abaixo-relacionados para desenvolver a sequência didática que tem como proposta auxiliar na compreensão da noção de perímetro da circunferência e área do círculo, assunto previsto no currículo da 8^ª série / 9^º ano e presente no caderno do aluno volume 4.

O Projeto já foi iniciado no dia 19 de outubro (segue cronograma de aplicação abaixo), teve a participação dos mesmos, para os quais solicito que **justifique** a ausência, e também a compreensão para que possa ser dado continuidade liberando-os, na medida do possível, ou seja, que não prejudique o desenvolvimento das atividades dos senhores. São eles:

Datas da Experimentação:

19/10	13 às 15h30
20/10	13 às 13h50
25/10	15h50 às 18h20
26/10	13 às 15h30
31/10	15h50 às 18h20
04/11	13 às 15h30

Dúvidas ou maiores informações, na coordenação. Agradecemos, desde já, as possibilidades de colaboração.

Elizandra Pereira
 Coord. Pedagógica
 RG 15.887.019

Produto para aplicação

MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DA MATEMÁTICA

Gilberto Pereira Paulo

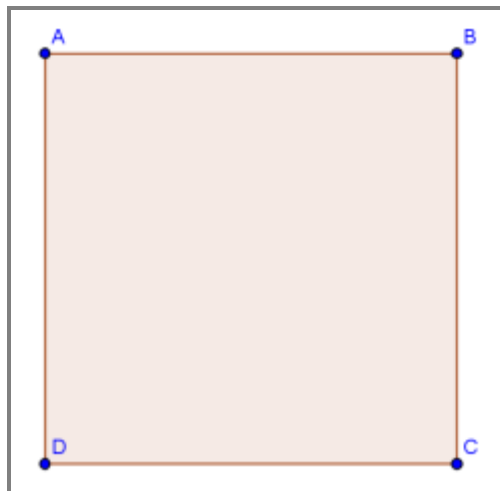
Produto Final da Dissertação apresentada à Pontifícia Universidade Católica de São Paulo em maio de 2012, Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática: **uma proposta para o ensino e aprendizagem dos conceitos de área de círculo e perímetro de circunferência.**

Nosso objetivo é estudar os processos de ensino e aprendizagem dos conceitos de área de círculo e perímetro de circunferência no Ensino Fundamental II. Pretendemos contribuir com a melhoria do ensino de Geometria, mais especificamente o ensino e a aprendizagem da área de círculo e o perímetro da circunferência. Para desenvolver esta investigação, buscamos responder à seguinte questão: uma sequência didática, com atividades que permitam ao aluno a comparação de área do círculo e perímetro da circunferência com a área e perímetro de outras figuras, minimizaria as dificuldades na compreensão e diferenciação desses dois objetos matemáticos? Apoiamo-nos na teoria das situações didáticas, a dialética ferramenta-objeto e os registros de representação semiótica, assim como nos princípios da Engenharia Didática. O público alvo da pesquisa é composto por alunos de 9º ano do Ensino Fundamental. Os resultados da pesquisa indicam um avanço na compreensão do significado de área como grandeza e na diferenciação entre circunferência e círculo, assim como entre área e perímetro.

Uma reflexão e debate sobre este tipo de atividades pode promover aos professores e aos seus alunos condições de refletirem sobre seus conhecimentos e sua prática em sala de aula. Esperamos que esta proposta contribua de forma significativa para a formação de professores e suas práticas de sala de aula.

PRODUTO FINAL: Sugestão de material para encontros de formação continuada de Matemática com professores do Ensino Fundamental II, e para a aprendizagem de seus alunos.

Atividade 1- Medir o perímetro e encontrar a área de um quadrado dado



1.1- Dado o quadrado ABCD, com o auxílio de uma régua graduada, meça o seu contorno e anote no espaço indicado.

Contorno: _____

1.2- Você poderia usar a régua graduada para medir o espaço interno do quadrado? Discuta sua resposta com as outras duplas.

1.3- Descreva uma maneira para medir o espaço interno do quadrado e exponha suas ideias.

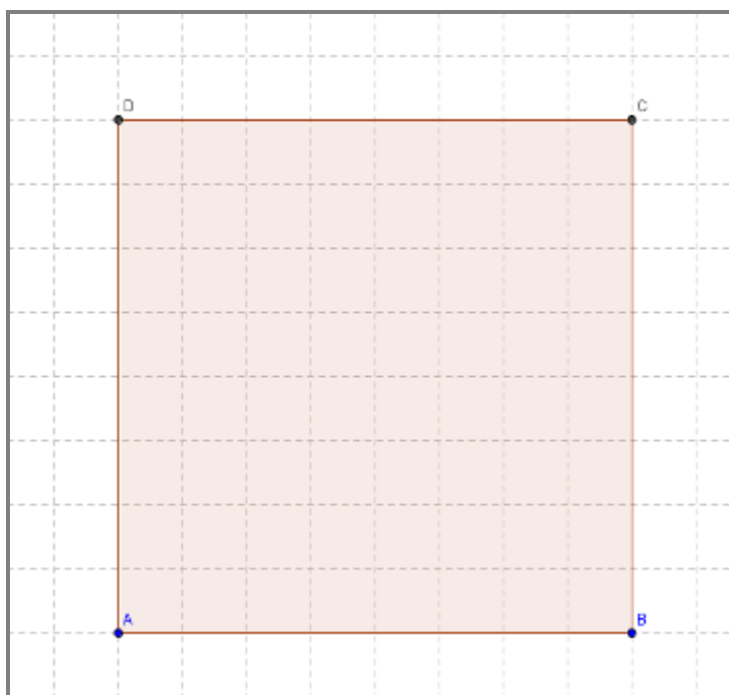
1.4- Qual é o nome atribuído ao espaço interno e ao contorno da figura que você mediu?

Objetivo da atividade 1:

O objetivo é fazer com que o aluno perceba a diferença existente entre área e perímetro, já que para calcular o perímetro ele mede o contorno da figura e notou que a medida da área se refere à superfície da figura planas e não ao contorno. Ao fazer conjecturas sobre as possíveis diferenças e se o aluno constatar que a sua resposta está muito distante daquela encontrada pela maioria dos outros, ele poderá retomar a sua ação de medição e efetuar uma nova

formulação, e, posteriormente, validar suas novas conjecturas, caso o resultado obtido seja coerente e aprovado na discussão.

Atividade 2- Determinação da medida do perímetro e área de um quadrado em folha quadriculada



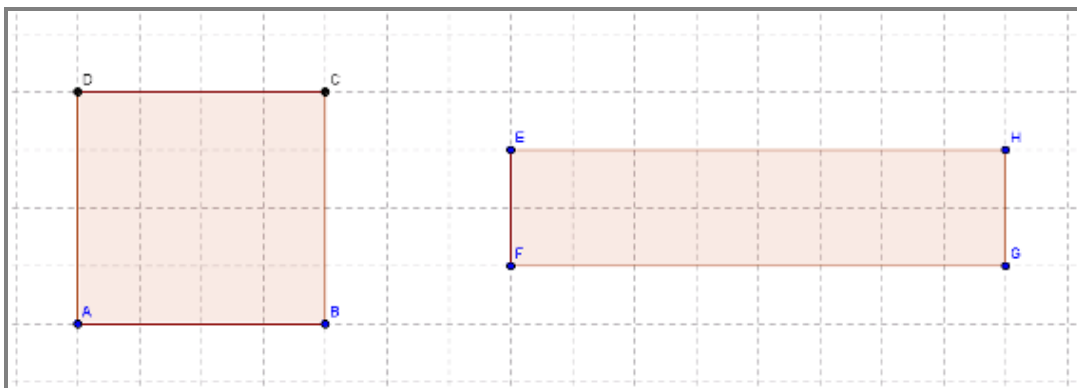
- 2.1- Usando o quadriculado, determine a medida do perímetro do quadrado ABCD.
- 2.2- Ainda com o uso do quadriculado determine a área do quadrado.
- 2.3- Qual é a unidade de medida que você está usando? Compare e discuta sua resposta com as outras duplas.
- 2.4 - Elabore uma fórmula que permita calcular a medida da área de um quadrado qualquer. Compare e discuta com as outras duplas.

Objetivo da atividade 2:

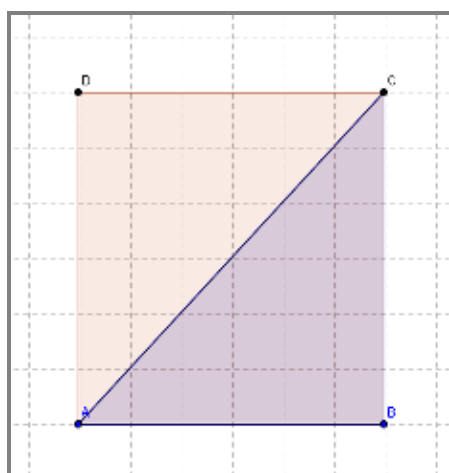
O objetivo é que o aluno diferencie área de perímetro e construa a ideia de área usando uma unidade de medida. O aluno deverá utilizar os quadrinhos como unidade de medida para determinar a medida do perímetro. Como não foi

utilizada na resolução do problema uma medida como, por exemplo, centímetro ou metro, o aluno poderá perceber a área como uma superfície e não como medida.

Atividade 3- Comparar perímetros e áreas de duas figuras planas



- 3.1- Dadas o quadrado ABCD e o retângulo EFGH, compare as áreas e os perímetros de cada uma.
- 3.2- Você encontrou alguma semelhança em relação ao perímetro ou área das figuras? Caso afirmativo, justifique sua resposta
- 3.3- Duas figuras podem ter a mesma área e ter perímetros diferentes? Discuta com as outras duplas.
- 3.4- Analise as duas figuras que estão sobrepostas, o quadrado ABCD e triângulo ABC, e determine o perímetro e área do quadrado ABCD e triângulo retângulo ABC.



3.5- Você notou alguma relação entre a área do quadrado e a do triângulo?

3.6- Caso afirmativo, elabore uma fórmula para determinar a medida da área de um triângulo genérico.

Objetivo da atividade 3:

O objetivo é fazer com que o aluno perceba a existência de figuras que contém a mesma área e perímetros diferentes e, ainda que ele relacione área do triângulo ABC com o quadrado ABCD, percebendo que se trata da metade da área. Nesta atividade o aluno deverá obter por princípio de contagem das unidades do contorno das figuras a medida do perímetro e as medidas das áreas das figuras estudadas, e posteriormente concluir que duas figuras que possuem a mesma área não necessariamente possuem o mesmo perímetro.

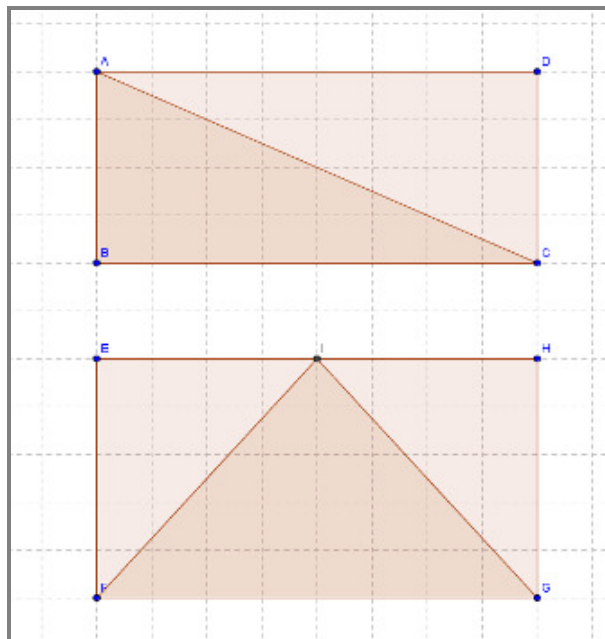
Atividade 4- Confirmar as fórmulas de área do retângulo e do triângulo.

4.1- Conte os quadradinhos que compõem a área do retângulo ABCD e do triângulo ABC.

4.2- Agora com uso das fórmulas (expressão algébrica) elaboradas determine a medida das áreas do retângulo ABCD e do triângulo ABC.

4.3- Faça o mesmo com o retângulo EFGH e o triângulo FGI.

4.4- A medida da área encontrada por meio de contagem é a mesma determinada por fórmulas para cada figura? Discuta com as outras duplas.



- 4.5- As fórmulas elaboradas funcionaram? Será que elas funcionariam para qualquer retângulo ou triângulo? Como você justifica?
- 4.6- Calcule a medida da diagonal do retângulo.
- 4.7- O valor encontrado é um número inteiro? Explique sua resposta.

Objetivo da atividade 4:

Nesta atividade o aluno deverá comparar os resultados obtidos por contagem simples com os resultados alcançados pela expressão algébrica. Ao perceber que o resultado é o mesmo, considerará como válida os dois métodos para determinar a medida da área do triângulo e do retângulo. O aluno deverá determinar as medidas das áreas das figuras apresentadas por meio de contagem, em seguida calcular as medidas de áreas das mesmas figuras com o uso das fórmulas por eles elaboradas e institucionalizadas pelo professor.

Atividade 5- A razão entre perímetro e diâmetro das circunferências

- 5.1- Com a fita métrica meça o perímetro do LP (disco de vinil do século XX) e anote o valor.
- 5.2- Com a fita métrica meça o diâmetro do disco e também anote.

- 5.3- Que relação existe entre a medida do perímetro do disco e seu diâmetro? Faça a divisão da medida do perímetro pela medida do diâmetro.
- 5.4- Compare as suas conclusões ou medidas obtidas com as outras duplas. As medidas mesmo sendo muito próximas, terão algumas diferenças. Anote essas medidas.
- 5.5- Faça o mesmo com os outros objetos circulares que foram lhes oferecidos, o CD e Tampa de lata a vácuo que possui um furo no centro.
- 5.6- Você observou alguma regularidade nos valores da razão entre os perímetros pelos diâmetros dos objetos analisados? Os valores são próximos? Explique. Discuta com as outras duplas, tente chegar a alguma conclusão.

Essa aproximação obtida por meio das medições recebe o nome de π (PI) e

foi vastamente estudada por muitos pesquisadores em toda história da matemática.

$$\frac{P}{D} = \pi, \text{ ou } \frac{P}{2r} = \pi$$

Objetivo da atividade 5:

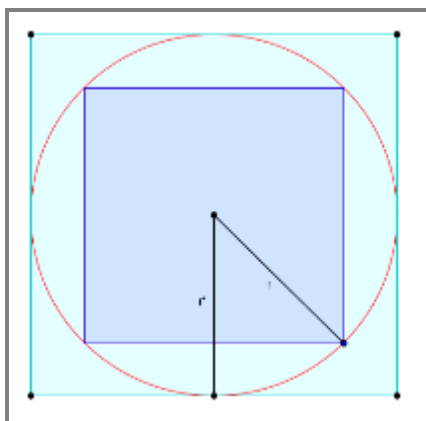
O objetivo é fazer com que aluno perceba que a razão entre o perímetro e o diâmetro da circunferência é aproximadamente igual a π . Para realizar esta atividade foram disponibilizados para os alunos os seguintes materiais: LP (disco de vinil), CD, tampa de lata a vácuo e fita métrica. Espera-se que o aluno efetue as medições do perímetro da circunferência e do diâmetro com a fita métrica.

Para essa atividade, ele necessita conhecer o instrumento utilizado, assim como o sistema de medidas que servirão como ferramenta para desenvolver a estratégia de resolução mais eficaz.

Atividade 6 - Seguir os passos de Arquimedes para uma aproximação do número π .

Vamos fazer uma aproximação do número π imitando Arquimedes, (287 a.C. - 212 a.C.) que foi um importante filósofo e matemático grego, essa aproximação feita na época foi muito respeitada e utilizada por muito tempo.

Observação: vamos escrever o perímetro das figuras geométricas em função da medida do raio da circunferência.



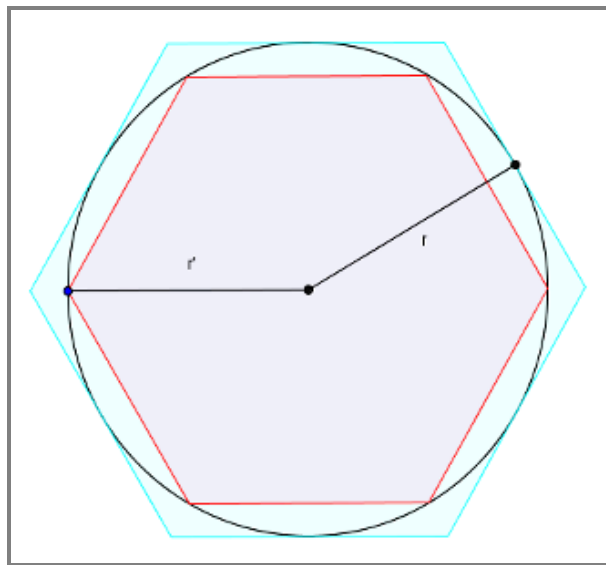
A medida do lado do quadrado menor (inscrito) equivale $\ell = r\sqrt{2}$

A medida do lado do quadrado maior (circunscrito) equivale $\ell = 2r$

6.1- Você concorda que o perímetro da circunferência é menor que o perímetro do quadrado externo (circunscrito na circunferência) e maior que o interno (inscrito na circunferência)? Qual é a medida do perímetro do quadrado ABCD? Qual é a medida do quadrado EFGH?

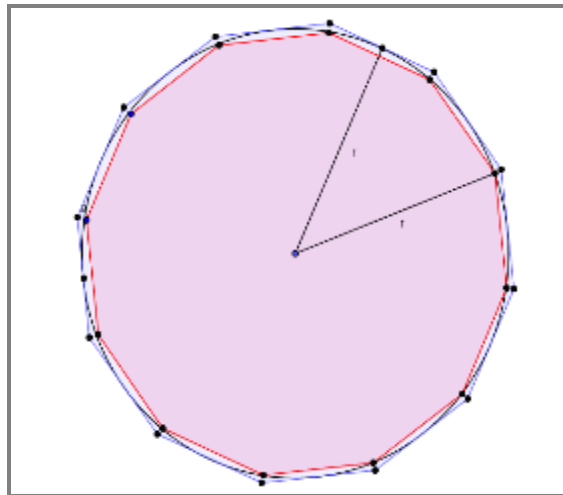
Como não conhecemos o perímetro da circunferência para determinarmos o valor de π , vamos efetuar as divisões dos perímetros dos quadrados que são conhecidos pela medida do diâmetro da circunferência.

- 6.2- Após encontrar o valor aproximado do número π referente aos perímetros dos quadrados maior e menor, o que você pode inferir em relação ao valor de π que seria obtido usando o perímetro da circunferência?
- 6.3- Encontre os valores aproximados do π referentes aos perímetros dos hexágonos externo (circunscrito) e interno (inscrito).
- 6.4- O que você pode inferir em relação ao π que seria obtido usando o perímetro da circunferência?



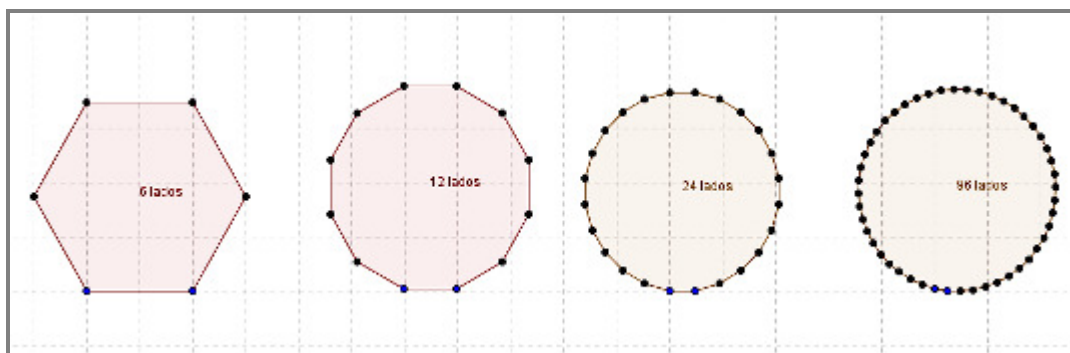
A medida do lado do hexágono inscrito: $\ell = r$. A medida do lado do hexágono circunscrito: $\ell = \frac{2r\sqrt{3}}{3}$.

- 6.5- Encontre os valores aproximados do π referentes aos perímetros dos dodecágonos externo (circunscrito) e interno (inscrito).
- 6.6- O que você pode inferir em relação ao π que seria obtido usando o perímetro da circunferência?



A medida do lado do dodecágono inscrito: $l = r\sqrt{2 - \sqrt{3}}$. A medida do lado do dodecágono circunscrito: $l = 2r(2 - \sqrt{3})$.

6.7- Começamos com uma figura de quatro lados, passamos para uma de seis lados e posteriormente para uma de doze lados. O que você pode deduzir se nós aumentarmos o número de lados?



6.8- Qual seria o perímetro de uma figura com infinitos lados? Discuta com o seu parceiro e depois exponha sua conclusão para as demais duplas.

Objetivo da atividade 6:

O objetivo é que o aluno perceba que o perímetro do hexágono inscrito é menor que o perímetro da circunferência, e o perímetro do hexágono circunscrito é maior que o perímetro da circunferência. Também espera-se que ele perceba

que com o aumento do número de lados dos polígonos a figura se aproxima de uma circunferência e que as diferenças entre os perímetros dos polígonos inscrito e circunscrito vão diminuindo, e a medida do apótema se aproxime de π .

Atividade 7- Construir a fórmula da área do círculo

7.1 Proposição 1 de Arquimedes

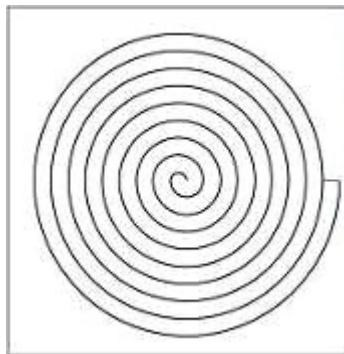
“Todo círculo é equivalente a um triângulo retângulo no qual a medida de um dos lados do ângulo reto é igual à medida do raio do círculo e a medida do outro lado do ângulo reto é igual ao perímetro da circunferência”.

Analise a proposição e discuta com os seus colegas a fim de compreender as afirmações.

7.2- Construa com compasso uma circunferência de raio qualquer e preencha a circunferência com fios de massinha de modelar, conforme a figura 1.

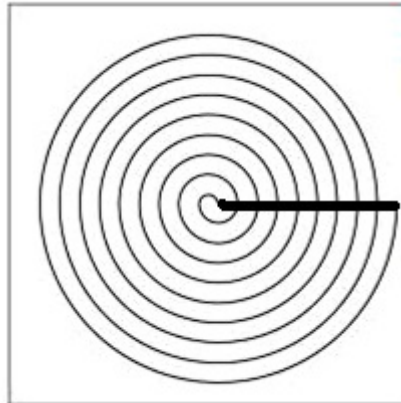
Observação: não faça uma circunferência muito pequena, pois dificultará o manuseio posteriormente.

Figura1

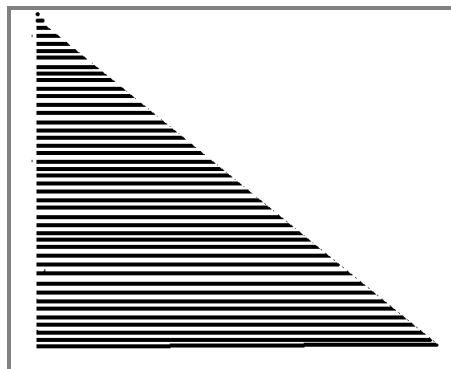


7.3- Você concorda que a área preenchida pela massinha é equivalente a área do círculo formado interno a circunferência dada?

7.4- Recorte o fio que forma o círculo, partindo da extremidade para o centro, conforme figura 2, formando vários fios com tamanhos diferentes.

Figura 2

7.5- Com os pedaços de fios obtidos com o corte monte um triângulo retângulo conforme a figura 3.

Figura3

- 7.6- Ao comparar a área do círculo com a área do triângulo o que você percebe?
- 7.7- Comparar o cateto maior deste triângulo com o perímetro da circunferência o que se pode afirmar?
- 7.8- Comparar o cateto menor deste triângulo com o raio da circunferência o que se pode afirmar?
- 7.9- Escreva a medida do cateto maior em função do raio da circunferência.
- 7.10- Escreva a medida do cateto menor em função do raio da circunferência.
- 7.11- Escreva uma fórmula para determinar a área do triângulo montado.

7.12- Essa fórmula também pode ser usada para determinar a área do círculo? Justifique sua resposta.

Objetivo da atividade 7:

O objetivo principal da atividade é conduzir o aluno à percepção de que a área ocupada pelo círculo de massinha é a mesma ocupada pelo triângulo retângulo, bem como que o aluno calcule a medida da área do círculo a partir da expressão algébrica correspondente à área do triângulo. Globalmente, ela foi proposta no intuito de proporcionar ao aluno condições de apreender a área de círculo como uma superfície, noção essencial para definir área do círculo como uma grandeza.