

**PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO  
PUC-SP**

Karly Barbosa Alvarenga

**O que dizem as pesquisas sobre o ensino e a aprendizagem de  
inequações**

DOUTORADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

SÃO PAULO

2013

**PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO  
PUC-SP**

Karly Barbosa Alvarenga

**O que dizem as pesquisas sobre o ensino e a aprendizagem de  
inequações**

**DOCTORADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**

Tese apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de **Doutora em Educação Matemática**, sob a orientação da **Prof<sup>a</sup>. Doutora Sílvia Dias Alcântara Machado**.

SÃO PAULO

2013

Banca Examinadora

---

---

---

---

---

Aos meus pais, Aparecida e Teodoro,  
a meu esposo Celso, aos meus filhos  
Gregor, Matheus, Thiago e Luane e ao  
prof. Geraldo S. S. Ávila (*in  
memorian*).

---

## AGRADECIMENTOS

Agradecer, para mim, não se faz somente por palavras, mas por ações. As atitudes e as ações são realizadas ao longo da existência. No momento, apenas posso registrar meu agradecimento a:

- Deus, pela coragem, principalmente nos momentos em que pensava em desistir;
- Meus pais, pelo apoio incessante por meio de palavras, orações, ações e oportunidades;
- Meu marido, Celso, que me reanima em todos os momentos de tristezas e dificuldades, pelas críticas construtivas, pelo apoio computacional no auge das minhas impaciências e pela compreensão;
- Meus filhos, Gregor, Matheus, Thiago e Luane, pelas palavras de incentivo, pelas cobranças carinhosas, por entender minha distância e pela torcida;
- Minha querida orientadora, Dr.<sup>a</sup> Sílvia, que soube elogiar, apontar caminhos de maneira competente e sábia, que me acolheu em sua casa inúmeras vezes, que torceu por mim e que, acima de tudo, confiou em mim;
- Meus amigos e amigas, como Marco Antônio, Dudu, Homero, Norma Lilian e Hind, que sempre me apoiaram e me incentivaram, em especial, Juliana, pelo apoio profissional, além de tudo;
- Centros Espíritas Mensageiros da Caridade e Amor e Luz, que, por meio dos amigos espirituais, trouxeram mensagens de paz, de coragem, de incentivo e de necessidade de evolução;
- Pabline e Ludgero, Lúcia e Cido, Elma e Edson, Sílvia e Ruy, pelo acolhimento em seus lares;
- Componentes da banca de qualificação, em especial, Dr.<sup>a</sup> Maria Clara Frota e Dr.<sup>a</sup> Maria Cristina Maranhão, pelas inúmeras contribuições;
- Pós-Graduação em Educação Matemática, pelo acolhimento, pelo exemplo de competência, pela oportunidade e pelo aprendizado, em especial, à Dr.<sup>a</sup> Maria Cristina Maranhão, à Dr.<sup>a</sup> Sônia Iglioni, ao Dr. Benedito Silva, à Dr.<sup>a</sup> Célia Carolino e, é claro, à Dr.<sup>a</sup> Sílvia, minha orientadora e professora;

- Comissão de bolsa da PUC-SP, pela oportunidade de concorrer de forma justa e de ter sido contemplada;

- Universidade Federal de Sergipe, principalmente, na pessoa da Dr.<sup>a</sup> Renata Mann, pela idoneidade e pela transparência nos processos de incentivo e apoio à capacitação de docentes;

- Meus irmãos Fábio e Flávio, cunhadas e sobrinhos que torceram por mim ao longo dessa batalha e de inúmeras outras. Destaco, em especial, o carinho, o incentivo e a atitude de admiração do meu querido irmão Flávio;

- Grazi, que, enquanto eu não pude dedicar-me aos serviços domésticos, assumiu-os com presteza;

- Colegas do DMAI, que votaram favoravelmente à minha concentração de aulas em dois dias, possibilitando, assim, minhas viagens semanais a São Paulo, para assistir às aulas;

- Minhas tias, em especial, minha madrinha Iolanda, Ana Maria (*in memoriam*) e Toia, que sempre me dirigiram palavras de incentivo e de refazimento;

- Colegas da pós-graduação, que, quando a situação estava crítica, tomávamos um café e ríamos, amenizando as barreiras que surgiam;

- Ed Dubinsky, que, sabiamente, deu-me grande exemplo de humildade, que confiou em mim e me apoiou sempre;

- Centro de Investigación en Ciéncias Tecnología (CICATA), pelo exemplo e pela oportunidade de aperfeiçoamento profissional;

- Professor Márcio Andrei, por permitir que utilizasse o NVIVO 09, e ao Fábio José pelo apoio computacional.

- Dra. Luciana Bazzini, Dr. Roberto Baldino e Dr. Pongchawee Vaiyavutjamai pelos trabalhos enviados.

- Meus queridos alunos e ex-alunos pelo tanto que me ensinaram e ensinam.

Enfim, eu não fiz este trabalho sozinha.

---

## RESUMO

Esta investigação é de caráter bibliográfico e tem como desafio principal mapear e refletir sobre a produção acadêmica que trata do ensino e da aprendizagem de inequações. A quantidade de pós-graduações e de eventos em educação matemática e a acessibilidade aos vários meios de comunicação favorecem o aumento de pesquisas que podem não ser conhecidas, e, conseqüentemente, perde-se a noção e a extensão das colaborações não só para a melhoria do ensino e da aprendizagem matemática, mas também para a consolidação dessa área. Aliado a esse contexto, o conceito de inequação oferece oportunidade de estudar outros, como: propriedades dos números reais, conectivos lógicos, quantificadores, ordenação de números, equivalências e transformações algébricas. Da mesma forma, é um conceito cujo estudo se inicia no ensino fundamental e pode estender-se à pós-graduação aos que optam por uma carreira em ciências exatas. Na concatenação dessas visões, nasce este trabalho. Para enfrentar o desafio, empregam-se tanto recursos da Análise de Conteúdo quanto métodos mistos de análise dos dados coletados. O mapeamento é realizado por meio de dados computadorizados, CD-ROM de eventos nacionais e internacionais, periódicos e trabalhos impressos, obtidos em bibliotecas, além de contatos diretos com alguns autores. Com o intuito de relacionar ou enlaçar várias características, especialmente ideias emitidas pelos trabalhos inventariados e elaborar linhas gerais para o plano de investigação, organizam-se os dados em três tabelas por meio de categorias *a priori* e emergentes. Os resultados apontados pela primeira tabela, formada dos dados bibliográficos, indica o movimento, o tempo, o espaço, os autores. Mediante tais dados e, principalmente, pelos títulos, reflete-se sobre, por exemplo, a gênese do tema, os enfoques, as metodologias de pesquisa, os referenciais teóricos adotados, os tipos de inequações mais utilizados para a coleta de dados e o nível escolar dos participantes das coletas. A segunda tabela, constituída das leituras dos trabalhos e, em particular, de alguns resumos, permite aprofundar os resultados da primeira e conhecer os objetivos das publicações, os referenciais teóricos educacionais e matemáticos, as metodologias de pesquisa e de campo. A terceira tabela aponta as conclusões e os resultados dos trabalhos, indicando as formas de abordagens às inequações, a natureza dos erros, os aspectos metodológicos de ensino e as questões reflexivas e investigativas. Nessa etapa, em razão do montante de informações, usa-se o *software* NVIVO 09. Ao final, são criadas e analisadas 44 categorias e subcategorias. Prevalece nas publicações o enfoque nos erros, na maneira de o estudante resolver e interpretar as inequações, a pesquisa de campo, as inequações quadráticas e lineares. As investigações estão disseminadas em todos os continentes, e este continua a ser um tema que inquieta a comunidade de pesquisadores. Assim, afirma-se que investigações sobre o ensino e a aprendizagem de inequações podem e devem ser ampliadas e aprofundadas pela comunidade de pesquisadores de educação matemática.

**Palavras-chave:** inequações; ensino; aprendizagem; Estado da Arte.

---

## ABSTRACT

This research is a bibliographic one and one of its main challenges is to map and reflect on the academic production about teaching and learning inequalities. A big amount of postgraduate dissertations and mathematics education conferences, and the accessibility to the different ways of communication allow the rise of researches that could be not known, and thus lose the content and the extent of these collaborations, not only to improve the teaching and the learning of mathematics, but to consolidate this knowledge area. In this context, the inequality concept offers the opportunity of approach others concepts as real number properties, logical connectors, quantifiers, order of numbers, algebraic equivalences and transformations. Besides it is a concept the study of which starts in the basic levels and could be extended to postgraduate level in an exact sciences program. This work arises from the chain of these visualizations. In order to face the challenge, we use Content Analysis as well as mixed methods to analyze collected data. The construction of the map was made with computerized data, CD-ROM from national and international events, and journals and printed works taken from libraries, besides of direct contact with some authors. With the objective of relate or link several characteristics of the reviewed work, and construct general research lines, the data is organized in three tables according to the *a priori* and rising categories. The results in the first table, constructed with bibliographic data, give the movement, time, space and authors. With these data, mainly through the titles, we reflect, for instance, on the genesis of the topic, approaches, research methodology, adopted theoretical references, kind of inequalities more often used to collect data, and the school level of the participants in the recollection. The second table, made up with the readings of the works and, specially, of some abstracts, allow to deepen the results of the first one and to know the goals of the published works, the educational and mathematical theoretical references, and the research or field methodologies. The third one takes into account the conclusions and results of the works, pointing out the different ways in which the topic of inequalities are approached, the nature of mistakes, the methodological aspects of teaching, and the reflective questions. In this stage, because of the amount of information, we used the software NVIVO 09. At the end, we create and analized 44 categories and subcategories. In the works prevail the mistake accounting, the ways in which students solve and interpret inequalities, field researches, and linear and quadratic inequalities. The researches are disseminated in all of the continents and it still is a topic that worries the researchers community. Thus, we claim that research about teaching and learning inequalities could and should be widen and deepen by the community of researchers on mathematics education.

**Key words:** Inequalities; teaching; learning; State of the Art.

---

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Diagrama que representa o paradigma proposto pelo grupo RUMEC .....	28
Figura 2: Exemplo de uma resolução que utiliza a tabela de sinais .....	34
Figura 3: Abordagem dos autores com respeito à inequação .....	37
Figura 4: Resolução passo a passo proposta pelos autores.....	38
Figura 5: Abordagem introdutória às inequações.....	39
Figura 6: Resolução de uma inequação quociente em livro didático .....	41
Figura 7: Ilustração do que, comumente, é apontado pelos pesquisadores como “uso da reta numérica” ( <i>number line</i> ).....	41
Figura 8: Quantitativo apresentado por Melo (2007) em relação às conversões e aos tratamentos utilizados em livros de ensino superior.....	42
Figura 9: Indicações do NCTM quanto aos objetivos e às expectativas do ensino de álgebra para o ensino médio (grifo nosso) .....	50
Figura 10 - Índice de acertos em álgebra de estudantes estadunidenses que pretendem ingressar na universidade. Enfatizamos o percentual de erros nas resoluções de inequações .....	51
Figura 11 - Diagrama representativo da nossa opção quanto ao campo a ser investigado, à coleta e à análise de dados .....	58
Figura 12: Fases da investigação .....	59
Figura 13- Diagrama representativo de uma pesquisa bibliográfica do tipo <i>estado da arte</i> com procedimentos de análise qualitativa e de conteúdo .....	64
Figura 14: Sinopse de comparação entre o estado da questão, o estado da arte e a revisão de literatura na produção científica .....	65
Figura 15 - Componentes da análise de dados: modelo interativo .....	74
Figura 16 - Aspectos a ser considerados no planejamento para um estudo de métodos mistos.....	78
Figura 17 - Mapa conceitual da coleta de dados .....	91
Figura 18 - Exemplo da busca pelo portal de periódicos CAPES.....	93
Figura 19: Exemplo da página em português do ProQuest, região América Latina .....	96
Figura 20 – Exemplo da busca no Google Scholar, realizada pelo descritor <i>inequações</i> .....	97
Figura 21 - Exemplo da busca pelo ERIC .....	98

Figura 22 - Um dos resultados encontrados, utilizando a palavra <i>desigualdades</i> , com pesquisa regional. A palavra <i>desigualdade</i> aparece na penúltima linha do resumo em português. ....	100
Figura 23: Exemplo de periódicos encontrados na revista publicada pela PUC-SP ....	104
Figura 24: Resultado parcial da busca na REVEMAT .....	105
Figura 25: Exemplo de um tipo de procura no <i>site</i> de uma revista portuguesa.....	106
Figura 26: Modelo da tabela com as categorias predefinidas.....	110
Figura 27: Exemplos de como as palavras foram destacadas.....	113
Figura 28: Referências bibliográficas de Linchevski e Sfard (1991) .....	120
Figura 29 - Mapa da suposta difusão da temática segundo o local de trabalho dos autores.....	123
Figura 30 - Esquema de inter-relações entre focos de pesquisa .....	141
Figura 31 - Distribuição no mapa mundi dos países que editoraram artigos sobre a temática.....	152
Figura 32- Exemplo de parte da segunda tabela.....	162
Figura 33: Esquema ilustrativo do tratamento do <i>corpus</i> .....	163
Figura 34: Grupos de objetivos .....	164
Figura 35: Proporção do objetivo “analisar o modo de abordar as resoluções” no <i>corpus</i> .....	168
Figura 36: Proporção entre o foco nos erros e na resolução dos estudantes .....	168
Figura 37: Proporção entre alguns focos e outros dos trabalhos mapeados, com intersecção entre o foco na metodologia de ensino e as formas de abordagens dos estudantes .....	176
Figura 38: Proporcionalidade entre o todo e o foco no currículo.....	179
Figura 39: Classificação da categoria referencial teórico matemático e teórico-educacional.....	181
Figura 40: Exemplo de uma resolução que utiliza a Tabela de Sinais .....	190
Figura 41: Tipologias do referencial teórico-educacional.....	195
Figura 42: Campos teóricos.....	202
Figura 43: Os tipos de pesquisas .....	205
Figura 44: Proporcionalidade entre a pesquisa teórica e o conjunto de publicações inventariadas.....	207
Figura 45: Exemplo de organização dos dados .....	212
Figura 46: Ilustração de uma janela do NVIVO09.....	213

Figura 47: Apresentação de uma janela onde é possível optar pelo tipo de resultado correspondente, utilizando palavras similares .....	214
Figura 48: Diagrama indicativo do uso do NVIVO 09 .....	219

---

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Dados sobre as possibilidades de busca nos sites indicados .....	88
Tabela 2: Dados quantitativos de autores com mais de 2 publicações, contabilizando parcerias, em 67 trabalhos .....	121
Tabela 3: Alguns autores e nacionalidades (em 21 autores) .....	122
Tabela 4: Países onde alguns autores trabalhavam na época da publicação ( porcentagem com base em 30 trabalhos) .....	123
Tabela 5: Quantidade de autores, país onde trabalhavam e nacionalidade .....	124
Tabela 6: Artigos em ordem cronológica .....	125
Tabela 7: Quantitativo de palavras cujos títulos enunciaram uma preocupação com a forma de abordagem .....	129
Tabela 8: Quantitativo de palavras (ou sinônimos) envolvidas em 48 títulos.....	130
Tabela 9: Palavras e seus quantitativos, considerando palavras no mesmo título, em 67 trabalhos. ....	130
Tabela 10: Dados relativos ao levantamento de palavras que acompanham os termos <i>equação</i> e <i>inequação</i> em 12 trabalhos, com possibilidade de duas ou mais caracterizações no mesmo título.....	136
Tabela 11: Quantitativos das expressões de tipos de inequações expressas nos títulos	141
Tabela 12: Quantidade de trabalhos que explicitam a escolaridade dos sujeitos da pesquisa .....	145
Tabela 13: Eventos e quantidade de trabalhos.....	148
Tabela 14: Objetivos e suas porcentagens em relação ao <i>corpus</i> .....	180
Tabela 15: Referencial teórico, autoria, quantidade aproximada e publicações correlacionadas .....	201

---

## LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1: Dados quantitativos de publicações e autores .....	119
Gráfico 2 - Porcentagem de foco das publicações.....	132
Gráfico 3: Os referenciais que mais apareceram nos títulos .....	134
Gráfico 4: Dados numéricos de pesquisas que enfocam, em seus títulos, o ensino ou a aprendizagem de inequações .....	137
Gráfico 5: Esboço gráfico das expressões $x$ e $x$ .....	139
Gráfico 6: Dados relativos à quantidade de trabalhos em alguns anos .....	150
Gráfico 7: Quantidade de editorações nos respectivos países .....	151
Gráfico 8: Esboço das 2 funções envolvidas em (1) .....	155
Gráfico 9: Esboço da expressão envolvida em (2) .....	156
Gráfico 10: Proporção do foco nas abordagens metodológicas em relação ao todo ....	170
Gráfico 11: Tipos de inequações e suas porcentagens mapeadas.....	183
Gráfico 12: Ideia proporcional do tratamento dado às inequações de acordo com as publicações .....	194
Gráfico 13: Quantitativo dos referenciais teóricos de acordo com a tabela 15 .....	203
Gráfico 14: Nível de escolaridade segundo a análise do interior dos trabalhos .....	206
Gráfico 15: Porcentagem das pesquisas teórica e de campo em nosso levantamento ...	208

---

## LISTA DE QUADROS

Quadro 1: Apresentação das categorias <i>a priori</i> e das subcategorias relacionadas somente aos dados bibliográficos dos trabalhos mapeados.....	111
Quadro 2: Apresentação de autores e publicações com ou sem parcerias <sup>26</sup> .....	118
Quadro 3: Levantamento, nos títulos, de referenciais teóricos .....	133
Quadro 4: Categorias e subcategorias .....	164
Quadro 5: Categorias que surgiram dos dados da terceira tabela para complementar e aprofundar as análises.....	218
Quadro 6: Resumo das categorias resultantes da análise de 67 publicações.....	250

---

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ANPED	Associação Nacional de Pesquisa em Educação
APOS	<i>Action, Process, Object and Schema</i>
BIREME	Centro Latino-Americano e do Caribe de Informação em Ciências da Saúde
BR	Brasil
CAPES	Comissão de Aperfeiçoamento de Pessoal do Ensino Superior
CERME	<i>Conference of the European Society for Research in Mathematics Education</i>
CIEAEM	<i>Commission Internationale pour l'Étude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques</i>
COMUT	Comutação Bibliográfica
DCNES	Diretrizes Curriculares para o Ensino Secundário
EJMSTE	<i>Eurasia Journal of Mathematics, Science &amp; Technology Education</i>
ENEM	Encontro Nacional de Educação Matemática
ERIC	<i>Educational Research Information Center</i>
FAPESP	Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo
FR	França
GECO	<i>Association pour le Développement du Génie Cognitif</i>
GR	Grécia
ICME	<i>International Congress of Mathematics Education</i>
ICMI	<i>International Commission on Mathematical Instruction Study Conference</i>
ICTM	<i>International Conference on Teaching of Mathematics</i>
IGPME	<i>International Group of Psychology Mathematics Education</i>
IJMEST	<i>International Journal of Mathematics Education in Science and Technologies</i>
IL	Israel
IMPA	Instituto de Matemática Pura e Aplicada
ISETL	<i>Interactive Set Language</i>
IT	Itália
JSSM	<i>Journal School Science and Mathematics</i>

MCME	<i>Mediterranean Conference on Mathematical Education</i>
MPA	Matemática Pura e Aplicada
NCTM	<i>National Council Teacher Mathematics</i>
NUDIST	<i>Nonnumerical Unstructured Data Indexing, Searching and Theorizing</i>
OCNEM	Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio
PCN +	Parâmetros Curriculares Nacionais +
PCNEF	Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental
PCNEM	Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio
PME	<i>Psychology Mathematics Education</i>
PROQUEST	Programa de Pesquisa <sup>1</sup>
PUC-RJ	Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro
RELIME	<i>Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa</i>
REVEMAT	Revista Eletrônica de Educação Matemática
RF02	Research Forum 02
RUME	<i>Research Undergraduate Mathematics Education Conference</i>
RUMEC	<i>Research in Undergraduate Mathematics Education Community</i>
SciELO	<i>Scientific Electronic Library Online</i>
SFIDA	<i>Séminaires Franco-Italien de Didactique de L'Algèbre</i>
SMUPT	<i>Seminario Matematico - Università e Politecnico Di Torino</i>
SG	Singapura
TA	Técnica Algébrica
TAS	Técnica Algébrica com uso da Tabela de Sinais
TFG	Técnica Funcional Gráfica
TIMRSS	<i>International Mathematics and Science Study-Repeat</i>
TF	Técnica Funcional
TH	Tailândia
UEL	Universidade Estadual de Londrina
UEM	Universidade Estadual de Maringá
ULBRA	Universidade Luterana do Brasil
UNESP	Universidade do Estado de São Paulo
UNIBAN	Universidade Bandeirantes
UNICAMP	Universidade de Campinas

---

<sup>1</sup> Não se sabe ao certo, mas pode significar também Pesquisa Profissional - *Pro*(Professional-profissional) e *Quest* (Quest-pesquisa, investigação)

UNICSUL	Universidade Cruzeiro do Sul
UFPA	Universidade Federal do Pará
UR	Unidade de Registro
USP	Universidade de São Paulo

---

# SUMÁRIO

INTRODUÇÃO.....	20
CAPÍTULO 1:CARACTERIZAÇÃO DO TEMA .....	26
O caminho em direção ao tema.....	27
Relevância e justificativa .....	30
Livros didáticos.....	34
Ensino fundamental .....	35
Ensino médio .....	39
Ensino superior .....	42
Documentos oficiais.....	45
Objetivos, questões norteadoras, hipóteses.....	54
Considerações .....	56
CAPÍTULO 2 :METODOLOGIA DA PESQUISA .....	57
A pesquisa bibliográfica .....	61
A pesquisa do tipo estado da arte.....	64
A abordagem qualitativa .....	72
A abordagem quantitativa .....	76
A análise quanti-qualitativa .....	77
A abordagem teórico-metodológica: análise de conteúdo .....	79
Unidade de registro (UR) e unidade de contexto (UC) .....	80
Considerações .....	83
CAPÍTULO 3: METODOLOGIA DE COLETA DE DADOS.....	85
<i>Sites</i> de busca .....	92
Bibliotecas acadêmicas .....	100
Revistas científicas brasileiras .....	103
Revistas científicas estrangeiras .....	105
Considerações .....	107
CAPÍTULO 4:TRATAMENTO DOS DADOS E ANÁLISE DA PRIMEIRA TABELA .....	109
Organização dos dados .....	109
Autores.....	112
Títulos.....	112

Tipo de publicação.....	113
Data da publicação.....	114
País da editoração .....	114
Relação entre as categorias .....	114
O movimento das produções.....	115
Resultados da análise da primeira tabela .....	116
Autores.....	116
Títulos.....	125
Tipo de publicação.....	145
Data da publicação.....	149
País da editoração .....	151
Relações entre categorias.....	153
Considerações .....	157
CAPÍTULO 5 : ANÁLISE DA SEGUNDA TABELA.....	160
Objetivo da publicação .....	164
Tipos de resoluções, de forma geral .....	165
Metodologias de ensino e teorias.....	169
Pesquisas teóricas .....	176
Currículo .....	178
Referencial matemático e teórico-educacional .....	180
Referencial matemático .....	182
Referencial teórico-educacional .....	199
Metodologia de pesquisa e coleta de dados .....	204
Campo.....	205
Teórica .....	206
Considerações .....	208
CAPÍTULO 6 : RESULTADOS DA ANÁLISE DA TERCEIRA TABELA .	210
O <i>software</i> QRS NVIVO 9 .....	211
A Preparação dos dados .....	211
A utilização do <i>software</i> .....	212
Retrospecto e aspectos fundamentais.....	214
Categorização.....	217
Formas de abordagens .....	218
Natureza dos erros .....	225
Aspectos metodológicos .....	227

Questões reflexivas e investigativas .....	234
Considerações .....	237
CAPÍTULO 7: _CONSIDERAÇÕES FINAIS .....	239
As tabelas .....	241
As categorias .....	249
REFERÊNCIAS .....	254
APÊNDICE I .....	270
APÊNDICE II.....	274

## INTRODUÇÃO

---

Este trabalho surgiu de uma inquietude quanto aos inúmeros erros cometidos pelos estudantes em relação à resolução e à interpretação de inequações. Essas dificuldades estão registradas tanto por autores brasileiros (ALVARENGA, 2006; DE SOUZA, 2006; MELO, 2007) como por estrangeiros (BAZZINI, 2007; BLANCO; GARROTE, 2007; TSAMIR; BAZZINI, 2001a; BOERO, 1998). Desde a década de 90, o número de publicações a respeito do ensino e da aprendizagem de inequações tem crescido e tem-se expandido entre os continentes. Porém, mesmo com o montante de pesquisas realizadas e publicadas, ainda hoje, percebemos autores que registram a persistência dessas dificuldades tanto na educação básica como na superior (por exemplo, HAMALGHI, 2010; ROH, HALANI, 2011; JÚNIOR C., 2011).

As inequações estão situadas no currículo escolar brasileiro desde o 8º ano do ensino fundamental e são ministradas, até o curso de Cálculo I, ou Pré-Cálculo, no ensino superior, aos que optam por carreiras na área de Ciências Exatas ou da Terra. Contudo, as investigações têm apontado pouco êxito dos estudantes em relação às resoluções e às interpretações. Em seu estudo, estão envolvidos conceitos matemáticos que, em geral, são referidos de forma superficial e mecanizada, gerando procedimentos de manipulações algébricas puramente algorítmicas. Isto pode indicar uma perda de oportunidade para tratar de números reais, lógica matemática, linguagem algébrica, demonstrações, funções e seus gráficos e alguns modelos de forma mais investigativa, intrigante, compreensiva e significativa.

Na busca por entender o reflexo das pesquisas existentes na área de educação matemática quanto ao ensino e à aprendizagem de inequações, propusemo-nos a mapear trabalhos com foco nessa direção e analisá-los no sentido de localizar e entender o que já se produziu sobre o assunto, qual o movimento e o dinamismo dessa produção, as ênfases cognitivas, epistemológicas, históricas e didáticas de cada trabalho, o tipo de pesquisa e de participante dela, se for o caso, o levantamento cultural realizado, as teorias utilizadas nas coletas e ou nas interpretações, a força argumentativa dos pesquisadores e das conclusões apresentadas. Assim, nosso trabalho de pesquisa é do tipo *estado da arte*, cujo objetivo é identificar aspectos da produção veiculada em

periódicos científicos e teses nacionais e internacionais que apresentam temáticas, envolvendo o ensino e a aprendizagem de inequações, almejando subsidiar novas pesquisas, indicando questões que podem ser aprofundadas ou complementadas e ou indicar direções para atividades didáticas. Procuramos reunir as produções, ao menos parcialmente, por tema e organizá-las no sentido de fazer emergir questões que ainda não foram estudadas e apresentadas ou interpretar as já postas. O período adotado compreendeu os anos entre 1991 e julho de 2011.

A origem da expressão *estado da arte* está, segundo a *Wikipédia*, possivelmente, no *Livro I da Metafísica*, em que Aristóteles trata do conhecimento e apresenta as noções de *ἐμπειρία* (translit. *empeiria*) e de *τέχνη* (*téchne*), isto é, 'experiência' e 'arte', reportando-se à experiência como o conhecimento dos singulares e à arte como o conhecimento dos universais. Ele julgava haver mais saber e conhecimento na arte do que na experiência, considerando os indivíduos de arte mais sábios que os empíricos. Isto ocorre, porque, segundo o filósofo, os primeiros conhecem a causa, e os segundos, não, ou seja, enquanto os empíricos sabem o "quê", mas não o "porquê", os homens de arte sabem o "porquê" e a causa.

Para proceder ao estudo de qual é o estado atual de pesquisas científicas sobre esse assunto, utilizamos recursos da *análise de conteúdo* (BARDIN, 2011). Em conformidade com essa autora:

É um conjunto de técnicas de análise das comunicações. Não se trata de um instrumento, mas de um leque de apetrechos; ou, com maior rigor, será um único instrumento, mas marcado por uma grande disparidade de formas e adaptável a um campo de aplicação vasto: as comunicações. (BARDIN, 2011, p.37)

Atualmente, a análise de conteúdo tem multiplicado suas aplicações, marcando o passo, ao concentrar-se na transposição tecnológica em objeto de inovação metodológica. Como tendência, é possível registrar o seu emprego no campo alargado da análise de comunicações: lexiometria, enunciação, linguística, análise de conversão, documentação e bases de dados, entre outros.

Nesse tipo de análise, o ponto inicial é a mensagem, mas devemos considerar, também, as condições contextuais de seus produtores e assentarmos na percepção crítica e dinâmica da linguagem. Utilizamos recursos de categorização, tabulação, e, nesse caso, codificar é um procedimento comum. É um momento em que os dados brutos são transformados de modo organizado e são agregados em unidades, as quais permitem uma descrição das características pertinentes do conteúdo. Isso compreende a

escolha de unidades de registro, a seleção de regras de contagem e a escolha de categorias. A Unidade de Registro (**UR**) é a unidade de significação a codificar, pode ser o tema, a palavra ou a frase. Recorta-se o texto em função da unidade de registro, porém, isoladamente, muitas vezes, não é possível interpretá-la. Assim, utilizamos, também, a Unidade de Contexto (**UC**), isto é fazemos referência ao contexto da unidade que se quer registrar. Então, o contexto serve para compreender a unidade de registro. Resumidamente, uma das finalidades da análise de conteúdo é produzir inferência, trabalhando com vestígios e indicadores postos em destaque por processos mais ou menos complexos (FRANCO, 2003). Diante do exposto, nossa pesquisa é bibliográfica do tipo *estado da arte*, e, para analisar os dados, utilizamos recursos de métodos mistos (CRESWELL, 2010) nos moldes da análise de conteúdo.

Autores citados por Miles e Huberman (1994) sugerem determinadas razões para responder à questão de por que interligar os métodos quantitativos aos qualitativos: comportar ratificação ou corroboração um do outro pela triangulação; elaborar ou desenvolver análise, fornecendo ricos detalhes; iniciar novas linhas de pensamento por meio da atenção a surpresas e paradoxos, “transformando ideias em torno de”, propiciando novos *insights*; ajudar sequencialmente – os resultados do primeiro método informam, direcionam a segunda amostragem, a instrumentação etc. – e expandir o escopo e a “largura” de um estudo em diferentes métodos, em diferentes componentes.

A metodologia para a coleta dos dados, ou seja, dos periódicos e das teses a ser analisados mostrou-se um procedimento intrincado, primeiramente, pelos inúmeros tipos, variações e maneiras de realizarmos as buscas: em bibliotecas, presencialmente e virtualmente, em *sites* que possuem base de dados sobre periódicos, dissertações e teses, em mídias de congressos e em contatos com autores por *e-mail*. As combinações de palavras e ou frases para realizarmos as buscas foram, inicialmente, o termo *inequações* em várias línguas, porém não nos limitamos a essa possibilidade. Além disso, do mesmo modo, alguns bancos de dados computadorizados permitem pesquisas de variadas formas que podem restringir ou ampliar o alcance de dados. Em segundo lugar, tivemos de elaborar uma metodologia própria em função de que, ao contrário de muitos trabalhos dessa natureza, que lançam mão de resumos e outros dados dos textos para análises, nós havíamos estabelecido que os textos dos periódicos, quando necessário, seriam lidos na íntegra, pois, nem sempre, artigos de periódicos apresentam resumos, que, por sua vez, nem sempre, expressam, verdadeiramente, o trabalho.

Nesse ir e vir, entre buscas e leituras, em um processo que parecia sem fim, decidimos inventariar e analisar 67 trabalhos. O limite para tal quantidade aconteceu quando percebemos que, mesmo por diferenciadas buscas, os trabalhos começaram a repetir-se. Assim, decidimos que era hora de parar, ainda que, depois, conseguíssemos mais alguma publicação, como de fato aconteceu, pois localizamos, já no final, mais 3 trabalhos, que não entraram nesse inventário.

O material foi tratado por meio de tabelas, então já se estabeleciam, implicitamente, categorias *a priori*. A primeira tabela foi dedicada aos dados bibliográficos dos trabalhos; a segunda, à metodologia de pesquisa, aos objetivos e aos referenciais teóricos utilizados pelos pesquisadores. A terceira, por sua vez, tratou, exclusivamente, das conclusões apresentadas pelos autores. Esse procedimento permitiu-nos ter uma visualização holística dos dados e forneceu-nos recursos para montarmos um tipo de “quebra-cabeça”, sem conhecermos as peças. Porém, depois de reiteradas leituras e interpretações das tabelas, as peças foram emergindo, permitindo-nos proceder à montagem. Na última etapa, na análise da última tabela, vimo-nos em meio a grande quantidade de dados tabelados, então começamos a interpretação por meio do *software* NVIVO 09, que permitiu a localização de palavras e seus sinônimos que registravam aspectos importantes dos trabalhos, como, por exemplo, a localização de palavras, erros, dificuldades, incoerências e similares.

Ao trabalharmos com cinco línguas e fazer a análise das mensagens nos idiomas eleitos, apoiamo-nos na nossa vigilância permanente, para não cometer enganos de interpretação. Consideramos a nossa estada no “campo”, focado como os documentos bibliográficos, essencial, isto é, a “permanência no campo” garantiu-nos maior probabilidade de resultados acurados, o que pode consubstanciar a validade das informações. Mesmo com estreita ligação entre o francês, o italiano, o espanhol e o português, idiomas neolatinos, e, apesar de o inglês, de mesma raiz indo-europeia, adotar palavras advindas do latim, tivemos de ser cautelosos nas traduções e nas análises. Nesse sentido, sustentamos uma atitude flexível e aberta, aceitando que outras interpretações possam ser sugeridas, discutidas e igualmente acolhidas.

Os resultados indicam que as pesquisas nessa linha se ativeram, principalmente, à análise dos erros dos estudantes, e isso aponta para um campo de investigação não esgotado. A influência dessas pesquisas e o tratamento das questões curriculares, didáticas e epistemológicas podem ser explorados se, realmente, pretendemos não só valorizar e edificar a educação matemática como área de pesquisa definida e

consolidada, mas também influenciar, de fato, a comunidade escolar. Com tais ações, podemos olhar o tema em questão como boa oportunidade para aumentar o conhecimento matemático, enredado, inter-relacionado, sistematizado, como recurso de análise de situações-problema, como uma linguagem para modelar fenômenos, como uma ciência que possui uma linguagem e uma organização axiomatizada próprias. O assunto tratado proporciona todos esses enfoques, basta querermos e emprendermos sua exploração adequadamente, a cada nível escolar.

Para explorarmos mais profundamente este assunto, estruturamos esta pesquisa em 8 partes: a introdução e sete capítulos. No primeiro capítulo, expomos a caracterização do tema, apresentamos nossos propósitos e as questões a ser investigadas.

A nossa metodologia de pesquisa mereceu um capítulo, o segundo, pois apresenta intersecções de procedimentos e recursos não muito comuns. Assim, supomos que o leitor estaria inteirado do nosso contexto se expuséssemos tal opção metodológica.

O fato de termo-nos empenhado em uma coleta de dados repleta de caminhos, com curvas e confluências, acreditamos que permitir e expor a nossa trajetória conduz, de forma mais segura, o leitor. Nesse contexto, surgiu o capítulo três.

Iniciamos, no capítulo quatro, a apresentação de nossos resultados propriamente, a forma como os dados foram tratados, o que já pode ser considerado como um resultado, e as análises da primeira tabela. Essa foi uma etapa que surpreendeu pelo fato de termos extraído, somente dos dados bibliográficos dos trabalhos mapeados, inúmeras informações. A partir desse capítulo, quando achamos necessário e conveniente, deixamos as citações na língua original com o intuito de sermos fieis às mensagens emitidas pelos autores, porém sem ferir a ABNT 10520, item 5.8, explicitamos as traduções nas notas de rodapé que, aliás, são de nossa inteira responsabilidade. Cabe ressaltar que para não carregar o texto não explicitamos a expressão “tradução nossa”, em tais notas, apesar de que todas as traduções foram de nossa autoria.

Dotados de curiosidade e inquietude, consequências dos resultados obtidos da análise da primeira tabela, procedemos à análise da segunda. Queríamos saber se os dados já obtidos eram corroborados, suportados e, além disso, esperávamos conseguir informações que complementassem as anteriores. Então, surgiu o quinto capítulo.

No sexto, apresentamos a interpretação da terceira tabela fundamentada nas conclusões e nas questões investigativas e ou reflexivas levantadas pelos pesquisadores.

Dedicamos o sétimo e último capítulo a uma revisão do que foi feito na pesquisa, não só com o intuito de ser mais uma oportunidade de reavaliar as análises e resumir o trabalho, mas também reafirmar, incisivamente, o nosso foco, rever os argumentos utilizados e propor um caminho de continuidade e complementação da pesquisa, reiterando que o fim está à vista e devemos prosseguir.

# CAPÍTULO 1

---

## CARACTERIZAÇÃO DO TEMA

Para que fique clara e concisa a extensão conceitual do assunto, é importante situá-lo em sua respectiva área de conhecimento, permitindo assim que se considere a especificidade do objeto na conjuntura da área temática. O pesquisador deve explorar e contextualizar; isto significa tratar do tema de forma a identificar a situação ou o contexto no qual o problema a seguir será inserido, permitindo uma visualização situacional da questão.

De acordo com Apollinário (2012, p.72), “uma vez determinado o tema de sua pesquisa, a próxima providência a ser tomada é aumentar a sua compreensão geral sobre ele. Para isso, você deve recorrer a um levantamento preliminar de informações mínimas”. Nesse sentido, apresentamos considerações pertinentes ao tema que possibilitem uma contextualização do enfoque dado nesta tese.

Nos últimos 21 anos, tem-se produzido expressivo conjunto de pesquisas cujo foco é o ensino e a aprendizagem de inequações. Mediante o levantamento de publicações relacionadas a essas pesquisas, desenvolvemos uma investigação cujo objetivo principal é mapear e refletir sobre a produção acadêmica nesse campo de conhecimento, tentando responder a questões sobre quais aspectos e dimensões são destacados e privilegiados em variadas épocas e lugares, de que formas e em que condições têm sido produzidas as publicações em periódicos, comunicações em anais de eventos científicos e teses de doutorado. Nosso trabalho tem um caráter inventariante e descritivo da produção científica sobre o tema que investiga, segundo categorias e aspectos que a caracterizam. Assim, buscamos compreender o processo de formação do conhecimento científico em relação ao ensino e à aprendizagem de inequações e as transformações ocorridas ao longo da história.

Estamos cientes da possibilidade de existir publicações que trabalharam com esse assunto, mas que não foram arroladas em nossa investigação. A depender do

método de levantamento sobre o tema, o inventário pode ser alterado. Iniciamos este trabalho investigativo com o reconhecimento dos limites de realizar uma pesquisa com características de um estado da arte. Vários fatores criam a diferença entre a situação real e a encontrada.

## O CAMINHO EM DIREÇÃO AO TEMA

O primeiro contato com o tema, sob o ponto de vista investigativo, ocorreu no final da década de 90, na Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-RJ). Na ocasião, os professores de Cálculo I comentavam os problemas dos alunos em lidar com as inequações e o quanto isso contribuía para aumentar os obstáculos à aprendizagem relacionados à, principalmente, manipulação dos conceitos<sup>2</sup> de *limite* e *continuidade*. Aliadas a esse contexto, também vieram à tona lembranças dos erros cometidos por meus ex-alunos do segundo e do terceiro graus quando resolviam as inequações.

Na ocasião, iniciei um trabalho que objetivava não somente analisar essas dificuldades e concepções<sup>3</sup> dos universitários, mas também elaborar e implementar atividades que propiciassem a coleta de variadas construções mentais - processos cognitivos mobilizados mentalmente - de universitários quando trabalhavam com as inequações. Utilizei o paradigma (cf. Fig. 1) para investigação e desenvolvimento pedagógico proposto pelo grupo Research in Undergraduate Mathematics Education Community (RUMEC)<sup>4</sup>, dirigido por Ed Dubinsky (ASIALA *et al.*, 1996).

---

<sup>2</sup> A palavra *conceito* é interpretada como a representação de um objeto pelo pensamento, por meio de suas características gerais.

<sup>3</sup> Entendidas como ato de formar ideias, de conceber mentalmente, de compreender determinado assunto.

<sup>4</sup> As expressões utilizadas em outra língua que não seja o português são empregadas no texto em língua original. As traduções encontram-se no apêndice I, excetuando aquelas como *proceedings* (anais) que já são suficientemente conhecidas da comunidade dos educadores matemáticos.

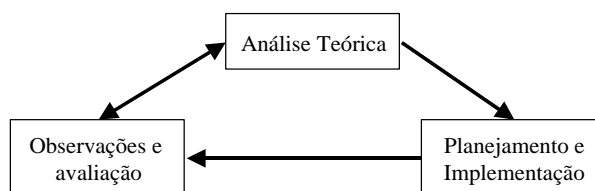


Figura 1: Diagrama que representa o paradigma proposto pelo grupo RUMEC

Nesse paradigma, é proposta, inicialmente, uma análise, segundo a Teoria APOS (Action, Process, Object e Schema), das construções mentais dos alunos relativas à compreensão de certo conceito. Esta análise fundamenta a elaboração de uma metodologia que visa impulsionar o estudante às construções mentais mais adequadas quando da aquisição de certo conhecimento matemático e retroalimenta a análise inicial, indicando refinamento se necessário.

Com o intuito de fazer um levantamento sobre o que já existia na literatura sobre o tema até aquela década, iniciamos uma busca em catálogos da PUC-RJ e do Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), além de pesquisas por temas e palavras em *sites* de busca. A primeira publicação científica sobre esse assunto com o qual tivemos contato foi encontrada nos *proceedings* do Psychology Mathematics Education XV - PME XV.

Em 2010, na Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP), em contato com o Grupo de Pesquisas em Ensino de Álgebra (GPEA), resolvemos continuar com o mesmo tema, porém, dessa vez, analisando o estado do conhecimento de pesquisas sobre tal assunto, pois muitos anos se passaram, e entender o que foi desenvolvido e o movimento realizado pelos trabalhos investigativos era importante nessa época. Com o intuito de caracterizar o tema, apresentamos a fundamentação matemática utilizada. Consideramos uma *desigualdade* como uma expressão numérica e ou algébrica comparadas por um sinal de desigualdade:  $<$ ,  $>$ ,  $\geq$  ou  $\leq$ . Como *inequação* consideramos somente as desigualdades que envolvem, pelo menos, uma expressão algébrica. Em algumas línguas estrangeiras, não há separação entre essas terminologias matemáticas, e somente o contexto em que são utilizadas pode-nos revelar a interpretação. Mesmo em línguas as quais diferenciam tais terminologias matemáticas, alguns autores utilizam a palavra *desigualdade*, para expressar uma inequação. Nós diferenciamos tais terminologias, porém fomos fiéis às terminações utilizadas pelos autores das investigações selecionadas.

Para nós, as expressões *interpretação do conceito de inequação e resolução de inequação* têm significados específicos e podem diferenciar do que os autores mapeados utilizam. Contudo, é possível que somente uma análise acurada no interior dos trabalhos possa assegurar- nos quais são os significados dessas expressões para tais autores.

Para nós, interpretar uma inequação envolve, por um lado, a compreensão do significado de *variável real* e do conjunto-solução. Por outro, uma inequação, apresentada como uma relação entre expressões algébricas, pode ser interpretada como uma relação entre funções, e o seu conjunto-solução pode, eventualmente, ser determinado por meio de gráficos. A interpretação fica prejudicada se tanto o universo numérico do aluno quanto o domínio das propriedades dos números reais como um corpo ordenado são muito limitados. Por exemplo, ao analisar a inequação  $x^2 < x^4$ , o aluno pode pensar que ela é verdadeira para qualquer número real e, ao procurar resolver a inequação  $\sqrt{x+1} \leq \sqrt{2} x$ , é importante compreender que nenhum número real negativo pode ser solução. A compreensão do conjunto-solução envolve reconhecer o que não pode ser solução.

Resolver uma inequação é encontrar o seu conjunto-solução; é, de fato, descrevê-lo da forma mais simples possível. Por exemplo,  $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 > 1\}$  é uma descrição do conjunto-solução da inequação  $x^2 < x^4$ , mas não é a mais simples; enquanto  $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x > 1\}$  nos parece mais simples para ler e interpretar.

De outro modo, resolver uma inequação algebricamente envolve transformações realizadas por meio do emprego de propriedades dos números reais. É importante que o indivíduo saiba quais as propriedades a ser empregadas, para realizar as transformações adequadas e, além disso, que ele leve em conta as equivalências ou não entre as inequações obtidas. Por exemplo, para resolver a inequação  $\sqrt{x+1} \leq \sqrt{2} x$ , é natural que se inicie a procura de solução, elevando ao quadrado ambos os membros. Porém, ao mesmo tempo em que esta manipulação algébrica permite iniciar o processo de resolução, a nova inequação  $x+1 \leq 2x^2$  não é equivalente à inequação original. A solução de  $x+1 \leq 2x^2$  é  $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -\frac{1}{2} \text{ e } x \geq 1\right\}$  e a inequação  $\sqrt{x+1} \leq \sqrt{2} x$  não admite solução negativa, e pode-se verificar que a solução é  $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$ . Nesse sentido, abrange, além das propriedades do conjunto dos números reais, principalmente as de ordenação, a utilização de conectivos lógicos como “e” e ou “ou”.

Por sua vez, a resolução gráfica de uma inequação, interpretada como uma relação entre funções, abrange a construção dos gráficos dessas funções e a determinação do conjunto-solução por meio da análise desses gráficos. Outra situação de resolução gráfica aparece, por exemplo, quando são dados os gráficos de  $f$  e de  $g$  e solicita-se determinar o conjunto-solução de  $f(x) \times g(x) \geq 0$ . Neste caso, a ausência das expressões algébricas remete a uma abstração a qual pode ser um complicador para a resolução. Em muitas situações, também, é necessário mobilizar conhecimentos de lógica matemática com o objetivo de unir ou interceptar intervalos.

## RELEVÂNCIA E JUSTIFICATIVA

As inequações estão presentes em muitas áreas da matemática pura e aplicada. Alguns fenômenos são analisados e descritos, principalmente na área de otimização, por meio de uma inequação. Em geral, elas são ministradas nos cursos introdutórios de cálculo, capacitando o estudante a trabalhar com manipulações algébricas e gráficas relacionadas às funções, aos limites e, de forma geral, aos processos algébricos que envolvem principalmente intervalos. Elas formam uma base fundamental para a interpretação e a aplicação de alguns teoremas, como o do Anulamento, o do Valor Intermediário e o de Weirstrass. Vale ressaltar que um curso de Análise na Reta, ou no  $\mathbb{R}^n$ , está repleto de desigualdades e inequações, pois elas balizam vários conteúdos matemáticos que são estudados nessa disciplina.

Apesar de estar contempladas no currículo escolar desde o ensino fundamental, quando são estudadas as inequações lineares e quadráticas, elas perduram nos estudos do ensino médio e superior aos que optam pela carreira na área de ciências exatas e da terra. Estão presentes, também, em alguns cursos de pós-graduação em matemática, como foi possível observar nos títulos de algumas dissertações e teses nas áreas de matemática pura e aplicada, por exemplo, a dissertação de mestrado em matemática intitulada *Um estudo sobre sistemas de inequações lineares*, Monticeli (2010). Detectamos, pelo menos, dois periódicos internacionais que se dedicam a publicações relacionadas às desigualdades, como o *Journal of Inequalities and Applications*. No site, os editores afirmam que:

O objetivo do jornal é proporcionar um fórum multidisciplinar de discussão em matemática e suas aplicações em que a essencialidade

das desigualdades é realçada. O *Jornal das Desigualdades e Aplicações* aceita trabalhos de alta qualidade, contendo resultados de pesquisa original e artigos de pesquisa de mérito excepcional. Assuntos devem estar fortemente relacionados às desigualdades, tais como: Desigualdades em análise, Desigualdades em teoria da aproximação, Desigualdades em combinatória, Desigualdades em economia, Desigualdades em geometria, Desigualdades em mecânica, Desigualdades na otimização, Desigualdades em análise estocástica e aplicações.

O fator de impacto mais recente para o *Jornal das Desigualdades e Aplicações* é 0,879 de acordo com o *Journal Citation Reports 2010* lançado pela Thomson Reuters (ISI) em 2011. (*Journal of Inequalities and Applications*. Disponível em: <http://www.hindawi.com/journals/jia/>. Acesso em: 20 de out. 2011. Tradução nossa).

Isso sinaliza que, apesar de o estudo de inequações iniciar-se, em geral, no oitavo ano da educação básica brasileira<sup>5</sup>, pode perdurar, posteriormente, na graduação, com aumento gradativo de complexidade.

Encontramos, também, pesquisas sobre esse tema em eventos internacionais e em alguns nacionais, como o Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM, que pode ser visto em Bonomi (1998) e Maranhão (2007). Para Melo J. (2007, p.16), “Iniciamos esse estudo, considerando as observações que fizemos, por títulos, na lista de dissertações e teses defendidas no Brasil de 1971 a 2004, levantamento este feito por Dario Fiorentini e Marisol Vieira de Melo, e notamos que existem duas dissertações de mestrado cujo título trata de Inequações”. No entanto, verificamos que, depois dessa época, surgiram no Brasil outros cinco trabalhos, sendo, pelo menos, um de doutorado. Algumas dissertações mais recentes foram publicadas por Fontalva (2006), que aponta empecilhos ao ensino e à aprendizagem eficazes de inequações; Júnior C. (2011) analisou como a abordagem gráfica favorece o entendimento sobre esse assunto; esses dois autores focalizam o ensino médio. Porém, Melo J. (2007) e Melo (2007) coletam dados do ensino fundamental e superior, respectivamente, e apresentam-se unânimes, ao indicar as dificuldades não somente entre os estudantes, mas também entre professores.

Cientes da necessidade de conhecer como o conceito de inequação tem sido apresentado em várias instâncias, embrenhamos pelo caminho de busca e análise de trabalhos que nos fornecessem tais informações. Isso se faz imprescindível, pois, se estamos fazendo um estado da arte, precisamos, ao menos, conhecer como o conceito tem sido tratado metodologicamente e verificar, inclusive, se tem sido, de fato, objeto de estudo escolar e como isso tem ocorrido.

---

<sup>5</sup> Com algumas variações, podendo iniciar-se no 9ºano.

Visando construir um texto que explica ao leitor o histórico do problema proposto, os contextos teóricos, técnicos e sociais nos quais o problema se insere, além dos principais contextos, autores, ideias relacionadas a ele, examinamos algumas dissertações de mestrado, livros e documentos oficiais que consideramos localizar nesse meio investigativo, complementar, aprofundar e fomentar nossas argumentações.

Conforme Ferreira (2002):

Ainda, podemos dizer que a História de certa produção, a partir dos resumos das pesquisas, não oferece uma compreensão linear, uma organização lógica, sequencial do conjunto de resumos. Entre os textos, há lacunas, ambiguidades, singularidades, que são preenchidas pela leitura que o pesquisador faz deles. Então, a História da produção acadêmica é aquela proposta pelo pesquisador que lê. Haverá tantas Histórias quanto leitores houver dispostos a lê-las. (p.9)

O ensino e a aprendizagem da matemática têm passado por etapas que vão desde um foco na prática até outro voltado para o desenvolvimento do raciocínio, para a matemática pura. A escola, muitas vezes, acoberta dos alunos a verdadeira matemática nos sentidos prático e puro, isto é, tanto como recurso para a análise de fenômenos quanto como ciência com suas estruturas próprias. De acordo com Silva (1999), Augusto Comte dividiu a Matemática em abstrata (Cálculo, isto é Aritmética, Álgebra e Análise) e concreta (Geometria e a Mecânica). A abstrata é aquela que é unicamente instrumental, não é nada além do que uma extensão admirável da lógica natural sujeita a certa ordem de deduções, enquanto a concreta abrange as ciências que, verdadeiramente, devem ser consideradas como ciências naturais. Para Motta e Brolezzi (2006):

A ideologia positivista teve também influência na apresentação da geometria, da álgebra e da aritmética nos livros didáticos produzidos nesta época, muitas vezes baseados em livros que o próprio Comte havia indicado para o aprendizado da Matemática. Especificamente em geometria, o livro de Clairaut, indicado por Comte, tornou-se uma referência para uma pedagogia psicológica da Matemática, pela adoção do “princípio genético” de exposição da ciência pelo caminho histórico. Como consequência dessa concepção, a Matemática passa a ser vista como um corpo cumulativo de conhecimentos sequenciais e ordenados hierarquicamente, com reflexos na elaboração dos programas de ensino da Matemática, que deveriam acompanhar as etapas cronológicas que a Matemática teria passado na história. (p.4660)

A aprendizagem de inequações como uma aplicação de propriedades dos números reais é um tema recente do século XIX. Conforme Bagni (2005, p.658),

“algumas inequações, no sentido próprio de inequação, podem estar relacionadas ao desenvolvimento do Cálculo, por exemplo, para majorar e minorar<sup>6</sup>”. Contudo, não podemos negar que a quantidade de outros tópicos matemáticos que seu estudo mobiliza e a análise de alguns modelos por meio delas fazem que seu ensino se torne importante. Porém, a maneira de seu tratamento, sob o ponto de vista escolar, parece não aproveitar a oportunidade para desenvolver e mobilizar tais conhecimentos. Esse contexto leva-nos a uma reflexão dialética que traz à tona um debate entre o científico e o escolarizado, isto é, entre a ocultação dos fundamentos matemáticos envolvidos no entendimento e no desenvolvimento da resolução de uma inequação e o tratamento puramente algorítmico sem justificativas plausíveis, fazendo uso de jargões como “faz-se dessa forma”. Motta e Brolezzi (2006), assim, apontam as facetas do conhecimento escolar:

A visão de racionalidade positivista traz como consequência uma delimitação do raciocínio humano, que aplica o pensamento científico e o pensamento cotidiano em situações específicas e distintas, em diferentes tipos de atividades, sendo que em um mesmo indivíduo podemos perceber formas de pensamento cotidiano e de pensamento científico. Ao mesmo tempo, o conhecimento científico envolve uma necessidade de explicitação e de racionalização que ficou socialmente atribuída à escola, através da “transposição didática” dos conteúdos. Ocorre que o conhecimento escolar não é o conhecimento científico, como também não é o conhecimento cotidiano. (p.4669)

O ensino de matemática tem passado por várias etapas, oscilando entre o foco no estudo científico e tecnológico e no escolar, particularmente no ensino médio, e as mudanças têm acontecido de forma abrupta, como bem retratou Klein (1927):

Essa [...] descontinuidade não tem traduzido vantagens nem para escola nem para universidade; por isso agora é feito um grande esforço para eliminá-la completamente, procurando de um lado embeber, por assim dizer, o ensino das escolas com as idéias ajustadas ao moderno desenvolvimento das ciências e da cultura geral, e tendo em conta, de outra parte, as necessidades dos professores do ensino universitário. (KLEIN, 1927 *apud* MIORIM, 1998, p.104).

O ensino de inequações sofre influência direta dessas facetas e tem sido postergado no tratamento algébrico real, porém, nem mesmo no nível universitário, esse tratamento é retomado, deixando de lado os entendimentos que se fazem necessários para a aprendizagem matemática.

---

<sup>6</sup> Some inequalities in the proper sense of *inéquation* can be related to the development of the Calculus, e.g. to majorizing/minorizing.

## LIVROS DIDÁTICOS

Embora o livro didático não seja o único material de que professores e alunos vão valer-se no processo de ensino e aprendizagem, pode ser decisivo para a qualidade do aprendizado resultante das atividades escolares. Porém, seu papel parece depender, fortemente, da tendência pedagógica predominante. Por exemplo, nos meados do século XIX, os livros didáticos de matemática “eram instrumentos fundamentais para suprir os problemas relacionados à formação dos professores”. (MIORIM, 2005, p.1).

Inicialmente, ativemo-nos às dissertações de mestrado que nos fornecem informações sobre os livros didáticos. Realizamos leituras em dissertações de mestrado e encontramos em Melo J. (2007) uma análise, sob uma perspectiva dos Registros de Representação Semiótica (MACHADO, 2008), de como alguns livros e apostilas tratam, metodologicamente, do ensino das inequações e das desigualdades. Foi possível detectar que várias obras analisadas não apresentaram atividades didáticas voltadas à interpretação do conceito de inequação e expunham as resoluções, valorizando a Tabela de Sinais, isto é, a análise mecânica dos sinais positivos e negativos da(s) expressão(ões) associada(as), depois de localizadas as raízes da equação originada de tais expressões (cf. Fig. 2). Um exemplo é o desenvolvimento da resolução de  $(-3x + 6) < (5x - 7) < 0$ .

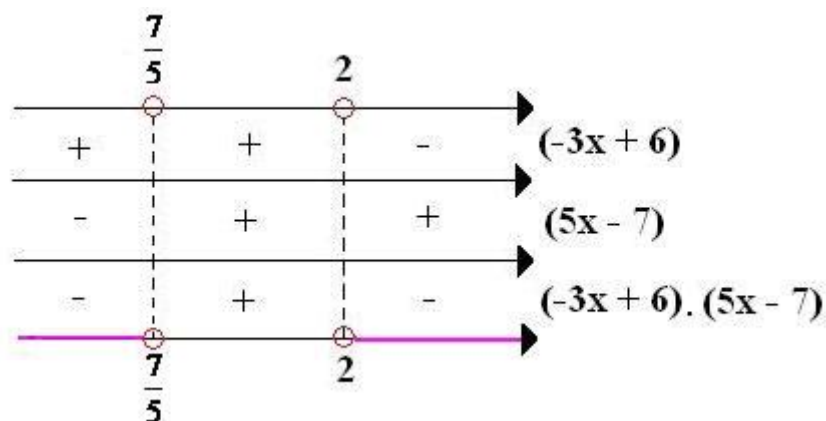


Figura 2: Exemplo de uma resolução que utiliza a tabela de sinais

Fonte: <http://www.brasilecola.com/matematica/inequacao-produto-1.htm>

Em segundo momento, analisamos alguns livros, porém nosso objetivo não é analisar sob uma teoria nem sob uma perspectiva investigativa, mas somente verificar se as inequações são abordadas e como isso é feito. Ao contrário dos autores Oliveira e

Garnica (2006), que têm esse tema como base para pesquisas, nós só queremos conhecer o terreno sobre o qual pousamos e caminhamos. Segundo eles:

Nossa intenção, então, é, a partir dessa proposta metodológica de Thompson, assumir o Livro Didático de Matemática como uma Forma Simbólica Estruturada e propor procedimentos metodológicos possíveis e desejáveis para a análise desses livros. Não é nossa intenção regulamentar ou mesmo propor uma série de passos a serem seguidos por analistas de livros didáticos de matemática, mas contribuir para a reflexão e regulação da metodologia de pesquisa nessa área. (OLIVEIRA; GARNICA, 2006, p.5).

Os livros analisados foram selecionados sem critério específico, pois nos ativemos aos que tínhamos disponíveis no Laboratório de Ensino e Pesquisa de Educação Matemática (LEPEM) da Universidade Federal de Sergipe.

## ENSINO FUNDAMENTAL

João José de Melo (2007), em sua dissertação de mestrado, investiga:

- como as inequações são tratadas em duas coleções didáticas A e B;
- que registros de representação semiótica são mobilizados nos exemplos e que registros podem ser mobilizados nos exercícios;
- se predominam as conversões ou os tratamentos<sup>7</sup>;
- traços de que tendências de ensino de matemática são mais evidentes nestas coleções.

O autor ressalta que, apesar de 50% dos exemplos envolverem conversões, elas são realizadas somente pelos autores e, provavelmente, pelos professores, restando aos alunos o papel de imitar os procedimentos que lhes foram passados. Para Duval (2003, p.16 *apud*. MELO J., 2007, p.22), “do ponto de vista cognitivo, é a atividade de conversão que, ao contrário, aparece como a atividade de transformação representacional fundamental, aquela que conduz aos mecanismos subjacentes à compreensão”. No entanto, se ela é realizada só pelo professor ou pelo autor do livro, isso pouco contribui para a aprendizagem matemática. Em metade dos exemplos, é

---

<sup>7</sup> Representações semióticas são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representação que têm suas dificuldades próprias de significado e de funcionamento. (DUVAL, 1993, p.30 *[sic]* *apud* DAMM, 2008, p.176). [...]O tratamento de uma representação é a transformação dessa representação no próprio registro onde ela foi formada. [...] A conversão de uma representação é a transformação dessa em uma representação em um outro registro, conservando a totalidade ou uma parte do objeto matemático. (DAMM, 2008, p.180).

realizado, então, apenas o tratamento no registro simbólico algébrico. Essa coleção é classificada por ele como uma *tendência formalista clássica* de ensino, isto é: ensino centrado no professor, ao aluno cabe imitar e reproduzir os passos do professor; a memorização e a reprodução de procedimentos repetitivos por meio de reiterada prática de exercício eram o entendimento vigente de boa prática para o ensino de matemática. Nesse sentido, a capacidade criativa é desprezada.

Quanto à coleção B, Melo J. enfatiza que a quantidade de problemas, exercícios, exemplos ou situações problema exige do aluno apenas o tratamento simbólico algébrico e não valoriza as conversões. Classifica o tipo de ensino abordado pela coleção de *tendência tecnicista*, isto é, fundamentada na natureza positivista, priorizando as regras, os macetes, os princípios organizados lógica e psicologicamente por especialistas. O professor e o aluno ocupam posições secundárias de meros executores, não se centra nem no professor, nem no aluno. Além disso, ele constata o tratamento algorítmico dado às inequações e a supervalorização do registro algébrico sem uso de conversões.

Júnior C. (2011), apesar de desenvolver um trabalho com ênfase no ensino médio, faz, também, uma análise do livro dos autores Giovanni, Castrucci e Giovanni Jr. (2002), do ensino fundamental, o qual considerou parcialmente adequado para o ensino de inequações, levando em conta a idade dos alunos do 9º ano, e o livro representa apenas um dos suportes didáticos que o professor possui. Para ele, a obra enfatiza os tratamentos algébricos, mas as conversões aparecem em poucas atividades, corroborando pesquisas recentes de acordo com a revisão bibliográfica empreendida por ele, isto é, o lugar reservado às conversões é muito pequeno ou nulo.

Os autores Iezzi, Dolce e Machado (2005a) - 7ª série/8º ano - tratam do tema na unidade 9, após a abordagem de equações e sistema de equações, enfocando, somente, as de primeiro grau. Apresentam contextos do dia a dia com o intuito de que os estudantes possam modelar o problema por meio de uma inequação. O tratamento da resolução é feito por indicações como regras a ser seguidas e apresentadas em paralelo com as equações (cf. Fig. 3).

- *Solução* da equação ou da inequação é um número que colocado no lugar da incógnita deixa a sentença verdadeira.
  - *Resolver* uma equação ou uma inequação significa determinar suas soluções.
  - Para resolver uma equação ou uma inequação podemos aplicar as *operações elementares*:
    - 1ª) Adicionar um mesmo número aos dois membros.
    - 2ª) Multiplicar os dois membros por um mesmo número, diferente de zero.
- No caso das inequações, quando aplicamos a segunda operação elementar, se *multiplicamos os dois membros por um número negativo, então devemos inverter o sentido da desigualdade* (< vira >; > vira <).
- Observe no quadro um exemplo de aplicação de operações elementares na desigualdade  $10 > 5$ .

	$10 > 5$
• Somando 2 $\Rightarrow$	$12 > 7$
• Somando (-2) $\Rightarrow$	$8 > 3$
• Multiplicando por 2 $\Rightarrow$	$20 > 10$
• Multiplicando por (-2) $\Rightarrow$	$-20 < -10$
	(> virou <)

Vamos resolver a inequação do problema das contas dos celulares:

$$36 + 0,25x < 42,50 + 0,20x$$

**1º passo:** Deixamos os termos com incógnita no 1º membro:

$$36 + 0,25x - 0,20x < 42,50 + 0,20x - 0,20x$$

E os termos sem incógnita no 2º membro:

$$36 + 0,25x - 0,20x - 36 < 42,50 - 36$$

$$0,05x < 6,50$$


Figura 3: Abordagem dos autores com respeito à inequação  
Fonte: Iezzi; Dolce; Machado (2005a, p.295)

No livro da 6ª série/7º ano, os autores apresentam as inequações no mesmo capítulo de equações, porém, em seguida, utilizam as expressões “desfazendo subtração”, “desfazendo adição”, e somente as de primeiro grau são estudadas. Também apresentam situações problema com o objetivo de contextualizar o conteúdo (cf. Fig.4).

**Desafio**

**Muita moeda, pouco dinheiro**

Seu Barbosa deseja trocar R\$ 20,00 em moedas iguais para distribuir entre seus 8 netos. Ele quer entregar a cada neto mais do que 10 moedas. De que valor devem ser as moedas? de 1, de 5 ou de 10 centavos



Fabio R. Martins

**Como se resolve uma inequação?**

Resolver uma inequação significa encontrar as suas soluções.

**Desfazendo subtração**

Subtraindo 675 de um número, obtemos uma diferença maior do que 150. Qual é esse número?

Representando o número desconhecido por  $x$ , montamos a inequação:

$$x - 675 > 150$$

Para “desfazer” a subtração realizada com o  $x$ , somamos 675 aos dois membros da desigualdade:

$$x - 675 + 675 > 150 + 675$$

$$x > 825$$

**Resposta:** O número procurado pode ser qualquer número maior que 825.

**Desfazendo adição**

Resolver a inequação  $x + 4,25 > 5$ . ✓

Nesse caso, para “desfazer” a adição realizada com o  $x$ , subtraímos 4,25 (ou somamos  $-4,25$ ) dos dois membros:

$$x + 4,25 - 4,25 > 5 - 4,25$$

$$x > 0,75$$

Figura 4: Resolução passo a passo proposta pelos autores  
Fonte: Iezzi; Dolce; Machado (2005b, p.208)

Mori e Onaga (2000) tratam desse conteúdo na 7<sup>a</sup> série/8<sup>o</sup> ano, também junto com equações, na unidade 6, no início de forma contextualizada; depois, vem o item intitulado *Princípios das Desigualdades*, afirmando que “uma desigualdade tem algumas propriedades. Dentre elas destacaremos as que auxiliarão na resolução de uma inequação. Todo estudo será feito a partir de desigualdades verdadeiras” (p. 161). Na página seguinte, apresentam o item *Inequações de 1<sup>o</sup> grau: equivalência*. Consideramos essa abordagem prematura, porém coerente com a necessidade de interpretação e entendimento dos procedimentos algébricos que os estudantes realizarão na busca da solução. (cf. Fig.5)

$x + 3 > 6$  é a inequação que traduz o problema.

Os números 1, 2, 3, 4, 5 e 6, que representam as massas das bolas em quilogramas, formam um conjunto que chamamos de **conjunto universo** da inequação  $x + 3 > 6$ . Portanto,  $x$  pode ser substituído na inequação por qualquer um desses valores.

Vamos verificar quais valores de  $x$  são soluções da inequação  $x + 3 > 6$ , substituindo  $x$  pelos números 1, 2, 3, 4, 5 e 6.

$x$	$x + 3 > 6$	Sentença	Campainha
1	$1 + 3 > 6$	falsa	não toca
2	$2 + 3 > 6$	falsa	não toca
3	$3 + 3 > 6$	falsa	não toca
4	$4 + 3 > 6$	verdadeira	toca
5	$5 + 3 > 6$	verdadeira	toca
6	$6 + 3 > 6$	verdadeira	toca



Os números 4, 5 e 6 pertencem ao conjunto universo e representam as massas das bolas que fazem a campainha tocar. Esses números são as **soluções** da inequação  $x + 3 > 6$  nesse conjunto universo.

Os números 4, 5 e 6 formam o **conjunto solução** dessa inequação. Indicamos:

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \text{ — conjunto universo}$$

$$S = \{4, 5, 6\} \text{ — conjunto solução}$$

Acompanhe os cálculos para que possamos determinar de outro modo o conjunto solução da inequação  $x + 3 > 6$ .

Subtraímos 3 unidades de cada membro.

$$x + 3 - 3 > 6 - 3$$

$$x > 3$$

$x > 3$   
É EQUIVALENTE  
A  $x + 3 > 6$ .

Nessa resolução, obtivemos uma inequação diferente da inicial. Ela foi obtida aplicando-se o princípio aditivo das desigualdades.

As inequações  $x + 3 > 6$  e  $x > 3$  têm as mesmas soluções. Isso significa que, substituindo-se  $x$  em cada uma delas por valores maiores que 3 e pertencentes ao conjunto  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , obteremos o mesmo conjunto solução.

A inequação  $x > 3$  é a **inequação mais simples** equivalente a  $x + 3 > 6$ .



Figura 5: Abordagem introdutória às inequações  
Fonte: Mori; Onaga (2000, p.165)

## ENSINO MÉDIO

Fontalva (2006) analisa um livro do ensino médio e considera que os conteúdos são tratados sob o estilo tecnicista, de acordo com a sequência: definição, exemplos, exercícios resolvidos e propostos. No final de cada volume, existe uma bateria de testes com ênfase, principalmente, nos concursos vestibulares. Fontalva considera ser plausível que os alunos trabalhem, preferencialmente, nos domínios algébricos e nas representações gráficas, e é muito pequena a probabilidade da utilização do domínio numérico. O professor entrevistado na pesquisa trabalha de forma estreita com o livro, isto é, de forma tecnicista, utiliza as terminologias “quadro-produto”, “quadro-

quociente”<sup>8</sup> e “transposição de termos” e, depois de elencar vários erros cometidos pelos estudantes de ensino médio, afirma que “é provável que esse quadro seja decorrente do processo ensino-aprendizagem das inequações, o qual julgamos ter privilegiado técnicas em vez de conceitos e propriedades matemáticas”(p.7)

Júnior C. (2011) escolheu analisar o livro didático adotado pela escola participante de sua pesquisa de dissertação de mestrado profissional. Enfocou os seguintes quesitos: função, gráfico de função, inequação e resolução de inequação. As inequações são trabalhadas nos capítulos que envolvem as funções como um subtópico: variação do sinal da função. Para ele, o livro analisado apresenta atividades que promovem a coordenação de, pelo menos, dois registros de representação. No entanto, afirma que cabe ao professor estimular o uso de mais de um registro de representação semiótica e incentiva a coordenação entre eles. Quanto às resoluções gráficas de equações e inequações, o autor diz não ter percebido incentivo nessa obra e nem na outra para esse tipo de resolução, talvez pelas dificuldades que podem surgir na construção dos gráficos.

Um dos livros que examinamos, Goulart (2008), 1ª série, exhibe o conceito junto com funções. A resolução das intituladas inequações produtos e quocientes são apresentadas por meio do que ele denota “quadro de sinais”, preparando, antes, a inequação de forma a deixar as expressões que envolvem a variável do lado esquerdo e, do lado direito, só o valor numérico 0 (zero). Utiliza a palavra *equivalente*, sem, antes, explicar seu significado matemático, como observamos no final da figura 6.

---

<sup>8</sup> Nós denotamos *Tabela de Sinais* no sentido de Assude (2002).

Quando for uma inequação quociente, como a do segundo exemplo dado, poderemos igualmente usar o “quadro de sinais”. Naturalmente, não se incluem na resposta (a solução, ou conjunto verdade da inequação) os valores da incógnita para os quais haveria anulamento do valor do denominador.

Finalmente, caso tenhamos que resolver uma inequação como

$$\frac{2x - 5}{x + 3} \leq 1,$$

pretendendo construir o quadro de sinais, começamos por obter a inequação equivalente (isto é, de mesma solução que a inequação dada) que tenha nulo o 2º membro:

$$\frac{2x - 5}{x + 3} - 1 \leq 0$$

Em seguida, reduzindo ao mesmo denominador e simplificando chegaremos à inequação quociente,

$$\frac{x - 8}{x + 3} \leq 0.$$

**Nota:** a partir da inequação dada,  $\frac{2x - 5}{x + 3} \leq 1$ , temos:

1º) se  $x + 3 > 0$ , isto é, se  $x > -3$ , a inequação é equivalente a  $2x - 5 \leq x + 3$  (I)

2º) se  $x + 3 < 0$ , isto é, se  $x < -3$ , a inequação é equivalente a  $2x - 5 \geq x + 3$  (II)

A solução da inequação dada será a **reunião** das soluções de (I) e (II), nos respectivos intervalos,  $] -3, +\infty[$  e  $] -\infty, -3[$ .

Figura 6: Resolução de uma inequação quociente em livro didático  
Fonte: Goulart (2008, p. 91)

O mesmo livro faz uma abordagem inicial das inequações lineares e quadráticas por meio de gráficos, porém, depois, dispensa os gráficos e expõe, apenas, uma espécie ilustrativa de representação gráfica (cf. Fig.7). Alguns autores das publicações inventariadas indicam que os estudantes, em geral, utilizam esse tipo de ilustração denominada por eles de “reta numérica”.

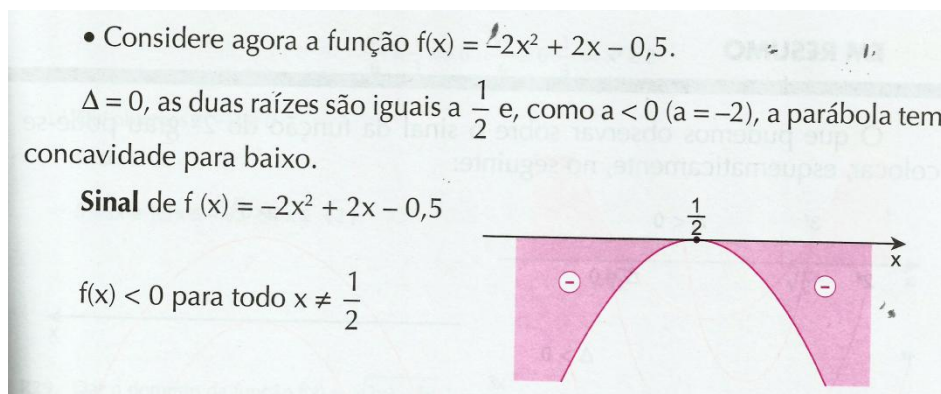


Figura 7: Ilustração do que, comumente, é apontado pelos pesquisadores como “uso da reta numérica” (*number line*)  
Fonte: Goulart (2008, p. 109)

Vários exercícios resolvidos são expostos, e não há uma contextualização. A terminologia *Inequações do 1º grau* aparece no título de um item, porém o autor não afirma o que é inequação e inicia o item *Crescimento e Decrescimento de  $f(x)=ax+b$* .

Resumindo, é possível perceber que nenhum dos livros didáticos examinados possui uma forma ampla de apresentar que englobe várias representações e subsidie, de fato, o estudo e a aprendizagem do conteúdo. Será que, no ensino superior, é diferente? Será que, nesse nível, os estudantes terão a oportunidade de, realmente, aprender as inequações sob as mais intrínsecas nuances matemáticas?

## ENSINO SUPERIOR

Marcelo de Melo (2007) realizou uma análise em livros, apostilas e cadernos de alunos do ensino superior, nas disciplinas Cálculo I, Álgebra I e II, Complementos de Matemática e Análise I, com o intuito de verificar as possíveis conversões de representações semióticas enfocadas por essas publicações. Os resultados foram apresentados na figura 8.

Conversão entre registros encontrados					Tratamentos em cada um dos registros encontrados	
	Simbólico Algébrico para Gráfico	Gráfico para Simbólico Algébrico	Simbólico Algébrico para Simbólico Numérico	Língua Natural de uso especializado para Simbólico Algébrico	Simbólico Algébrico	Simbólico Numérico
Álgebra I P2				20		7
Álgebra II P2					38	4
Cálculo Diferencial e Integral I P1					39	
Complementos de Matemática P3	123					
Análise I P4	10			3	9	

QUADRO 9: Transformações de representações semióticas, em exercícios que tratam de desigualdades ou inequações, dos livros mais utilizados nas disciplinas do curso.

Figura 8: Quantitativo apresentado por Melo (2007) em relação às conversões e aos tratamentos utilizados em livros de ensino superior

Fonte: Melo (2007, p.51)

O autor conclui que:

Entre os 22 exercícios do livro analisado, percebemos que a conversão mais usada é a do registro simbólico para o simbólico numérico. Outro caso de conversão encontrado foi o registro da língua natural para o registro simbólico algébrico, além de 9 exercícios que envolvem tratamento no registro algébrico. (MELO, 2007, p.52).

Ao finalizar o capítulo, ressalta a importância de:

Estimular os alunos a operar conversões em ambos os sentidos, tanto de partida como de chegada, visto que, para Duval, a compreensão só pode ser validada quando eles conseguem articular a conversão entre os registros de representação semiótica, dado que os tratamentos não bastam”.(MELO, 2007,p.61).

Procedemos a uma análise a respeito de como o tópico é tratado em livros-textos do ensino superior, como Leithold (1994), Swokowski (1994), Münem e Foulis (1982), Guidorizzi (1987), Moise (1972), Ávila (2003), Flemming e Gonçalves (2010); de Pré-Cálculo, como Demana *et al.* (2011); em artigos, como King (1973), Stanley (1979), Dobbs e Peterson (1991), Parish (1992), Frandsen (1969), Vandyk (1990). Em várias dessas publicações, não há enfoque de resoluções no contexto gráfico, tampouco nas análises das transformações executadas sobre a inequação inicial e suas repercussões sobre o conjunto-solução, enfocadas de acordo com a pedagogia ‘tradicional’<sup>9</sup>.

Um tratamento mais formal no ensino superior, que aprofunda e fundamenta as resoluções, pode ser encontrado em Ávila (2003) e Lopes *et al.* (2002), sempre como subtópico dos Números Reais. O livro dos russos Litvinenko e Mordkovich (1987) apresenta-as de forma mais detalhada matematicamente, porém essa obra não é direcionada, especificamente, ao ensino médio ou ao ensino superior. O enfoque pode envolver funções, análise de transformações equivalentes e análise gráfica. Em determinados livros, esse conceito volta a ser focado implicitamente quando é estudada a variação da função, como em Lopes *et al.* (2002) ou na aplicação de teoremas.

Alguns artigos que indicam metodologias de ensino, também, apontam estratégias mecanizadas e algorítmicas, como Dobbs e Peterson (1991), Parish (1992). O artigo de Ávila (1998) faz um estudo abrangente e esclarecedor, pois destaca pontos básicos no processo de resolução que, se levados em consideração, evitam erros na solução de inequações e equações com radicais. O autor faz o exame pormenorizado de

---

<sup>9</sup> Considera-se como ensino tradicional (ou tecnicista) de matemática o baseado na sequência: definição, exemplos, exercícios, com ênfase na repetição e no mecanicismo.

alguns exemplos das raízes de equações após cada transformação<sup>10</sup> realizada, entretanto estuda, unicamente, a do tipo  $x^2 < 9$ . Autores, como Tavares (1984) e Bloch (1991), utilizam terminologias, como “maneira abreviada” e “maneira simples de resolução”, respectivamente, minimizando os impactos das metodologias de ensino puramente mecanizadas, indicando que os métodos algorítmicos de resolução em seus artigos são um modo mais rápido de encontrar o conjunto-solução.

Isso fornece indícios de que esse conteúdo não tem sido valorizado na educação básica e que alguns autores os apresentam de forma superficial, algorítmica e mecanizada. As sugestões metodológicas demonstradas nos livros didáticos do ensino fundamental e médio sugerem transformações desprovidas de justificativas.

No México, o trabalho de dissertação de mestrado de Borello (2007) apresenta uma análise em torno de oito livros didáticos e de currículos mexicanos os quais, em sua maioria, expõem um tratamento, sobretudo, algébrico e mecânico, na verdade, algoritmizado. Os livros examinados ativeram-se ao ensino médio e ao universitário.

Essa mesma autora afirma que a maioria dos livros analisados se limitam às equações de primeiro e segundo grau. As de primeiro grau são resolvidas por meio das propriedades de ordem, e as de segundo grau, na maior parte, pelo método de fatoração, mas, depois, continuam com métodos algébricos ou o de atribuir valores. Nunca as técnicas são fundamentadas, sempre são explicadas por exemplos, e o mesmo ocorre com o tratamento dado às inequações de grau maior que dois ou quocientes. A autora aponta que é interessante como alguns textos universitários, depois de tratar da questão das inequações, quando as utilizam para estudar a monotonia de uma função – para que os alunos compreendam a relação entre o sinal de uma função e uma inequação – já levam em consideração que eles conheçam a conversão e a relação entre a análise de variação de uma função e uma inequação.

Borello (2007) considerou em sua análise: o peso dado à questão às inequações em relação aos outros tópicos abordados no texto; como ela está definida; como é apresentado o tema, em particular, se o foco é gráfico e ou algébrico; o que significa resolver uma inequação; os tipos considerados pelos livros. Como podemos perceber pelas palavras da autora, os livros mexicanos também dão pouca ênfase às explicações da aplicação das propriedades e aos algoritmos empreendidos. Conforme ela:

---

<sup>10</sup> *Transformação* é interpretada como o efeito da ação de aplicar uma propriedade algébrica dos números reais em uma equação ou inequação.

Dentro de los tres años de preparatoria el tema sólo aparece el primer año cuando se estudia el álgebra y se le dedican pocas horas. El enfoque es entonces eminentemente algebraico y – por falta de tiempo – se limita a la adquisición de unas cuantas técnicas operativas que propician un aprendizaje memorístico y no significativo. Cuando se hace referencia a algún elemento gráfico y al concepto de función se da por descontado que el alumno conozca la relación entre ecuación y función<sup>11</sup>. (BORELLO, 2007, p.61).

## DOCUMENTOS OFICIAIS

Além de situarmo-nos na maneira como o conceito de inequações tem sido tratado nos livros da educação básica e superior, também se faz indispensável conhecermos se os documentos oficiais nacionais as apresentam e de que maneira. Assim, fizemos uma apreciação desses documentos.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais – terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental (1998) – sugerem uma abordagem:

Pela exploração de situações-problema, o aluno reconhecerá diferentes funções da Álgebra (generalizar padrões aritméticos, estabelecer relação entre duas grandezas, modelizar, resolver problemas aritmeticamente difíceis), representará problemas por meio de equações e inequações (diferenciando parâmetros, variáveis, incógnitas, tomando contato com fórmulas), compreenderá a sintaxe (regras para resolução) de uma equação. (BRASIL 1998, p.50).

Esse trecho apresenta uma sugestão para a utilização das inequações como recurso para a resolução de situações-problema, contudo o trabalho com as regras de resolução é sugerido somente para as equações. Esse tipo de tratamento, voltado para a contextualização, de fato, pode ser encontrado nos livros didáticos do ensino fundamental, em especial os indicados no oitavo ano, como em Dante (2010) e Giovanni e Giovanni Jr. (2008), porém com ênfase somente nas lineares.

---

<sup>11</sup> Entre os três anos do ensino médio, o assunto só aparece no primeiro ano, ao estudar álgebra, e são dedicadas poucas horas a esse conteúdo. O enfoque é, então, essencialmente algébrico, e, por falta de tempo, limita-se à aquisição de algumas técnicas operacionais que propiciem uma aprendizagem mecânica e não significativa. Quando nos referimos a um elemento gráfico e ao conceito de função, é um dado que supomos adquirido assim como supomos o aluno conhecer a relação entre equação e função.

Com o objetivo de indicar critérios orientadores, os PCN+ (2002) fazem um recorte para o processo de seleção de temas. Indicam os temas estruturadores, desenvolvidos de forma concomitante nas três séries do ensino médio:

1. Álgebra: números e funções.
2. Geometria e medidas.
3. Análise de dados.

Quanto ao tema 1, os PCN+ (2002) apontam que:

Os procedimentos básicos desse tema se referem a calcular, resolver, identificar variáveis, traçar e interpretar gráficos e resolver equações de acordo com as propriedades das operações no conjunto dos números reais e as operações válidas para o cálculo algébrico. Esse tema possui fortemente o caráter de linguagem com seus códigos (números e letras) e regras (as propriedades das operações), formando os termos desta linguagem que são as expressões que, por sua vez, compõem as igualdades e desigualdades. (BRASIL, 2002, p.120).

No item 2, as inequações são mencionadas explicitamente: “A unidade Geometria analítica tem como função tratar algebricamente as propriedades e os elementos geométricos. O aluno do ensino médio terá a oportunidade de conhecer essa forma de pensar que transforma problemas geométricos na resolução de equações, sistemas ou inequações” (BRASIL, 2002, p.124).

As Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio – OCNEM (2006) reafirmam a importância de um estudo baseado no entendimento dos processos manipulativos algébricos. Elas indicam que:

As propriedades relativas às operações com números reais devem ser trabalhadas de modo que permitam ao aluno a compreensão das estruturas dos algoritmos, prevenindo recorrentes erros na resolução de problemas que envolvam manipulações algébricas. Por exemplo, os alunos devem entender o que acontece com uma desigualdade quando ambos os lados são multiplicados por um mesmo número negativo, ou por que o quadrado de um número nem sempre é maior que o próprio número, ou como resolver inequações que envolvam quocientes. É recomendável que o professor retome, nesse momento, as “regras de sinais” para multiplicação de números inteiros acompanhadas de justificativas; as definições de multiplicação e divisão de frações; as explicações que fundamentam os algoritmos da multiplicação e da divisão de números inteiros e decimais. Mesmo que as operações e os algoritmos já tenham sido estudados no ensino fundamental, é importante retomar esses pontos, aproveitando a maior maturidade dos alunos para entender os pontos delicados dos argumentos que explicam essas operações e algoritmos. (BRASIL, 2006, p.71).

No mesmo documento, é possível verificar a sugestão quanto ao uso de tecnologias:

Para o estudo das funções, das equações e das desigualdades da geometria analítica (retas, círculos, cônicas, superfícies), tem-se uma grande variedade de programa de expressão. Em muitos desses programas, pode-se trabalhar tanto com coordenadas cartesianas como com coordenadas polares. Os recursos neles disponibilizados facilitam a exploração algébrica e gráfica, de forma simultânea, e isso ajuda o aluno a entender o conceito de função, e o significado geométrico do conjunto-solução de uma equação – inequação. (BRASIL, 2006, p.89).

Tais orientações defendem que toda situação de ensino e aprendizagem deve adicionar o desenvolvimento de habilidades que caracterizem o “pensar matematicamente”. Assim, é preciso dar primazia à qualidade do processo e não à quantidade de conteúdos a ser estudados. A seleção de conteúdos deve ser acautelada e criteriosa, propiciando um “fazer matemático” por meio de um procedimento investigativo que auxilie a assimilação de conhecimento. Ancorada nas concepções de aprendizagem e fortemente articulada com o conceito de *contrato didático*<sup>12</sup>, surge a *transposição didática*<sup>13</sup>.

Em relação aos livros didáticos e às formas de tratar a matemática, as Orientações Curriculares comentam que as discussões sobre os conteúdos enfocam “a transposição didática, ao dar ênfase ao ensino-aprendizagem que valoriza o raciocínio matemático e ao desaconselhar a simples aplicação de regras e fórmulas à lista repetitiva de exercícios, frequentemente presente em boa parte dos livros didáticos” (BRASIL, 2006, p.83). Então, contrariamente ao que encontramos nos livros e nos testemunhos dos autores de dissertações, a abordagem dada às inequações nos documentos oficiais tem enfatizado a metodologia de ensino por meio do entendimento, da justificativa, da compreensão das regras que balizam as resoluções e, quando for o caso, da utilização da contextualização. Quanto à abordagem pela contextualização, encontramos-la apenas nos livros do ensino fundamental, restrita às inequações lineares.

Destacamos que esse conceito encerra uma oportunidade para trabalhar-se com as propriedades dos números reais, principalmente as que tratam da ordenação. Além

---

<sup>12</sup> Conjunto das cláusulas que estabelecem as bases das relações que os professores e os alunos mantêm com o saber. (SILVA, 2008, p.49).

<sup>13</sup> Um conteúdo do conhecimento, tendo sido designado como saber a ensinar, sofre, então, um conjunto de transformações adaptativas que vão torná-lo apto a tomar lugar entre os *objetos de ensino*. O *trabalho* que, de um objeto de saber a ensinar faz um objeto de ensino, é chamado transposição didática. (CHEVALLARD, 1991, p.31 *apud* PAIS, 2008, p.15).

disso, seu enfoque pela análise de variação de funções, inclusive de forma gráfica, enseja o ensino e a aprendizagem de outros conteúdos. Aliás, outros tópicos podem ser estudados de forma concatenada à inequação: estrutura de ordem dos números reais, fatoração polinomial, interpretação de raízes, correspondência 1-1 dos reais com a reta numérica, equações, gráficos, relações de implicação e equivalência, quantificadores e conectivos lógicos e outros. Em geral, os conceitos matemáticos, se estudados de forma enredada, podem gerar maior compreensão (MACHADO, 1995), capacitando o estudante a enfrentar situações matemáticas de maneira segura e amadurecida.

Como é possível observar, o tema é amplo e aponta certo grau de complexidade. Além disso, no Brasil, apesar de alguns pesquisadores estarem atentos a isso, há pouca quantidade de pesquisas brasileiras que se dedicam a esse assunto. Pelo fato de nosso inventário não se ater somente a publicações brasileiras e ter o intuito de conhecer os tratamentos estrangeiros oficiais, recorreremos, também, a alguns documentos mexicanos, estadunidenses e portugueses.

A autora Borello analisou o currículo de várias instituições de ensino médio e universitárias mexicanas com o intuito de conhecer o teor das indicações quanto às inequações<sup>14</sup>. Assim, ela concluiu que “en lo específico, las tres instituciones insertan el tema de desigualdades em el primer año de curso (ENP: IV año. PREPATEC: III semestre) y se limitan a estudiar desigualdades algebraicas de primero y segund grado y sistemas de desigualdades de primer grado em dos incógnitas”<sup>15</sup> (BORELLO, 2007, p.38). Em outro trecho, ela afirma:

Relativamente a las instituciones universitarias (hemos considerado específicamente el T. De Monterrey e la Universidad Iberoamericana) cabe decir que en el curso propedéutico al estudio del cálculo se prevé um repaso del programa de la preparatoria y por lo tanto el repaso hace referencia a las desigualdades lineales con 1 y 2 incógnitas y las desigualdades de segundo grado (con 1 incógnita) .<sup>16</sup>( BORELLO, 2007, p.43).

---

<sup>14</sup> No trabalho original, nomeada simplesmente como *desigualdades*, pois Borello define uma desigualdade como nós definimos inequação, aliás esse, em geral, é o padrão da língua espanhola. Contudo, Alvarenga (2006), baseada em dicionários oficiais da língua espanhola, optou, em seu trabalho, por nomear o conceito por *inecuaciones* (ESENCIAL, 1996, p.646), deixando para o termo *desigualdades* (ESENCIAL, 1996, p.364) somente as expressões que envolvem comparações estritamente numéricas.

<sup>15</sup> Em particular, as três instituições inserem a questão das inequações no primeiro ano de curso (ENP: IV ano. PREPATEC: III semestre) e estão limitadas a estudar as inequações algébricas de segundo e primeiro graus, os sistemas de primeiro grau e as inequações com duas variáveis.

<sup>16</sup> Relativamente às instituições universitárias (consideramos especificamente o T. De Monterrey e a Universidad Iberoamericana), cabe mencionar que, no curso preparatório para

O fato de muitos autores citarem o *National Council Teacher Mathematics* (NCTM), por exemplo, ao justificarem a importância do tema (BAZZINI; BOERO, 2001, BAZZINI; TSAMIR, 2001a, 2001b, TSAMIR; BAZZINI, 2004 e ROWNTREE, 2009), sentimo-nos impelidos a conhecer como tal instituição sugere, e se sugere, o ensino e a aprendizagem de inequações. Notamos que o tema é apresentado explicitamente (na frase “compreender o significado de fórmulas equivalentes de expressões, equações, inequações e relações”) e implicitamente, ao indicarem o ensino de taxas de mudanças gráficas e numéricas, compreender e comparar as classes de funções e analisar funções de uma variável, investigando as taxas de mudança. (cf. Fig. 9).

Instructional programs from prekindergarten through grade 12 should enable all students to—	Expectations
Understand patterns, relations, and functions	<p data-bbox="762 808 1082 831"><b>In grades 9–12 all students should—</b></p> <ul data-bbox="676 875 1211 1227" style="list-style-type: none"> <li>• generalize patterns using explicitly defined and recursively defined functions;</li> <li>• understand relations and functions and select, convert flexibly among, and use various representations for them;</li> <li>• <b>analyze functions of one variable by investigating rates of change, intercepts, zeros, asymptotes, and local and global behavior;</b></li> <li>• understand and perform transformations such as arithmetically combining, composing, and inverting commonly used functions, using technology to perform such operations on more-complicated symbolic expressions;</li> <li>• <b>understand and compare the properties of classes of functions, including exponential, polynomial, rational, logarithmic, and periodic functions;</b></li> <li>• interpret representations of functions of two variables</li> </ul>
Represent and analyze mathematical situations and structures using algebraic symbols	<ul data-bbox="676 1256 1211 1585" style="list-style-type: none"> <li>• <b>understand the meaning of equivalent forms of expressions, equations, inequalities, and relations;</b></li> <li>• <b>write equivalent forms of equations, inequalities, and systems of equations and solve them with fluency—mentally or with paper and pencil in simple cases and using technology in all cases;</b></li> <li>• use symbolic algebra to represent and explain mathematical relationships;</li> <li>• <b>use a variety of symbolic representations, including recursive and parametric equations, for functions and relations;</b></li> <li>• judge the meaning, utility, and reasonableness of the results of symbol manipulations, including those carried out by technology.</li> </ul>
Use mathematical models to represent and understand quantitative relationships	<ul data-bbox="676 1626 1211 1805" style="list-style-type: none"> <li>• identify essential quantitative relationships in a situation and determine the class or classes of functions that might model the relationships;</li> <li>• use symbolic expressions, including iterative and recursive forms, to represent relationships arising from various contexts;</li> <li>• draw reasonable conclusions about a situation being modeled.</li> </ul>
Analyze change in various contexts	<ul data-bbox="676 1850 1211 1883" style="list-style-type: none"> <li>• <b>approximate and interpret rates of change from graphical and numerical data.</b></li> </ul>

estudar Cálculo, existe uma revisão do programa de ensino médio referente a inequações de 1 e 2 variáveis e inequações de segundo grau (com 1 variável).

Figura 9: Indicações do NCTM quanto aos objetivos e às expectativas do ensino de álgebra para o ensino médio (grifo nosso)

Fonte: <http://www.nctm.org/standards/content.aspx?id=26831>. Acesso em 02 de out.de 2011.<sup>17</sup>

Destacamos que, na revista *Dialogues - Algebra? A gate! A barrier! A Mystery!*, publicada pelo NCTM, encontramos dados sobre a taxa de acertos de estudantes nas resoluções de inequações. É assinalada uma preocupação, pois mais de 50% dos estudantes empreederam as inequações que envolvem valor absoluto com erros, e em torno de 60% não acertaram resoluções de inequações quadráticas. Isso pode indicar obstáculos aos estudantes que queiram empreender uma carreira universitária na área de ciências exatas. Nessa revista, a publicação de Rachlin (2000) apresenta os resultados de um teste aplicado, nos Estados Unidos da América, a 27.030 estudantes que tinha por objetivo analisar as habilidades em álgebra dos participantes na conclusão do ensino médio e observar se tais habilidades eram suficientes para enfrentar o ensino superior. As taxas são apresentadas na figura 10.

---

<sup>17</sup>Tradução nossa somente dos trechos relativos à inequação.

-analisar funções de uma variável, investigando taxas de variação, interseções, zeros, assíntotas, e comportamentos locais e globais;

-compreender o significado de formas equivalentes de expressões, equações, inequações e relações;

-escrever formas equivalentes de equações, inequações e sistemas de equações e resolver, com fluência, mentalmente ou com papel e caneta, os casos simples, utilizando tecnologia em todos os casos;

- aproximar e interpretar taxas de variações de dados numéricos e gráficos.

Simplify with integral exponents	88%	Simplify using rational exponents	62%	Solve absolute-value inequalities	45%
Simplify using order of operations	83%	Evaluate formula	60%	Graph line giving standard form	44%
Solve linear operation	83%	Solve quadratic equation	60%	Subtract rational expressions	42%
Simplify radical	81%	Solve system of linear equations	60%	Use logarithms to solve for x	42%
Simplify using distributive property	78%	Find y-intercept	59%	Solve quadratic inequality	40%
Solve linear inequality	70%	Solve fractional equation	56%	Evaluate function	39%
Square binomial	69%	Solve absolute-value equation	55%	Find equation of a line	36%
Rationalize denominator	68%	Solve coin problem	54%	Identify graphs—systems of equations	31%
Simplify rational expression	65%	Solve perimeter problem	52%	Simplify complex fraction	27%
Factor trinomial	63%	Evaluate with negative integral exponents	48%	Evaluate function	25%
Multiply rational expressions	62%	Solve logarithmic equations	46%		

Figura 10 - Índice de acertos em álgebra de estudantes estadunidenses que pretendem ingressar na universidade. Enfatizamos o percentual de erros nas resoluções de inequações

Fonte: (RACHLIN, 2000, p.13)<sup>18</sup>

Apesar de ser um conteúdo matemático básico para esse nível escolar, a inequação linear ocupa a 6<sup>a</sup> posição com 30% de resoluções errôneas, entretanto as outras taxas também não são animadoras.

As Diretrizes Curriculares (2001) para o ensino secundário (DCNES) de Portugal também fazem menção ao estudo de inequações, principalmente no correspondente à primeira série brasileira, como podemos observar explicitamente, nos trechos abaixo. Na seção 2.2, de objetivos e competências gerais, é apontado como um dos conhecimentos “Resolver equações, inequações e sistemas.”(p.4); em outro fragmento:

Tendo em conta a investigação e as experiências realizadas até hoje, há vantagens em que se explorem com a calculadora gráfica os seguintes tipos de actividade matemática: abordagem numérica de problemas; uso de manipulações algébricas para resolver equações e inequações e posterior confirmação, usando métodos algébricos gráficos; uso de métodos gráficos para resolver equações e inequações e posterior confirmação usando métodos algébricos; (PORTUGAL, 2001,p.15)

<sup>18</sup> Tradução nossa de trechos relativos à inequação.

- resolver inequação linear;
- resolver inequações com valor absoluto;
- resolver inequações quadráticas.

Além disso, ressaltam a intrínseca relação do tema com a lógica matemática, destacando as indicações metodológicas de *Lógica e Raciocínio* no seguinte excerto:

#### **Noções de lógica**

Todas as noções de **lógica e teoria de conjuntos devem ser introduzidas à medida que vão sendo precisas ou recorrendo a exemplos concretos de matéria usada: resolução de equações e inequações**, propriedades dos módulos, propriedades das funções, axiomática das probabilidades. Alguns pequenos exemplos ligados ao trabalho com IR e suas propriedades podem servir como exemplos de esclarecimento de alguma operação lógica. Terá de haver referências simultâneas a operações com condições e operações com conjuntos bem como à implicação formal e inclusão, para além das referências a algumas propriedades como a transitividade. Assuntos como a lei da conversão, as primeiras leis de De Morgan e os quantificadores não podem deixar de aparecer à medida que forem necessários (PORTUGAL, 2000, p.20. Grifo nosso).

As indicações metodológicas para o ensino de funções sublinham os pré-requisitos:

Os estudantes devem conhecer a função afim; devem poder reconhecer essa função através do gráfico, esboçar o gráfico e devem conhecer algumas propriedades (monotonia e zeros de forma apenas intuitiva e usando os conhecimentos de equações). Os estudantes devem saber resolver equações e inequações do 1º grau e resolver equações do 2º grau. Os estudantes devem conhecer os números reais e representar intervalos de números reais (PORTUGAL, 2000, p.27).

O desenvolvimento do conhecimento matemático passa por fases intuitivas e informais, mas mesmo estas não podem isentar-se de uma “semiformalidade” própria do estilo matemático, ser desprovidas de demonstrações corretas e passar sem o mínimo de linguagem simbólica. Na educação básica, são categoricamente indispensáveis as demonstrações, mas estas não podem confundir-se com demonstrações formalizadas (no sentido de deduções formais em teorias formais). A esse respeito, destacamos as opiniões de Garnica (2002):

A comunidade dos profissionais responsáveis pela produção social que denominamos “Matemática” produz os discursos que veicula e aceita como válidos. A prova rigorosa, desse ponto de vista, é o fio condutor de seu regime de verdade, seu estilo, o que estabelece, em última instância, sua política geral de verdade. A Educação Matemática, concebendo a própria Matemática (acadêmica, formal) como uma dentre as etnomatemáticas existentes, atribui seus significados à “Matemática”, qualquer que seja ela. De uma forma geral, atribui significados às etnomatemáticas. Tais significados, segundo penso, são mais amplos que os da própria Matemática (formal, profissional, acadêmica), pois ao discurso da Educação Matemática cabe tratar não só daquela Matemática desenvolvida na prática científica (cuja comunidade é formada em situações de ensino e aprendizagem de Matemática, “objeto” da Educação Matemática),

mas às várias etnomatemáticas, visando àquele que, de modo genérico, chamamos “aprendiz”. Constitui-se, portanto, um outro regime de verdade, o da Educação Matemática, no qual as concepções acerca das demonstrações (tidas, nesse regime, como etnoargumentações) são relativizadas e tomadas de modo muito mais amplo que na política geral de verdade da Matemática profissional. (GARNICA, 2002. Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/fdm/textos/garnica%2002.pdf>. Acesso em 15 de jan.2012)

Observamos que as Diretrizes Curriculares para o Ensino Médio (DCNES) portuguesas chamam a atenção para alguns assuntos que, não constituindo em si mesmos conteúdos do programa, são essenciais para muitos passos na aprendizagem de diversos assuntos e constituem elementos que ajudam os estudantes a compreender demonstrações e a racionalizar os desenvolvimentos desta ou daquela teoria. Como se pode conferir pelo programa, as DCNES não sugerem que a matemática seja introduzida axiomáticamente, mas almejam que os estudantes fiquem com a ideia de que as teorias matemáticas são estruturadas dedutivamente.

As DCNES – Portugal (2001) defendem que os conceitos fundamentais e as suas propriedades básicas sejam motivados intuitivamente, mas também indicam que os alunos possam trabalhá-los até chegarem a formulações matemáticas precisas, sem que, em algum momento, confunda-se o grau de precisão de um conceito matemático com qualquer grau de “simbolização”. Um conceito matemático pode ser completo, rigorosamente compreendido e expresso em língua natural ou em linguagem matemática ordinária - uma mistura de linguagem natural, simbologia lógica e matemática sem que isso fuja do alcance cognitivo do aprendiz. Nesse sentido, a escrita simbólica das proposições matemáticas deve aparecer, se possível, naturalmente, para efeitos de precisão, condensação, economia e clareza de exposição.

Assim sendo, percebemos que o tópico *inequação* está inserido nesses documentos, e algumas sugestões estão “plantadas”. Porém, dessas análises, o que mais trouxe um tratamento matemático condizente e abrangente foi o documento português, pois envolveu não unicamente a abordagem funcional, mas destacou também a lógica matemática que fundamenta as resoluções e as interpretações, além de sugerir um aporte por tecnologias educacionais, como a calculadora. George Pólya escreveu “quando

introduzida no tempo errado ou no lugar errado, a boa lógica pode ser o pior inimigo da boa didática”<sup>19</sup> (PÓLYA, 1993).

Depois de situar-nos em contextos educacionais, livros didáticos e documentos oficiais nacionais e alguns estrangeiros, o que nos ajuda a caracterizar o tema, enriquecer e mobilizar argumentos e inspirações para a elaboração de categorias na análise do conteúdo, passamos a uma exposição dos objetivos e das questões que guiam nossa investigação. Ao que parece, a aprendizagem por imitação e mecanizada faz que os aspectos característicos dos diferentes contextos, particularidades típicas dos tópicos apresentados e estruturas intrínsecas a cada problema, sejam subestimados. Então, cabe uma reflexão acurada sobre a ênfase unilateral, comumente discutida no ensino de estratégias de resolução de problemas matemáticos, dada a complexidade envolvida na produção do conhecimento.

## **OBJETIVOS, QUESTÕES NORTEADORAS, HIPÓTESES**

Fundamentados nessa caracterização, temos como propósito geral apresentar um panorama das publicações científicas cuja temática envolve o ensino e a aprendizagem de inequações, isto é realizar um estado da arte sobre o ensino e a aprendizagem de inequações. Os objetivos específicos, *a priori*, são:

- Categorizar e inter-relacionar aspectos relativos ao estado do conhecimento sobre o ensino e a aprendizagem de inequações.
- Evidenciar palavras, frases e fragmentos que caracterizaram as pesquisas, interpretando as mensagens contidas nos títulos, nos resumos e na íntegra dos textos.
- Localizar e analisar períodos de produção, fazendo um mapeamento e analisando tanto os tipos de publicações como as tendências, os autores, as teorias utilizadas, os eventos, os periódicos e os trabalhos acadêmicos que mais se interessaram pelo tema.
- Apontar dados numéricos sobre as publicações.

---

<sup>19</sup> When introduced at the wrong time or place, good logic may be the worst enemy of good teaching. *The American Mathematical Monthly*, 100, n.3.1993. (<http://blog.gaiam.com/quotes/authors/george-polya>).

- Sistematizar as pesquisas sobre o assunto, identificar temáticas e abordagens dominantes e emergentes e indicar caminhos para novas investigações.
- Detectar lacunas e campos inexplorados abertos à pesquisa futura.
- Expor os resultados obtidos de um *Levantamento centrado nos dados bibliográficos*<sup>20</sup>.

Assim, surgem algumas questões reflexivas, pertinentes ao tipo de trabalho pretendido, que objetivam subsidiar a análise de conteúdo:

- Que categorias e subcategorias surgem do levantamento das pesquisas?
- Quais os eventos, os autores e as épocas que mais proporcionaram debates sobre o tema?
- As pesquisas existentes são suficientes para analisar e propor soluções aos problemas relacionados ao ensino e à aprendizagem de inequações? Existe um esgotamento do tema?
- Quais foram os principais enfoques das investigações?
- O que podemos extrair das mensagens apresentadas nos títulos, nos resumos e da leitura integral dos textos?
- É possível inter-relacionar as categorias destacadas? Como?
- Como posicionar o Brasil nesse inventário de pesquisas?
- As publicações concentram-se em algum país ou se encontram espalhadas entre os continentes? Existe algum indício dessa concentração ou desse espalhamento?
- Os resultados obtidos das análises baseadas somente nos dados e bibliográficos são compatíveis com os da análise dos resumos e da íntegra dos artigos?
- Que metodologias de ensino, referenciais teóricos, metodologias de pesquisa e enfoques são privilegiados?

Tais questões fazem emergir algumas hipóteses. Por hipótese entendemos uma afirmação temporária, plausível, que tenta responder à questão de pesquisa. Ela pode ser refutada ou confirmada com o desenvolvimento da investigação. Consideramos hipótese exterior as declarações feitas com base na análise exterior dos trabalhos que compõem o *corpus*<sup>21</sup> da pesquisa, isto é, as interpretações realizadas com base somente nos dados

---

<sup>20</sup> *Levantamento centrado nos dados bibliográficos* é uma expressão que indica a fonte dos dados analisados. A expressão *exterior* significa que os trabalhos não foram analisados em seu interior, não foi levado em consideração o conteúdo de cada publicação.

<sup>21</sup> O *corpus* é o conjunto dos documentos tidos em conta, para ser submetidos aos procedimentos analíticos. (BARDIN, 2011, p. 126).

bibliográficos, sem recorrer a uma leitura, propriamente dita, interior dos trabalhos.

Nesse caso, incluímos na pré-análise as seguintes hipóteses exteriores:

- Ainda é necessário pesquisar mais sobre o assunto.
- Os *anais* do PME apresentaram mais publicações sobre o tema.
- Houve muitas pesquisas sobre como os estudantes resolvem as inequações.

## **CONSIDERAÇÕES**

Ao caracterizarmos o tema, pretendemos introduzir a problemática na qual estamos envolvidos e refletir sobre quais estratégias e recursos investigativos podemos eleger e que melhor se adaptem para enfrentar a situação exposta. Pelo fato de considerarmos vários anos de produção nessa linha, nada mais útil, nesse momento, do que refletir sobre o que já está pronto com o intuito de nortear futuros delineamentos de pesquisas, evitando não incorrer em fastiosas redundâncias científicas.

## CAPÍTULO 2

---

### METODOLOGIA DA PESQUISA

No final do século XIX, com a crescente solidificação das ciências sociais, principiaram-se as controvérsias em torno da aplicabilidade direta dos métodos e dos procedimentos desenvolvidos pelas ciências naturais às pesquisas em ciências sociais. No século XX, apareceram os primeiros pensadores que tentaram instituir uma diferença entre a metafísica e a ciência. Resquícios dessas querelas metodológicas entre as concepções objetivistas racionalistas e subjetivistas relativistas parecem ainda existir; sejam tais concepções complementares ou divergentes, o debate tende a continuar.

Nesse contexto, um pesquisador na área de educação matemática opta por métodos de pesquisas que forneçam informações sobre a prática social para não somente conhecê-la, mas também, se possível, transformá-la. Dependendo dos objetivos, o investigador caminha sob a direção de métodos qualitativos e ou quantitativos. Em nossa investigação, objetivamos conhecer os traçados, as paradas, as velocidades, as acelerações, os enfoques, as dimensões espaciais e temporais, as categorias que podem surgir, as inter-relações, as variáveis e o mapeamento das pesquisas relacionadas ao ensino e à aprendizagem de inequações.

Assim, apresentamos o tipo de pesquisa pela qual optamos, os motivos que nos levaram a seguir por esse caminho e o que pretendemos quando trilhamos esse tipo de investigação. Nosso trabalho é do tipo bibliográfico, pois a fonte de pesquisa está ancorada em documentos científicos impressos ou publicados por meio de outras mídias, como *CD-ROM*, *sites* de internet, entre outras, e apresenta característica histórica, pois resgata uma trajetória da pesquisa sobre o ensino e a aprendizagem de inequações que vai desde 1991 até julho de 2011. Então, nossa metodologia de pesquisa é histórico-bibliográfica, de métodos mistos, isto é, quanti-qualitativa e sob a modalidade de análise do tipo *estado da arte*. Caracterizamos histórico-bibliográfica no sentido de Fiorentini e Lorenzato (2007).

Essa modalidade de estudo compreende tanto os estudos tipicamente históricos ou estudos analítico-descritivos de documentos ou produções culturais quanto os do tipo “pesquisa do estado-da-arte”, sobretudo quando “procuram inventariar, sistematizar e avaliar a produção científica numa determinada área (ou tema) de conhecimento” (FIORENTINI,1994, p.32) (p.71)

Buscamos entender os caminhos seguidos pelas publicações, identificando tendências, temáticas, épocas de maior e menor quantidade de publicações e eventos científicos que propiciaram o debate sobre esse tema e que elucidem o movimento não linear de tais pesquisas. Entretanto, há interesse em categorizar e destacar características que possibilitam uma análise mais profunda, que desvelem necessidades de investigações futuras, que provoquem recortes ainda não revelados, capazes de trazer à tona questões implícitas a essas investigações já realizadas.

Este capítulo objetiva apresentar nossa escolha segundo nossos objetivos, quanto ao tipo de pesquisa e ao método de coleta e análise de dados. (cf. Fig.11)



Figura 11 - Diagrama representativo da nossa opção quanto ao campo a ser investigado, à coleta e à análise de dados

Podemos separar a nossa análise em 6 fases (cf. Fig.12) correlacionadas:

- inicial: levantamento dos elementos existentes em relação ao tema por meio de uma leitura “diagonal”;
- catalogação de alguns dados por meio de três tabelas, isolando elementos que, depois, deram origem à primeira classificação;
- exploração da tabela 1 quanto aos dados bibliográficos: leitura, releitura e categorização com base nos dados bibliográficos obtidos dos artigos publicados em revistas, anais de eventos e teses;
- análise da tabela 2 referente a metodologia de pesquisa, objetivos e enfoques teóricos: novas categorizações foram obtidas com base nos dados oferecidos só por essa tabela, além de uma investigação por comparação à fase anterior;
- análise da tabela 3, que trata dos resultados: novas categorias surgiram, e uma triangulação de dados foi realizada com as etapas anteriores;
- revisão e refinamento dos dados obtidos.



Figura 12: Fases da investigação

Apesar de não termos a intenção de metanalisar os documentos selecionados, procuramos desvendar e trazer à superfície o máximo de informações que outros pesquisadores pudessem utilizar com o fim de aprofundar e ou balisar novas pesquisas.

Gostaríamos de deter-nos aqui à questão da abordagem metodológica tomando as palavras de Pires (2010) segundo a qual:

[ ]eu não associo à metodologia a um enquadramento teórico particular, mesmo que algum deles pareça privilegiar ocasionalmente certas escolhas metodológicas...[ ].

Para mim, o termo metodologia designa uma reflexão *trans*-teórica e *trans*-disciplinar da prática de pesquisa (p.88).

Um dos temas mais discutidos nas áreas das ciências, principalmente as sociais, no tocante à pesquisa, abarca a questão das novas abordagens metodológicas. A busca por opções metodológicas alternativas relaciona-se com a necessidade de, em vista da dinâmica e complexidade da realidade social, abordá-la de uma forma diferente daquela própria das ciências naturais. Uma questão que emerge é si a pesquisa qualitativa pode ser caracterizada por uma posição epistemológica única. Para Pires (2010) tal posicionamento não precisa ser único. Porém, para Gamboa (2002) “Em todo processo de conhecimentos, manifesta-se uma estrutura de pensamento que inclui conteúdos filosóficos, lógicos, epistemológicos e técnicos” (p.69). Ainda para ele:

Nesse processo em que todos os fatos e conceitos entram num movimento recíproco e se elucidam mutuamente, e a totalidade alcança sua ‘concreticidade’, encontra-se implícita uma diversidade de elementos articulados que é possível elucidar mediante o ‘esquema paradigmático’ (p.70).

Nesse contexto o autor aponta que tais elementos podem ser organizados em níveis e grupos de articulação:

- Técnicos-instrumentais - diz respeito aos processos de coleta, registro, organização, tratamento dos dados.
- Metodológicos - se relaciona aos passos, procedimentos e maneiras de abordar e tratar o objeto de investigação.
- Teóricos - pode-se citar os fenômenos educativos e sociais privilegiados, os núcleos conceituais básicos e outros.
- Epistemológicos - se referem aos critérios de “cientificidade”, como concepções da ciência, dos requisitos da prova ou da validade, da causalidade etc.

Não temos a intenção de abrir uma discussão na linha epistemológica científica, porém na elaboração desse trabalho foram sendo alinhavadas algumas correntes filosóficas como, por exemplo, a Dialética e a Complexidade. A primeira, de acordo com Marchi:

A lógica dialética constitui uma oposição à lógica formal positiva, pois procura ir além da contemplação e da fragmentação. A lógica dialética intenta compreender a realidade total, não de maneira

estática, mas sim dinâmica. Visa o conteúdo e não a forma (Lefebvre, 1983). Neste aspecto Marx ampliou o uso da dialética ao adotá-la como método para tecer críticas ao sistema capitalista. A dialética então se consolidou como uma alternativa metodológica para compreender a realidade (MARCHI, 2011, p.8).

Quanto à Complexidade o mesmo autor indica:

[ ] destaca a necessidade da ciência em conhecer-se, de repensar-se não mais isolada, mas tecida num contexto cultural e histórico. Morin é um dos autores que mais tem se debruçado sobre a necessidade da complexidade. Para este autor a ideia não é excluir a ordem, o estático, ou o equilíbrio, mas sim, incluir a desordem, o dinâmico, os desequilíbrios, ou seja, perceber que a natureza é complexa e que situações de ordem e equilíbrio são apenas mais um estado dentro da dinâmica do fluxo (MARCHI, 2011, p.10).

## A PESQUISA BIBLIOGRÁFICA

Autores, como Fiorentini e Lorenzato (2007), consideram pesquisa bibliográfica e estudo documental como sinônimos. Segundo eles:

Esse tipo de pesquisa é também chamado de estudo documental. Os documentos para estudo apresentam-se estáveis no tempo e ricos como fonte de informação, pois incluem filmes, fotografias, livros, propostas curriculares, provas (testes), cadernos de alunos, autobiografias, revistas, jornais, pareceres, programas de TV, lista de conteúdos de ensino, planejamento, dissertações ou teses acadêmicas, diários pessoais, diários de classe, entre outros documentos (p.103).

Neste trabalho, assumimos uma diferença entre pesquisa bibliográfica e estudo documental. Não temos o intuito de abrir um debate em torno dessa questão, porém objetivamos colocar o leitor a par de nossas opções de pesquisa, nossa metodologia, métodos de coleta e análise de dados.

Para Figueiredo (2007), tanto uma quanto a outra têm o documento como objeto de investigação, mas o conceito de documento ultrapassa a ideia de textos escritos ou impressos e, como fonte de pesquisa, pode ser escrito e não escrito, tais como, filmes, vídeos, *slides*, fotografias ou pôsteres. De acordo com Severino (2007):

*A pesquisa bibliográfica é aquela que se realiza a partir do registro disponível, decorrente de pesquisas anteriores, em documentos impressos, como livros, artigos, teses etc. Utiliza-se de dados ou de categorias teóricas já trabalhados por outros pesquisadores e devidamente registrados. Os textos tornam-se fontes dos temas a serem pesquisados. O pesquisador trabalha a partir das contribuições dos autores dos estudos analíticos constantes dos textos. (p.122)*

Assim, o elemento diferenciador está na natureza das fontes: a pesquisa bibliográfica atém-se às contribuições de diferentes autores sobre o tema, atentando para as fontes secundárias, enquanto a pesquisa documental recorre a materiais que ainda não receberam tratamento analítico, ou seja, as fontes primárias. Nesse sentido, nossa pesquisa é do tipo bibliográfica, cujo fim é propiciar aos pesquisadores o contato direto com obras, artigos ou documentos que tratem do tema investigado. É importante saber que, nessa opção, as fontes a ser pesquisadas são do domínio científico. Por sua vez, a pesquisa documental caracteriza-se pela busca de informações em documentos que não receberam nenhum tratamento de análise científica, como relatórios, reportagens de jornais, filmes, gravações e outras fontes.

Para nós, uma das características principais deste tipo de pesquisa é proporcionar uma bagagem teórica diversificada, subsidiando a ampliação do conhecimento e fazendo da pesquisa um material rico sobre o assunto, fundamentando, teoricamente, o material a ser analisado. Isso faz que ampliemos nossos conhecimentos, tornemo-nos um leitor na busca e no levantamento de dados e informações. Como um trabalho acadêmico requer um conhecimento mínimo que seja sobre livros, artigos, periódicos de modo impresso, eletrônico, é imprescindível tecer um processo metodológico de análise de tal material, isto é, é necessário determinar um caminho a seguir como forma de ser coerente, parcimonioso e objetivo, especialmente para um pesquisador. Corroboramos Veloso (2011) que ressalta a importância da leitura e do acesso aos livros, pois qualquer tipo de pesquisa, em qualquer área, exige pesquisa bibliográfica precedente, quer à maneira de atividades exploratórias, quer para estabelecimento do *status quaestionis*, quer para justificar os objetivos e as contribuições da pesquisa. Deste modo, analisamos grande quantidade de material bibliográfico: livros, dissertações, artigos, documentos oficiais, teses, entre outros. Veloso (2011) continua:

Sem uma boa base bibliográfica, não há trabalho que se pode chamar de científico. Mesmo os trabalhos empíricos ou experimentais têm uma fundamentação teórica que se baseia no que já se acha pesquisado, anotado, publicado. Principalmente, por parte de escritores qualificados dentro da especialidade da pesquisa (p.55).

Os pesquisadores Sá-Silva *et al.* (2009) questionam: qual seria o termo que melhor traduz esse tipo de investigação: pesquisa, método, técnica ou análise? Será que os dicionaristas nos ajudariam com suas definições? Eles, então, buscam, no dicionário Houaiss, o significado de, por exemplo:

- *pesquisa*: investigação científica, artística, escolar;
- *método*: 1) procedimento, técnica ou meio para atingir um objetivo; 2) processo organizado de pesquisa; 3) modo de agir;
- *metodologia*: conjunto de métodos, princípios e regras empregados por uma atividade ou disciplina;
- *técnica*: 1) conjunto de procedimentos ligados a uma arte ou ciência; 2) maneira própria de realizar uma tarefa;
- *análise*: 1) estudo de diversas partes de um todo; 2) investigação; exame.

Eles registram que:

Quando um pesquisador utiliza documentos objetivando extrair deles informações, ele o faz investigando, examinando, usando técnicas apropriadas para seu manuseio e análise; segue etapas e procedimentos; organiza informações a serem categorizadas e posteriormente analisadas; por fim, elabora sínteses, ou seja, na realidade, as ações dos investigadores – cujos objetos são documentos – estão impregnadas de aspectos metodológicos, técnicos e analíticos. (SÁ-SILVA *et al.*, 2009, p.4)

Assim, para nós, a pesquisa bibliográfica é um procedimento que se utiliza de métodos e técnicas para apreensão, compreensão e análise de documentos científicos impressos ou apresentados por mídias, como CD ROM, internet, revistas eletrônicas, entre outros, principalmente, no nosso caso, teses, artigos em periódicos e em publicações de eventos. Apresentamos, a seguir, o tipo de pesquisa bibliográfica pela qual optamos, para desenvolver o nosso estudo (cf. Fig.13).

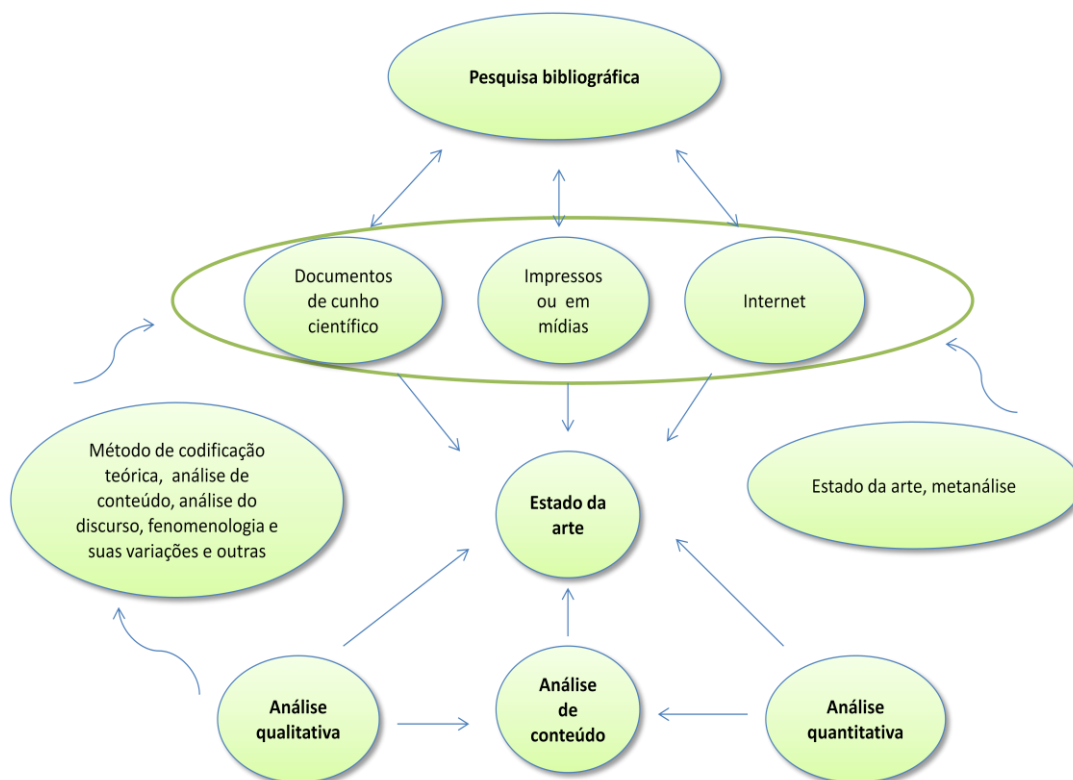


Figura 13- Diagrama representativo de uma pesquisa bibliográfica do tipo *estado da arte* com procedimentos de análise qualitativa e de conteúdo

## A PESQUISA DO TIPO ESTADO DA ARTE

No início desta investigação, a modalidade de nossa pesquisa pode ser caracterizada como um tipo de **estado da questão**, passando, depois, por uma **revisão da literatura**. Contudo, nossa investigação foi além, categorizando, mapeando, analisando e discutindo a produção científica e acadêmica sobre o tema. Pela figura 14 (NÓBREGA-TERRIEN; TERRIEN, 2004, p.8), é possível analisar características dessas modalidades de pesquisas.

<b>Características</b>	<b>Estado da questão</b>	<b>Estado da arte</b>	<b>Revisão de literatura</b>
<b>Objetivos</b>	Delimitar e caracterizar o objeto (específico) de investigação de interesse do pesquisador e a consequente identificação e definição das categorias centrais da abordagem teórico-metodológica.	Mapear e discutir determinada produção científica acadêmica em determinado campo do conhecimento.	Desenvolver a base teórica de sustentação e análise do estudo, ou seja, a definição das categorias centrais da investigação.
<b>Procedimentos</b>	Levantamento bibliográfico seletivo para identificar, situar e definir o objeto de investigação e as categorias de análise.	Levantamento bibliográfico em resumos e catálogos de fontes relacionados a um campo de investigação.	Levantamento bibliográfico para a compreensão e a explicitação de teorias e categorias relacionadas ao objeto de investigação identificado
<b>Fontes de consulta</b>	Teses, dissertações, relatórios de pesquisa e estudos teóricos	Predominantemente resumos e catálogos de fontes de produção científica.	Teses, dissertações, relatórios de pesquisa e estudos teóricos.
<b>Resultado</b>	Clareia e delimita a contribuição original do estudo no campo científico.	Inventário descritivo da produção acadêmica e científica sobre o tema investigado	Identifica o referencial de análise dos dados.

Figura 14: Sinopse de comparação entre o estado da questão, o estado da arte e a revisão de literatura na produção científica

Fonte: Nóbrega-Therrien; Therrien (2004, p.8)

Os trabalhos do tipo *estado da arte*, *estado da questão* e *revisão de literatura* destacam a importância e ou a necessidade de cada uma dessas etapas de pesquisas como marcos situacionais reveladores na edificação dos objetos de estudos. Empregamos, em nosso processo de investigação, os tipos de pesquisa acima, pois consideramo-las como trilhas a ser seguidas, a fim de constituir em investigação sistêmica: iniciamos uma pesquisa superficial em documentos científicos, com fim de levantar uma indagação, um problema a ser investigado e procedemos a uma revisão bibliográfica, para contextualizar a pesquisa, para conhecer o que existe sobre o tema, evitando repetições, validando e justificando o tema e a pesquisa a ser realizada. Em uma etapa final, refinamos os dados coletados e direcionamo-los a uma coleta minuciosa, para realizar o *estado da arte*.

Segundo Nóbrega-Therrien, Therrien (2004), mesmo em trabalhos de *estado da arte* que se propõem a fazer um mapeamento descritivo e bibliográfico, tendo como fontes os resumos e os catálogos de pesquisas, o pesquisador precisa extrapolar os limites da organização do simples inventário temático ou metodológico das pesquisas

arroladas. O detalhamento, em um processo de busca e crítica dos trabalhos consultados, também expressa o itinerário percorrido por nós na construção analítica, revelando os entraves, os avanços, os retrocessos e as descobertas inerentes às publicações científicas. Além disso, no nosso contexto, reunimos, em grupos, características semelhantes encontradas nas publicações, e isto foi construído ao longo do processo, porém teve início na revisão bibliográfica e consolidou-se no avanço da análise.

Optamos por esse tipo de modalidade de pesquisa quando, por exemplo, almejamos subsidiar novas pesquisas, indicando questões que podem ser aprofundadas ou complementadas. Qual seria, nessa situação, o valor desse tipo de pesquisa? O valor de mapeamentos periódicos do estado de assuntos considerado numa área de pesquisa é variado. Pode revelar teorias e métodos dominantes; colocar em consideração peculiaridades do assunto, do tema, que repousam implicitamente, nas pesquisas; desvendar em que medida a pesquisa recente se relaciona com a anterior; tecer uma teia que permita refinar a compreensão do objeto de estudo pela via do real aprofundamento do que já se conhece ou da superação de percepções anteriormente postas. Dessa forma, sopesamos as continuidades e as discontinuidades teóricas e metodológicas e o quanto esta história se faz por reprodução ou ruptura, isto é, o quanto redonda ou avança na produção do conhecimento sobre o tema. Nesse enredamento, sempre em constituição, habita uma expectativa de evitar o congelamento do conhecimento e de fazer de uma pesquisa ambiente de produção de saber que não seja estático, que tenha como fundamentação o movimento não retilíneo e não uniforme. Assim sendo, o que buscamos e o que queremos quando optamos por um trabalho do tipo *estado da arte*?

Fundamentamo-nos na pesquisadora da Universidade Estadual de Campinas, Norma Ferreira (2002), para responder à questão:

Sustentados e movidos pelo desafio de conhecer o já construído e produzido para, depois, buscar o que ainda não foi feito, de dedicar cada vez mais atenção a um número considerável de pesquisas realizadas de difícil acesso, de dar conta de determinado saber que se avoluma cada vez mais rapidamente e de divulgá-lo para a sociedade, todos esses pesquisadores trazem em comum a opção metodológica, por se constituírem pesquisas de levantamento e de avaliação do conhecimento sobre determinado tema (FERREIRA, 2002, p.259).

Nos últimos 15 anos, vários cursos de pós-graduação surgiram ou se solidificaram no Brasil e no exterior, na área de Educação Matemática. Muito também se tem produzido cientificamente, nessa área. Cresceram as quantidades de eventos com

fins de debate e socialização de pesquisas, de problemas e soluções relacionados ao ensino e à aprendizagem em matemática. No mesmo ritmo, surgiram instituições, sociedades e grupos de pesquisa com objetivo de refletir e validar a disciplinarização da Educação Matemática. Nesse contexto, inúmeras publicações foram produzidas e, com os meios de comunicação mais modernos, puderam espalhar-se de forma rápida. Com esse montante de trabalhos globalizados, precisamos de investigações que possam reuni-los, ao menos parcialmente, por tema ou assunto e organizá-los no sentido de fazer emergir questões que ainda não foram estudadas e apresentadas ou aprofundar as já postas. A pesquisa do tipo *estado da arte* vem ao encontro de tais necessidades.

Se comparadas às milhares de dissertações, teses e artigos científicos produzidos no Brasil e no mundo, são poucas as investigações específicas, de maior profundidade de análise de problemas e temas, de resultados e conclusões, de fundamentos teóricos e metodológicos, de subsídios para a educação, entre outros aspectos (MEGID,1999). Trabalhos do tipo *estado da arte*, de produção nacional e internacional, principalmente nos últimos 10 anos, fazem-se mais importantes e indispensáveis, tendo em vista a quantidade de publicações. Mesmo com o advento e a modernização dos bancos de dados na internet, muitos trabalhos não estão disponíveis, e alguém que vise embasar-se em resultados de pesquisas já realizadas para nortear sua investigação possui pouco tempo para buscar, organizar, extrair dados, categorizar resultados, pois seu objetivo pode ser outro. Assim, frutos de estudos do tipo *estado da arte* possibilitam reunir, em uma só publicação, de forma direcionada e objetiva, resultados de outras publicações com respeito a determinado tema.

Corroboramos Megid (1999) quando relata que são imprescindíveis os estudos bibliográficos do tipo *estado da arte*, pois circunscrevem o conjunto de trabalhos produzidos em determinado campo, identificam e descrevem as tendências das pesquisas, os principais resultados e conclusões, os subsídios e as contribuições para o sistema formal ou não formal de ensino, as deficiências e as limitações da produção acadêmica e apontam para a necessidade de novos estudos na área. Os debates sobre a relevância social da produção acadêmica nos programas de pós-graduação em educação matemática, ou em educação com enfoque na área de ensino de matemática, devem considerar a realização de avaliações constantes sobre essa produção que levem em conta não somente o volume físico de trabalhos produzidos.

Para nós, esse tipo de pesquisa tem um tom desafiador e uma vertente que proporciona a visão holística das produções. Apesar de ser um trabalho hercúleo, pois,

ao buscar, selecionar, ler e reler os documentos, demandando tempo e paciência, propicia enriquecer e aprofundar os conhecimentos sobre determinado assunto e aprender com a análise das pesquisas. Existem autores que indicam serem os estudos do tipo *estado da arte* ainda embrionários ou insatisfatórios, principalmente quando a coleta de dados se restringe a dissertações e teses e essas são a base da investigação. Alves-Mazzotti (2002) alerta para as possíveis barreiras nesse tipo de pesquisa:

A elaboração dos chamados estados da arte entre nós [brasileiros] fica muito restrita a capítulos encontrados em teses e dissertações de mestrado e doutorado. Tal contribuição, embora não possa ser desprezada, é insatisfatória. (ALVES-MAZZOTTI, 2002, p.34 )

Ferreira (2002) aponta-nos que os catálogos de faculdades, institutos, universidades, associações nacionais e órgãos de fomento da pesquisa são as principais fontes de busca de estudos com a conotação de *estado da arte*, porém limitam a análise. A autora chama-nos a atenção para não nos atermos somente aos catálogos que analisam os resumos. Isso nos despertou para lermos vários trabalhos integralmente. De acordo com ela:

Com o catálogo, com a possibilidade de divulgação ampla, atingindo lugares fora da própria universidade produtora, atingindo maior número de leitores, surgem novas relações de produção e de consumo. O catálogo precisa se tornar mais complexo para atender a uma comunidade de pesquisadores mais exigentes, desejosos de mais informações antes de optar pela leitura do original. Criadas novas perspectivas na produção e consumo desse material de consulta, constata-se que não bastam as referências limitadas ao registro dos principais dados indicadores: título do trabalho, nomes do autor e do orientador, local e data de defesa, titulação dada, como foram organizados os primeiros catálogos. O *resumo* é, então, incluído com a finalidade de divulgar com mais abrangência os trabalhos produzidos na esfera acadêmica. (FERREIRA, 2002, p.261)

Da mesma forma, os resumos podem gerar limitações na obtenção de dados, pois temos a sensação de que sua leitura não nos fornece a ideia do todo, do que realmente trata a pesquisa. Eles parecem restritos e podem não transparecer a informação real em relação à determinação de categorias, agrupamentos, principalmente, quando se trata de enquadrá-los quanto à metodologia, à teoria ou ao tema, ainda que a leitura seja cuidadosa. Alguns resumos encontrados nos catálogos apresentaram-se mal-feitos, cortados, recortados e pareciam não expressar, verdadeiramente, a pesquisa. Além disso, é possível encontrar mais de um resumo para o mesmo trabalho e diferentes entre si, o que desencadeia um conflito de qual resumo

responderá melhor às nossas indagações. Por exemplo, no decorrer do nosso mapeamento, deparamos com o resumo:

This paper describe a study regarding Israeli and Italian student's solutions to algebraic inequalities. The findings presented here show similarities in student's correct and incorrect solutions, in both countries. Fischbein's notions of algorithmic, intuitive and formal knowledge are used to analyse the data. The findings indicate that students generally worked in an algorithmic manner, intuitively drawing analogies to the solution of related equations. We conclude by suggesting some educational implications (TSAMIR; BAZZINI, 2001a, p.57)<sup>22</sup>.

Mesmo com título igual, outro trabalho das mesmas autoras apresentou um resumo diferente:

This paper describe some findings of a study regarding Israeli and Italian student's solution to standard (commonly taught) and non-standard (not commonly taught) inequalities. The findings presented here show similarities in student's difficulties, in both countries, regarding  $x=3$  as the solution of an inequality even in cases where they correctly identify  $x=0$  as the solution of the task  $5x^4 \leq 0$ . We also found that a substantial number of the participants encountered difficulties in solving the inequality  $5x^4 \leq 0$ , claiming either that the set of solutions was empty or that the set of solution was  $x \leq 0$ . (TSAMIR; BAZZINI, 2001b, p.303)<sup>23</sup>.

Só depois de ler os dois trabalhos, percebemos que se tratava dos mesmos, porém com resumos diferenciados, e, refletindo sobre isso, pusemo-nos a buscar autores que respaldassem a leitura dos trabalhos na íntegra, porque muitos lidam com tranquilidade com as restrições dos catálogos e dos resumos, mas esse não é o nosso caso. Buscamos em Megid (1999) um respaldo, para não nos restringirmos à leitura e à análise dos resumos publicados em catálogos das instituições. O autor posiciona-se:

---

<sup>22</sup> Este artigo descreve um estudo sobre as resoluções algébricas de inequações dos estudantes israelenses e italianos. Os resultados apresentados mostram semelhanças em resoluções corretas e incorretas dos alunos em ambos os países. Noções de conhecimento algorítmico, intuitivo e formal de Fischbein são utilizadas para analisar os dados. Os resultados indicam que os estudantes trabalham de forma algorítmica, esboçando, intuitivamente, analogias relacionadas à resolução de equações.

<sup>23</sup> Este artigo descreve resultados de um estudo sobre as resoluções de estudantes israelenses e italianos em relação a resoluções padrões (comumente ensinadas) e não padrões (não comumente ensinadas) das inequações. Os resultados apresentados mostram semelhanças, nos dois países, entre as dificuldades dos estudantes em relação a  $x = 3$ , tal como na solução de uma inequação, mesmo nos casos em que identificam corretamente  $x = 0$  como a solução de  $5x^4 \leq 0$ . Descobrimos que um número considerável dos participantes deparam com dificuldades em resolver  $5x^4 \leq 0$ , alegando que ou o conjunto de soluções era vazio, ou o conjunto de solução era  $x \leq 0$ .

Toda essa discussão tem por objetivo expressar algumas limitações dos catálogos ou bancos de dados sobre a produção acadêmica, no que se refere a uma divulgação adequada da mesma. Os dados bibliográficos dos trabalhos já permitem uma primeira divulgação da produção, embora bastante precária. Os resumos ampliam um pouco mais as informações disponíveis, porém, por serem muito sucintos e, em muitos casos, mal elaborados ou equivocados, não são suficientes para a divulgação dos resultados e das possíveis contribuições dessa produção para a melhoria do sistema educacional. Somente com a leitura completa ou parcial do texto final da tese ou dissertação, esses aspectos (resultados, subsídios, sugestões metodológicas etc) podem ser percebidos. Para estudos sobre o estado da arte da pesquisa acadêmica nos programas de pós-graduação em Educação, todas essas formas de veiculação das pesquisas são insuficientes. É preciso ter o texto original da tese ou dissertação disponível para leitura e consulta. (MEGID, 1999, p.45).

A nossa opção por essa modalidade de investigação tem, como todas as outras, restrições, isto é, o acesso às publicações, as limitações dos dados que podem ser extraídos, se nos atemos somente aos resumos e aos catálogos, a quantidade de leituras e releituras necessárias para reconhecer categorias e desvelar o que está implícito e a maturidade do pesquisador são exemplos de restrições que esse tipo de trabalho pode apresentar. Conforme Romanowski e Ens (2006), “os dados coletados por meio de pesquisas do tipo estado da arte possibilitam uma abertura muito grande para sua análise. Para isso, é fundamental que o pesquisador faça uso de um apoio teórico” (p.46), por isso nós elegemos a análise de conteúdo, para examinar as mensagens emitidas explícita ou implicitamente pelos autores.

Para melhor caracterizar nossa pesquisa, ressaltamos que há, todavia, outras modalidades que abrigam estreitas características com os estudos do estado da arte, mas que são pouco utilizadas na área educacional. É o caso dos estudos de revisão de pesquisas que são denominados pela literatura de *metanálises*. (cf. Fig.13)

Para Fiorentini e Lorenzato (2007):

Os estudos metanalíticos diferem dos estudos do estado-da-arte, pois não pretendem descrever aspectos ou tendências gerais da pesquisa num determinado campo de conhecimento, mas, tão somente, realizar uma análise crítica de um conjunto de estudos já realizados, tentando extrair deles informações adicionais que permitam produzir novos resultados, transcendendo aqueles anteriormente obtidos.(p. 71)

Apontar características, limitações e diferenças é uma forma de explicitar a nossa opção metodológica de coleta e seleção de dados: bibliográfica do tipo estado da arte. Destacamos que o fascinante de trabalhar com o estado da arte em pesquisas é que a imensidão de material não permite uma determinação que possa exaurir possibilidades

nem de busca, nem de análises. Quase proporcionalmente à quantidade de material acessível, também estará outra quantidade para ser buscada e mapeada, e o fascínio está justamente neste processo de resgate, reunião e associação do material a ser investigado. Para nós, esse tipo de modalidade de pesquisa é, antes de tudo, uma retomada, um momento de reflexão e uma maneira de aquilatar o conhecimento já produzido. Nesse contexto, com o intuito de formar uma trilha a seguirmos, fundamentamos-nos em algumas orientações dadas por Cellard (2008) sobre a avaliação preliminar dos documentos, que constitui a primeira etapa de toda a análise documental e aplica-se em cinco dimensões:

- contexto, que permite avaliar a conjuntura histórica na qual foi produzido o documento, o universo sociopolítico do autor e daqueles a quem foi destinado;
- autor (ou autores), que possibilita analisar a identidade da pessoa que se expressa, seus interesses e os motivos que a levaram a escrever. Esse indivíduo fala em nome próprio ou em nome de um grupo social? Cellard (2008) acredita ser difícil compreender os interesses (confessos ou não) de um texto quando se ignora tudo sobre aquele ou aqueles que se manifestam, suas razões e as daqueles a quem se dirigem;
- autenticidade e confiabilidade do texto, que viabiliza a qualidade da informação transmitida e a verificação da procedência do documento;
- natureza do texto, que, na análise de um documento, devemos levar em consideração, antes de tirar conclusões: se a origem é de uma revista impressa, eletrônica, se é de um CD de eventos, de um documento jurídico, pois cada meio tem uma regra diferenciada para publicação;
- conceitos-chave e lógica interna do texto, que aponta para uma delimitação adequada ao sentido das palavras e dos conceitos. Devemos prestar atenção aos conceitos-chave e ponderar sua importância e seu sentido segundo o contexto exato em que são empregados.

Por fim, é útil examinar a lógica interna, o esquema ou o plano do texto: como um argumento se desenvolveu? Quais são as partes principais da argumentação? Acrescentamos outra dimensão, além das já estabelecidas: o local da produção, da editoração e ou da coleta de dados. Isso nos fornece mais argumentos, para comparar

dados, diferenciar os participantes da coleta de dados, ponderar, socioculturalmente, os resultados e aprofundar a análise e o mapeamento.

Levar em conta essas dimensões pode ser um apoio importante, ao compararmos vários documentos da mesma natureza. Então, com o intuito de utilizar uma metodologia de análise que possibilite levar em consideração tais dimensões e traga à superfície outras que nos ajudem ver o que está implícito e valorizar o que já está explícito, optamos pela análise qualitativa. Para proceder à análise, propriamente dita, desenvolvida pela discussão que os temas e os dados suscitam e que inclua o *corpus* da pesquisa, as referências bibliográficas e o modelo teórico, recorremos à metodologia qualitativa de análise do conteúdo, que “pode caracterizar-se como um método de investigação do conteúdo simbólico das mensagens” (LUDKE; ANDRÉ, 1986, p.41)

## **A ABORDAGEM QUALITATIVA**

Apesar de ainda haver um debate sobre o que realmente caracteriza uma pesquisa qualitativa, pretendemos registrar marcos sobre o que consideramos, a fim de contextualizar e demarcar a nossa investigação. Baseando-nos em Bogdan e Biklen (1982), destacamos quatro características:

- Tem ambiente natural como sua fonte direta de dados e o pesquisador como seu principal instrumento.

Isso reflete diretamente na nossa interpretação, carecendo, então, de explicitar as circunstâncias particulares em que determinado objeto se insere. Em outros termos, as pessoas, os gestos, as palavras estudadas devem ser referenciados ao contexto onde aparecem.

- Os dados coletados são predominantemente descritivos.

Ao descrever dados, pessoas, situações, extratos de documentos, entre outros, é importante usar citações que respaldem tais descrições. Devemos estar atentos ao maior número possível de elementos presentes na situação a ser estudada.

- A preocupação com o processo é muito maior do que com o produto.

O maior interesse é entender como determinada situação ocorre, como se manifesta, qual é o significado que as pessoas dão às coisas. Medidas quantitativas, nesse momento, não ajudam a compreender a situação.

- A análise tende a seguir um processo indutivo.

“As abstrações se formam ou se consolidam basicamente a partir das inspeções dos dados num processo de baixo para cima” (LUDKE; ANDRÉ, 1986, p.13)

Acrescentamos características, segundo Creswell (2010), como *lente teórica*, que diz respeito às lentes utilizadas pelos pesquisadores para enxergar seus estudos, e o *relato holístico*, que envolve o relato de múltiplas perspectivas, a identificação dos muitos fatores envolvidos em uma situação e, em geral, o esboço do quadro amplo que emerge.

De acordo com Appolinário (2012):

Diferentemente das pesquisas quantitativas, a abordagem qualitativa apresenta certos elementos – como recursividade, por exemplo, que implicam o fato de a análise poder se iniciar até mesmo ao longo da fase de coleta de dados.

Além disso, temos ainda a questão da validade externa: seriam os resultados das pesquisas qualitativas generalizáveis?...[ ] o fato é que pesquisa qualitativa não busca generalização. Assim, a análise de dados terá por objetivo simplesmente compreender um fenômeno em seu sentido mais intenso, em vez de produzir inferências que possam levar à constituição de leis gerais ou a extrapolações que permitam fazer previsões válidas sobre a realidade futura. (p.162)

Para nós, uma ideia desse tipo de pesquisa é identificar categorias, padrões e relações entre os dados coletados, de forma a desvendar seu significado por meio da interpretação e da comparação dos resultados com outras pesquisas e referenciais teóricos. Para D’Ambrósio (*apud* BORBA; ARAÚJO, 2006), “a pesquisa qualitativa lida e dá atenção às pessoas e às suas ideias, procura fazer sentido de discursos e narrativas que estariam silenciosas. E a análise dos resultados permitirá propor os próximos passos” (p.19).

Appolinário (2012) apresenta, de acordo com Tesch (1990), alguns princípios úteis que consideramos em nosso processo de análise qualitativa:

- A análise pode suceder a ocasião da coleta de dados: ainda em campo, o pesquisador pensa sobre suas observações e impressões, o que pode influenciar, inclusive, etapas posteriores da coleta de dados;
- O procedimento de análise é sistemático e compreensivo, mas não é rígido; chega ao fim, com o desvelamento de padrões e regularidades que possam ser objeto de atribuição de significados pelo pesquisador;
- O principal processo analítico utilizado é o da comparação, ou seja, o pesquisador utiliza a comparação, para construir e refinar as categorias e descobrir padrões e, ao final, examina as categorias e os padrões

descobertos em face de teorias e resultados de outras pesquisas correlatas.

Para esse autor (2012), há diferentes formas de analisar dados em pesquisas desse tipo, dependendo das escolhas teórico-metodológicas feitas pelo pesquisador, por exemplo: o método de codificação teórica, a análise de conteúdo, a análise do discurso, a fenomenologia e suas variações, entre outras (cf. Fig. 13).

De acordo com Miles e Huberman (1994), o processo de seleção e redução de dados já faz parte da análise. As decisões do pesquisador, sob as quais os dados são destrinchados e separados, para, depois, ser codificados e dos quais surgirão os padrões que sumarizam o número de separações, são analíticas. Redução de dados não significa necessariamente quantificação. Consideramos, de acordo com indicação desses mesmos autores, que a apresentação dos dados inclui tipos de matrizes, gráficos, cartazes, de forma que possam ser planejados, para as informações serem organizadas e acessadas rapidamente. Conclusões finais podem não aparecer até que a coleção de dados e informações esteja coberta, dependendo do tamanho do *corpus* do campo de notas, da codificação, do armazenamento, da recuperação dos métodos utilizados, da sofisticação do analista e dos recursos das agências financiadoras. Processos de verificações de validade também são incluídos nos procedimentos de análises. (cf. Fig. 15)

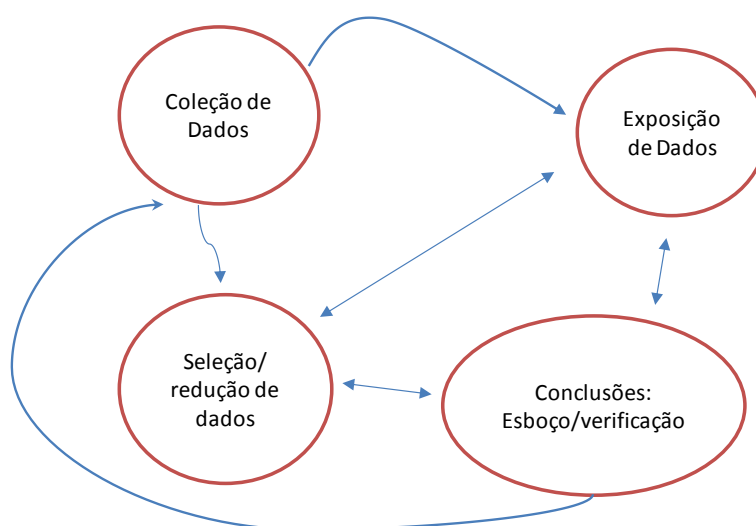


Figura 15 - Componentes da análise de dados: modelo interativo  
Fonte: Miles e Huberman (1994, p.12)

Para a organização dos dados, as leituras e as releituras fazem-se necessárias, e o analista pode voltar a examiná-los, para tentar detectar temas e temáticas mais frequentes. Para Ludke e André (1986, p.42), “esse procedimento, essencialmente indutivo, vai culminar na construção de categorias ou tipologias”.

De acordo com Patton (1990), o esforço de detectar padrões, temas e categorias é um processo criativo que requer julgamento cuidadoso sobre o que é realmente relevante e significativo nos dados. Como os indivíduos que recorrem à análise qualitativa não têm testes estatísticos, a fim de validar explicitamente se uma observação é ou não significativa, devem valer-se da própria inteligência, maturidade e ponderação.

Alguns recursos estatísticos podem ser utilizados desde que tenhamos variáveis explícitas nos dados. Para Apollinário (2012), quando investigamos certos fenômenos por meio de pesquisas científicas, organizamos nossa percepção e nossa compreensão da situação pelo uso de variáveis. Ele entende *variável* como os aspectos ou as propriedades daquilo que examinaremos e que possui um conteúdo inconstante, ou seja, varia. Assim, as variáveis são as características ou as dimensões que o pesquisador elege como relevantes para a sua investigação, então constituem entidades organizadoras centrais de um trabalho científico.

Quando o montante de dados é grande, como em uma pesquisa que coleta dados por meio de questionários, entrevistas e outros recursos, o analista necessita de um meio que possa ajudá-lo a extrair dados das inúmeras folhas de papel que se têm. Existem *softwares* de análise qualitativa que podem auxiliar. Podemos citar alguns, como MAXqda, Altas.ti, QRS NVIVO, HyperREARCH. Porém, tivemos necessidade de utilizar um *software* somente na análise da terceira tabela, onde os dados se avolumaram. Nesse caso, utilizamos o QRS NVIVO 09, a última versão.

Em nosso trabalho, também fazemos uso de alguns recursos estatísticos que visam aprofundar informações, subsidiar resultados. A fim de complementarmos a análise, utilizamos os dados numéricos. Para Bardin,

A abordagem quantitativa e a qualitativa não têm o mesmo campo de ação. A primeira obtém dados descritivos por meio de um método estatístico. Graças a um desconto sistemático, esta análise é mais objetiva, mais fiel e mais exata, visto que a observação é mais bem controlada. A segunda corresponde a um procedimento mais intuitivo, mas também mais maleável e mais adaptável a índices não previstos ou à evolução das hipóteses (BARDIN, 2011, p.145).

No caso da abordagem qualitativa, a tendência é analisar os dados de forma indutiva, com características descritivas, e o significado é de importância vital (BODGAN; BIKLEN, 1994). Assim, cautelosos para não nos precipitarmos, certos de ser essa uma ação plausível no ato de investigar, hipotetizar, baseamo-nos nos conselhos de Bardin (2011):

Além do mais, o risco de erro aumenta porque se lida com elementos isolados e com frequências fracas, daí a importância do contexto. Contexto da mensagem, mas também contexto exterior a este; quais serão as considerações de produção, ou seja, quem é que fala a quem e em que circunstâncias? Qual será o montante e o lugar da comunicação? Quais os acontecimentos anteriores ou paralelos? (BARDIN, 2011, p.145)

Certos de que o risco de uma abordagem puramente qualitativa pode ser polêmica e percebendo falta de auxílio numérico, recorreremos a uma suplementação pela análise quantitativa com o intuito de desenvolver uma combinação que fortaleça as análises. De forma resumida, mas objetiva, podemos considerar que, se a pesquisa for qualitativa, as respostas podem ser interpretadas global e individualmente; se for quantitativa, podemos utilizar a estatística como uma forma direta de mensurar elementos tanto subjetivos como objetivos.

## A ABORDAGEM QUANTITATIVA

De acordo com Apollinário (2012), podemos utilizar a estatística para duas finalidades: *descrever dados* e *testar hipóteses*. Para apenas descrever dados, podemos utilizar a estatística *descritiva*; para testar hipóteses, a *inferencial*. A primeira representa o conjunto de técnicas que têm por finalidade descrever, resumir, totalizar e apresentar, graficamente, dados de pesquisas. Fazem parte dessa modalidade: a distribuição de frequência, as medidas de tendência central, as de dispersão, as correlações e as representações gráficas das distribuições de frequências. No nosso trabalho, fazemos uso de alguns recursos da *estatística descritiva*.<sup>24</sup>

Assim, é imperiosa a detecção de variáveis, dependentes ou independentes. Em outras palavras, uma maneira de chegar à compreensão é por meio de explicações ou compreensões das relações entre variáveis. De maneira sucinta, podemos dizer que, em

---

<sup>24</sup> Alguns estatísticos não apreciam a nomenclatura.

pesquisas qualitativas, o importante é o que se fala sobre um tema, enquanto, em pesquisas quantitativas, o importante é quantas vezes é falado.

Alguns pensadores, de forma radical, defendem que pensar em pesquisa quantitativa e em pesquisa qualitativa significa, sobretudo, pensar somente em duas correntes paradigmáticas, que têm norteado a pesquisa científica no decorrer da história da humanidade. Tais correntes caracterizam-se por duas visões centrais que alicerçam as definições metodológicas da pesquisa em ciências humanas nos últimos tempos. São elas: a visão realista objetivista (quantitativa) e a visão idealista subjetivista (qualitativa). Contudo, pensamos que os métodos quantitativos – sobrevivendo essencialmente das ciências naturais - possuem suas limitações, mas seria errado considerar que, quando aplicados às ciências humanas, possam apreender, somente, os aspectos mais pobres e pouco profundos das sociedades.

Na verdade, podemos caracterizar nossa abordagem de investigação como quanti-qualitativa, ou melhor, que utiliza estratégias de investigação do tipo métodos mistos (CRESWELL, 2010). Os métodos mistos surgiram no início da década de 90, e a ideia de combinar métodos qualitativos e quantitativos evoluiu da busca da convergência à real integração ou conexão entre eles, que podem ser usados lado a lado, para reforçar um ao outro (CRESWELL, 2010).

Colocamos-nos na mesma posição de Megid (1999), em sua pesquisa de doutorado do tipo *estado da arte*, a respeito de tendências da pesquisa acadêmica sobre o ensino de ciências no nível fundamental: “O entrelaçamento das três perspectivas – histórica, quantitativa e qualitativa – propiciará uma melhor compreensão dos rumos da pesquisa acadêmica brasileira nessa área” (p.31). Para nós, tal entrelaçamento fornece-nos fundamentos, para examinarmos e mapearmos as pesquisas e refletirmos sobre elas, que tratam do ensino e da aprendizagem de inequações no âmbito nacional e internacional.

## **A ANÁLISE QUANTI-QUALITATIVA**

Há autores que discutem e apresentam posições sobre a utilização de métodos mistos em pesquisas científicas, como Creswell (2010), Miles e Huberman (1994), entre outros. Basear-nos-emos, principalmente, nesses autores, para apresentarmos breve reflexão sobre tal método, pois, em nosso trabalho, utilizamos, também, dados

quantitativos, então supomos que podemos considerar o método de análise, nomeadamente, misto. Esse item visa entrelaçar fios expostos anteriormente e que servirão de um tecido, para repousar a nossa opção de abordagem teórico-metodológica: a análise de conteúdo.

De acordo com Creswell (2010), em 2003, foi publicado o *Handbook of Mixed Methods in the Social e o Behavior Sciences*, que se tratava da primeira versão abrangente dessa estratégia de investigação. Esse mesmo autor aponta desafios enfrentados pelo pesquisador que opta por essa abordagem, tais como, a necessidade de extensa coleta de dados, a natureza de tempo intensivo da análise de dados, textos e numéricos e a exigência de que o pesquisador esteja familiarizado com as formas de pesquisa quantitativa e qualitativa. Ele apresenta (cf. Fig.16) um conjunto de tipos de aspectos, planos ou organizações que podem ser realizados, a fim de cumprir objetivos e metas.

<b>Distribuição de tempo</b>	<b>Atribuição de peso</b>	<b>Combinação</b>	<b>Teorização</b>
Sequência não corrida	Igual	Integrando	Explícita
Dados qualitativos coletados primeiro	Qualitativo	Conectando	
Dados quantitativos coletados primeiro	Quantitativo	Incorporando	Implícita

Figura 16 - Aspectos a ser considerados no planejamento para um estudo de métodos mistos

Fonte: (CRESWELL, 2010, p.242)

No nosso caso, os dados qualitativos foram coletados primeiro. Isso significa que o peso de nosso procedimento foi dado à referência qualitativa. Nossa combinação de dados ocorreu na fase de análise, de forma a aprofundar os resultados e balisar inferências obtidas do exame qualitativo; assim, podemos dizer que conectamos tais métodos de uma fase a outra. Na abordagem teórico-metodológica utilizada, a característica principal é a inferência no nível da mensagem.

Miles e Huberman (1994) apresentam-nos opiniões sobre a utilização de métodos quantitativos na análise qualitativa e apontam-nos que a questão não é se

devemos ou não associar os dois tipos de métodos, mas, sim, se podem ser usados, como e para que propósitos utilizá-los. Autores citados por Miles e Huberman (1994) sugerem determinadas razões para responder à questão de por que interligá-los: permitir confirmação ou corroboração um do outro pela triangulação; elaborar ou desenvolver análise, fornecendo ricos detalhes; iniciar novas linhas de pensamento por meio da atenção a surpresas e paradoxos, “transformando ideias em torno de”, propiciando novos *insights*; ajudar sequencialmente, pois os resultados do primeiro método informam e direcionam a segunda amostragem, a instrumentação; expandir o escopo e a “largura” de um estudo em diferentes métodos e componentes.

Na investigação desenvolvida por nós, esses métodos foram utilizados para não somente corroborar inferências feitas, mas também fazer surgir novas variáveis e inter-relacioná-las quantitativa e qualitativamente, além de a triangulação suscitar informações de maneiras ricas que não poderiam ser obtidas, utilizando cada um dos dados isoladamente.

## **A ABORDAGEM TEÓRICO-METODOLÓGICA: ANÁLISE DE CONTEÚDO**

A fim de examinar os dados, recorreremos a instrumentos metodológicos baseados na análise de conteúdo, cujo processo tem início com a escolha da *unidade de análise*: de registro e de contexto. O ponto de partida da análise de conteúdo é a mensagem verbal, gestual, silenciosa, figurativa, documental ou diretamente provocada. É imprescindível considerar a relação que vincula a emissão de mensagens, palavra, texto, enunciado, título, discurso, entre outros, estar ligada às condições contextuais de seus produtores.

Conforme Bardin (2011):

O peso do desenvolvimento das técnicas documentais tem-se mantido relativamente discreto no campo científico. A documentação permanece uma atividade muito circunscrita, e a análise documental, pouco conhecida do profano, é um assunto para especialistas. No entanto, alguns procedimentos de tratamento da informação documental apresentam tais analogias com uma parte das técnicas da análise de conteúdo que parece conveniente aproximá-los para melhor as diferenciar. A finalidade é sempre a mesma, a saber, esclarecer a especificidade e o campo de ação da análise de conteúdo.

Se a esta suprimirmos a função de inferência e se limitarmos as suas possibilidades técnicas apenas à análise categorial ou temática,

podemos, efetivamente, identificá-la como análise documental (BARDIN, 2011, p.51).

Sendo assim, vale registrar o teor inferencial que possui a análise de conteúdo utilizada. Então, elegendo esse tipo de metodologia, para analisar os dados e manipular as mensagens, a fim de evidenciar indicadores, sedimentamos a possibilidade de induzir outra realidade que não a da mensagem explícita.

### **UNIDADE DE REGISTRO (UR) E UNIDADE DE CONTEXTO (UC)**

Na Unidade de Registro (UR), nós selecionamos segmentos específicos do conteúdo, para fazer a análise, determinando, por exemplo, a frequência com que aparece no texto uma palavra, um tópico, uma expressão, um personagem, etc. Podemos também explorar o contexto e não só a frequência. Em geral, o método de codificação escolhido vai depender da natureza do problema, do arcabouço teórico e das questões que norteiam a investigação. No nosso trabalho, a principal unidade de análise, e a impulsionadora de todo o resto, foi a palavra *inequações*, em português e inglês, inicialmente, e, depois, em espanhol, italiano e francês. A escolha fundamentou-se no fato de ser essa a palavra-chave em relação aos interesses da nossa investigação. Se, em primeiro momento de nossa procura, ela não aparecesse explicitamente, nós aprofundávamos e diversificávamos os modos de buscas. Depois, fazíamos uma leitura diagonal de textos que continham palavras a ser remetidas a *inequação*, como *equação*, para verificar se, no interior do trabalho, existia algum tópico que a enfocava ou a relacionava.

Assim, essa unidade serviu para nortear tanto as nossas buscas quanto as análises, pois observamos o contexto atrelado a cada unidade encontrada: tipos de participantes da pesquisa, data, local, autores, tipo de inequação e outros. A frequência da palavra não foi importante em nossas análises da primeira e da segunda tabela. Conforme Franco (2003), a palavra é a menor unidade de registro usada em análise de conteúdo e tem sido utilizada em estudos de fidedignidade, para determinar facilidade ou dificuldade de compreensão de material escrito, na base de referências personalizadas, uso de preposições, uso de prefixos, sufixos, adjetivos, entre outros.

O processo de localização das unidades de contexto conduziu-nos à construção de categorias ou tipologias, que advieram, em primeiro momento, da bagagem teórica

que nos apoia. O conjunto de categorias iniciais, no entanto, foi modificado ao longo do estudo, num processo dinâmico de confronto constante entre teoria e empiria, o que dá origem a novos entendimentos e, conseqüentemente, a novas bases de interesse (LUDKE; ANDRÉ, 1986). Em nosso processo de categorização, não existiram normas fixas para a criação de categorias.

Para Franco (2003, p.51), “A categorização é uma operação de classificação de elementos constitutivos de um conjunto por diferenciação seguida de um reagrupamento baseado em analogias, a partir de critérios definidos”. A nossa principal preocupação sempre foi transformar a informação obtida junto ao *corpus* em algo que seja interpretável, que tenha significado para o investigador: as chamadas categorias de análise. Segundo nossa concepção, os trabalhos de pesquisas serão produtivos na medida em que as categorias sejam claramente formuladas e bem adaptadas ao problema e ao conteúdo a analisar.

Bardin (2011) ressalta que o critério de categorização pode ser semântico – por exemplo, todos os temas que estejam relacionados à álgebra podem ficar na categoria *álgebra*. Pode ser também sintático (os verbos, os adjetivos) ou léxico (classificação da palavra segundo seu sentido, com emparelhamento dos sinônimos e dos sentidos próximos) e expressivo (por exemplo, categorias que classificam as diversas perturbações da linguagem). Neste trabalho, as categorizações foram fundamentadas, também, pelo critério léxico.

Tratar do material é codificá-lo. Coutinho (2005) aponta que a codificação corresponde a uma transformação, efetuada segundo regras precisas, dos dados brutos do texto que, por recorte, agregação e enumeração, permite atingir uma representação do conteúdo capaz de esclarecer o analista acerca das características do texto e das mensagens expressas. Como buscávamos informações que poderiam ser comparadas em cada uma das publicações, decidimos considerar alguns aspectos que, em nossa opinião, seriam bons guias para que trouxéssemos, à luz, elementos relevantes sobre o ensino e a aprendizagem de inequações. Então, depois de algumas leituras e de um processo de pré-análise, surgiram categorias *emergentes*, ou seja, “quando são obtidas mediante um processo interpretativo, diretamente do material de campo” (FIORENTINI; LORENZATO, 2007, p.135). O fato de que algumas delas não são totalmente disjuntas levou-nos a optar por uma análise vertical, em que cada uma foi examinada separadamente e, ao final, confrontada. A sequência de coleta e análise dos dados não foi linear, pois, ao mesmo tempo em que reiteradas leituras eram realizadas, a fim de

evidenciar os elementos comuns e divergentes subjacentes, novas publicações surgiam e eram incorporadas aos dados anteriores. Uma espécie de desmonte de estruturas e elementos apresentados no exterior dos artigos foi realizada, a fim de extrair diferentes características, aprofundar e ampliar informações.

Em outra etapa da nossa pesquisa, foram levadas em consideração como **contexto**, não somente, mas também, as palavras que, por exemplo, no título, acompanhavam a palavra principal. Isto é, se o termo principal a ser analisado, destacado no enunciado fosse *funções*, o contexto considerado seria o conjunto das outras palavras que caracterizavam uma completude da ideia de *funções*, como, por exemplo, *ensino médio*, *Itália*, entre outras.

Uma categoria considerada e que revelou dados iniciais importantes foi **título** ou **tema**. Para Franco (2003), o tema é uma asserção sobre determinado assunto e pode ser uma sentença simples, com sujeito e predicado, um conjunto delas ou um parágrafo. Alguns elementos podem ser apreendidos dele, e, segundo a autora, o tema é considerado como a mais útil unidade de registro em análise de conteúdo, e a unidade de contexto é a parte mais ampla do conteúdo<sup>25</sup> a ser examinado, porém é imprescindível para a análise e a interpretação dos textos a ser decodificados.

Enfim, nessa análise, buscamos colocar a tônica não somente sobre o componente destacado, mas também sobre a forma como os componentes da mensagem estão dispostos e o que eles revelam sobre aspectos subjacentes e implícitos. Foram observados como os trabalhos se apresentavam encadeados em uma linha do tempo, como os elementos foram ligados nos títulos, os enfoques dados quanto às metodologias e aos objetivos das pesquisas, os dados quantitativos relativos às publicações e seus autores e quais os eventos e suas características que trouxeram à tona tal assunto, para debater e propiciar a ponderação dos educadores e dos pesquisadores na área de educação matemática.

Bardin (2011) relata que o bom conjunto de categorias deve possuir as qualidades:

- *Exclusão mútua* – cada elemento não pode existir em mais de uma divisão.

---

<sup>25</sup> *Conteúdo* no sentido das mensagens que podem estar contidas no texto.

- *Homogeneidade* – diferentes tipos de análises devem ser separados em outra tantas análises sucessivas; no mesmo conjunto categorial, só se pode funcionar com um registro e com uma dimensão.
- *Pertinência* – uma categoria deve-se adequar à abordagem teórica escolhida e ao material do *corpus*.
- *Objetividade e a fidelidade* – as diferentes partes do mesmo material, ao qual se aplica a mesma grade categorial, devem ser codificadas da mesma maneira, mesmo quando submetidas a várias análises.
- *Produtividade*- um conjunto de categorias é produtivo quando fornece resultados férteis.

Mapeando-se as inter-relações entre as diversas categorias, nós obtemos esquemas e ou tabelas que revelam uma articulação que servirá de base à interpretação teórica do material. Depois, partimos para interpretar as tabelas e ou esquemas.

Segundo Biembengut (2008):

A interpretação e a avaliação dos entes ou fenômenos de uma pesquisa dependem essencialmente do conhecimento do pesquisador sobre a teoria que sustenta o tema em questão, da percepção e da compreensão dos entes ou dados levantados, do discernimento e da inteligibilidade entre uma teoria e uma vivência em certo contexto. É mediante a interpretação e a avaliação que os entes da pesquisa são integrados e os fenômenos explicitados ou aclarados sob uma determinada estrutura assegurada pela ciência educacional; e uma predição será possível. (p.120)

Estamos cientes de que o acento particular de cada pesquisador é uma questão de analogia, de intercâmbio entre os dados, da forma harmônica com que se apresentam estes dados e assinala os elementos da combinação, do contexto, das diferentes notações, conforme indica Biembengut (2008). Assim, poderíamos ter feito outras escolhas metodológicas para esta pesquisa, e, provavelmente, outro pesquisador assim o faça, porém esse foi o caminho que pensamos ser mais pertinente aos nossos objetivos.

## CONSIDERAÇÕES

Neste capítulo, apresentamos a metodologia de pesquisa utilizada segundo nossos objetivos gerais: conhecer e entender os delineamentos, os estacionamentos, as

velocidades, as acelerações, os enfoques, as dimensões espaciais e temporais, as categorias que podem emergir, as inter-relações, as variáveis, fazendo uma espécie de mapeamento das pesquisas relacionadas ao ensino e à aprendizagem de inequações. Em outras palavras, realizar um estado da arte sobre o ensino e a aprendizagem de inequações.

Por tratar-se de uma investigação que usa métodos mistos na análise das mensagens emitidas pelos autores das publicações inventariadas, resolvemos caracterizar a análise qualitativa, a quantitativa e a de conteúdo. Assim, tecemos um “tapete” que propicie subsídios para seguimos caminhando.

## CAPÍTULO 3

---

### METODOLOGIA DE COLETA DE DADOS

Neste capítulo, destacamos os procedimentos de buscas documentais para a formação do *corpus*. É notório que a primeira etapa do trabalho ocorre com a pesquisa bibliográfica exploratória e com os primeiros contatos com pessoas que influenciam a demarcação do ponto a ser pesquisado. Após algumas leituras, ainda que breves e superficiais, define-se que o estudo será sobre algum tema. Feito isso, inicia-se a pesquisa propriamente dita. Tudo que será realizado ou que já aconteceu deve constar de experimentos confirmáveis por terceiros, por meio da reprodução dos métodos e das técnicas utilizadas pelo pesquisador. Pelo fato de nossa investigação ser bibliográfica, nossa fonte de dados é a literatura existente sobre o assunto, então, após breve contato com trabalhos publicados, aprofundamos e refinamos nossa coleta de dados. À medida que tínhamos contato com os trabalhos, a busca tornava-se mais direcionada e vice-versa, caracterizada por constante ir e vir, até acharmos que o número e os tipos de trabalhos selecionados eram suficientes para sacarmos os dados que nos propusemos inventariar e analisar. Além disso, as publicações começaram a repetir-se, então foi o momento de pararmos com as buscas e concentrarmos-nos nas leituras e nas releituras.

Depois disso, observamos que pouco está exposto na literatura sobre os procedimentos de coleta de informação em uma investigação do tipo bibliográfica ou “histórico-bibliográfica”, nomenclatura utilizada por Fiorentini e Lorenzato (2007). Assim, optamos por um capítulo dedicado a apresentar nossos procedimentos de levantamento e redução do material a ser inventariado. O fato de nosso trabalho ser bibliográfico do tipo estado da arte torna importante explicitarmos como procedemos no nosso ambiente de pesquisa para a coleta de dados. Em concordância com Appolinário (2009), sabemos que:

Normalmente, as pesquisas possuem duas categorias de estratégias de coleta de dados: a primeira refere-se ao local onde os dados são coletados (estratégia-local) e, neste item, há duas possibilidades:

campo ou laboratório. [...] A segunda estratégia refere-se à fonte dos dados: documental ou campo. Sempre que uma pesquisa se utiliza apenas de fontes documentais (livros, revistas, documentos legais, arquivos em mídia eletrônica), diz-se que a pesquisa possui estratégia documental [...] (APPOLINÁRIO, 2009, p. 85).

Dessa forma, expomos nosso processo de busca e seleção. Inicialmente, elencamos os *sites* de pesquisas onde fizemos as buscas (cf. Tab. 01). Notemos que a quantidade de possibilidades é grande, o que gera maior demanda de tempo e paciência. No 1º nível de combinação, está o conjunto de palavras utilizadas, como: *inequação*, *ensino*, *aprendizagem*. Na verdade, pode ser o nome parcial ou completo de um artigo ou de um autor, e podemos utilizar somente uma palavra como inequação, mas, na média, contabilizamos 3. Para proceder à pesquisa em locais, como CAPES e PROQUEST, a combinação inicial para o primeiro *site* foi a área de pesquisa, e, depois, utilizamos, em média, 3 tipos de palavras. Para o segundo, o tipo de palavra esteve na quarta combinação. A tabela 1 ilustra as inúmeras possibilidades de pesquisa, somente utilizando um tipo de provedor, como o Mozilla Fire Fox. É possível concluir que a quantidade de combinações é grande, e isso possibilita escapar algum trabalho.



Tabela 1: Dados sobre as possibilidades de busca nos sites indicados

Para a primeira identificação, utilizamos os *sites* comuns de busca, como Google ([www.google.com.br](http://www.google.com.br)) e Cadê (<http://cade.search.yahoo.com/>). Em paralelo, consultamos, presencialmente, nas bibliotecas, as revistas científicas e as de divulgação científica. O último tipo, divulgação científica, é um periódico acerca da ciência, editado e escrito, em sua maior parte, por jornalistas e educadores e não necessariamente por cientistas. Sabendo que muito do conhecimento científico é veiculado pela grande rede, Internet, porém, nem sempre confiável, direcionamo-nos pela pesquisa em periódicos científicos ou por meios que nos pudessem levar a eles.

Não esquecendo que a ciência é, sobretudo, uma constituição social e que a produção do conhecimento científico se dá por meio de intensa cooperação entre os vários pesquisadores de cada área específica, colocamo-nos em contato com alguns membros dessa comunidade, por *e-mail* e, às vezes, pessoalmente, em eventos científicos, que foram outra fonte de nossas procuras. Relacionamos eventos internacionais proeminentes e alguns nacionais, delimitando nosso escopo, e tivemos acesso às publicações desses eventos. Nesse meio, também, tivemos acesso a dissertações e teses que versavam sobre o assunto.

Destacamos que o acesso ao material de pesquisa pode ser limitado para a realização do estado da arte. Quando as teses e as dissertações não são publicadas em forma de livros e só estão disponíveis nas bibliotecas dos programas de pós-graduação, é preciso recorrer ao sistema COMUT. No nosso caso, contatamos os autores quando se fez necessário.

A consulta presencial em bibliotecas pode ser inviável pela dimensão territorial brasileira e internacional, e, pelo sistema COMUT, o processo é oneroso e moroso, o que torna limitado e difícil o acesso às pesquisas. Obter artigos de periódicos apresenta dificuldades idênticas, pois os sistemas de comutação não são plenos, e os *sites* de busca que possuem acervo eletrônico são recentes. Isso dificulta mais o acesso a publicações antigas.

Durante a realização do estudo, principalmente para o estabelecimento de categorias, é importante a consulta a outros trabalhos semelhantes, de modo a não somente aproximar e adaptar as categorias com outras, mas também fomentar mais segurança na exposição de fatos e argumentação. Este procedimento assume importância na medida em que contribui também para indicar as tendências das

pesquisas de determinada área de conhecimento. Dessa forma, descartamos alguns trabalhos sem conotação de pesquisa sistemática, para a formação do nosso *corpus*.

O fato de tais estudos terem sido descartados dos documentos desta pesquisa, de maneira alguma, apresenta a discussão do mérito acadêmico e metodológico deles. Do mesmo modo, não afirmamos que o teor dos estudos não possa vir a constituir fonte bibliográfica e subsídio para processos educacionais e científicos na área de educação matemática. Todos os documentos selecionados foram lidos e analisados: dissertações, livros didáticos, artigos não científicos e outros que serviram de pano de fundo para nossas análises.

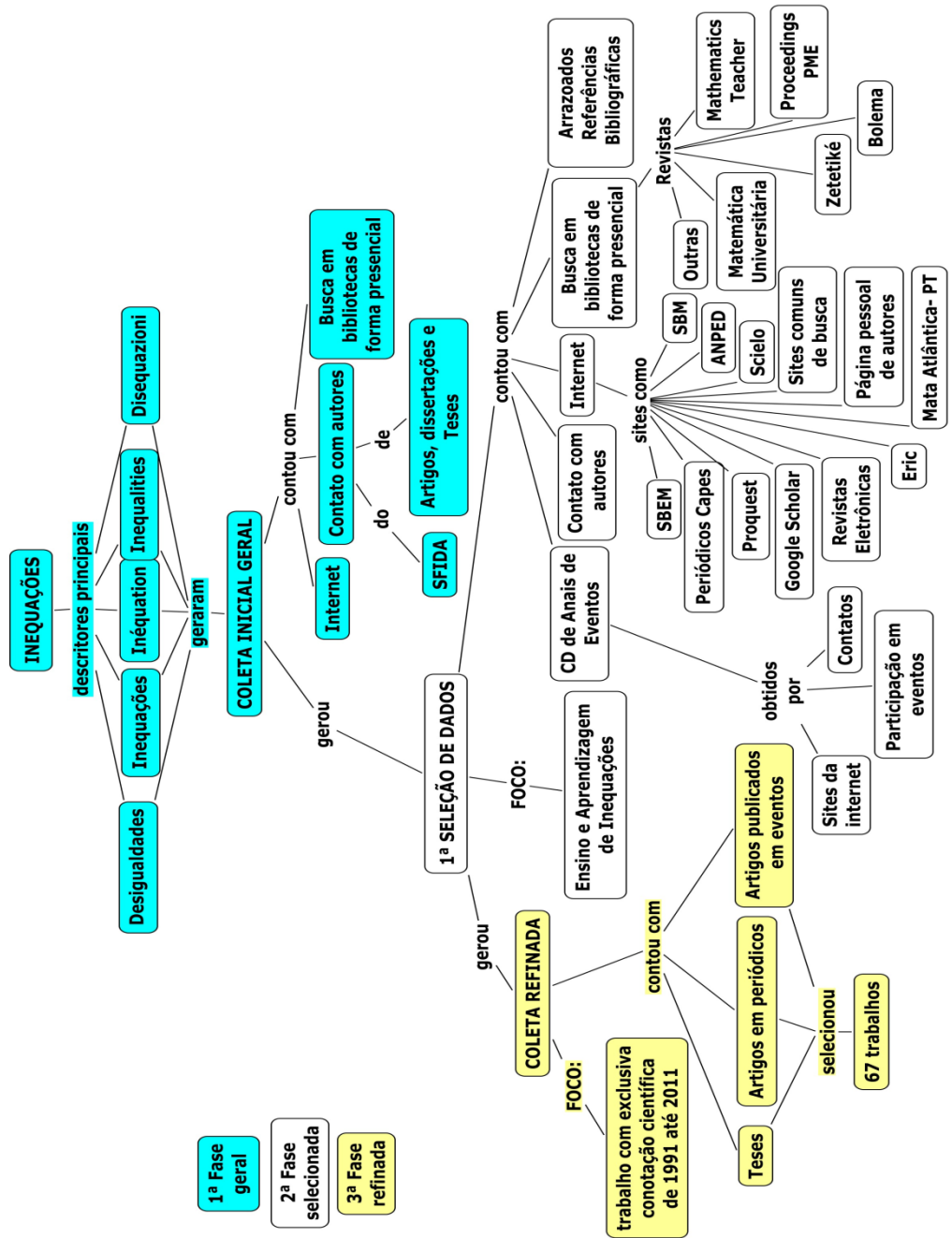
Assumimos a pesquisa científica no sentido apresentado por Kilpatrick (1992):

O termo *indagação* sugere que o trabalho esteja direcionado para responder a uma questão específica; isso não significa uma especulação ou ciência para uma causa própria. O termo *disciplinado* não apenas sugere que a investigação pode ser guiada por conceitos e métodos de disciplinas, tais como, a psicologia, a história, a filosofia ou a antropologia mas também que esta possa ser exibida e explicitada de maneira que a linha de inquérito possa ser examinada e verificada. A *indagação disciplinada* não necessita ser “científica” no sentido de estar embasada empiricamente na testagem das hipóteses, mas como qualquer bom trabalho científico precisa ser acadêmico, público e aberto à crítica e à possível refutação. Pesquisa em educação matemática, então, é uma *indagação disciplinada* sobre o ensino e a aprendizagem de matemática (KILPATRICK, 1992, p.3, tradução nossa).

Cabe esclarecer que optamos por excluir do nosso *corpus* as dissertações, pois entendemos que o doutoramento busca o aprofundamento intenso em determinado campo do saber, enquanto o trabalho de mestrado pode ser um estudo pontual para o qual não se exige o ineditismo. Assim, procuramos explicitar, de forma detalhada, nosso roteiro não linear de coleta de dados (cf. Fig. 17). Ele ocorreu em três fases: geral, selecionada e refinada. A *geral* foi de forma aleatória, porém restrita aos descritores no plural e no singular: *inequações*, *inequalities*, *desigualdades*, *disequazioni* e *inéquation*, perfazendo o total de 10. A *selecionada* restringiu-se ao nosso enfoque propriamente, isto é, ao ensino e à aprendizagem de inequações. A fase *refinada* foi direcionada por trabalhos estritamente com recorte científico: periódicos, eventos e teses entre 1991 e 2011 (cf. Fig. 17). Porém, os principais descritores foram os 10 relacionados anteriormente, mas não nos baseamos somente neles, pois, à medida que a investigação avançava, procurávamos por autor e por título, com o intuito de sermos minuciosos. Aliás, autor e título serviram de referências norteadoras para a elaboração das primeiras

categorias. Apresentamos os locais de busca, e alguns foram ilustrados com a finalidade de evidenciar as formas de apresentação dos *sites*. Dividimos a exposição em *sites* de busca, bibliotecas acadêmicas e revistas. Poderíamos ter optado por uma apresentação norteada pelas fases, mas elas não tiveram um limite demarcatório nítido. A coleta de dados ocorreu até dezembro de 2011.

Figura 17 - Mapa conceitual da coleta de dados



## **SITES DE BUSCA**

Ao apresentar os *sites* de busca e ilustrar alguns, objetivamos explicar o nosso contato com esse tipo de coleta. Iniciamos pelo mais popular e geral e fomos-nos direcionando pelos objetivos da pesquisa, isto é, começando do mais abrangente e refinando, até chegar a *sites* especializados em periódicos científicos. Com o intuito de conduzir o leitor pelos caminhos de nossas buscas, apresentamos algumas restrições relacionadas especificamente às línguas, ao plural e ou ao singular.

### **GOOGLE, CADÊ, ASK**

O Google hospeda e desenvolve uma série de serviços e produtos baseados na internet e gera lucro, principalmente, por meio da publicidade pelo *AdWords*. O rápido crescimento do Google desde sua incorporação culminou em uma cadeia de outros produtos, aquisições e parcerias que vão além do núcleo inicial como motor de buscas.

Muito antes das tecnologias utilizadas pelo Google ou pelo Yahoo, o Cadê foi um marco na internet brasileira. Depois que foi comprado pelo Yahoo, virou mais uma porta de entrada. É uma plataforma de lançamento para novas tecnologias de busca no Brasil. O Ask.com é um complemento gratuito para navegadores, que permite realizar uma busca na Web, diretamente dos navegadores Internet Explorer e Firefox.

Por meio desses *sites*, inicialmente, não encontramos nada em relação ao nosso tema, pois, empregando a palavra *inequações*, obtivemos como efeito métodos de resolução de uma inequação e de forma ampla, hospedados em páginas de cursinhos pré-vestibulares. Encontramos decorrências similares, utilizando a língua francesa e a italiana e, por meio do inglês, localizamos textos que se referiam às desigualdades sociais, fato que se repetiu em espanhol. Após a pesquisa ter avançado, fizemos buscas por meio de outros descritores que variavam muito, como ensino e aprendizagem de inequações, nome de autores já conhecidos, entre outros. Dessa forma, localizamos vários trabalhos, mas alguns começaram a repetir-se.

### **PERIÓDICOS DA CAPES**

O Portal de Periódicos surgiu em 1990, com o objetivo de fortalecer a pós-graduação no Brasil, e o número de títulos com texto completo passou de 1.882 periódicos, em 2001, para 26.372, em 2010. Tem mais de 130 bases referenciais, dez bases dedicadas exclusivamente a patentes, além de livros, enciclopédias e obras de referência, normas técnicas, estatísticas e conteúdo audiovisual. A quantidade de instituições participantes também evoluiu. Assim, tem-se consolidado como uma das maiores bibliotecas virtuais do mundo, tornando acessíveis conteúdos essenciais para a pós-graduação e a pesquisa brasileira. É possível realizar a busca simplificada, porém necessitamos explicitar a área de conhecimento. Buscamos, por meio de duas áreas, Multidisciplinar e Área de Ciências Humanas e Sociais, e com subárea, variando entre as opções Todas as Bases (cf. Fig.18) e Educação e Ensino de Ciências e Matemática. Cabe uma observação: para ter acesso total ao portal da CAPES, é necessária uma licença institucional, obtida por meio de algum vínculo a uma instituição cadastrada.

The screenshot displays the search interface of the CAPES Periodicals Portal. At the top, there is a header with the CAPES logo and navigation links such as 'MAPA DO SITE', 'FALE CONOSCO', 'MEU ESPAÇO', 'TAMANHO', and 'CONTRASTE'. Below the header, there is a navigation bar with options like 'PÁGINA INICIAL', 'INSTITUCIONAL', 'ACERVO', 'BUSCA', 'NOTÍCIAS', and 'SUPPORTE'. The main content area shows the search results for the term 'inqualities'. The search is performed using the 'Busca Simplificada' option. The search results are filtered by the area of knowledge 'Ciências Humanas' and the sub-area 'Todas as bases desta área do conhecimento'. A table of search results is displayed, showing the name of the base, its type, and the number of results. The table includes the following entries:

Nome da base	Tipo	Ações
<input type="checkbox"/> Google Scholar	Ferramenta de Busca	<a href="#">↑</a> <a href="#">+</a> <a href="#">-</a>
<input checked="" type="checkbox"/> Japan Science and Technology Information Aggregator Electronic : J-STAGE	Referenciais com resumos	<a href="#">↑</a> <a href="#">+</a> <a href="#">-</a>

Figura 18 - Exemplo da busca pelo portal de periódicos CAPES

Fonte: [http://www.periodicos.capes.gov.br.ez20.periodicos.capes.gov.br/index.php?option=com\\_phome](http://www.periodicos.capes.gov.br.ez20.periodicos.capes.gov.br/index.php?option=com_phome)

É válido observar que podemos pesquisar por meio de vários tipos de navegadores, como Internet Explorer, Google Chrome ou Mozilla Fire Fox, e os resultados das buscas podem alterar-se segundo o navegador. O Windows Internet

Explorer é um navegador de licença proprietária, produzido, inicialmente, pela Microsoft em 1995, ou seja, é um componente integrado com a Microsoft. O Google patrocina o Mozilla Firefox, um navegador desenvolvido pela Fundação Mozilla. Pelo *site* Wikipédia, é o mais jovem dos grandes navegadores para Internet, lançado em 2008 e utilizado pelas universidades. Em nossas pesquisas, utilizamos o Internet Explorer e o Mozilla.

Com o propósito de sermos o mais claro possível quanto à dimensão das buscas, citamos alguns exemplos segundo considerações de cunho restritivo quanto à metodologia de coleta empregada neste trabalho. Assim, no periódico da CAPES, apresentamos resultados por meio de buscas em várias línguas, utilizando o plural e o singular da palavra *inequações*:

- Em português, plural e singular - localizamos alguns trabalhos, porém sem a relação com o ensino e a aprendizagem de inequações.
- Em inglês, plural e singular - 40 registros, em média, foram localizados, porém relacionados à Matemática Pura e Aplicada (MPA) e à desigualdade social, incluindo alguns em espanhol.
- Em espanhol, plural e singular – os que encontramos já tinham sido apresentados na busca em português, porém sem relação com o nosso tema.
- Em italiano, plural e singular - por esses descritores, não localizamos trabalhos.
- Em francês, plural e singular - localizamos 21 registros nas áreas de MPA e 1 registro na área de ensino de Ciências e Matemática.

Analizamos outra subárea, educação e ensino de ciências e matemática, que, pelo Mozilla FireFox, não aparecem, mas, na mesma área de conhecimento, Ciências Sociais e Humanas, e pelo mesmo provedor, Explorer, por meio de busca simples e avançada, variando os conectivos, e os resultados foram similares: muitos trabalhos na área de MPA e alguns na área de desigualdades sociais.

### **ProQuest**

Esse banco de dados permite-nos acesso a inúmeros outros de dados diferentes e é um dos maiores repositórios do mundo de conteúdos *on-line*. Porém, só é possível

acessá-lo por meio de computadores autorizados, que estão em algumas bibliotecas acadêmicas (cf. Fig. 19). É um recurso de base de dados eletrônicos com milhões de artigos originalmente publicados em revistas, jornais e publicações científicas e fornece métodos detalhados de pesquisas, para ajudar a encontrar os artigos que procuramos, podendo ser por Pesquisa Básica, Avançada e Pesquisa de Publicações.

Posteriormente, ao efetuar uma pesquisa, surge a página *Resultados de Pesquisa*, com uma lista de todos os documentos que correspondem às palavras que foram digitadas. Podemos usar esse ambiente, para rever a lista de artigos que satisfaçam nossos interesses. A seguir, quando encontramos um artigo que pretendemos ler, podemos clicar o título (ou o formato do ícone adequado), para visualizá-lo. Para isso, basta usar a página *Visualização do Artigo*. Enquanto trabalhamos, podemos guardar os artigos desejados juntamente com as pesquisas que não pretendemos esquecer nos *Itens Marcados*. Podemos fazer a busca por meio de regiões, e existem várias combinações a ser utilizadas, a fim de maximizar a possibilidade de localizar uma publicação. Podemos observar o ícone que permite a escolha no lado superior direito da tela, no exemplo da figura 19, no caso, América Latina. Por esse meio, encontramos pouquíssimos trabalhos diferentes dos já encontrados anteriormente, mesmo utilizando várias combinações entre os descritores.

The screenshot shows the ProQuest website interface in Portuguese. At the top, there is a navigation bar with the ProQuest logo and a 'Regions' dropdown menu set to 'América Latina'. Below this is a secondary navigation bar with links for 'Home', 'Universidades', 'Bibliotecas Públicas', 'Governo', 'Empresas', 'Escolas', and 'Hospitais'. A third navigation bar contains 'Sala de Imprensa', 'Eventos', 'Suporte', 'Treinamento de Produtos', and 'Fale Conosco'. The main content area features a search bar on the left with a 'Selecionar Assunto' dropdown menu. The central text reads 'ProQuest Education Journals' and describes the collection as growing and providing full texts, indices, and summaries. It lists various subjects: Ensino de adultos, Ensino superior, Ensino doméstico, Educação primária e secundária, Ensino para pessoas com necessidades especiais, Ensino especializado de artes, esportes, negócios, ciências etc., and Assuntos relacionados, tais como financiamento governamental, comunicações na sala de aula, aconselhamento e políticas sociais. On the right, there are options to 'Print This Page' and 'Download in .txt Format', along with a 'QUICK STATS' section showing 'Formats: Resumo e Texto Completo', 'Media: On-line', 'Coverage: 1991 - presente', and 'Total Sources Covered:'.

Figura 19: Exemplo da página em português do ProQuest, região América Latina  
 Fonte: <http://www.proquest.com.br/>

## Google Scholar

O Google Acadêmico (cf. Fig.20) fornece uma maneira simples de pesquisar a literatura acadêmica de forma abrangente. É possível pesquisar várias disciplinas e fontes em um só lugar: artigos revisados por especialistas (*peer-reviewed*), teses, livros, resumos e artigos de editoras acadêmicas, organizações profissionais, bibliotecas de pré-publicações, universidades e outras entidades acadêmicas. Este *site* ajuda a identificar as pesquisas “mais relevantes do mundo acadêmico” (retirado de <http://scholar.google.com.br/intl/pt-BR/scholar/about.html>).

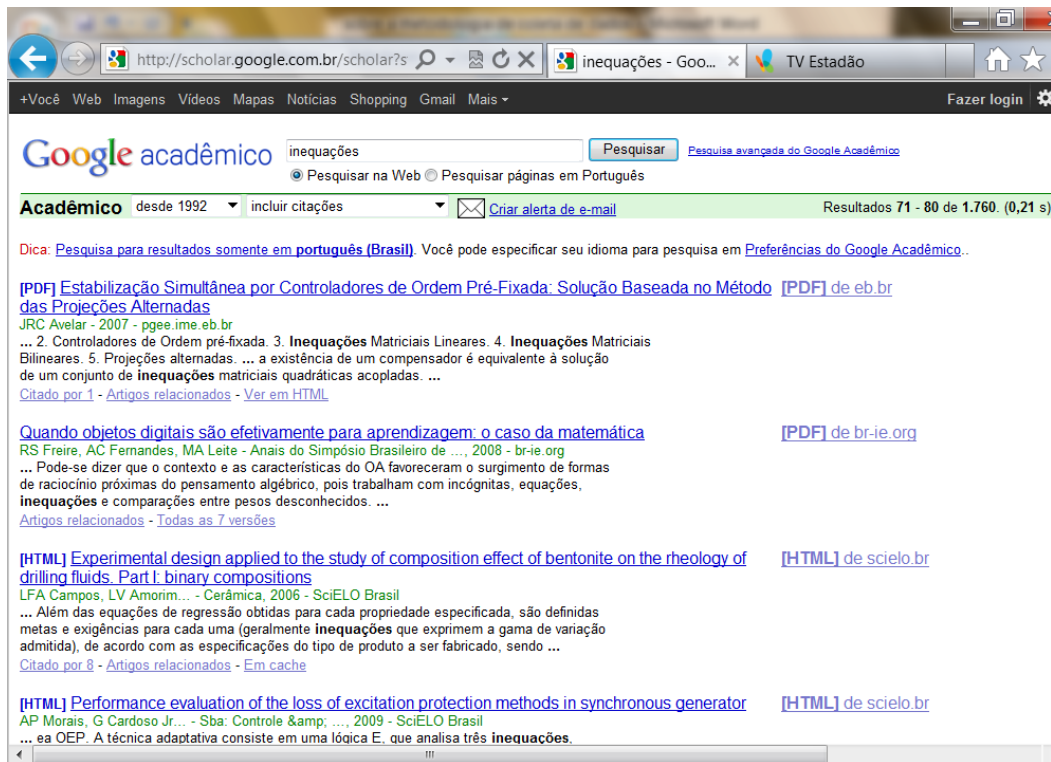


Figura 20 – Exemplo da busca no Google Scholar, realizada pelo descritor *inequações*  
 Fonte: <http://scholar.google.com>

Ao levantamos, nesse *site*, trabalhos sobre o nosso tema, obtivemos os resultados em:

- Português - encontramos dissertações de mestrado e um artigo publicado na REVEMAT e outro na *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*. A partir da 3ª página, não localizamos nada na área de ensino.
- Inglês - o aparecimento de inúmeros locais de pesquisas levou-nos a analisar somente algumas páginas, pois seria pouco produtivo ir até o final dos 432.000 resultados de busca, e a maioria analisada tratava-se da área de ciências sociais e MPA.
- Espanhol - observamos que a maioria dos sítios que apareciam tratava de desigualdades sociais.
- Italiano - encontramos um trabalho do nosso interesse, como *Equazioni e disequazioni dalla storia alla didattica della matematica*. Os outros trabalhos encontrados tratavam de livros, de MPA ou de materiais didáticos.

- Francês - localizamos o artigo *Détermination automatique des théorèmes- acte des élèves en algèbre. Le cas des équations et inéquations de degré 1*, cujos autores são Hamid Chaachoua, Jean-François Nicaud, Marilena Bittar. Limitamos-nos, da mesma forma que anteriormente, a analisar as 4 primeiras páginas de resultados. Encontramos várias páginas que tratavam de MPA e alguns materiais didáticos para a educação básica.

## ERIC – EDUCATIONAL RESEARCH INFORMATION CENTER

O ERIC fornece acesso ilimitado a mais de 1,4 milhão de registros bibliográficos de artigos de jornais e de outros materiais relacionados à educação. Semanalmente, são adicionadas centenas de novos registros. Se disponíveis, as ligações ao texto completo são incluídas. Na coleção do ERIC, podemos encontrar registros de: artigos de jornais, livros, sínteses da pesquisa, *papers* de conferências, relatórios técnicos, *papers* de política e outros materiais relacionados à educação. A procura pode ser pelo título ou por outros descritores disponíveis (cf. Fig. 21). Ressaltamos que esse foi um dos bancos de dados em que mais encontramos publicações sobre o nosso tema. No *site* do *International Group of Psychology Mathematics Education - IGPME*, encontramos uma relação de trabalhos elencados segundo seus números nesse banco de dados. Assim, é mais fácil localizar tais publicações.

The screenshot shows the ERIC website interface. At the top, the ERIC logo and navigation links are visible. The main content area displays the search results for a query. The search criteria are shown as: ((Title: inequa...)) and (Keywords: inequa...) and (Keywords: desigualdades)). The search results section indicates that no records were found. The interface includes options for sorting by relevance, showing results per page, and narrowing the search. There are also links for back to search, new search, RSS feed, and share this search.

Figura 21 - Exemplo da busca pelo ERIC

Fonte: <http://www.eric.ed.gov/>

Com o intuito de expor o nosso roteiro não linear de coleta de dados, exemplificamos alguns tipos de combinações realizadas nesse ambiente:

- Em inglês, detectamos 260 trabalhos, porém a maioria com foco em desigualdades sociais. Com relação ao ensino e à aprendizagem de inequação, localizamos alguns que ou eram um livro, ou se tratavam de uma abordagem didático-metodológica de ensino;
- Em espanhol, francês e italiano, também não foram encontrados registros sobre o assunto de nossa investigação.

### **SciELO**

O SciELO - Scientific Electronic Library Online (Biblioteca Científica Eletrônica em Linha) é um modelo para a publicação eletrônica cooperativa de periódicos científicos na Internet, para atender, principalmente, às demandas da comunicação científica dos países em desenvolvimento e, particularmente, da América Latina e do Caribe. Proporciona uma solução eficiente para assegurar a visibilidade e o acesso universal a sua literatura científica, contribuindo para a superação do fenômeno conhecido como *ciência perdida*. O modelo SciELO contém procedimentos integrados, para medir o uso e o impacto dos periódicos científicos e é fruto da cooperação entre a FAPESP (<http://www.fapesp.br>) - Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo, o BIREME (<http://www.bireme.br>) - Centro Latino-Americano e do Caribe de Informação em Ciências da Saúde e as instituições nacionais e internacionais relacionadas à comunicação científica e aos editores científicos. Podemos pesquisar de forma regional, atendo-nos a investigar em regiões selecionadas. (cf. Fig. 22)



Figura 22 - Um dos resultados encontrados, utilizando a palavra *desigualdades*, com pesquisa regional. A palavra *desigualdade* aparece na penúltima linha do resumo em português.

Fonte: <http://www.scielo.org/php/index.php>

Por tratar-se de uma parceria entre o Brasil e os países latinos, fizemos a busca, principalmente, em português e espanhol, pois, em inglês, tivemos como resultado vários trabalhos também nessas línguas. Iniciamos com a palavra *desigualdade* e obtivemos 1276 títulos, porém, até a 10ª página analisada, encontramos, apenas, assuntos relacionados às Ciências Sociais. A pesquisa por meio da palavra *inequações* não apresentou resultados nem em outras línguas.

Analisamos outras páginas, como a da ANPED, e localizamos alguns trabalhos, mas não diretamente relacionados ao nosso tema. O único que podemos considerar pertencente a nosso grupo de fonte não foi incluído em nosso *corpus*, tendo em vista que estávamos encerrando as análises, quando foi localizado o seguinte estudo: *As variáveis visuais na coordenação de registros de representação: um estudo sobre inequações a partir da comparação de funções*. (MARIANI; SILVA, 2006)

## BIBLIOTECAS ACADÊMICAS

Um dos maiores acontecimentos na Idade Média, que, de certa forma, influenciou os destinos da civilização e, por consequência, os destinos dos livros, é a fundação das universidades. Nelas, localizam-se as bibliotecas acadêmicas que estão a serviço, principalmente, de estudantes e acadêmicos. Elas correspondem à unidade de informação de uma universidade, pois as suas coleções devem refletir as matérias

lecionadas nos cursos e nas áreas de investigação da instituição. A documentação é, sobretudo, de caráter científico e técnico e deve ser permanentemente atualizada mediante a aquisição frequente de grande número de publicações periódicas em suporte papel ou eletrônico. Estas instituições têm como objetivos principais: apoiar o ensino e a investigação; dar um tratamento técnico aprofundado aos documentos, nomeadamente ao nível da indexação; atualizar, constantemente, os fundos documentais.

Com o objetivo de socializar a ciência e os resultados de pesquisas, as bibliotecas acadêmicas disponibilizam informações por meio do seu acervo e são uma fonte variada para nossa coleta de dados. Então, fizemos a busca nos catálogos e nos arquivos de dissertações e teses, de universidades que têm o doutorado em Educação Matemática e ou em Ensino de Ciências e Matemática. Concentramo-nos em doutorados com mais de quatro anos de funcionamento, por supormos que já tenham teses defendidas, porém incluímos alguns recentes com o intuito de apresentar mais uma fonte de busca em futuro próximo, além de dar confiabilidade à nossa extensão de busca. Iniciamos o processo por meio de consulta ao *site* da CAPES, na relação de doutorados reconhecidos<sup>26</sup>.

Novamente, a investigação ocorreu por meio do descritor *inequações*, por tratar-se de universidades brasileiras. Em última etapa de nossa coleta de dados, consultamos alguns *sites* de universidades estrangeiras, mas não obtivemos publicações. A maior dificuldade encontrada foi a localização de teses estrangeiras. O processo de busca foi, basicamente, por meio de análise das referências bibliográficas; depois, ou contactávamos o autor, ou as obtínhamos por meio de outras fontes, como as elencadas. Apesar de não fazer parte do nosso *corpus*, localizamos várias dissertações de mestrado que foram incluídas em nossas leituras, com o intuito de fomentar nossas argumentações e análises. Fizeram parte de nosso roteiro de investigação os seguintes programas:

## **EDUCAÇÃO MATEMÁTICA (UNESP – RIO CLARO E BAURU)**

*Área: Educação Matemática*

---

<sup>26</sup> Realizamos um levantamento na CAPES, por meio da direção: <http://conteudoweb.capes.gov.br/conteudoweb/ProjetoRelacaoCursosServlet?acao=pesquisarIes&codigoArea=90200000&descricaoArea=MULTIDISCIPLINAR+&descricaoAreaConhecimentos=ENSINO&descricaoAreaAvaliacao=ENSINO>.

A procura não foi pontual, isto é, somente no *site* do programa de pós-graduação em Educação Matemática, tendo em vista a possibilidade de existir algum trabalho sobre o nosso tema em outros *campi*. Então, analisamos vários acervos da Universidade Estadual de São Paulo e não encontramos registros de teses e dissertações sobre o assunto.

### **EDUCAÇÃO MATEMÁTICA (PUC-SP)**

*Área: Educação Matemática*

A busca no *site* divide-se em Mestrado Acadêmico, Mestrado Profissional e Doutorado. Neste caso, fizemos a busca diretamente no *site* do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. Encontramos, somente, 1 registro de tese e vários de dissertações<sup>27</sup>.

### **UNIVERSIDADE DE CAMPINAS (UNICAMP-SP)**

*Área: Multiunidades em Ensino de Ciências e Matemática*

Não encontramos um depósito de teses diretamente no *site* desse doutorado, mas encontramos algumas dissertações e teses na biblioteca digital, apesar de não relacionadas ao nosso assunto.

### **UNIVERSIDADE CRUZEIRO DO SUL (UNICSUL/SP)**

*Área: Ensino de Ciências e Matemática*

Obtivemos, por meio de nossa pesquisa, somente três teses defendidas, porém sem foco no assunto de nosso interesse.

### **UNIVERSIDADE BANDEIRANTE (UNIBAN-SP)**

*Área: Educação Matemática*

Foi localizada uma tese defendida em 2009 que não trata do tema em questão.

### **UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ (UFPA-PA)**

*Área: Educação em Ciências e Matemática*

---

<sup>27</sup> Tese: SOUZA, V. H. G. *O uso de vários registros na resolução de inequações - uma abordagem funcional gráfica*. 2008.

Iniciou-se em 2009 e não apresentou teses defendidas, por isso não há registro de dissertações na área de nosso interesse.

### **UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ (UEM-PR)**

*Área: Educação para a Ciência e a Matemática*

Não localizamos teses, mas dissertações sem interesse para nossa investigação.

### **UNIVERSIDADE ESTADUAL DE LONDRINA (UEL -PR)**

*Área: Ensino de Ciências e Educação Matemática*

Localizamos quatro trabalhos, mas nenhum na área de ensino e ou aprendizagem de inequações.

### **UNIVERSIDADE LUTERANA DO BRASIL (ULBRA-RS)**

*Área: Ensino de Ciências e Matemática*

A procura foi realizada por título, pelas palavras *inequações* e *desigualdades*, separadamente. Não encontramos registros, a não ser um livro e trabalhos na área de ciências sociais.

Além das consultas em bibliotecas eletrônicas, estivemos pessoalmente, nos acervos de bibliotecas, como a do Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), a da Universidade de São Paulo (USP), a da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP), a da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-RJ) e, à época, a da Universidade Santa Úrsula.

## **REVISTAS CIENTÍFICAS BRASILEIRAS**

Além de realizarmos um levantamento em bibliotecas, como a do IMPA, a da USP, a da PUC-SP e a da PUC-RJ, realizamos busca pelos *sites* das revistas, como as exemplificadas a seguir.

### **EDUCAÇÃO MATEMÁTICA PESQUISA (PUC - SP)**

Foram encontrados vários registros, como no exemplo indicado pela figura 23.

Figura 23: Exemplo de periódicos encontrados na revista publicada pela PUC-SP

Fonte: <http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/search/results>

Foram encontrados oito registros, porém os autores e os títulos eram os mesmos das dissertações e das teses já localizadas. Então, optamos pela leitura ampla e aprofundada que tais trabalhos acadêmicos nos proporcionam. Utilizamos, nessa busca, a palavra *inequações* em várias línguas.

### **ZETETIKÉ (FACULDADE DE EDUCAÇÃO - UNICAMP)**

Nenhum registro foi encontrado mesmo por meio de busca avançada, utilizando as expressões *inequações*, *inequação*, *desigualdades*.

### **BOLEMA (EDUCAÇÃO MATEMÁTICA - UNESP/RIO CLARO)**

Não encontramos nenhum registro.

### **REEMAT (UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA)**

Localizamos somente um registro, apesar de ter sido empregada a palavra *inequações* em várias línguas. (cf. Fig. 24)



Figura 24: Resultado parcial da busca na REVMAT  
 Fonte: <http://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/search/results>

Outras investigações foram realizadas em periódicos, como a *Revista do Professor de Matemática*, cujo principal objetivo é:

Publicar artigos de matéria de nível elementar ou avançado, que seja acessível ao professor do ensino médio e a alunos de cursos de Licenciatura em Matemática. Uma experiência interessante em sala de aula, um problema que suscita uma questão pouco conhecida, uma história que mereça ser contada ou até uma nova abordagem de um assunto conhecido. (retirado de [http://www.rpm.org.br/cms/index.php?option=com\\_content&view=article&id=72&Itemid=54](http://www.rpm.org.br/cms/index.php?option=com_content&view=article&id=72&Itemid=54), página inicial).

A *Educação Matemática Revista*, uma publicação da Sociedade Brasileira de Educação Matemática, também fez parte de nosso levantamento, porém não localizamos nenhum trabalho que se relacionasse ao nosso tema. Outro periódico do nosso acervo de pesquisa foi a *Revista Universitária*, uma publicação da SBM.

## REVISTAS CIENTÍFICAS ESTRANGEIRAS

A busca em revistas estrangeiras foi realizada por uma espécie de arrazoado, analisando, primeiramente, as referências bibliográficas dos artigos que eram

encontrados. Fizeram parte de nossas consultas algumas revistas americanas, mexicanas, espanholas, portuguesas, italianas e francesas, porém o principal direcionador foram as referências bibliográficas dos trabalhos que selecionávamos. Por meio delas, localizávamos as publicações que se relacionavam ao nosso tema e, em geral, analisamo-las pessoalmente, nas bibliotecas e em *sites* de pesquisa como ERIC, Periódicos da CAPES e outros. Na figura 25, temos um exemplo do ambiente *on-line* de uma revista portuguesa.



Figura 25: Exemplo de um tipo de procura no *site* de uma revista portuguesa  
 Fonte: <http://www.apm.pt/portal/em.php>

Analisamos revistas que versavam sobre procedimentos metodológicos de ensino de inequações encontradas em periódicos, como *Mathematics Teacher*, uma publicação do NCTM, sem fins específicos de publicar artigos científicos e *School Science and Mathematics*. Investigamos edição por edição de várias revistas e podemos apontar:

- *Educational Studies in Mathematics* – editada nos EUA
- *Rivista di Matematica della Universita di Parma* – editada na Itália
- *International Journal of Mathematics Education in Science and Technologies* – editada na Inglaterra
- *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate* – editora italiana

- *Recherches en Didactique des Mathematiques* – editora francesa
- *Focus on Learning Problems in Mathematics* – editorada nos EUA
- *Eurasia Journal of Mathematics* – editorada por um grupo de países europeus e asiáticos
- *Journal School Science and Mathematics* – revista estadunidense
- *Revista LatinoAmericana de Matematica Educativa* – revista mexicana
- *Journal of Research for Mathematics Education* – revista do NCTM/EUA
- *Revista Iberoamericana de Educación Matemática* – revista editorada pela Espanha

## CONSIDERAÇÕES

Com o objetivo de destacar a não linearidade da nossa coleta de dados e as interligações existentes entre várias fases e fontes de busca, esboçamos um mapa do procedimento de coleta (cf. Fig. 17). No início, as buscas foram feitas um tanto quanto sem direção, apenas concentradas na palavra-chave *inequações* e em alguns locais restritos. À medida que enveredávamos na investigação, amadurecíamos, e isso se refletia em nossas buscas, cada vez mais objetivas e diretivas. Além disso, o contato com as leituras fizeram emergir novos dados, categorias que nos impulsionavam a tentar colher mais dados, para certificarmos-nos ou descartarmos certas informações que obtínhamos pelas análises. Nosso procedimento de levantamento do material documental envolveu, também, como pode ser observado pelo mapa, contatos com autores, pesquisas em CD de eventos e ou anais e atas impressas.

Na verdade, em uma pesquisa dessa modalidade, mesmo depois de encerrada, existe a possibilidade de surgirem várias publicações interessantes que podem trazer elementos antes não percebidos, destacados e necessários para o aprofundamento do estado da arte. Porém, existe um momento em que acreditamos ser necessário encerrar as buscas, com o fito de concentrarmos-nos nas análises das publicações já selecionadas.

Por fim, salientamos que as possibilidades de tipos de procura são inúmeras, pois dependem de vários fatores, como: conectivos, busca simples e avançada, tipos de descritores, tipos de provedores de internet etc. De acordo com Severino (2007), “é preciso saber garimpar, sobretudo, dirigindo-se a endereços certos” (p.138). Procuramos

garimpar bastante, mas algum estudo importante para nossa investigação pode ter faltado.

## CAPÍTULO 4

---

### **TRATAMENTO DOS DADOS E ANÁLISE DA PRIMEIRA TABELA**

Neste capítulo, de caráter exploratório, apresentamos como o material inventariado foi abordado e organizado e os resultados da análise da primeira tabela, fundamentada somente nos dados bibliográficos. Essa etapa pode ter um recorte intuitivo, mas almeja tornar-se operacional e sistematizar as ideias iniciais, de forma a gerir um traçado conciso para as próximas etapas de análises. A depender do tratamento desse material, podem emergir características que nos permitam interpretar de modo mais ou menos preciso e que refletem na tomada de decisões, visando ao aproveitamento de reflexões sobre o tema, para melhoria do ensino e da aprendizagem da matemática.

O escopo principal de uma pesquisa é compreender um fenômeno, um acontecimento, a fim de, então, proceder à busca de meios, para descrever e prever. Tal descrição e entendimento acontecem no decurso da pesquisa, mas vale lembrar que a informação sempre chega filtrada pelo ponto de vista de outras pessoas, no nosso caso, de outros pesquisadores, e, assim, emerge a necessidade de complementar os dados com o contexto, para pisarmos em um terreno mais firme.

Iniciamos com a exploração e a descrição dos dados e prosseguimos por meio da exposição e da descrição das categorias e das subcategorias. Na sequência, exploramos tais elementos com o objetivo de ordenar, explicar e prever informações que nos permitam entender a movimentação das publicações, os enfoques e os fatores que emergem das análises.

#### **ORGANIZAÇÃO DOS DADOS**

Reiteramos que a primeira seleção ocorreu, ao priorizarmos artigos que tratavam de equações e inequações, além daqueles que versavam, de forma direta, sobre desigualdades e, em particular, inequação. Porém, alguns trabalhos sobre reflexões a respeito do ensino e da aprendizagem de álgebra também fizeram parte de nossas leituras, além de outras relacionadas a metodologia de pesquisa, livros didáticos, dissertações. A quantidade de trabalhos era grande, então concentramo-nos nos trabalhos cuja natureza revelava uma investigação sistemática, portanto, científica e acadêmica, e que buscava a solução de um problema caracterizado, principalmente, pelo conceito de inequação.

O *corpus* foi organizado em tabelas, e isso nos permitiu ter uma visão geral da literatura selecionada. Para Creswell (2010, p.61), “essa organização permite à pessoa compreender como o estudo proposto acrescenta, amplia ou reproduz as pesquisas já realizadas”. O principal objetivo de uma organização de dados é fornecer informações rápidas, de maneira sintética, das variáveis em estudo, permitindo uma leitura simples e uma interpretação precisa. A representação de um conjunto de dados em gráficos ou tabelas não acrescenta nenhuma nova informação a estes dados, mas organiza-os de tal modo que deixa certas conclusões visualmente evidentes. É possível, também, enxergar relações, convergências ou contradições entre as variáveis tabeladas.

Para fazer o levantamento quantitativo e a análise qualitativa, utilizamos recursos de busca do *Word*, como, *localizar* e *realce de leitura*, e *localizar* no Programa Adobe Reader - PDF. Realizamos uma tabulação (cf. Fig. 26), à medida que cada trabalho era selecionado, por categorias *a priori*.

	AUTOR	TÍTULO	TIPO DE PUBLICAÇÃO			Data	País
			Periódico	Evento	T.Acd.		
2	LINCHEVSKI ; SFARD	Rules without reasons as processes without objects – the case of equations and inequalities		PME XV 317- 324		1991	

Figura 26: Modelo da tabela com as categorias predefinidas

A primeira caracterização foi realizada, e isso nos permitiu separar os dados em três tabelas, segundo categorias *a priori* e subcategorias. Discutimos os resultados baseados somente nos dados bibliográficos do material inventariado, na tabela inicial. (cf. Quadro 1).

<b>Categorias</b>	<b>Subcategorias</b>
Autor(es)	-----
Títulos	Foco na aprendizagem, no tipo de abordagem
	Foco no ensino: currículo, didática, instrumentação, instrução
	Referenciais teóricos
	Relação entre equações e inequações
	Funções
	Tipos de inequações
	Epistemologia
	Pluridisciplinaridade
Tipo de publicação	Nível de escolaridade dos sujeitos de pesquisa
	Periódico
	Evento
Data da publicação	-----
País da editoração	-----
	Trabalho acadêmico

Quadro 1: Apresentação das categorias *a priori* e das subcategorias relacionadas somente aos dados bibliográficos dos trabalhos mapeados

Segundo Moraes (1999), na discussão da categorização, seu significado e os critérios de constituição de categorias, é importante lembrar que os dados podem ser agrupados em vários níveis. Quando isto ocorrer, os critérios devem ser aplicados em cada um dos níveis. As categorias resultantes do primeiro esforço de classificação, geralmente mais numerosas, homogêneas e precisas, podem ser denominadas de categorias iniciais ou *a priori*. As que provêm do reagrupamento progressivo, com homogeneidade mais fraca, em menor número e mais amplas, poderão ser denominadas de categorias intermediárias e finais. Nós denotamos por subcategorias aquelas que emergem de uma mais ampla, mais abrangente, mas que possui elementos que podem ser detalhados, unitarizados.

O mesmo autor destaca que a edificação da validade e das outras características das categorias de uma análise de conteúdo, especialmente numa análise qualitativa, advém ao longo de todo o processo. Categorias deliberadas *a priori* já devem atender aos critérios de classificação antecipadamente, isto é, antes de proceder à classificação propriamente dita do conteúdo. Categorias construídas do material inventariado exigem que o atendimento aos critérios de classificação incida no processo da análise. Os argumentos de validade, exaustividade, homogeneidade, exclusividade e objetividade precisam ser construídos ao longo da análise. A seguir, descrevemos as caracterizações das categorias da primeira tabela.

## AUTORES

Apresentamos os autores que, segundo nosso levantamento, mais publicaram sobre o assunto. Também, foi possível observar pela literatura inventariada se tais autores continuam a pesquisar sobre o tema ou não. O fato de não continuarem as pesquisas, ou melhor, de não publicarem mais pode significar que os problemas relacionados ao ensino e à aprendizagem de inequações elencados por eles já foram solucionados ou que houve mudança de interesse de pesquisa por motivos desconhecidos. Foram investigadas também suas nacionalidades e/ou o local de trabalho, a fim de entender o movimento das investigações.

## TÍTULOS

O título de um trabalho de pesquisa deve retratar clareza, concisão e abrangência, permitindo uma compreensão inicial da finalidade e da identificação do conteúdo, além de apresentar uma coerência entre ele e os objetivos. Então, as **palavras** expressadas e a frequência com que são usadas no *corpus* da pesquisa possibilitaram-nos inferir tendências, comportamentos, preferências, prioridades, crenças, causas, consequências. Assim, para subcategorizar os títulos, a **palavra** foi utilizada como uma unidade de registro. Foram diferenciadas e realçadas, na tabela (confira o modelo na figura 27), com cores diferenciadas, palavras ou expressões com características semelhantes e agrupamo-las de acordo com sua natureza. Por exemplo, na figura 27, estão realçadas, em vermelho, as palavras *without*, *missing*, *faibles*, pois entendemos ser da mesma natureza, isto é, relacionadas às dificuldades, aos erros e a seus sinônimos. Então, os títulos que as incluem foram classificados na categoria *Foco na aprendizagem, no tipo de abordagem* e contabilizados, igualmente, como *Dificuldades e sinônimos* (cf. Tab. 8).

AUTOR	TÍTULO
LINCHEVSKI SFARD	Rules <b>without</b> reasons as processes without objects – the case of equations and inequalities
SFARD LINCHEVSKI	Equations and Inequalities – process <b>without</b> objects?
SFARD LINCHEVSKI	Between Arithmetic and Algebra: In the search of a <b>missing</b> link the case of equation and Inequalities
ASSUDE	De l’usage de “techniques <b>faibles</b> ” et techniques fortes dans l’organisation Du curriculum

Figura 27: Exemplos de como as palavras foram destacadas

Dessa forma, os títulos foram classificados, baseados nas palavras expressas, em 9 subcategorias: *Foco na aprendizagem, no tipo de abordagem; Foco no ensino: currículo, didática, instrumentação, instrução; Referenciais teóricos; Relação entre equações e inequações; Funções; Tipos de inequações; Epistemologia; Pluridisciplinaridade; Nível de escolaridade dos sujeitos de pesquisa*. Assim, surgiu a necessidade, em alguns casos, de investigar, também, as expressões que vieram juntas com tais unidades das subcategorias, formando assim, o contexto.

## TIPO DE PUBLICAÇÃO

### *Periódicos*

Essa subcategoria ressalta periódicos do escopo literário que apresentaram publicações sobre esse tema.

### *Eventos*

Tal subcategoria buscou destacar os eventos em que o tema foi mais debatido e foi criada com o objetivo de situar as publicações, examinando quais os tipos de eventos e suas características. Os elementos destacados poderão dar suporte ao aprofundamento das interpretações.

### *Teses*

As teses são exemplos representativos e consistentes de um trabalho científico monográfico, logo foram inseridas no *corpus*. Objetivam apresentar e solucionar um problema, demonstrando hipóteses formuladas na evidência dos fatos e na coerência do raciocínio lógico.

Igualmente, exige-se da tese de doutorado contribuição suficientemente original a respeito do tema pesquisado. Ela deve representar um progresso para a área científica em que se situa e trazer validação para a área de Educação Matemática. Quaisquer que sejam as técnicas de pesquisa aplicadas, a tese visa argumentar e dar uma contribuição nova em relação ao tema abordado. Assim, algumas foram incluídas no nosso catálogo de publicações.

### **DATA DA PUBLICAÇÃO**

Ao examinarmos as datas, de maior e menor concentração de publicações sobre o tema, podemos buscar o porquê dessa concentração e o que isso tem acarretado no movimento das pesquisas, tanto no ensino e na aprendizagem de inequações quanto nos conteúdos correlatos.

### **PAÍS DA EDITORAÇÃO**

Com o intuito de aprofundar as análises, comparar categorias e extrair indícios de inter-relações, coletamos dados sobre os países onde foram editoradas as publicações. Porém, nem sempre é possível levantar esse tipo de informação, pois existem periódicos que são editados por um grupo de países, como é o caso do *Eurasia Journal of Mathematics*. Esse dado pode-nos fornecer o contexto e os caminhos da disseminação da temática.

### **RELAÇÃO ENTRE AS CATEGORIAS**

Depois de uma análise baseada não somente em categorizar, organizar e apresentar sistematicamente as publicações do *corpus*, mas também tornar aparentes os significados dessas categorias, evidenciar as relações entre as publicações, observar o movimento temporal e a intenção dos discursos apresentados nos títulos e nos temas, propusemos-nos a observar e analisar as afinidades entre as categorias. O princípio de exclusão mútua no processo de categorização orienta que o analista de conteúdo precisa assegurar cada elemento ser classificado em apenas uma categoria. O mesmo dado não pode ser incluído em mais de uma categoria, ou seja, cada elemento ou unidade de

conteúdo não pode fazer parte de mais de uma divisão. O que seria, então, essa relação entre as categorias? No nosso caso, usamos essa terminologia para evidenciar, quando assim for localizada, a influência de determinada categoria sobre outra, mesmo sendo disjuntas. Existe algum elemento de uma que pode refletir em outra? A predominância dos dados encontrados na análise baseada somente nos dados bibliográficos confere com os dados obtidos na investigação do interior, ou dos resumos, das publicações? A síntese que expressa o conjunto de significados presentes nas categorias elaboradas na primeira etapa tem alguma característica comum às outras de outras etapas? Por exemplo: o *nível de escolaridade dos participantes da pesquisa* pode, implicitamente, também, indicar-nos o *tipo de inequação* abordada na pesquisa?

## O MOVIMENTO DAS PRODUÇÕES

Conforme Ferreira (2002), existem dois momentos importantes de um trabalho do tipo *estado da arte*: o primeiro considera o movimento, a dinâmica da produção acadêmica; o segundo inclui as questões das tendências temáticas e dos enfoques teóricos das pesquisas, examinando as direções que estas pesquisas estão seguindo de acordo com a questão foco e a problemática abordada. Para essa autora:

Nesse esforço de ordenação de uma certa produção de conhecimento, também é possível perceber que as pesquisas crescem e se espessam ao longo do tempo; ampliam-se em saltos ou em movimentos contínuos; multiplicam-se, mudando os sujeitos e as forças envolvidas; diversificam-se os locais de produção, entrecruzam-se e transformam-se; desaparecem em algum tempo ou lugar.

Um segundo momento é aquele em que o pesquisador se pergunta sobre a possibilidade de inventariar essa produção, imaginando tendências, ênfases, escolhas metodológicas e teóricas, aproximando ou diferenciando trabalhos entre si, na escrita de uma história de uma determinada área do conhecimento. Aqui, ele deve buscar responder, além das perguntas “quando”, “onde” e “quem” produz pesquisas num determinado período e lugar, àquelas questões que se referem a “o quê” e “o como” dos trabalhos (FERREIRA, 2002, p.265).

A pré-análise indicou-nos variáveis a ser exploradas, isto é, *o que queremos e podemos* analisar e apontou-nos o *como* analisar. Assim, identificamos os “núcleos de sentido” (BARDIN, 2011) que compõem o material arrolado e cuja frequência e aparição podem significar alguma coisa para o objetivo analítico escolhido.

## RESULTADOS DA ANÁLISE DA PRIMEIRA TABELA

Depois de formar e organizar o *corpus* e delinear um caminho a seguir, trilhamos por ele com o intuito de entender a produção científica sobre o tema e encaminhar ou indicar outras possibilidades de produção. Neste capítulo, aprofundamos as análises; as categorias são exploradas, e as subcategorias surgem. Tentamos estabelecer uma didática de apresentação, seguindo um padrão: resultados, análises, inferências e indicativos para futuras investigações. Isso visa esclarecer nossas interpretações, e, se novas questões surgem, são explicitadas.

Os trabalhos foram organizados segundo categorias e tabelados em ordem cronológica, iniciando-se com um artigo de dois autores, dois israelenses e um escocês, de 1990/1991, e finalizando com trabalhos publicados nos *anais* do PME XXXV, em julho de 2011. Relembramos a organização da tabela, isto é, elencamos os autores na ordem em que aparecem nos artigos, o título, o tipo de publicação, periódico, evento, ou livro acadêmico, e, por fim, a data.

Os artigos de Linchevski e Sfard, do início da década de noventa, podem ter estimulado maior interesse sobre o tema, em países europeus, como Itália e França. Índícios desse fato são, por um lado, a publicação dessas autoras em *anais* de um seminário italiano,<sup>28</sup> de 1994, por outro, a partir de 1997, o registro de publicações, às vezes conjuntas, italianas, francesas e israelenses.

## AUTORES

Nesta categoria, apresentamos os autores, segundo nosso levantamento, que publicaram sobre o assunto. Também, foi possível observar pelo inventário se tais autores continuam a pesquisar sobre o tema ou não. O fato de não continuarem as pesquisas, ou melhor, de não publicarem mais, pode significar que os problemas relacionados ao ensino e à aprendizagem de inequações, elencados por eles já foram solucionados ou, então, que houve uma mudança de interesse de pesquisa por motivos desconhecidos. Além disso, foram investigadas suas nacionalidades e ou o local de

---

<sup>28</sup> Rendiconti Del Seminario Matematico - Università e Politecnico Di Torino

trabalho, a fim de entender a evolução das investigações. Nosso objetivo principal é compreender o caminho do movimento das pesquisas, da dinâmica dos autores e do espalhamento do tema, além de tentar respostas às perguntas “onde” e “quem” investiga o assunto em determinado período e lugar. Consideramos:

**UR:** nome dos autores;

**UC:** movimentação das pesquisas de cada autor; nacionalidade; local de trabalho; parcerias; efeitos da disseminação.

A análise foi realizada baseada não somente em categorização, organização e apresentação sistemática das publicações, mas também buscamos tornar aparentes os significados dessas categorias, evidenciar as inter-relações entre elas, observar o deslocamento temporal e a intenção dos discursos apresentados na temática, os efeitos dos trabalhos de alguns autores em relação a outros.

Não temos registros de publicações de Linchevski e Sfard sobre esse tema, depois de 1994, e, até então, elas publicaram 3 trabalhos, todos em parcerias, variando apenas a ordem dos nomes. Os autores que mais publicaram nessa linha foram a israelense Tsamir (16) e a italiana Bazzini com 19 artigos, já contabilizados os que foram em parceria (cf. Quadro 2). Notamos que o número de autores que tiveram somente uma publicação sobre a temática é alto, e isso pode significar que suas investigações não frutificaram em estudos a ser aprofundados sobre o tema (cf. Gráf. 1). Deste modo, ou o trabalho publicado, segundo os objetivos da investigação, aprofundou o suficiente, estagnando a possibilidade de novas pesquisas, ou houve uma mudança de temática. Porém, ressaltamos que mais da metade dos que tiveram duas publicações baseou-se em uma tese de doutorado e em um artigo relacionado à tese.

O quadro 02 apresenta duas colunas: uma de publicações em parceria e outra individuais. Na coluna de parcerias, sublinhamos o autor que está sendo contabilizado, por exemplo, em Sackur; Drouardy; Maurel; Pécal (97), quantificamos uma publicação para Drouardy e uma para Pécal. As de Sackur são contabilizadas na 27ª e 28ª linhas, e as de Maurel, nas 17ª, 18ª e 19ª.

Parcerias	Individuais
-----------	-------------

Sackur; <u>Drouardy</u> ; <u>Maurel</u> ; <u>Pécal</u> (97) <u>Chiappini</u> ; <u>Molinari</u> (98) <u>Gallo</u> ; <u>Battú</u> (98) <u>Bazzini</u> <u>Ascari</u> (99) <u>Malara</u> ; <u>Brandoli</u> ; <u>Fiori</u> (99) <u>Alvarenga</u> ; <u>Machado</u> (11) <u>Tsamir</u> ; <u>Tirosh</u> ; <u>Tiano</u> (04)	<u>Cortes</u> ; <u>Pfaff</u> (00) <u>Rivera</u> ; <u>Becker</u> (04) <u>Virikios</u> ; <u>Farmaki</u> (06) <u>Blanco</u> ; <u>Garrote</u> (07) <u>Alwyn P.</u> ; <u>Dindyal</u> (10) <u>Tsamir</u> ; <u>Reshef</u> (06) <u>Vaiyaavutjamai</u> ; <u>Clements</u> (06) <u>Roh</u> ; <u>Halani</u> (11)	<u>Weber</u> (98) <u>Kieran</u> (04) <u>Tall</u> (04) <u>Bagni</u> (05) <u>Radford</u> (04)	<u>Rowntree</u> (09) <u>Halmaghi</u> (10) <u>Beltrão R.</u> (10) <u>Borello</u> (10)
<u>Vaiyaavutjamai</u> ; <u>Clements</u> (06)		<u>Vaiyaavutjamai</u> (04)	
		<u>Assude</u> (97); <u>Assude</u> (02)	
<u>Tsamir</u> ; <u>Almog</u> ; <u>Tirosh</u> (98)	<u>Tsamir</u> ; <u>Tirosh</u> ; <u>Tiano</u> (04)		
		<u>Lim K.</u> (06a); <u>Lim K.</u> (06b)	
<u>Alvarenga</u> ; <u>Machado</u> (11)		<u>Alvarenga</u> (06); <u>Alvarenga</u> (03)	
<u>Tsamir</u> ; <u>Almog</u> ; <u>Tirosh</u> (98) <u>Tsamir</u> ; <u>Almog</u> (99)	<u>Tsamir</u> ; <u>Almog</u> (01)		
<u>Sackur</u> ; <u>Drouhard</u> ; <u>Maurel</u> ; <u>Pécal</u> (97)	<u>Sackur</u> ; <u>Maurel</u> (00) <u>Sackur</u> ; <u>Maurel</u> (98) <u>Sackur</u> ; <u>Maurel</u> (99)		
<u>De Souza</u> ; <u>Campos</u> (08)	<u>Campos</u> ; <u>De Souza</u> (08)	<u>De Souza</u> (08)	
<u>Tsamir</u> ; <u>Almog</u> (99) <u>Tsamir</u> ; <u>Almog</u> (01)	<u>Tsamir</u> ; <u>Almog</u> ; <u>Tirosh</u> (98)		
<u>Linchevski</u> ; <u>Sfard</u> (91) <u>Sfard</u> ; <u>Linchevski</u> (92)	<u>Sfard</u> ; <u>Linchevski</u> (94)		
<u>Boero</u> ; <u>Garuti</u> (99) <u>Boero</u> ; <u>Bazzini</u> ; <u>Garuti</u> (01)	<u>Bazzini</u> ; <u>Boero</u> ; <u>Garuti</u> (01a) <u>Bazzini</u> ; <u>Boero</u> ; <u>Garuti</u> (01b)	<u>Garuti</u> (01)	
<u>Sackur</u> ; <u>Drouhard</u> ; <u>Maurel</u> ; <u>Pécal</u> (97)	<u>Sackur</u> ; <u>Maurel</u> (00) <u>Sackur</u> ; <u>Maurel</u> (98)	<u>Sackur</u> (04)	
<u>Boero</u> ; <u>Garuti</u> (99) <u>Boero</u> ; <u>Bazzini</u> ; <u>Garuti</u> (01)	<u>Bazzini</u> ; <u>Boero</u> ; <u>Garuti</u> (01a) <u>Bazzini</u> ; <u>Boero</u> ; <u>Garuti</u> (01b) <u>Boero</u> ; <u>Bazzini</u> (04)	<u>Boero</u> (98a); <u>Boero</u> (98b)	
<u>Tsamir</u> ; <u>Almog</u> ; <u>Tirosh</u> (98) <u>Tsamir</u> ; <u>Almog</u> (99) <u>Tsamir</u> ; <u>Bazzini</u> (01a) <u>Tsamir</u> ; <u>Bazzini</u> (01b) <u>Bazzini</u> ; <u>Tsamir</u> (01) <u>Tsamir</u> ; <u>Almog</u> (01) <u>Tsamir</u> ; <u>Bazzini</u> (02a) <u>Tsamir</u> ; <u>Bazzini</u> (02b)	<u>Bazzini</u> ; <u>Tsamir</u> (02a) <u>Bazzini</u> ; <u>Tsamir</u> (02b) <u>Bazzini</u> ; <u>Tsamir</u> (03) <u>Tsamir</u> ; <u>Bazzini</u> (03a) <u>Tsamir</u> ; <u>Bazzini</u> (03b) <u>Tsamir</u> ; <u>Tirosh</u> ; <u>Tiano</u> (04) <u>Tsamir</u> ; <u>Bazzini</u> (04) <u>Tsamir</u> ; <u>Reshef</u> (06)		
<u>Bazzini</u> ; <u>Ascari</u> (99) <u>Boero</u> ; <u>Bazzini</u> ; <u>Garuti</u> (01) <u>Tsamir</u> ; <u>Bazzini</u> (01a) <u>Tsamir</u> ; <u>Bazzini</u> (01b) <u>Bazzini</u> ; <u>Tsamir</u> (01) <u>Bazzini</u> ; <u>Boero</u> ; <u>Garuti</u> (01a) <u>Bazzini</u> ; <u>Boero</u> ; <u>Garuti</u> (01b) <u>Bazzini</u> ; <u>Tsamir</u> (03)	<u>Bazzini</u> ; <u>Tsamir</u> (02a) <u>Bazzini</u> ; <u>Tsamir</u> (02b) <u>Tsamir</u> ; <u>Bazzini</u> (02a) <u>Tsamir</u> ; <u>Bazzini</u> (02b) <u>Tsamir</u> ; <u>Bazzini</u> (04) <u>Boero</u> ; <u>Bazzini</u> (04) <u>Tsamir</u> ; <u>Bazzini</u> (03a) <u>Tsamir</u> ; <u>Bazzini</u> (03b)	<u>Bazzini</u> (95) <u>Bazzini</u> (07) <u>Bazzini</u> (98)	

Quadro 2: Apresentação de autores e publicações com ou sem parcerias<sup>26</sup>

A israelense Tsamir teve, segundo nossos critérios de seleção, o último trabalho publicado em 2006, em parceria com Reshef, enquanto o de Bazzini ocorreu de forma individual, em 2007. As duas tiveram 11 publicações em parceria somente entre elas. (cf. Quadro 2)

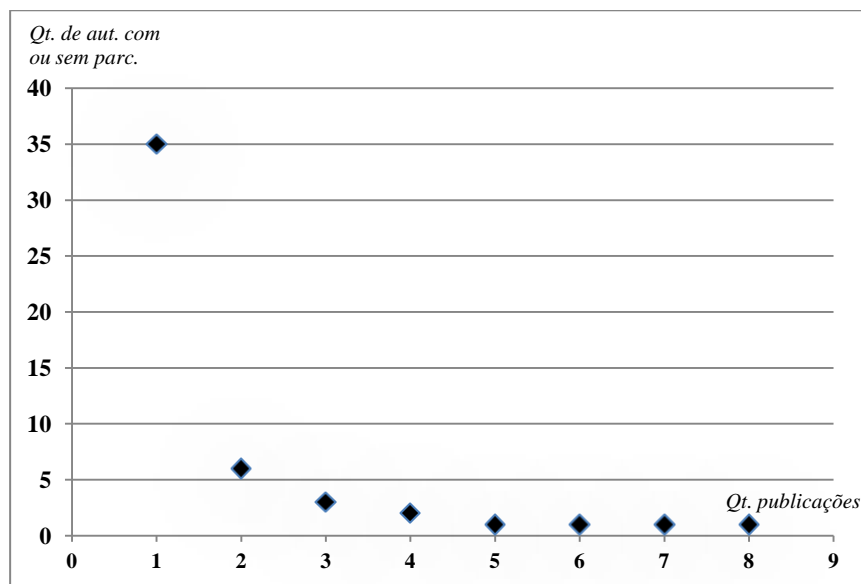


Gráfico 1: Dados quantitativos de publicações e autores

Levamos em consideração 66<sup>29</sup> publicações desde 1991 até julho de 2011, seus respectivos autores, lugares de trabalho na época da edição do trabalho e, de alguns deles, buscamos conhecer suas nacionalidades. Mesmo cientes de que a nacionalidade pode não estar relacionada aos dados coletados, principalmente aos participantes da pesquisa, buscamos, nessa fonte, um caminho para entender se a nacionalidade estaria relacionada com a propagação da temática. Como a fonte de captação desse dado é difícil, tentamos minimizar essa dificuldade, analisando o país de trabalho dos autores à época. Para isso, analisamos, segundo os dados da publicação, o *e-mail* ou o local de trabalho deles, que, em geral acompanha o(s) nome(s) do(s) autor(es). Notamos pelo gráfico 01 que o número de autores, de acordo com nosso mapeamento, que tiveram somente uma publicação sobre o tema chega a 35. Esse é um quantitativo alto, tendo em

<sup>29</sup> Um dos artigos, Steinberg, Sleeman e Ktorza (1990/1991), não foi contabilizado, por não tratar, diretamente, de inequações. Ele faz parte do *corpus*, por supormos ser importante a localização da gênese da ideia de análise de equivalências entre inequações e por ser o único referenciado pelas autoras Linchevski e Sfard (1991) que trata de um referencial matemático (cf. fig. 29). É importante notar que dois dos três autores do artigo de 1990 trabalhavam, à época, em Israel.

vista, inclusive, que muitos deles parecem não mais ter publicado sobre esse tema. Entendemos que vários somente deram uma colaboração e que, provavelmente, não era de seus reais interesses tal assunto. Entretanto, como ressaltamos anteriormente, os resultados apresentados por eles podem ter sido locais, parciais e podem ser investigados de forma mais intensa. É de esperar-se que os trabalhos mais recentes, como Hamalghi (2010); Roh e Halani (2011); Alwyn P. e Dindyal (2010); Alvarenga e Machado (2011) e Borello (2010) cogitem novos elementos para pesquisas futuras.

Podemos apontar que as israelenses Linchevski e Sfard marcam uma etapa inicial de investigação sobre o tema, pois, nas referências bibliográficas do artigo de 1991, não é mencionado nenhum outro sobre esse assunto, antes dessa data, a não ser sobre equações e equivalências (Steinberg *et al.*, 1991), e, em um encadeamento de referências bibliográficas, entre outros métodos de procura, não localizamos outro. Da mesma forma, no nosso mapeamento, não tivemos registro de outra publicação cuja data fosse anterior a 1991, não obstante possa existir (*cf.* Fig.28). Na verdade, não tivemos acesso a tal(is) trabalho(s) nem por outros meios de busca, como *sites* de banco de dados, *sites* pessoais de pesquisadores e outros.

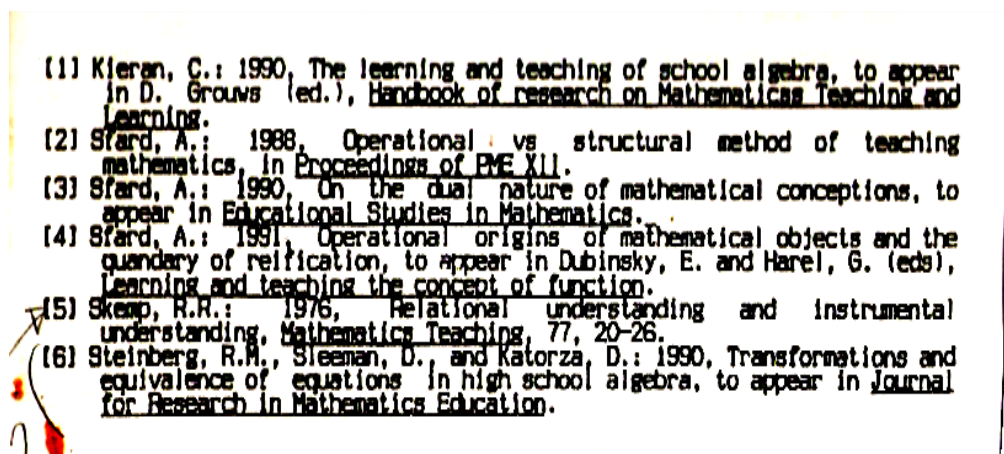


Figura 28: Referências bibliográficas de Linchevski e Sfard (1991)

De acordo com a socióloga chilena e investigadora na área de educação, Graciela Messina, um trabalho do tipo *estado da arte* pode não dar conta de um mapeamento completo sobre o tema.

Por um lado, o tipo de tarefa como realização de um censo ou de um catálogo é ameaçada por uma ou outra vez pela "incompletude". Além disso, há a natureza fragmentada da pesquisa educacional e seu relativo isolamento: dos pesquisadores entre si (e de instituições de

pesquisas) e da pesquisa educacional com outros campos de trabalho educacional. Este isolamento é expresso como a diferença entre pesquisas realizadas e publicadas [...].(MESSINA, 1999, p.146, tradução nossa).

Vários autores têm somente uma publicação até julho de 2011 como: Cortes e Pfaff (2000) – franceses; Tall (2004) – inglês; Radford (2004), Rivera e Becker (2004), Vaiyavutjamai e Clements (2006) – o primeiro é tailandês; Virikios e Farmaki (2006) – gregos; Halmaghi (2010), Alwyn Pang e Dindyal (2010) – singapurenses; Roh e Halani (2011) – a primeira é coreana, entre outros.

Tabela 2: Dados quantitativos de autores com mais de 2 publicações, contabilizando parcerias, em 67 trabalhos

<b>Autores</b>	<b>Publicações</b>	<b>Porcent. (em 67)</b>
L. Bazzini	19	28%
P. Tsamir	16	24%
P. Boero	7	10%
C. Sackur	4	6%
R. Garuti	5	7%
M. Maurel	4	6%
N. Almog	3	4%
A. Sfar	3	4%
L. Linchevski	3	4%
K. Alvarenga	3	4%
V. De Souza	3	4%
D. Tirosh	2	3%
T. Assude	2	3%
K. Lim	2	3%
Vaiyavutjamai	2	3%

A pesquisadora italiana Bazzini foi a maior produtora de publicações, seguida da israelense Tsamir; a maioria foi por meio de parceria entre elas mesmas ou com outros pesquisadores. Aliás, todos os trabalhos de Tsamir foram realizados em parcerias, quase todas com israelenses, enquanto Bazzini teve 3 trabalhos individuais (cf. Tab. 2).

A nacionalidade dos pesquisadores pode, porventura, indicar a nacionalidade dos sujeitos da pesquisa, porém só na interpretação e na análise do interior dos trabalhos é que saberemos. Contudo, a nacionalidade pode-nos dar indícios dos contextos, das crenças, dos interesses, da diversidade cultural, e tais elementos possibilitam um “pano de fundo” para os resultados (cf. Tab.3). Apontamos duas limitações, ao tratarmos da nacionalidade: a primeira refere-se à dificuldade de obtenção desse dado, e a segunda,

aos autores poderem ter uma nacionalidade e trabalhar em outro país. Então, optamos por expor, também e principalmente, o país onde o(a) autor(a) trabalhava na ocasião da publicação (cf. Tab.3). Para Franco (2003):

O importante é ressaltar que, qualquer que seja a forma de explicitação, fique claro o contexto a partir do qual as informações foram elaboradas, concretamente vivenciadas, socialmente construídas e expressas via linguagem (oral, verbal ou simbólica) que permitam identificar o contexto específico de vivência, no bojo do qual foram construídas, inicialmente, e, com certeza, passíveis de transformações e reconstruções. (FRANCO, 2003, p.42).

Tabela 3: Alguns autores e nacionalidades (em 21 autores)

<b>Nacionalidade</b>	<b>Autor</b> (dos quais conseguimos dados sobre nacionalidade)	<b>Porc.</b>
Israelense	P.Tsamir; A.Sfard; L. Linchevski; N. Almog; D.Tirosh	24%
Italiana	R. Garuti; P. Boero; L. Bazzini; R. Bagni	19%
Singapurense	L. Kim; Alwyn Pang; Dindyal	14%
Francesa	C. Sackur; M. Maurel	10%
Brasileira	K. Alvarenga; V. De Souza	10%
Grega	Virikios; Farmaki	10%
Portuguesa	T. Assude	5%
Mexicana	M. Borelo	5%
Tailandesa	Vaiyavutjamai	5%

Com o intento de buscar uma localização precisa das pesquisas, investigamos também onde alguns desses autores trabalhavam na data da publicação (cf.Tab. 4). Não elencamos todos, pois o que nos interessa é observar o espalhamento da temática.

Tabela 4: Países onde alguns autores trabalhavam na época da publicação ( porcentagem com base em 30 trabalhos)

País	Autores	Porc.
EUA	Rowntree; K.Lim; Clements; Weber; Rivera; Becker	20%
Israel (IL)	P.Tsamir; D. Tirosh; N. Almog; A. Sfard; L. Linchevski	17%
França (FR)	T. Assude; Cortes ; Pfaff; C. Sackur; M. Maurel	17%
Itália (IT)	R. Garuti; P. Boero; L. Bazzini; R. Bagni	13%
Espanha (ES)	Blanco; Garrote	7%
Brasil (BR)	K. Alvarenga; V. de Souza	7%
Grécia (GR)	Virikios; Farmaki	7%
Singapura (SG)	Alwyn Pang; Dindyal	7%
Canadá	E. Halmaghi	3%
Inglaterra	D. Tall	3%
Tailândia (TH)	Vaiyavutjamai	3%

Objetivando entender o movimento das investigações sobre ensino e a aprendizagem de inequações, correlacionamos a difusão das pesquisas e os países onde os autores trabalhavam à época da publicação e localizamos no mapa. (cf. Fig.29)



Figura 29 - Mapa da suposta difusão da temática segundo o local de trabalho dos autores

Dessa forma, é possível observar que a temática está difundida em três continentes, americano, asiático e europeu, pois, ao escrever os trabalhos, os autores encontravam-se nesses países. Assim, sabemos que o tema está disseminado (cf. Fig. 29) e que, apesar de ter havido maior concentração na Europa, em especial, na Itália, outros países também se interessaram pela problemática.

Podemos levantar questões que, talvez, não consigamos responder neste trabalho, mas podem ser propostas no sentido de ampliar a discussão: por que os pesquisadores israelenses e italianos tiveram tanto interesse nesse tema? Por que americanos, mexicanos, ingleses, japoneses, até agora, publicaram tão pouco ou nada, em inglês, sobre o assunto? Seria por que seus estudantes não apresentam problemas na aprendizagem desse conceito? Como estaria organizada a estrutura curricular desses países na educação básica? Por que não houve mais publicações por parte de Tsamir e de Bazzini?

Ao todo, foram 46 autores envolvidos em investigações a respeito da temática, distribuídos entre vários países e continentes (cf. Tab. 3 e 4). Apesar de os Estados Unidos da América concentrarem grande número de pesquisadores sobre o tema, parte significativa deles não é estudunidense, e não podemos afirmar que as hipóteses defendidas por eles sejam relativas aos dados coletados nesse país.

Tabela 5: Quantidade de autores, país onde trabalhavam e nacionalidade

<b>País Trab.</b>	IL	FR	IT	BR	SG	TH	GR
<b>N</b>							
IL	5						
IT			4				
SG					2		
FR		3					
BR				2			
GR							2
TH						1	

A tabela 5 aponta-nos somente os países que estão na interseção entre os locais de trabalho e as nacionalidades dos autores. Isso respalda a inferência de que a temática ficou concentrada nesses 7 países e que, certamente, a maioria dos resultados foram referentes aos dados aí coletados. Sendo assim, sugerimos não só o aprofundamento das pesquisas nos países com quantidades inferiores a 3 autores, como França, Singapura e Grécia, mas também o envolvimento de outros países com o assunto.

Já que, essencialmente, tivemos como **UR** o nome dos autores e **UC** a movimentação das pesquisas de cada autor, nacionalidades, local de trabalho, parcerias, efeitos da disseminação, concluímos que a extensão da questão investigada ainda não reflete a realidade sobre o ensino e a aprendizagem de inequações mundial. Apesar de inúmeras questões culturais estarem em jogo, tendo em vista a variedade de países participantes, consideramos que a quantidade de publicações que mapeamos por país é pequena e, assim, pode não retratar uma amostra representativa.

## TÍTULOS

O título de um trabalho pode ser uma lente que define o que é observado, então resolvemos examiná-lo separadamente. As subcategorias elencadas surgiram ao longo das análises, mas fundamentadas em leituras anteriores às quais já nos remetiam a algumas características. Tais características foram interpretadas segundo palavras expressas nos títulos e destacamos 9: Formas de abordagem; Currículo, didática, instrumentação, instrução e ensino; Referenciais teóricos; Equações e inequações; Funções; Tipos de inequações; Epistemologia; Pluridisciplinaridade; Nível de escolaridade dos sujeitos de pesquisa. Utilizando a ordem cronológica de publicação, iniciando em 1990 e terminando em julho de 2011, os títulos estão expostos na tabela 6.

Tabela 6: Artigos em ordem cronológica

N.	Título	Data
1	Algebra Student's Knowledge of Equivalence of Equations	90
2	Rules Without Reasons as Processes Without Objects – The Case of Equations and Inequalities	91
3	Equations and Inequalities – Process Without Objects?	92
4	The Gains and Pitfalls of Reification – The Case of Algebra	94
5	Between Arithmetic and Algebra: In The Search of a Missing Link The Case of Equation and Inequalities	
6	Equazioni e Disequazioni Riflessioni sul Concetto di Equivalenza	95
7	De L'usage de "Techniques Faibles" et Techniques Fortes Dans L'organisation du Curriculum	97
8	Comment Recueillir des Connaissances Cachées en Algèbre et Qu'en Faire ?	
9	Student's Solutions of Inequalities	98
10	Riflessioni Didattiche sul Concetto di Equivalenza per Equazioni e Disequazioni	
11	Presentazione di Um Modelo di Approccio Alle Disequazioni com Ragazzi di 11-12 Anni	
12	Inéquations: Aspects Didactiques, Épistémologiques et Cognitifs	
13	Quali Modelli e Controlli Intervengono Lavorando su Disequazioni?	
14	Inéquations: Par Une Recherche Pluridisciplinaire	
15	Les Outils Théoriques du GECO et les Inéquations en Classe De Seconde	98
16	Graphing Technology and its Effect on Solving Inequalities	

N.	Título	Data
17	No Answer as a Problematic Response: The Case of Inequalities	99
18	Disequazioni: Il Ruolo del Segno	
19	Comportamenti di Studenti In Ingresso all'università di Fronte Allo Studio di Disequazioni	
20	Les Inéquations Fonctionnelles: Lieu de Développement et D'étude de La Maîtrise Dès Fonctions	
21	Les Inéquations en Classe de Seconde et L'expérience de La Necessite	
22	Les Inéquations en Classe de Seconde - Une Tentative Pour Enseigner la Nécessité des Énoncés Mathématiques	00
23	Solving Equations And Inequations: Operational Invariants and Methods Constructed by Students	
24	Metaphors In Teaching and Learning Mathematics: A Case Study Concerning Inequalities	01
25	Can $X=3$ Be The Solution of An Inequality?A Study of Italian and Israeli Students	
26	Can $X=3$ Be The Solution of An Inequality?A Study Of Italian and Israeli Students	
27	Reveling and Promoting the Student's Potential in Algebra: A Case Study Concerning Inequalities	
28	Research Based Instruction: Widening Students Perspective When Dealing With Inequalities	
29	Attivita' Sulle Disequazioni Come Contesto Per Lo Sviluppo dei Concetti di Variabile e Funzione	
30	Student's Strategies and Difficulties: The Case of Algebraic Inequalities.	
31	Algebraic Expressions and The Activation of Senses	02
32	Algorithmic Models: Italian and Israeli Student's Solutions to Algebraic Inequalities.	
33	Student' Algorithmic, Formal and Intuitive Knowledge: The Case of Inequalities	
34	Le Disequazioni Tra Procedure E Relazioni: Uno Studio Comparativo su Studenti Italiani e Israeliani	
35	Teaching Implications Deriving From a Comparative Study on The Instruction of Algebraic Inequalities	03
36	Un Phénomène D'évolution Curriculaire : Le cas des Inéquations au College	
37	La Enseñanza de Inecuaciones Desde El Punto de Vista de la Teoria APOE	
38	Connectgions Between Theory and Research Findings: The Case of Inequalities	04
39	Students Solution to Similarly Structures Inequalities	
40	Inequalities in Mathematics Education: A Need Complementary Perspectives	05
41	The Equation/Inequality Connection in Constructing Meaning For Inequality Situations	
42	Problems Related to the Use of Graphs in Solving Inequalities	
43	New Errors and Old Errors: The Case of Quadratic Inequalities	
44	Reflelions on Research And Teaching of Equations And Inequalities	
45	Sintax and Meaning	
46	Consistencies and Inconsistencies in Student's Solution to Algebraic 'Single-Value' Inequalities	06
47	Sociocultural Account Of Students Collective Mathematical Understanding of Polynomial Inequalities in Instrumented Activity	
48	Factors Influencing the Teaching and Learning of Equations and Inequations in Two Government Secondary Schools in Thailand.	06
49	Inequalities and Equations: History and Didactics	
50	Introducing Algebraic Thinking to 13 Year-Old Students: The Case of Inequality	
51	Inecuaciones:Um Análisis de las Construcciones Mentales de los Estudiantes Universitarios	
52	Characterizing Student's Thinking: Algebraic, Inequalities and Equations	
53	Student's Preferences When Solving Quadratic Inequalities	
54	Effects Of Classroom Instruction on Student Performance on and Understanding of Linear Equations and Linear Inequalities	
55	Student's Mental Act of Anticipating In Solving Problems Involving Algebraic Inequalities and Equation	
56	The Mutual Influence of Theory and Practice in Mathematics Education: Implications	

N.	Título	Data
	for Research and Teaching	07
57	Difficulties in Learning Inequalities in Students of The First Year of Pre-University Education in Spain	
58	Inequations Resolution Using Various Registers	
59	O Uso de Vários Registros na Resolução de Inequações - Uma Abordagem Funcional Gráfica	08
60	Resolução de Desigualdades com uma Incógnita: Uma Análise de Erros	
61	Student's Understandings and Misconceptions- of Algebraic Inequalities	09
62	Undergraduate Student'S Conceptions Of Inequalities: Sanding the Lens.	
63	Students Errors in The Solution of Inequaliteis at The Junior College Level	
64	Dificuldades dos Alunos para Resolver Problemas com Inequações	10
65	Un Planteamiento de Resignificación de las Desigualdades a Partir de Las Prácticas didácticas del Profesor. Un Enfoque Socioepistemológico	
66	Analysis of Undergraduate Student's Cognitive Processes When Writing Proofs About Inequalities	
67	Pme Inequalities Production: A Survey	11

### *Foco na aprendizagem, no tipo de abordagem*

Nesta subcategoria, enquadrámos as palavras que têm a ver com a maneira de os estudantes interpretarem e/ou resolverem inequações com foco na aprendizagem. Foi observado que a maioria das palavras estava relacionada aos erros cometidos pelos estudantes. São elas nas línguas originais, inglês, francês, italiano, espanhol e português, respectivamente: *without, gains e pitfall, missing, student's solutions, no answer, methods, metaphor*<sup>30</sup>, *can x=3, student's potential, dealing, strategies, algorithmic models, knowledge, comparative, need complementary, constructing meaning, problems, errors, understanding, algebraic thinking, student's thinking, student's preference, difficulties, resolution, misconceptions, student's conceptions, consistencies and inconsistencies, performance, mental act, faibles, connaissances, nécessité, cognitifs, maîtrise, modeli di approccio, controllli, Il ruolo, comportamenti, svillupo, procedure e relazioni, construcciones, resoluções, problemas, dificultades, uso, erros.*

Observamos pelo título de Linchevski e Sfard (1991), *Rules without reasons as process without objects – the case of equations and inequalities*, que se trata de erros dos estudantes, ao lidar com equações e inequações. Isso é caracterizado pela expressão *rules without reasons*, o que significa regras sem razão, sem consciência do que é feito. Nesse mesmo sentido, a publicação das israelenses Tsamir, Almog e Tirosh (1998),

<sup>30</sup> Neste trabalho, assumimos a interpretação de *metáfora* baseados em Lakoff e Nuñez (2000): *metáfora* é transferência de significado. É referir-se a uma coisa, utilizando-se da imagem ou da ideia de outra coisa. Essa transferência somente é possível por causa das afinidades, ainda que remotas, entre diferentes coisas.

*Student's solution of inequalities*, focaliza as resoluções de inequações dos estudantes. Utilizando esse mesmo raciocínio, encontramos mais 46 publicações, perfazendo 48 ao todo, cujos títulos evocam a aprendizagem, a maneira de os estudantes pensarem e analisarem, principalmente, as falhas e os erros cometidos. Os dados foram coletados em vários países e são de participantes com escolaridade variada.

Esse levantamento revela que parte relevante (72%) dos trabalhos publicados se concentrou na análise de como os estudantes trataram das inequações, em particular, como enfrentaram as resoluções e as interpretações. Podemos entender que tais resoluções e interpretações tenham sido consideradas problemas de ensino e/ou aprendizagem, pois esse enfoque chamou a atenção dos pesquisadores. Se fossem os acertos, provavelmente não teriam despertado tanto interesse, pois a educação matemática preocupa-se, inclusive, com a melhoria do ensino e da aprendizagem, e, em se tratando de acertos<sup>31</sup>, não há o que melhorar. A palavra *erro* vem do latim *errare*, que significa “vagar sem destino”, “desviar-se do caminho”, “engano, desacerto, incorreção” (AURÉLIO, 2004), mas consideramos o sentido educativo como Brousseau:

Como não somente o efeito da ignorância, da incerteza, do acaso, como se crê nas teorias empíricas ou behavioristas da aprendizagem, mas o efeito de um conhecimento anterior, que tinha seu interesse, seus sucessos, mas que agora se revela falso ou simplesmente mal adaptado (BROUSSEAU, 1998, p.82, tradução nossa)

Além disso, destacamos, segundo Cury (2007), uma tendência em educação matemática de a análise de erros ser uma linha de pesquisa e um tipo de metodologia de ensino. A expressão *dificuldade*, empregada por muitos autores, inclusive por nós, não está correlacionada a *difícil*, a *complexo* como os dicionaristas indicam, mas no sentido de obstáculo, de uma barreira ao processo de obtenção da resposta correta.

É possível observar que, entre esses títulos, em torno de 17 dos 48 (35%) contêm palavras que denotaram dificuldades, erros, necessidades, falhas e inconsistências nas resoluções (cf. Tab. 7). As expressões que designam comportamentos, compreensões, estratégias, desenvolvimentos, entendimentos, procedimentos, modelos, cognição e potencial representam o restante, 65% de 48. Tais expressões apontam a maneira como os alunos expressaram e enfrentaram tal conteúdo matemático (cf. Tab. 8). Logo, tudo indica, pelo nosso *corpus*, que esse foi o principal interesse dos pesquisadores. Nessa

---

<sup>31</sup> Em nossa experiência, não temos visto pesquisas cujos títulos envolvem expressões, como “os acertos dos estudantes” ou variações similares.

linha, realçamos que Almouloud (2010) comenta que a didática da matemática trata também das questões relacionadas aos erros, tendo como um de seus principais objetivos estudar as condições que devem ser ponderadas nas situações ou nos problemas sugeridos, com o desígnio de propiciar a aparição, o funcionamento e a rejeição de concepções sucessivas, isto é, o objeto de estudo da didática são os processos de obtenção de conhecimentos peculiares à matemática. Segundo ele, essa ideia é reforçada por Brousseau (1998) quando comenta que o valor da didática de um problema vai estar sujeito ao que o aluno mobilizará, colocará em xeque e investirá nas etapas de rejeição ou questionamento de estratégias, ou de conhecimento estimado, indevido na resolução. Temos alta porcentagem de pesquisas nessa linha: maneiras de resolver, mais de 70% do material mapeado. Assim posto, cabem duas questões: isso denota pouca variação de investigação sobre o assunto entre os países? Os resultados afunilaram-se em torno de explicitar os conhecimentos mobilizados pelos estudantes no ato das resoluções e ou das interpretações de uma inequação?

Tabela 7: Quantitativo de palavras cujos títulos enunciaram uma preocupação com a forma de abordagem

<b>Palavras</b>	<b>Quantidade</b>	<b>Porcentagem</b>
Palavras que transmitiram preocupação dos autores em relação à forma de os estudantes tratarem das inequações	48	72%

Tabela 8: Quantitativo de palavras (ou sinônimos) envolvidas em 48 títulos

Palavras	Quantidade	Porcentagem
Dificuldades e sinônimos	17	35%
Procedimentos e sinônimos	31	65%

*Foco no ensino: currículo<sup>32</sup>, didática<sup>33</sup>, instrumentação, instrução*

Nesta subcategoria, incluímos expressões relacionadas à maneira de ensinar, à escolha dos conteúdos de ensino e aos meios de ensino para aprendizagem matemática.

A palavra *currículo* (*curriculum, curriculaire*) aparece somente duas vezes nesse levantamento, em 1997 e em 2002, utilizada pela mesma autora, Assude (1997, 2002), o que significa 3,1% de 67 artigos. Enquanto *didática* (*didactics, didattiche, didactiques, didáticas*) é utilizada três vezes por autores italianos, Bazzini (1998), Boero (1998) e Bagni (2005), e uma vez pela mexicana Borello (2010), perfazendo o total de 6%. Os termos *instrução, ensino e atividade* (*instructions, instrumented, teaching, enseigner, enseñanza, qu'en faire, attivita*) são destacados doze vezes na literatura (Tab. 9).

Tabela 9: Palavras e seus quantitativos, considerando palavras no mesmo título, em 67 trabalhos.

Palavras	Quantidade	Porcentagem
Currículo	2	3,1%
Didática	4	6,0%
Instrução em sala de aula <sup>34</sup>	12	18,0%

A palavra que se refere à *didática* está acompanhada de outras, como *reflexões, aspectos epistemológicos e cognitivos*. O termo *ensino* está atrelado a *implicações que derivam de, metáforas, tentativa para e reflexões para pesquisa*, e as expressões que complementam o significado referente ao *currículo* são *evolução e organização*.

<sup>32</sup> Interpretado pelos enunciados em um sentido não somente como conjunto e sequência de conteúdos selecionados, mas também como as escolhas de natureza metodológicas e didáticas, compondo o par indissociável *conteúdo e forma*.

<sup>33</sup> Pelos títulos, o significado de didática é visto como o conjunto das estratégias de ensino, das questões práticas relativas à metodologia e das estratégias que fazem parte do processo de ensino-aprendizagem.

<sup>34</sup> Por *instrução*, entendemos um sinônimo de ensino.

Alguns títulos apresentavam duas dessas expressões; em ordem cronológica, são:

- *De l'usage de "techniques faibles" et "techniques fortes" dans l'organisation du curriculum.*

- *Comment Recueillir des Connaissances Cachées en Algèbre et Qu'en faire ?*

- *Riflessioni Didattiche Sul Concetto di Equivalenza per Equazioni e Disequazioni.*

- *Inéquations: Aspects Didactiques, Épistémologiques et Cognitifs.*

- *Metaphors in Teaching and Learning Mathematics: A Case Study Concerning Inequalities.*

- *Research Based Instruction: Widening Students Perspective when Dealing with Inequalities.*

- *Attivita' Sulle Disequazioni Come Contesto per lo Sviluppo dei Concetti di Variabile e Funzione.*

- *Teaching Implications Deriving from a Comparative Study on the Instruction of Algebraic Inequalities.*

- *Un Phénomène D'évolution Curriculaire: le cas des Inéquations au College.*

- *La Enseñanza de Inecuaciones Desde el Punto de Vista de la Teoria APOE.*

- *Reflections on Research and Teaching of Equations and Inequalities.*

- *Sociocultural Account of Students Collective Mathematical Understanding of Polynomial in Instrumented Activity.*

- *Factors Influencing the Teaching and Learning of Equations and Inequations in Two Government Secondary Schools in Thailand.*

- *Inequalities and equations: history and didactics.*

- *Effects of classroom instruction on student performance on and understanding of linear equations and linear inequalities.*

- *The Mutual Influence of Theory and Practice in Mathematics Education: Implications for Research and Teaching.*

- *Les inéquations en classe de seconde - une tentative pour enseigner la nécessité des énoncés mathématiques.*

- *Un Planteamiento de Resignificación de las Desigualdades a Partir de las Prácticas didácticas del Profesor. Un Enfoque Socioepistemológico.*

Assim, das 67 publicações inventariadas, 18 emitem, em seus títulos, expressões relacionadas ao ensino, e 48 enunciam elementos relacionados à aprendizagem, mais especificamente, à abordagem do aprendiz<sup>35</sup>. Consideramos a palavra *ensino* sob o ponto de vista do tipo de abordagem do professor, da instituição escolar, à maneira sistematizada de transmissão do conhecimento, enquanto *aprendizagem* equivale à forma como o aprendiz entende, mobiliza os conhecimentos transmitidos. O gráfico 02 resume esses dados.

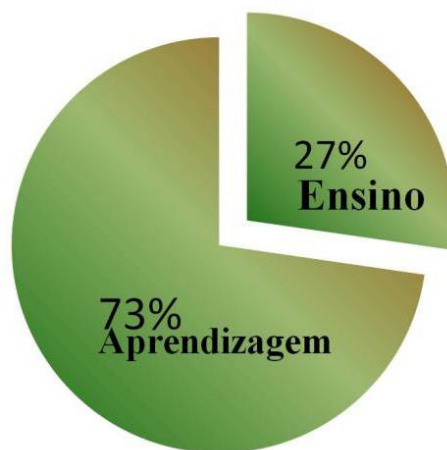


Gráfico 2 - Porcentagem de foco das publicações

Os dados quantitativos apontam-nos, pelas duas subcategorias, maior porcentagem de publicações com foco na aprendizagem do que no ensino.

#### *Referenciais teóricos*

Ao analisar os títulos, destacamos 16 trabalhos que, explicitamente, revelam o referencial teórico escolhido, isto é, publicações que encerram, em seus títulos, de forma direta, o referencial teórico utilizado. A fim de não carregar o texto, retiramos apenas parte do título que respalda essa classificação, por exemplo: *process without object*, *modelo di approccio*, *modeli e controllli* e a expressão *vários registros*, que aparece duas vezes. Eles estão nos enunciados dos trabalhos de Sfard e Linchevski (1992), de Chiappini e Molinari (1998), de Gallo e Battú (1998), Campos e De Souza (2008) e de De Souza (2008), respectivamente. Outros referenciais estão relacionados a: Teoria Antropológica do Didático, de Yves Chevallard (CHEVALLARD, 1990) (*techniques*

<sup>35</sup> Quantitativo considerado entre títulos que apresentam ou não duas dessas expressões, isto é, um título pode ser contabilizado duas vezes se nele aparecerem expressões relacionadas tanto ao ensino quanto à forma de entender do estudante.

*faibles et techniques fortes*); Invariantes Operacionais, de Gerárd Vergnaud (VERGNAUD, 1993) (*Operational Invariants*); Cognição Corporificada, de Nuñez e Lakoff (2000) (*metaphors*); Conhecimento Algorítmico, Formal e Intuitivo, de Fischbein (1994) (*Algorithmic, Formal And Intuitive Knowledge*); Sintaxe e Significado (*Syntax and Meaning*) (OTTE, 2003; RADFORD, 2002); Teoria APOS, de Asiala *et. al.* (1996) (*Teoria APOE*); Registros de Representação Semiótica, de Duval (DUVAL, 2003); Ação Mental de Antecipação, de Piaget (1971/1967 *apud.* Lim K, 2006 ) e Von Glasersfeld (1998 *apud.* Lim K, 2006) (*Mental Act of anticipating*); Análise de Erros (CURY, 2007; RADATZ, 1979); Ferramentas Teóricas, do Grupo GECO (*outils théoriques*) (SACKUR; MAUREL, 1998); Socioepistemologia, do Grupo do CINVESTAV (*Socioepistemología*) (CANTORAL, 1999).

<b>Teoria/Abordagem teórica</b>	<b>Autor(es) da Teoria/abordagem teórica</b>
Reificação	Sfard
Modelo de Abordagem	Chiappini e Molinari
Modelo e Controle	Galo e Battú
Representação Semiótica	Duval
Teoria Antropológica do Didático	Chevallard
Invariantes Operacionais	Vergnaud
Cognição Corporificada	Nuñez e Lakoff
Conhecimento Algorítmico, Formal e Intuitivo	Fischbein
Sintaxe e Significado	L. Radford e M. Otte
Teoria APOS	Asiala; Brown; Devries; Dubinsky; Mathews e Thomas
Ação Mental de Antecipação	Piaget, Von Glasersfeld e Harel
Análise de Erros	H. Radatz
Socioepistemologia	Grupo de pesquisa do CINVESTAV - MX
Ferramentas teóricas da Association pour le Développement du Génie Cognitif	Grupo GECO – NICE/FR

Quadro 3: Levantamento, nos títulos, de referenciais teóricos

Desse modo, dos trabalhos selecionados destacamos, somente nos títulos, uma variedade de abordagens ou referenciais teóricos, isto é, sem uma análise interna aos trabalhos, encontramos 14 tipos diferentes (cf. Qd. 03). O gráfico 3 indica a quantidade de alguns desses títulos, que aparecem mais de uma vez, com o referencial correlacionado. Assim, apresentamos uma questão: como devem ser os resultados, tendo em vista a análise dos dados sob variados aspectos teóricos? Essa resposta é possível ser obtida, ao examinarmos o interior dos artigos.

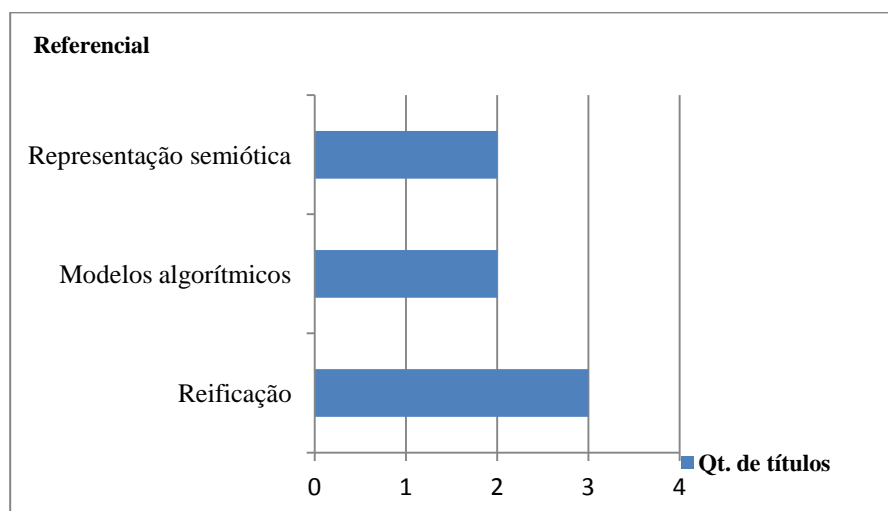


Gráfico 3: Os referenciais que mais apareceram nos títulos

### *Relação entre equações e inequações*

Pequena parte dos artigos (12) encerra, conjuntamente, em seus títulos, as palavras *equações* e *inequações* (*equations and inequalities; equazioni e disequazioni*). Esse é um indício de que tais pesquisadores tiveram a necessidade de fazer uma investigação que envolvesse não somente as inequações, mas também as equações, isto é, que as relacionasse. Não podemos inferir que, no interior desses trabalhos, sejam focalizadas como codependentes ou correlacionadas, porém tudo indica que o interesse deles foi de uma pesquisa que abrangesse os dois conceitos matemáticos. Como esse quantitativo representa em torno de 18% dos trabalhos, não podemos ignorá-lo. Pode ser que a importância desse recorte investigativo se tenha originado do fato de que uma parte significativa dos livros didáticos, como SANTOS *et al.* (2004), Iezzi, Dolce e Machado (2005a), entre outros, e das propostas curriculares estaduais, como a dos estados de São Paulo (2009), do Rio Grande do Sul (2009) e de Sergipe (2011), elencam ou apresentam o conteúdo de inequações após o de equações.

Em outras palavras, no Brasil e, pelo que observamos, no NCTM, eles são apresentados nessa ordem. Os parâmetros curriculares norte-americanos indicam:

Nos graus 09-12, todos os estudantes deveriam:

- entender o significado de formas equivalentes de expressões, equações, inequações e relações;
- escrever formas equivalentes de equações, inequações e sistemas de equações e resolvê-los com fluência - mentalmente ou com papel e lápis em casos simples e de usar a tecnologia em todos os casos; (ESTADOS UNIDOS DA AMÉRICA. Disponível em:

<<http://www.nctm.org/standards/content.aspx?id=26831>> Acesso em 02 de out.de 2011, tradução nossa )

Os artigos que apresentam, de forma conjunta, tais palavras em seus títulos são assim intitulados:

*-Rules without Reasons as Processes without Objects – The Case of Equations and Inequalities.*

*-Equations and Inequalities – Process Without Objects?*

*-Between Arithmetic and Algebra: In The Search of a Missing Link the Case of Equation and Inequalities.*

*-Equazioni e Disequazioni Riflessioni sul Concetto di Equivalenza.*

*-Riflessioni Didattiche sul Concetto di Equivalenza per Equazioni e Disequazioni.*

*-The Equation/Inequality Connection in Constructing Meaning for Inequality Situations.*

*-Reflections on Research and Teaching of Equations and Inequalities.*

*-Factors Influencing the Teaching and Learning of Equations and Inequalities in Two Government Secondary Schools in Thailand.*

*-Inequalities and Equations: History and Didactics.*

*-Characterizing Student'S Thinking: Algebraic, Inequalities and Equations.*

*-Effects of Classroom Instruction on Student Performance on and Understanding of Linear Equations and Linear Inequalities.*

*-Student's Mental Act of Anticipating in Solving Problems Involving Algebraic Inequalities and Equation.*

Desses trabalhos, três (3) estão atrelados às expressões relativas a erros. Assim, podemos intuir que tais pesquisas revelam preocupação com os erros quando os estudantes utilizam ideias de resolução de equação à inequação. Complementarmente, seis (6) apontam alguma caracterização que indica vínculo entre tais conceitos, como por exemplo, no título do trabalho *The equation/inequality connection in constructing meaning for inequality situations*, que revela, explicitamente, uma relação entre tais conceitos para a construção de significado para inequações. Na mesma linha de interpretação, a maneira de os estudantes tratarem de uma inter-relação é apontada em

45% desses títulos. É possível observar que, exceto em dois títulos, a palavra *equação* vem antes de *inequação*.

Reiteramos que essa ordem de apresentação e exposição pode ser observada em vários livros didáticos, como no de pré-cálculo, de Demana *et al.*(2009), no qual o capítulo de inequações vem logo após o de equações. Em Litvinenko e Mordkovich (1987), são analisados os dois conteúdos em um só capítulo, porém, primeiro, são apresentadas as equações. Notamos essa disposição também em alguns livros brasileiros, principalmente da educação básica, como Dante (2007, 2010) e Giovanni (2008). Seria esse um indicativo de que os autores os consideram não somente de forma correlacionada, mas também de forma hierárquica, subordinada, isto é, ensina-se inequação somente depois de ensinar equação?

Conforme os dados numéricos nos apontam, parte das publicações enfatizaram os erros relacionados às conexões entre equação para inequação (cf.Tab.11).

Tabela 10: Dados relativos ao levantamento de palavras que acompanham os termos *equação* e *inequação* em 12 trabalhos, com possibilidade de duas ou mais caracterizações no mesmo título

<b>Equação e Inequação</b>	<b>Quantidade</b>	<b>Porcentagem</b>
Erros	3	25,0%
Conexão entre equação e inequação	6	50%
Didática, ensino	3	25%
Raciocínio dos estudantes	6	50,0%

Esse resultado, analisado conjuntamente com outros apresentados em subcategorias anteriores, indica-nos que as investigações se concentraram no sujeito e, muito pouco, no currículo, nas questões epistemológicas e metodológicas.

Nos 12 trabalhos selecionados, presenciamos um percentual pequeno, em torno de 33%, de investigadores preocupados com o ensino de equações e inequações sob o ponto de vista metodológico (cf. Gráf. 4). Porém, se levarmos em consideração todo o *corpus*, esse percentual é bem menor, 4 em 67, o que corresponde a 6%.

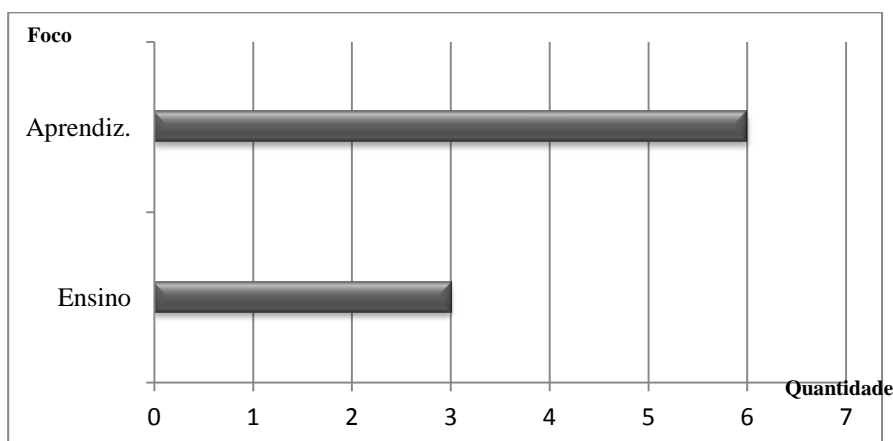


Gráfico 4: Dados numéricos de pesquisas que enfocam, em seus títulos, o ensino ou a aprendizagem de inequações

O título *Inequalities and equations: history and didactics* apresenta uma contribuição diferente das demais, pois indica um fundamento epistemológico do conceito de inequação e sugere uma linha para futuras pesquisas.

### Funções

As expressões relacionadas às funções aparecem, explicitamente, em 4 dos artigos investigados. Elas foram separadas, por considerarmos que o estudo de inequação possibilita a mobilização de inúmeros conceitos e relações que fomentam o conhecimento matemático, inclusive de funções, por exemplo, domínio, imagem, intervalo, variação da função, comparação entre funções, união e intersecção de intervalos, entre outros. O livro de Litvinenko e Mordkovich (1987) faz uma abordagem ampla e completa de inequações e equações, porém somente por meio de um tratamento funcional. Ao lermos a análise de livros didáticos do ensino médio dos autores Lima *et al.* (2001), observamos que o tratamento de inequações nos livros brasileiros ocorre no capítulo de funções, em especial, no item de funções afins. O trabalho conjunto ou paralelo proporciona o registro de várias representações semióticas, como afirma Mariani (2006):

As representações gráficas assim como as figuras geométricas, a escrita algébrica entre outras [...] possuem um representante visível com leis de organização próprias que permitem representar outros objetos, como, por exemplo, funções (DUVAL, 1996). No entanto, o autor citado afirma que a importância dos registros de representação na atividade cognitiva matemática não deve ser tomada de maneira isolada e, sim, simultaneamente, o que evidencia, além das atividades de tratamento, as conversões entre registros. (MARIANI, 2006, p.16)

As expressões *graphing*, *polynomial inequalities*, *graphs* emanam uma interpretação que, no contexto, consideramos abranger as funções em algumas de suas acepções. As publicações cujos enunciados apresentam o conceito matemático *função*, com variações, são:

- Graphing Technology and its Effect on Solving Inequalities*;
- Les Inéquations Fonctionnelles: Lieu de Développement et d'étude de La Maîtrise des Fonctions*;
- Attività sulle Disequazioni Come Contesto per lo Sviluppo del Concetti di Variable e Funzione*;
- *Problems Related to the Use of Graphs In Solving Inequalities*;
- Sociocultural Account of Students Collective Mathematical Understanding of Polynomial Inequalities in Instrumented Activity*;
- *O uso de vários registros na resolução de inequação: uma abordagem funcional gráfica*.

Os autores são Weber (1998) Boero e Garuti (1999), Garuti (2001), Sackur (2004), Rivera e Becker (2004) e De Souza (2006), respectivamente. Indiretamente, tais títulos remetem às questões curriculares, ao ensino – tendo em vista a oportunidade que esse conteúdo matemático proporciona ao ensino correlacionado e relaciona-se ao currículo – à pluridisciplinaridade – função vista como ferramenta matemática que modela um fenômeno – e às maneiras de abordar as inequações. Isto pode ser notado pelas expressões ou unidades de contextos *développement et d'étude*, *per lo sviluppo*, *problems related* e *o uso de vários registros*, que interpretamos como referentes à maneira de abordar, às relações estabelecidas, às variadas conexões que os estudantes fazem ou podem fazer para aprender.

A análise de um gráfico sob a visão analítica possibilita a investigação de propriedades algébricas que devem ser levadas em consideração quando estudamos função e inequação. Corroboramos Farfán e Albert (1997) quando retratam que:

É inegável que a dificuldade técnica dificulta sua compreensão e seu ensino, reduzindo sua apresentação escolar a uns tantos exemplos “complexos”, a fim de completar o programa estabelecido. Por outro lado, as habilidades algébricas e lógicas desenvolvidas pela minoria não contribuem, substancialmente, para posterior estudo do cálculo. Nossa estratégia para tratar, escolarmente, deste tema baseia-se na mudança da centralização do contexto protagonista das discussões, isto é, iniciamos o tratamento no contexto gráfico, fazendo uma translação até o contexto algébrico cujo fim é o de apoiar

argumentações ou construções gráficas. Também envolvemos o contexto numérico, usando a calculadora, para conjecturar soluções e estabelecer margens de aproximação que propiciam o fortalecimento da intuição numérica dos estudantes. (FARFÁN; ALBERT, 1997, p. 1, tradução nossa).

Consideremos um exemplo:

Seja estudar a inequação  $\sqrt{x} < x$  com o auxílio gráfico.

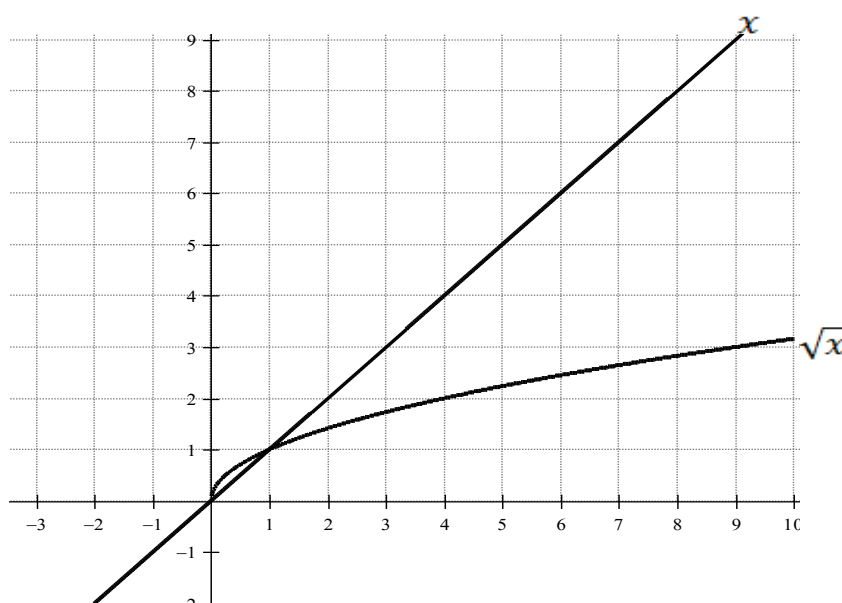


Gráfico 5: Esboço gráfico das expressões  $\sqrt{x}$  e  $x$

Neste caso, o esboço da expressão  $\sqrt{x}$  já permite ao estudante visualizar e questionar o porquê de essa expressão só estar traçada no primeiro quadrante, estimulando-o a buscar uma explicação. Os traçados de tais expressões também possibilitam verificar as intersecções, isto é, a igualdade entre elas e intuir a exclusão do zero e do 1 como possíveis valores que satisfazem a inequação, com uma diferença explícita em resolver uma equação e uma inequação. Essa atividade possibilita a visualização da comparação entre  $\sqrt{x}$  e  $x$  (gráf.05) e a consequente resposta. Outra situação que pode surgir é quanto à possibilidade da expressão à esquerda,  $x$ , não ser negativa, mesmo que, no seu esboço gráfico, seja permitido. No procedimento de manipulação algébrica, o estudante procede à resolução, elevando ambos os membros ao quadrado ou transpondo termos variáveis para um só lado e elevando-os ao quadrado com o intuito de extrair a raiz quadrada. Neste último caso, ele verá que tal opção não o conduzirá ao objetivo. Dessa situação algébrica emergem várias discussões que podem ser explicitadas pelos gráficos.

Podemos revolver um terreno mais fecundo e falar sobre a relação epistemológica possível de extrair-se desses títulos. Entendemos epistemologia como “o estudo da constituição dos conhecimentos científicos tanto na sua gênese histórica, na sua reconstrução mental em cada sujeito, como nas suas articulações em dada etapa do desenvolvimento do saber científico” (ALMOULOUD, 2010, p.149). Dessa forma, os dois títulos *Les inéquations fonctionnelles: lieu de développement et d'étude de la maîtrise des fonctions* e *Attivita' sulle disequazioni come contesto per lo sviluppo dei concetti di variabile e funzione* remetem-nos a uma caracterização epistemológica, tendo em vista que a constituição de uma inequação como conhecimento científico está correlacionada, ainda que implicitamente, à função.

A fim de decifrar e entender as interconexões que podem ser observadas nas expressões, nos contextos, esquadrihamos os títulos e destacamos termos que nos levaram à epistemologia, à pluridisciplinaridade, às formas de abordagem e ao currículo, formando as unidades de contextos (cf. Fig.30). Vejamos alguns termos que fazem alusão<sup>36</sup> à (ao):

- Epistemologia: *desenvolvimento e estudo no domínio das funções, vários registros;*
- Pluridisciplinaridade: *como contexto sociocultural, compreensão coletiva;*
- Formas de abordagem: *problemas relacionados, compreensão, vários registros;*
- Currículo: *atividades, tecnologias, variável, função (localização do estudo de inequações), uso de vários registros.*

No caso da relação entre pluridisciplinaridade, inequação e função, temos mais um fundamento explicativo - os dois conteúdos são muito utilizados, para modelar fenômenos de variados tipos - inclusive os que se relacionam à otimização e, nesse caso, localizam-se em uma zona, no mínimo, pluridisciplinar do conhecimento.

---

<sup>36</sup> Já traduzidos do original em francês, ou italiano, ou inglês.

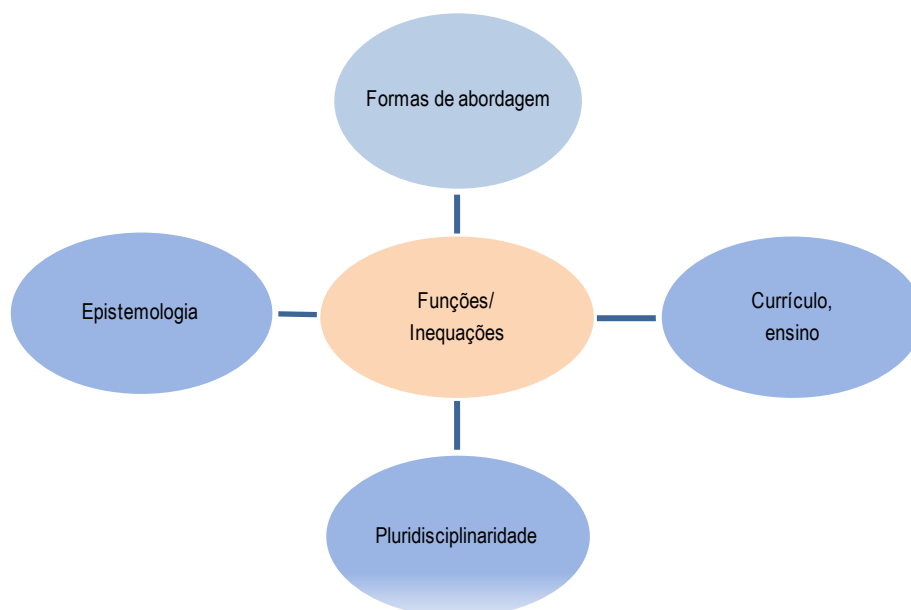


Figura 30 - Esquema de inter-relações entre focos de pesquisa

Tudo indica que questões curriculares e de ensino, neste caso, dizem respeito ao estudo conjunto de funções e inequações como codependência ou dependência, isto é, inequações são vistas como subtópico de funções. Nesse contexto, surge a sugestão de que o tratamento conjunto pode favorecer o trabalho desfragmentado, interconectando os números reais, as funções e as inequações. O estudo conjugado indica facultar uma minimização dos erros algébricos nas resoluções e nas interpretações das inequações, pois a visualização gráfica, se atreladas às funções, permite detectar incoerências nos desenvolvimentos algébricos e vice-versa.

#### *Tipos de inequações*

Os tipos de inequação expressos nos títulos são as polinomiais e, principalmente, as quadráticas; as lineares aparecem, apenas, em 4 estudos. Somente ao analisarmos o interior dos trabalhos, saberemos se, realmente, a maioria dessas investigações se concentrou nesse tipo de expressão algébrica. Nosso levantamento de dados numéricos é baseado nos títulos que envolveram a palavra *inequação* em seus enunciados (cf. Tab. 11).

Tabela 11: Quantitativos das expressões de tipos de inequações expressas nos títulos<sup>37</sup>

<sup>37</sup> Nos títulos, às vezes, aparece a expressão *polinomiais*, às vezes, *quadráticas* e ou *lineares*. Retratamos aqui exatamente como foi expresso pelos autores.

Inequações	Quantidade
Polinomiais	1
Quadráticas	2
Lineares	1

Apesar do baixo quantitativo, ele é relevante, tendo em vista a preferência de alguns autores em fazer um recorte com esses tipos de inequações (devem ter tido um motivo pela escolha) e a necessidade em explicitar, no título, tal preferência. Por uma reflexão e um entrecruzamento entre os resultados dessa subcategoria com outra - *nível de escolaridade dos sujeitos da pesquisa* - observamos que, no Brasil, o estudo no ensino fundamental vai até as quadráticas, retomadas no ensino médio, segundo os PCN (1998) e PCN (2000). Isso nos sugere questões investigativas, como: por que os pesquisadores parecem ter uma predileção por tal tipo de inequação? Seria por ela estar presente em toda a educação básica?

### *Epistemologia*

De maneira ampla, interpretamos a palavra *épistémologiques*, que aparece no título de um trabalho, segundo Almouloud (2010). Ela foi destacada, por diferir dos padrões das mensagens emitidas, pois, em geral, focalizaram a forma de abordagem dos estudantes. Além disso, a expressão chamou-nos a atenção, porque veio acompanhada de outras, como *didactiques* e *cognitifs*.

Esse pode ser um indicativo de que o autor apresentará, no interior do trabalho, aspectos referidos à natureza da maneira de pensar e expressar dos aprendizes, à forma de o professor trabalhar tal conteúdo e à provável relação entre tais aspectos. Assim, a mensagem encerrada nesse anúncio demonstra outro interesse dos pesquisadores, mesmo pouco explorado. Esse enfoque aponta para nova direção? O resultado de uma pesquisa à luz da epistemologia pode colaborar para o aprofundamento das reflexões em torno do tema e incluir características diversificadas no debate?

### *Pluridisciplinaridade*

Essa é outra expressão que aponta um aspecto de pouco interesse dos autores da literatura selecionada, porém importante sob o ponto de vista da complementaridade para as investigações. A acepção desse termo é adotada no sentido de Santomé (1998):

A pluridisciplinaridade é a justaposição mais ou menos próxima no mesmo setor de conhecimentos. Por exemplo: física e química, biologia e matemática [ ]. É uma forma de cooperação que visa a melhorar as relações entre essas disciplinas. Vem a ser uma relação de mera troca de informações, simples acumulação de conhecimentos. Um elemento positivo desta intercomunicação é que se produz um plano de igual para igual, sem que uma não importe a outra, baseando-se, por exemplo, em que, em determinado momento, goza de uma situação privilegiada ou de maior prestígio que a outra. (SANTOMÉ, 1998, p.71)

A tentativa de estabelecer relações entre as disciplinas é o que daria origem à chamada interdisciplinaridade. A pluridisciplinaridade é considerada pouco eficaz para a transferência de conhecimentos, pois baseia-se na noção de que cada matéria contribuiu com informações próprias do seu campo de conhecimento, sem ponderar que existe uma inter-relação entre elas. Essa expressão tem a ver com a subcategoria *currículo, didática, instrumentação e ensino*, pois a aprendizagem de inequações pela abordagem pluridisciplinar está relacionada a *como fazer, como ensinar tal conceito, como significá-lo*. Ela pode ser analisada sob o ponto de vista de o conceito de inequações ser um recurso matemático, para modelar algumas situações-problema, inclusive as envolvidas em questões de maximização e minimização. Essa visão pode ser encontrada nos Parâmetros Curriculares Nacionais – terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental (1998), como exposto anteriormente.

De outro modo, analisando o título inteiramente, vemos que o autor se refere a uma pesquisa pluridisciplinar – *Inéquations: par une recherche pluridisciplinaire*. Assim, é possível considerar tal expressão no sentido de uma chamada do autor, Boero (1998), para um trabalho conjunto com investigadores de outras áreas de pesquisa, como: psicologia, sociologia, história, neurociência. Isto pode significar que, para ele, esse tema deve ser pesquisado sob vários aspectos complementares e igualmente importantes para a compreensão do processo desse ensino e aprendizado. Investigar esse tema por um recorte pluridisciplinar do ponto de vista metodológico de ensino ou de pesquisa indica uma direção, para aprofundar as análises.

#### *Nível de escolaridade dos sujeitos de pesquisa*

Pelos títulos, notamos que vários designam, explicitamente, o nível de escolaridade ou a idade dos participantes da pesquisa. Então, por buscas em *sites*, obtivemos, aproximadamente, o nível de escolaridade referente à idade. Assim, fizemos

uma análise, a fim de obter indícios de quais tipos de inequações e níveis de escolaridade foram de interesse nessas investigações. Além do mais, obtendo informações sobre esse aspecto, podemos inferir sobre os tipos das inequações. Em outras palavras, as duas informações podem-se fundir, para refinar e complementar elementos que nos ajudam a elaborar um mapeamento. Dessa maneira, recortamos o levantamento bibliográfico em elementos que podem ser levados em conta quando se quer examinar, de modo mais detalhado, os dados coletados. Segundo Bardin, “procuramos evidenciar indicadores que permitam inferir sobre outra realidade que não a da mensagem” (BARDIN, 2011, p.52).

Levamos em consideração os contextos, de acordo com Franco (2003), julgados indiscutivelmente necessários de ser referidos, próximos ou longínquos da unidade a registrar. Dos nossos documentos, doze destacaram, em seus títulos, o nível de escolaridade (cf. Tab. 13) ou o tipo de inequação pela qual a investigação se interessou, contudo podemos inferir dados da subcategoria *Tipos de inequação da Nível de escolaridade dos participantes*. Dessa forma, é possível continuar a induzir que as inequações lineares e quadráticas foram os tipos que mais interessaram aos pesquisadores. Em geral, (cf. tópico *Tipos de inequações*) tanto no ensino fundamental como no médio, elas são ministradas. Assim sendo, têm representatividade significativa entre os tipos de inequações investigadas.

Tabela 12: Quantidade de trabalhos que explicitam a escolaridade dos sujeitos da pesquisa

Escolaridade	Quantidade
Ensino Fundamental	2
Ensino Médio	5
Ensino Superior	5

Em outro sentido, o foco geral das pesquisas pode não ter-se restringido a elas, pois, no ensino médio, não são ensinadas somente as lineares e as quadráticas. Logo, as outras, como as quocientes, as produtos, as que envolvem raízes quadráticas e as modulares, podem ter sido de interesse dos pesquisadores. Porém, só teremos certeza dessa afirmação, ao analisarmos o interior dos trabalhos. O interesse pelo ensino médio seria por ser um nível de escolaridade intermédio ao fundamental e ao superior? Qual seria o nível de escolaridade mais interessante de ser considerado nas pesquisas? Um estudante de ensino médio ou de Cálculo Diferencial e Integral já deveria estar capacitado para aprender as inequações de forma a envolver toda a amplitude matemática que lhe é pertinente?

## TIPO DE PUBLICAÇÃO

### *Publicações em periódicos*

De 1995 até 1996, o nosso *corpus* de pesquisa só apontou 1 publicação científica. De 1997 até 2010, em todos os anos, houve, pelo menos, um trabalho científico que se ocupou desse tema. Isso mostra o quanto esse assunto tem preocupado pesquisadores de vários países. Por exemplo, Israel, Itália, França, Grécia, Singapura, Brasil, Canadá, EUA, Espanha apresentaram suas contribuições com maior concentração de pesquisadores advindos da Itália e de Israel. Porém, os periódicos que mais despontam advêm da França, como *Repères*, *Recherches en Didactique des Mathématiques* e *Petit x*, e dos Estados Unidos da América, à frente da *Educational Studies in Mathematics*, *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *Journal School Science and Mathematics*, *ZDM Mathematics Education*. Dos periódicos franceses, o *Recherches* tem divulgação internacional e os outros dois, principalmente, continental.

As próximas publicações em periódicos ocorreram em 1997, no *Repères* - um artigo dos franceses Sackur e Maurel (1997), intitulado *Comment recueillir des connaissances cachées en algèbre et qu'en faire ?*, e o periódico *Petit x* divulgou um trabalho de Sackur *et al.* (2000) - *Les inéquations en classe de seconde - une tentative pour enseigner la nécessité des énoncés mathématiques*. Essas publicações são do *Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques*. Faz parte desse Instituto um grupo de Institutos de Pesquisa em Ensino de Matemática, criado na França, para permitir aos professores do ensino primário, secundário e superior trabalhar em conjunto sobre questões relativas à educação matemática.

No ano de 2001, houve três publicações em periódicos: a revista brasileira *Educação Matemática Pesquisa - EMP* apresentou um artigo da israelense Tsamir e da italiana Bazzini (2001): *Can  $x=3$  be the solution of an inequality? A study of Italian and Israeli students*. Os italianos Garuti *et al.* (2001) apresentaram um trabalho na *Rivista di Matematica della Università di Parma: Attivita' sulle disequazioni come contesto per lo sviluppo dei concetti di variabile e funzione*, de divulgação local. As israelenses Tsamir e Almog (2001) contribuíram, no *International Journal of Mathematics Education in Science and Technologies – IJMEST*, de ampla divulgação, com o *Students' Strategies and difficulties: The case of algebraic inequalities*.

Em seguida, em 2002, tivemos mais dois artigos em periódicos, um italiano, na *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, publicação local, com o trabalho *Le disequazioni tra procedure e relazioni: uno studio comparativo su studenti italiani e israeliani*, novamente, entre os pares israelenses e italianos, instaurado por Tsamir e Bazzini (2002), e outro francês, na *Recherches en Didactique des Mathématiques*, intitulado *Un phénomène d'évolution curriculaire: le cas des inéquations au college* por Assude (2002). Em 2003, tivemos uma publicação, por uma brasileira, Alvarenga (2003), na revista mexicana *Revista Latinoamericana de Investigación en Matematica Educativa – RELIME*, com o artigo *La enseñanza de Inecuaciones desde el punto de vista de la teoría APOE*. No ano seguinte, Tsamir e Bazzini (2004) apresentaram, no *International Journal of Mathematics Education in Science and Technologies*, o artigo *Consistencies and inconsistencies in student's solutions to algebraic 'single value' inequalities*.

As próximas publicações ocorreram em 2006, 2007 e 2009. A revista *Focus on Learning Problems in Mathematics* (Focus on LPM) divulgou o artigo das israelenses Tsamir e Reshef (2006), intitulado *Student's Preferences When Solving Quadratic*

*Inequalities*, uma publicação estadunidense de ampla divulgação. O periódico *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education* - EJMSTE contribuiu com o trabalho dos espanhóis Blanco e Garrote (2007): *Difficulties in learning inequalities in students of the first year of pre-university education in Spain*. Os editores de tal revista são europeus e asiáticos, e, a cada espaço de tempo, sua editoração fica a cargo de um país. Agora está à frente a Turquia. O *Journal School Science and Mathematics* (JSSM) colaborou com um artigo de Rowntree (2009), nomeado *Students' understandings and misconceptions of algebraic inequalities*, localizado na sessão de resumos de pesquisas. É possível observar que, apesar de periódicos americanos, como os ESM, o Focus on LPM, o JRME e o JSSM, terem publicado artigos sobre esse tema, poucos pesquisadores estadunidenses tiveram a autoria de trabalhos.

#### *Publicações em eventos*

O evento que mais proporcionou socialização e disseminação da preocupação com o ensino e a aprendizagem de inequações, sem dúvida, foi organizado pelo Grupo Internacional de Psicologia da Educação Matemática (IGPME), pois a diversidade de nacionalidades dos participantes favorece, enriquece e fortalece o debate e a reflexão. Esse evento ocorre em países diferenciados a cada ano. O PME XXVIII, ocorrido na Noruega, em 2004, concentrou o maior número de trabalhos sobre esse assunto e criou o *Research Forum 02 (RF02): Algebraic Equations And Inequalities: Issues For Research*. Participaram dele pesquisadores de variados países, principalmente Itália, França e Israel.

Encontramos publicações no evento *Conference of the European Society for Research in Mathematics Education* – CERME, tendo em vista o grande interesse apresentado por autores italianos e franceses sobre o assunto. Observamos publicações de eventos, como: *Seminario Matematico - Università e Politecnico Di Torino* – SMUPT, *Convegno Internucleri (CI)*, *Mediterranean Conference on Mathematical Education (MCME)*, *International Conference On Teaching Of Mathematics – at the undergraduate level (ICTM)*, *Commission Internationale pour l'Étude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques (CIEAEM)*, *International Commission on Mathematical Instruction Study Conference (ICMI)*, *Annual Conference of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics*

*Education* (PME NA) e *Research Undergraduate Mathematics Education Conference* (RUME) (cf. Tab.13).

Tabela 13: Eventos e quantidade de trabalhos

EVENTO	ÉPOCA	QUANTIDADE	%
PME	De 1991 a 2011	20	46,5
SFIDA	De 1997 a 1999	11	25,6
CERME	De 2001 a 2005	3	7
ICMI	2001	2	4,6
SMUPT	1994	1	2,3
CI	1997	1	2,3
CIEAEM	2002	1	2,3
ICTM	2002	1	2,3
MCME	2003	1	2,3
PME NA	2006	1	2,3
RUME	2011	1	2,3
<b>TOTAL</b>		<b>43</b>	<b>100</b>

É interessante observar que os *Séminaires Franco-Italien de Didactique de L'Algèbre* - SFIDA de 1997 a 1999, assim como o fórum RF 02 do PME XXVIII, foram específicos para discussões, reflexões e socializações sobre o ensino e a aprendizagem de equações e inequações.

Há trabalhos que repetem o título ou apresentam poucas alterações de um evento para outro. Porém, notamos que o número de publicações em periódicos é inferior às publicações em anais de eventos. Isso também pode ter contribuído para a propagação do interesse sobre o tema, tendo em vista que pesquisadores de diversos países participam dos eventos e têm acesso às publicações oriundas deles.

O PME tem uma característica que visa promover, principalmente, uma compreensão mais profunda dos aspectos psicológicos de ensino e de aprendizagem da matemática e suas implicações. O PME é uma organização de pesquisadores criada em 1976, no Congresso Internacional em Educação Matemática (ICME3), em Karlsruhe, Alemanha, cujos objetivos são:

- (i) promover contatos internacionais e intercâmbio de informações científicas no campo da educação matemática;
- (ii) promover e estimular a pesquisa interdisciplinar na área referida;
- (iii) promover um entendimento mais profundo e correto da psicologia e outros aspectos do ensino e da aprendizagem da matemática e suas implicações.

(Retirado de <http://www.igpme.org/>. Acesso em: jan. de 2012. Tradução nossa do inglês)

Será que essa marca, de fato, dá conta de entender toda a problemática que envolve o nosso tema? Seria esse evento o maior responsável em propiciar uma reflexão

a respeito desse assunto? Haveria outras dimensões, além da psicológica, que deveriam ser levadas em consideração nessa reflexão?

### *Publicações de teses*

No Brasil, encontramos, somente, uma tese sobre essa temática, defendida em 2008, intitulada *O uso de vários registros na resolução de inequações - uma abordagem funcional gráfica* (De SOUZA, 2008). Outro trabalho de doutoramento foi defendido no México, porém os dados foram coletados no Brasil: *Inecuaciones: un análisis en las construcciones mentales de los estudiantes universitarios* (ALVARENGA, 2006). Tivemos acesso, também, a duas teses defendidas nos Estados Unidos: *Student's mental act of anticipating in solving problems involving algebraic inequalities and equation* (LIM, 2006) e *Graphing technology and its effect on solving inequalities* (WEBER, 1998). Localizamos uma na Tailândia, *Factors influencing the teaching and learning of equations and inequations in two government secondary schools in Thailand* (VAIYAVUTJAMAI, 2004), e outra no México, *Un planteamiento de resignificación de las desigualdades a partir de las prácticas didácticas del profesor: un enfoque socioepistemológico* (BORELLO, 2010), com dados coletados nesse mesmo país.

Pela grande quantidade de eventos realizados em vários países, observamos em nosso inventário que o número de teses é pequeno. Contudo, devemos levar em consideração o difícil acesso a esse tipo de publicação defendida fora do Brasil. Para realizar nosso mapeamento, examinamos as referências bibliográficas de todas as publicações e buscamos os trabalhos em *sites* de programas de pós-graduação ou fizemos contato com o autor. Estamos certos de que, pelo interesse nesse tema, pela quantidade de publicações e pelos países diversificados que apresentaram trabalhos sobre essa temática, existem teses que não foram aqui elencadas.

### **DATA DA PUBLICAÇÃO**

No início da década de 91, houve as publicações sobre essa temática, das autoras Sfard e Linchevski, e outras continuaram, de forma explícita nos títulos, até 1994. De 1995 a 1996, tivemos, somente, uma publicação elencada. Elas reiniciam em 1997, e, até 1999, anualmente, houve dois ou mais trabalhos sobre o tema, porém o maior índice dos apresentados ocorreu em 1998. Ressaltamos que, nesse ano, houve dois SFIDA,

além do PME XXII. Na década seguinte, em todos os anos, houve, pelo menos, uma apresentação de artigo ou tese sobre inequações, e o ano de 2004 desponta com a maior quantidade de pesquisas publicadas (cf. Gráf. 6). Isso pode ter ocorrido por ocasião do Fórum RF02, no PME XXVIII, dedicado, principalmente, a esse tema. Nesses dados, notamos que, na última década, a preocupação pelo tema foi estável e está presente, pois, em 2011, houve, pelo menos, 2 publicações a esse respeito.

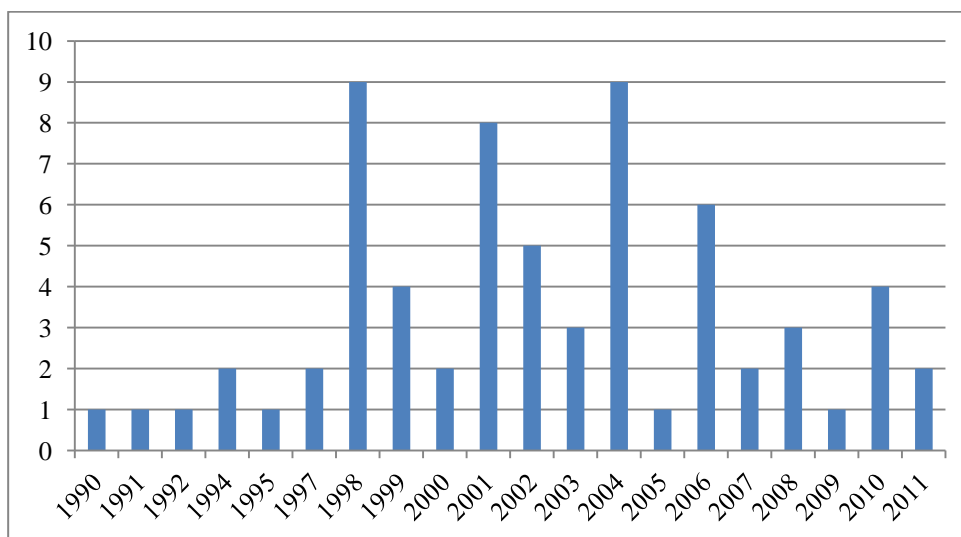


Gráfico 6: Dados relativos à quantidade de trabalhos em alguns anos

Observamos crescente quantidade de publicações a partir de 1994. O período entre 1998 até 2006 foi rico em produção sobre o tema e, em média, apresentou 5 trabalhos por ano, em nove anos. Depois dessa época, de 2007 até julho de 2011, observamos em torno de dois trabalhos por ano. Esse é um indício de que o tema não está esgotado, que pode ser explorado de forma mais aprofundada. Notamos, pelo levantamento exposto no gráfico 6, que, até a data de julho de 2011, havia pesquisadores perquirindo o tema. O ano de 1990<sup>38</sup> foi destacado, por ter sido o único elencado no artigo de Linchevski e Sfar (1991), diretamente relacionado ao tema abordado na publicação das autoras, não pela palavra *inequação*, mas pela palavra *equivalence* (de equações), e é de equivalências e transformações de equações e inequações de que trata o trabalho delas. Não houve, como afirmado anteriormente, nenhum outro trabalho, pelo nosso inventário, citado pelas autoras, que se relacionasse com essa característica.

<sup>38</sup> Apesar de em Linchevski e Sfar (1991) estar datado como 1990, a publicação foi 1991.

## PAÍS DA EDITORAÇÃO

Para complementar as análises, fizemos um levantamento dos países de editoração, pois isso pode dar indicativos de que tais países têm “certo conhecimento” da problemática envolvida nesse tema. Dizemos *certo conhecimento*, pois, neles, foram realizados os eventos aqui elencados, ou foram os países de editoração dos periódicos com corpo editorial, ou foram os locais de divulgação das teses. Então, é possível que exista, ao menos, um pesquisador em cada um desses países que teve acesso à temática aqui investigada.

Por meio de um gráfico sobre a quantidade de editorações, notamos que a Itália proporcionou um ambiente propício às discussões sobre o assunto de forma mais acentuada que outros países (cf. Gráf. 7). É interessante observar que os Estados Unidos da América, apesar de terem publicado pouco sobre frutos de pesquisas nessa linha, aparecem com uma quantidade significativa de editorações. A Noruega também se encaixa nesse contexto, pois, lá, ocorreu o PME XXVIII e o RF02, por isso há um número expressivo de editorações. No nosso mapeamento, não tivemos acesso a nenhum trabalho cujo autor fosse norueguês.

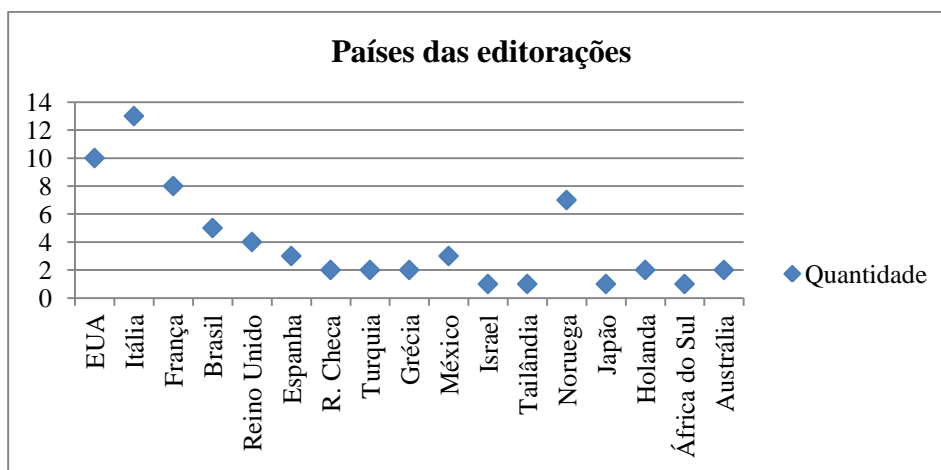


Gráfico 7: Quantidade de editorações nos respectivos países



Figura 31 - Distribuição no mapa mundi dos países que editoraram artigos sobre a temática

Notamos que os países de editorações se encontram distribuídos nos cinco continentes: América, Europa, Ásia, Oceania e África (cf. Fig. 31). Os resultados dessa categoria corroboram os obtidos nos itens *Autores* e *Tipos de publicações*, isto é, o tema está bem disseminado.

Essa categoria pode ser analisada em conjunto com outras duas: *Publicações em eventos* e *Publicações de teses*. Em geral, os locais de realização dos eventos são os mesmo de editoração, por isso não acrescentamos mais uma figura para outra visualização da distribuição das pesquisas. Muitos países onde os autores trabalhavam também foram os de realização de eventos e editoração, como Itália, França, Israel, EUA e Brasil. Isto reforça os indicativos do grande interesse dos autores desses países a publicar sobre o tema, porém as características dos participantes das pesquisas de campo, do currículo, do ensino, entre outras, só serão certificadas quando for analisado o interior dos trabalhos ou de seus resumos, caso tragam essas informações. Acreditamos que os investigadores locais, provavelmente, tiveram acesso mais facilmente às pesquisas conduzidas em outros países, e isso poderia ter contribuído para despertá-los a investigar como os estudantes de seus países *abordavam* tal conteúdo, como *era direcionado* o currículo e como *ocorreu* o ensino. Em outros modos, os investigadores noruegueses, estadunidenses, holandeses e outros tiveram interesse no tema ou somente editoraram as publicações? Quais são as características dos participantes das pesquisas de campo? Para novas investigações, podemos indicar os

verbos: *abordavam*, *era direcionado* e *ocorreu* no presente, isto é, os pesquisadores dos países onde serão realizados os próximos eventos interessar-se-ão pelo tema? Perguntas diretivas para futuras pesquisas poderiam fundamentar-se em, por exemplo: como os estudantes desses países *abordam* as inequações? Como *estão* direcionados seu ensino e seu currículo?

## RELAÇÕES ENTRE CATEGORIAS

Miles e Huberman (1994) apontam 13 táticas que podem ajudar a dar sentido e gerar significados aos dados. As estratégias são elencadas da mais concreta à mais conceitual e abstrata:

1. observar os padrões, os temas;
2. ver a plausibilidade;
3. agrupar “o que se passa com o quê”;
4. elaborar metáforas - como nas três últimas estratégias, é uma forma de alcançar maior integração entre diversas peças de dados, vistas no sentido de comparar duas coisas pelo ângulo de similaridades, ignorando diferenças;
5. contabilizar é também uma forma familiar para ver “o que está lá”;
6. fazer contraste ou comparações é uma tática generalizada que aguça a compreensão;
7. particionar variáveis - diferenciação, por vezes, é também necessário;
8. subsumir elemento particular em geral – precisamos, outrossim, de táticas para ver as coisas e suas relações de forma mais abstrata;
9. criar um análogo de uma técnica familiar à quantitativa – isto significa uma técnica estatística para representar grande número de medidas variáveis em termos de pequeno grupo de variáveis não observáveis (*factoring*);
10. observar as relações entre as variáveis;
11. encontrar variáveis intervenientes;
12. discutir a construção de uma cadeia lógica de evidências- agregar, juntar sistematicamente uma compreensão coerente de dados;
13. fazer uma coerência conceitual ou teórica.

Desses 13 elementos elencados por tais autores, salientamos os de número 4, 6, 7, 10 e 11. Dessa forma, assumimos, então, uma estratégia mais abstrata. Consideremos, novamente, as categorias e suas subdivisões do quadro 1.

A subcategoria *Foco na aprendizagem, no tipo de abordagem* e a *Foco no ensino: currículo, didática, instrumentação, instrução* foram tratadas nos títulos de forma isoladas, exceto, explicitamente, em 2. Porém, se levarmos em consideração os títulos seguintes, podemos elevar esse número para 4: *Teaching Implications Deriving from a Comparative Study on the Instruction of Algebraic Inequalities* e *The Mutual Influence of Theory and Practice in Mathematics Education: Implications for Research and Teaching*. No primeiro, a terminologia *Teaching Implications Deriving from a Comparative Study* remete a possível trabalho que visa, diretamente, à aprendizagem. No segundo, consideramos as expressões *Theory* e *Practice* como estreitamente relacionadas, da mesma forma, ao ensino e à aprendizagem, porém, mais à frente do título, notamos um recorte dos autores quanto à pesquisa e ao ensino, por isso não os contabilizamos diretamente. Suponhamos, então, que somente 2 publicações emitem, explicitamente, uma correlação entre o ensino e a aprendizagem. Para nós, isso significa que se analisam o ensino com fins de aprendizagem, ou vice-versa, porém, nem sempre que ensinamos, ocorre a aprendizagem e nem sempre que analisamos a aprendizagem, reflete-se em repensar o ensino. Nesses 2 títulos, os autores explicitam uma preocupação, estabelecendo alguma relação entre tais elementos da educação escolar.

Na mesma categoria *Títulos*, observamos que 2 trabalhos explicitam o recorte quanto à pesquisa e ao ensino: *Reflections on Research and Teaching of Equations and Inequalities* e *The Mutual Influence of Theory and Practice in Mathematics Education: Implications for Research and Teaching*. Outros trabalhos, *Inequalities in Mathematics Education: a Need Complementary Perspectives* e *PME Inequalities Production: a Survey*, induzem-nos a pensar que, também, trata-se de uma relação com a pesquisa em educação matemática: o primeiro por conta das expressões após os dois pontos, e o segundo pela expressão *survey*. Esses elementos podem sugerir-nos que pouquíssimas publicações tiveram por objetivo tratar do tema.

*Tipos de inequações* e *Nível de escolaridade dos sujeitos de pesquisa* apresentam elementos complementares, apesar de características disjuntas, pois, como analisado, implicitamente, o nível de escolaridade pode revelar o tipo de inequação, em alguns currículos, por certo, os considerados no nosso trabalho: brasileiro, mexicano, estadunidense e português. Nos itens *Relação entre equações e inequações*, *Funções*,

*Tipos de inequações*, as funções podem ter sido utilizadas no tratamento das relações entre inequações e equações, e, aliás, essa possibilidade permite visibilidade quanto às diferenças nas manipulações algébricas e às possíveis translações de propriedades inválidas. Igualmente, elas podem ter sido utilizadas na abordagem de alguns autores quanto ao tipo de inequação.

Esse misto de tratamento é indicado por pesquisadores, como Duval (2003), Machado (1995). Na resolução e na interpretação de uma inequação, a transferência para as funções e seus gráficos pode auxiliar a melhoria da compreensão, mas o ideal é que se extrapole essa representação, fazendo uso, também, das manipulações, talvez em paralelo. A resolução de uma inequação como  $\frac{x+1,4}{x-5} \geq (x^2 + x)$  (1) pode ser imediatamente tratada por gráfico (cf. Gráf. 8) ou transformada ao ponto de colocá-la em um modo diferenciado e, posteriormente, esboçar o gráfico da função correlacionada, isto é,  $\frac{-x^3+4x^2+6x+1,4}{x-5} \geq 0$  (2) (cf. Gráf. 9). Pode ser uma estratégia de ensino utilizar as duas maneiras de observação para intuir a solução. A primeira tática tem seus méritos, esboço direto, sem manipulação, porém a visualização da solução já não é tão manifesta quanto no gráfico 9, pois, na primeira, necessita-se analisar a igualdade, para, depois, comparar-se. A utilização de algum *software* será imprescindível.

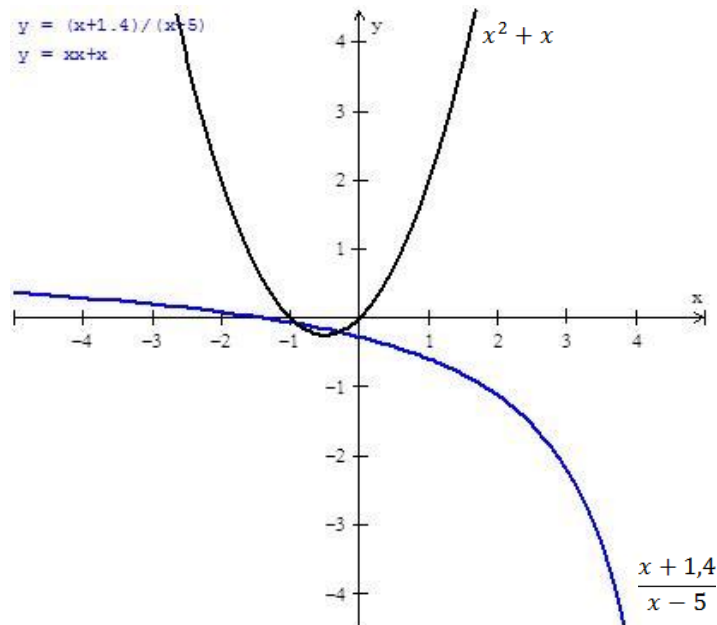


Gráfico 8: Esboço das 2 funções envolvidas em (1)

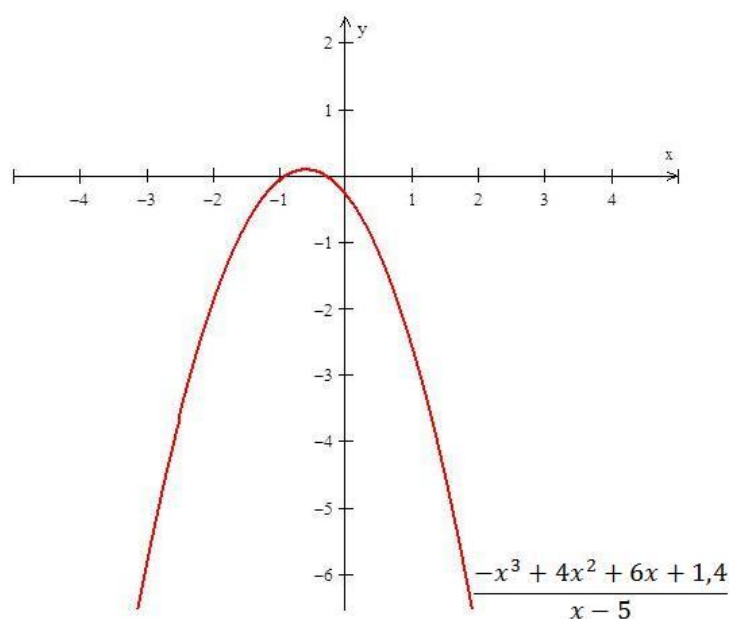


Gráfico 9: Esboço da expressão envolvida em (2)

Ademais, *Pluridisciplinaridade e Referenciais teóricos* podem manter alguma relação com o que o autor da publicação *Inéquations: par une Recherche Pluridisciplinaire* prediz no título, isto é, segundo a expressão *recherche* (*pesquisa*), que suscita ou suscitará um referencial teórico diferenciado dos demais ou concatena alguns dos elencados.

As subcategorias *Referenciais teóricos* e *Foco no ensino: currículo, didática, instrumentação, instrução* trazem complementaridade ao tema, pois um referencial teórico pode nortear a prática pedagógica do professor, o currículo, o ensino. Pode ser que, no interior das publicações, alguma relação a respeito disso seja desvelada.

*Tipo de publicação* e *País da editoração* são categorias que, apesar de mutuamente exclusivas, remetem a informações convergentes, em especial, tipo de publicação e país de editoração, pois, em geral, os locais de realização dos eventos são os mesmos da editoração, e os resultados das análises não podem divergir. A *Data da publicação* não deve distanciar-se, demasiadamente, da data da realização do evento, pois, caso contrário, haverá alguma incoerência nos dados. Nós não elencamos as datas, por estarmos certos de que seriam dados desnecessários. As informações obtidas das categorias *Autores* e *Tipos de publicações* são coerentes com países de editoração, publicações em eventos e publicações de teses, caso contrário, os resultados das análises não são confiáveis.

## CONSIDERAÇÕES

A análise de conteúdo busca compreender uma mensagem emitida em um tipo de comunicação, na qual há sempre o emissor e o receptor, os polos de inferência propriamente ditos, além da mensagem e o seu suporte ou canal. Sendo o emissor o produtor da mensagem, que pode ser um indivíduo ou um grupo, a mensagem que ele emite representa-o. O receptor pode ser um indivíduo ou um grupo, e o estudo da mensagem pode fornecer dados sobre o público a que ela se destina. Na análise da mensagem, é possível estudar o continente ou o conteúdo, ou os significantes ou os significados, ou o código ou a significação (BARDIN, 2011). Nesse contexto, estivemos atentos, ao destacarmos, em nossa análise, elementos que nos permitiram inferir conhecimentos de forma prudente e interpretar além das aparências, sem perder de vista o rigor. Os resultados obtidos podem e devem ser confrontados a outros que visam analisar o interior dos trabalhos selecionados. Eles podem, da mesma forma, ajudar a interpretar os artigos e as teses do nosso *corpus* de pesquisa.

Pela análise somente dos dados bibliográficos, observamos que o interesse maior de pesquisa sob esse foco foi dos israelenses e dos italianos, concentrando-se em duas pesquisadoras, uma de cada um desses países. Em geral, muitos trabalhos estão relacionados à maneira de resolução e compreensão dos estudantes, principalmente do ensino médio e superior.

As datas que contribuíram com maior quantidade de publicações foram 1998 e 2004, por ocasião de dois SFIDA e do RF02 no PME XXVII, respectivamente. Além disso, vários quadros teóricos foram utilizados. Alguns trabalhos tiveram interesse em observar registros diversos, como o gráfico e o algébrico. Várias pesquisas focalizaram a correlação entre equação e inequação. As autoras que, supostamente, foram as precursoras desse debate pouco publicaram sob essa ótica, depois de 1994. Apesar de a maioria dos trabalhos estarem na língua inglesa, os americanos, os ingleses, os australianos e outros de língua inglesa pouco ou nada publicaram a respeito do tema. Os SFIDA e o PME concentraram os trabalhos nessa linha de pesquisa e foram os espaços onde houve mais debate.

Apesar de termos mapeado vários artigos publicados em anais de eventos, não tivemos muitas teses de doutorado e artigos apresentados em periódicos nacionais e

internacionais. Pouquíssimos trabalhos trataram do currículo, do ensino e da didática. Isto nos aponta para uma necessidade de aprofundar as investigações nessa linha e, quem sabe, poderia tornar-se uma tendência de pesquisa sobre esse tema. O tratamento de inequações no ensino superior chamou a atenção de alguns estudiosos e pode ser um indício de que mesmo os universitários enfrentam obstáculos em lidar com o conceito.

Outra observação é a de que, pelos temas dos trabalhos, houve pouco interesse em estudar o comportamento dos estudantes frente a conteúdos correlatos, como: a ordem e as propriedades do conjunto dos números reais, o uso dos conectivos lógicos, a interpretação de intervalos, a interpretação do sinal de desigualdade (somente um trabalho apresentou essa proposta de forma explícita) e o uso da ideia de equivalência e transformação entre inequações (explicitamente colocado, só encontramos um trabalho). Enfim, sem analisar o interior dos trabalhos inventariados, já podemos checar nossas hipóteses iniciais e contribuir para uma discussão mais enriquecida, científica, direcionada e objetiva para o ensino e a aprendizagem de inequações.

Ao recorrermos aos contextos, aqui considerados como as palavras e as expressões que acompanham as unidades de registros, por exemplo, as nacionalidades, os níveis de escolaridade dos participantes, os tipos de inequações explícitas nos títulos, as datas e os países envolvidos, pretendemos inferir conhecimentos relativos às condições de produção ou de recepção. Ao apelarmos por indicadores quantitativos, almejamos extrair vestígios e manifestações de informações sobre estados, fenômenos e fatos implícitos que apenas uma leitura exaustiva pode fornecer. Esses resultados, ainda que parciais ou exteriores, remetem a informações, como:

- as pesquisas foram restritivas;
- o objetivo de muitas delas foi o erro e os entraves dos estudantes em relação às inequações lineares e quadráticas (cf. subcategoria *Formas de abordagem*);
- as maneiras de resolver dos estudantes universitários também foram interesse das investigações;
- há necessidade de mais pesquisas sobre o tema, a fim de complementar as reflexões.

Indicamos a necessidade de uma investigação mais centrada no ensino e no currículo e uma pesquisa sobre a aprendizagem também sob a visão epistemológica. Corroboramos Cantoral *et al.* (2000), ao comentarem que:

O ensino de matemática tiraria proveito das investigações sobre o pensamento matemático e sobre as formas que se concebe o

conhecimento matemático e a sua construção, se estas fontes epistemológicas fossem analisadas com mais detalhes. No ensino atual, estes fatos costumam ser desconhecidos tanto pelos professores como pelos elaboradores de currículos ou autores dos livros textos, de maneira que se corre, com frequência, o risco de perder um enorme espectro de possibilidades para enriquecer a ação didática. (CANTORAL, *et al.*, 2000, p.35). (tradução nossa do espanhol).

Nossas interpretações parecem indicar que os pesquisadores pouco se concentraram em analisar ou influenciar a organização curricular, a localização de inequações na grade disciplinar (antes, depois ou em paralelo a equações, junto com funções ou isoladamente) e refletir sobre uma didática que possibilite aos estudantes mais entendimento sobre o assunto. A origem dos dados é variada, e a idade deles é ampla, pois levantamos publicações em 22 anos de investigações, apresentamos quem as produziu e inferimos algumas motivações e circunstâncias, porém podemos levantar mais dados das outras categorias e evidenciar outras relações. Mais investigadores brasileiros poderiam trabalhar com outros parâmetros, além dos já evidenciados, pois existe pouca colaboração do país. Os estudos já produzidos não retratam o aprofundamento que se faz necessário ao tema. Como sugestão, recomendamos explorar tais enfoques, pois poderia beneficiar o trabalho dos professores em sala de aula. Baseados em resultados científicos, eles direcionariam os currículos escolares e as metodologias de ensino no sentido de maximizar a compreensão dos estudantes a respeito tanto desses conceitos como dos correlacionados a ele.

## CAPÍTULO 5

---

### ANÁLISE DA SEGUNDA TABELA

Neste capítulo, expomos a análise da segunda tabela, elaborada conforme as seguintes categorias:

- **Objetivo da publicação** – de acordo com os resumos analisados e algumas leituras do trabalho completo, destacamos os objetivos de cada publicação.
- **Referencial matemático e teórico-educacional** – separamos os referenciais utilizados pelos pesquisadores que se basearam no tipo de ferramenta matemática utilizada para coleta e análise dos dados e na abordagem teórico-educacional utilizada, que, seja qual for a área de origem, entendemos ser a norteadora das análises e ou da coleta de dados na pesquisa educacional.
- **Metodologia de pesquisa e coleta de dados: teórica e de campo** – à medida que as leituras se refinavam, extraíamos a metodologia de pesquisa utilizada pelo investigador que separamos em dois tipos: teórica e de campo. Entendemos que a teórica se fundamenta em trabalhos do tipo documental, propõe-se a realizar análises históricas e revisão de estudos ou processos. Por sua vez, a metodologia de campo ocorre quando os dados do estudo são coletados diretamente “no campo” (FIORENTINI; LORENZATO, 2007).

A fim de situar-nos, recordemos a formação da tabela 1 (cf. Fig. 27). As duas primeiras colunas tratavam de caracterização com relação à identificação do artigo: autor(es) e título. Na tabela que subsidia os resultados aqui apresentados, as duas primeiras identificações são mantidas, porém descritas somente por algumas palavras, ou pedaços delas, com o intuito de orientar, mas sem desviar o foco das informações (cf. Fig. 32). Para não mudar a formatação do texto e adequar-se ao *layout* “retrato”, adaptamos o formato da primeira tabela à nova, pois, em todas elas, as páginas estavam em estilo “paisagem”. Utilizamos uma legenda com o objetivo de minimizar o número

de páginas, maximizando informações e correlações. Supomos que, assim, conseguiríamos comparar mais dados e interpretá-los melhor, sob uma visão holística. Apresentamos uma parte da legenda elaborada no apêndice II.

Da mesma forma, algumas caracterizações não apresentaram as frases e ou as palavras completas. Por exemplo: *c. pseudoestruturais* significa “concepções pseudoestruturais”; *proc. primar.* corresponde a “processos primários”. Os números na coluna *campo* retratam a quantidade de participantes da pesquisa, e a faixa etária está entre parênteses. A criação desses códigos teve o objetivo de facilitar a observação de padrões, a minimização de páginas e a visualização integral dos dados. Miles e Hubermann (1994) relatam que, antigamente, alguns pesquisadores qualitativos não eram muito explícitos sobre como atribuíam significado às unidades de partes de dados:

O conselho convencional era ir por transcrições ou notas de campo com um lápis, marcando unidades que eram coerentes, porque lidam com o mesmo tema, e que, em seguida, eram divididas em tópicos e subtópicos, em diferentes níveis de análise (cf. Agar, 1980, p.104ff). Esses tópicos identificáveis (temas ou *gestalts*), presumivelmente, ocorreriam com alguma regularidade. Eles seriam marcados com uma legenda (um código). Com uma tesoura, cartões de arquivos ou computadores, os tópicos podem ser finamente diferenciados, agrupados e remarcados. (MILES; HUBERMANN 1994, p.57, tradução nossa)<sup>39</sup>.

Com o intuito de facilitar a leitura e promover a observação de regularidades, elaboramos uma legenda para algumas informações a ser registradas na tabela.

---

<sup>39</sup> The conventional advice was to go through transcripts or field notes with a pencil, marking off units that cohered because they deal with the same topic and then dividing them into topics and subtopics at different levels of analysis (cf. Agar, 1980, p.104ff). These identifiable topics (or themes or *gestalts*) presumably would recur with some regularity. They would be marked with a shorthand label (a code). With scissors, file cards, or computers, the topics could be more finely differentiated, clustered, and even relabeled.

	Autor	Título	Objetivo	Referencial		Metodologia	
				Mat.	Edu.	Campo	Teórico
1	steinberg sleeman katorza	álgebra student's	Analisar se os estudantes sabem o significado de equações equivalentes e de transformação	E1°	ñ	21 pares de equações 1equação para resolução EF (final). 96 estudos	
2	linchevsky sfard 91	r. w. reasons as processes..	C. pseudoestruturais. relações necessárias para referir-se a nova noção matemática e antigas	e t	proc. primar.; secund.. c. instrum.l (s)/opera c. e relac.(s)/ estrut.	pares de equação e inequação e ;~e,t,~t - 280 (15-17)	
3	sfard linchevsky	equations and inequalities –	Testar hipóteses de compreensão dos estudos sobre equação e inequação	Ñ está expl.	Concp. Pseudoe strut.	EM	
4	sfard linchevsky 94	the gains and pitfalls ...	Discutir situações algébricas sob a perspectiva da teoria da reificação, c. pseudoestruturais	e t	reificação c.pseud./ operac. e estr.	entrevistas	
5	sfard 94 linchevsky	between arithmetic and	Mostrar concepções pseudoestruturais em álgebra	L,Q,	reificação c.pseud./ operac. e estr.	Estudo Empírico EM	

Figura 32- Exemplo de parte da segunda tabela

Essa análise está direcionada, de forma implícita, pelos resultados da análise da tabela anterior, pois revelou importantes fatos que, somente por uma investigação interior aos trabalhos, poderíamos obter outros que corroborassem os anteriormente obtidos ou divergissem deles (cf. Fig.33).

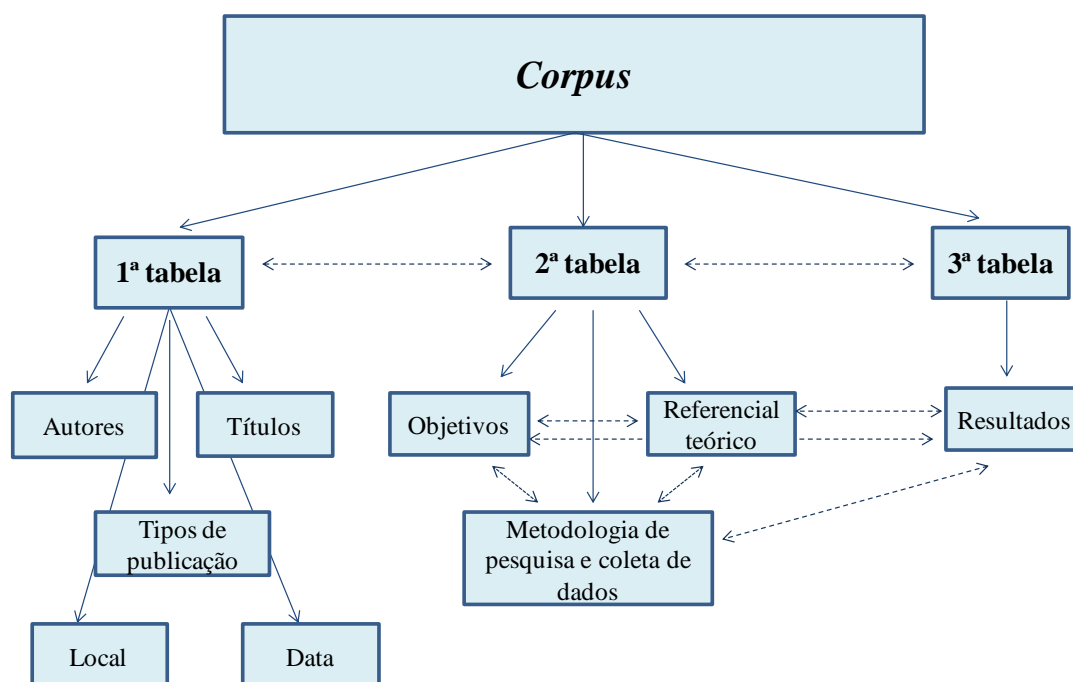


Figura 33: Esquema ilustrativo do tratamento do *corpus*

Neste texto, optamos por deixar, na língua original, as transcrições de palavras e frases que nortearam nossas análises, mas as que serviram apenas para dar fundamento legal a algumas argumentações, as que corroboram, justificam e complementam nossas ideias são apresentadas já traduzidas para o português. Em ambas, registramos a versão em português ou na língua original no rodapé, com o intuito de não conduzir o leitor ao folhear desnecessário.

Como analisar é um processo de revelar conhecimentos, ao fazer o mapeamento de pesquisas relacionadas ao ensino e à aprendizagem de inequações, precisamos efetuar cuidadosa observação dos elementos envolvidos, dos procedimentos e das técnicas a ser utilizadas para evitar ou, pelo menos, minimizar possíveis distorções. Desta forma, a representação e a apresentação dos resultados devem dispor de artefatos visíveis dotados de autonomia e com propriedades especiais, para servir como guia, como meio de comunicação de conhecimento. Devemos realizar um estudo meticuloso dos dados com fim de perfilar a estrutura e certo número de descrições significativas, a compreensão e a classificação delas segundo uma escala de valores, conforme a estrutura e os traços indicados (BIEMBENGUT, 2008). Nessa etapa, analisamos alguns artigos em seus interiores, e isso nos possibilitou acrescentá-los em nossa seleção, perfazendo o total de 67 trabalhos. O quadro 4 apresenta as categorias e as subcategorias.

<b>Categorias</b>	<b>Subcategorias</b>	
<b>Objetivo da publicação</b>	Tipos de resoluções, de forma geral	
	Metodologias de ensino e teorias	
	Pesquisas teóricas	
	Currículo	
<b>Referencial matemático e teórico-educacional</b>	Referencial matemático	Tipos de inequações
		Abordagem matemática correlacionada
	Abordagem interdisciplinar reflexiva	Contexto sociocultural
		Epistemológico
		Histórico
		Análise de textos oficiais e livros didáticos
		Tecnologias
		Pesquisa pluridisciplinar
Referencial teórico-educacional		
<b>Metodologia de pesquisa e coleta de dados</b>	Teórica	
	Campo	Nacionalidade dos participantes

Quadro 4: Categorias e subcategorias

## OBJETIVO DA PUBLICAÇÃO

Dividimos os interesses e os objetivos de cada publicação em 4 subcategorias segundo o foco: tipos de resoluções de forma geral, metodologia de ensino e teorias, pesquisas teóricas e currículo. As subcategorias surgiam à medida que a tabela era analisada. Ressaltamos que ela foi elaborada segundo nossas traduções dos objetivos, pois as publicações selecionadas apresentavam-se em cinco línguas diferentes (cf. Fig. 34).



Figura 34: Grupos de objetivos

## TIPOS DE RESOLUÇÕES, DE FORMA GERAL

Essa foi uma das características que fundamentaram, se não todas, quase todas as pesquisas. Isto é, pelos objetivos, foi possível notar que os pesquisadores estiveram interessados em observar como os estudantes resolviam as inequações dos mais variados níveis escolares e tipos com ênfase, por exemplo, na inequação de primeiro e segundo grau. Os participantes foram de diversos países, em especial Israel e Itália, porém outros estiveram presentes, como os da Espanha, do Canadá, do Brasil, do México, da Grécia e dos EUA.

Apesar do interesse em analisar como os estudantes resolvem inequações, a interpretação ateu-se aos erros cuja quantidade parece ter sido uma preocupação constante. Destacamos alguns trechos dos textos e ou dos resumos de publicações com a finalidade de registrar, originalmente, os interesses dos pesquisadores. Ao mesmo tempo, tais trechos visam corroborar nossas afirmações.

In the present study we shall concentrate on the notion of equation and inequality. In a series of experiments, one of which will be reported in the sequel, we tried to have a deeper insight into the ways students confer meaning upon algebraic expression. Special effort was made to trace down pseudostructural conceptions (LINCHEVSKY; SFARD, 1991, p. 319)<sup>40</sup>.

*Concepções pseudoestruturais* consistem nas que os estudantes construíram e apoiaram-se, para pseudoaprender, isto é, quando ocorre uma quebra na cadeia processual-estrutural de formação de um conhecimento matemático, a aprendizagem pode prosseguir, porém não houve a interpretação correta de conceitos, o que acarretará o impedimento da sequência e da maturação matemática em contextos que exigem a interpretação adequada. Assim, o estudante continua o processo de aprendizagem, mas de forma mecânica, algoritmizada. Apresentamos mais um extrato de um trabalho cuja finalidade é entender como os estudantes resolvem inequações.

This paper describes a study, examining the reaction of 164 Israeli and 167 Italian high school students to similarly structured task that asked whether the solutions of pairs of rational and linear inequalities are

---

<sup>40</sup> No presente estudo, concentramo-nos na noção de equação e desigualdade. Em uma série de experimentos, uma das quais será relatada na sequência, tentamos ter uma visão mais profunda das formas com que os estudantes dão sentido para a expressão algébrica. Foi feito um esforço especial, para rastrear concepções pseudoestruturais.

identical (i.e., the same set of solutions) and why (TSAMIR; BAZZINI, 2003, p.258)<sup>41</sup>.

Esse é um dos trabalhos que relatam experiências com alunos dos dois países, frutos da parceria entre Tsamir e Bazzini. O próximo fragmento é retirado do trabalho dos gregos Verikios e Farmaki.

We present and analyse here some material on understanding and handling the inequality concept. Our focus is on difficulties that came up in going from equality and inequality (VERIKIOS; FARMAKI, 2006, p.321)<sup>42</sup>.

Essa é uma publicação com objetivos similares aos anteriores: analisar a compreensão e o manuseio de inequações. A próxima citação pertence aos trabalhos de Gallo e Battú, que, igualmente, manifestam interesse nos mesmos objetivos.

Questa ricerca si colloca tra quante, ormani molte, si sono occupate di analizzare gli aspetti concettuali e procedural della manipolazione algebrica, vendendo i loro rispettivi ruoli nella costruzione del sapere algebrico (GALLO; BATTÚ, 1998, p. x-25)<sup>43</sup>.

Novamente, autoras italianas expõem suas preocupações quanto ao tema e aos fins principais de sua investigação apresentada no SFIDA X. O trecho na sequência demonstra as finalidades das autoras francesas, divulgadas no SFIDA XII. Objetivos análogos, mesmo em investigações mais recentes, são explicitados por outros pesquisadores.

Nous nous intéressons à la activité mathématique. [...] Nous cherchons seulement à pointer des caractéristiques de cette activité. Quand pouvons- nous dire que l'activité de quelqu'un est sans aucun doute une activité mathématique et non un Canada Dry (cf. calculateurs aveugles) et donc qu'ainsi faisant, il prend le risque d'apprendre des mathématiques? (MAUREL; SACKUR, 1999, p.xi-36)<sup>44</sup>

---

<sup>41</sup> Este artigo descreve um estudo que analisa a reação de 164 israelenses e 167 italianos, estudantes do ensino médio, em uma tarefa estruturada que perguntou se as soluções de pares de inequações lineares e racionais são idênticas (isto é, o mesmo conjunto-solução) e por quê.

<sup>42</sup> Apresentamos e analisamos materiais sobre a compreensão e a manipulação do conceito de inequação. Nosso foco é sobre as dificuldades que surgem no percurso de ir de uma igualdade para uma desigualdade.

<sup>43</sup> Esta pesquisa é uma das que temos empregado para analisar os aspectos conceituais e procedimentais de manipulação algébrica, ressaltando os seus respectivos papéis na construção do saber algébrico (tradução nossa)

<sup>44</sup> Estamos interessados na atividade matemática. Buscamos apontar as características desta atividade. Quando podemos dizer que a atividade de alguém é uma atividade matemática e não um *dry Canada* (cf. calculadoras cegas) e que, assim fazendo, ele assume o risco de aprender matemática?

Beltrão nos indica que “Essa pesquisa investiga as dificuldades encontradas por alunos concluintes do ensino fundamental de escolas públicas de Pernambuco, ao depararem com um problema sobre inequações” (BELTRÃO, 2010, p.84). A Espanha também contribui com uma análise de erros de seus estudantes.

We present a summary of a study carried out with students of the first year of Bachillerato (the first of two pre-university non-obligatory secondary education courses in Spain) to determine and analyse some of their errors and difficulties in learning inequalities with the aim of improving the teaching-learning process of this topic <sup>45</sup>(BLANCO; GARROTE, 2007, p.221).

Poderíamos listar outras citações que corroboram nossas afirmações quanto aos escopos principais das pesquisas inventariadas, porém acreditamos que as citadas já serviram para respaldar-nos. Ressalvamos que, independentemente da época, do tempo, do ano de realização da investigação, os fins ainda perduram de forma similar.

De 67 trabalhos, pelo menos, 43 deles têm como objetivo apresentar a compreensão, a forma de os participantes tratarem de inequação (cf. Fig. 35). Nessa categoria, estão inseridas palavras ou expressões, como:

- Conceções
- Entendimento
- Abordagens
- Dinâmica de controle
- Características da atividade matemática
- Dificuldades
- Erros
- Investigação
- Analisar maneiras
- Descrever
- Caracterizar
- Processos cognitivos
- Investigar
- Falhas

---

<sup>45</sup> Nós apresentamos um resumo de um estudo realizado com alunos do primeiro ano de Bachillerato (o primeiro de dois pré-universitários não obrigatórios nos cursos do ensino secundário na Espanha), para determinar e analisar alguns erros e dificuldades na aprendizagem das desigualdades, com o objetivo de melhorar o processo de ensino-aprendizagem deste tópico.

- Comportamentos

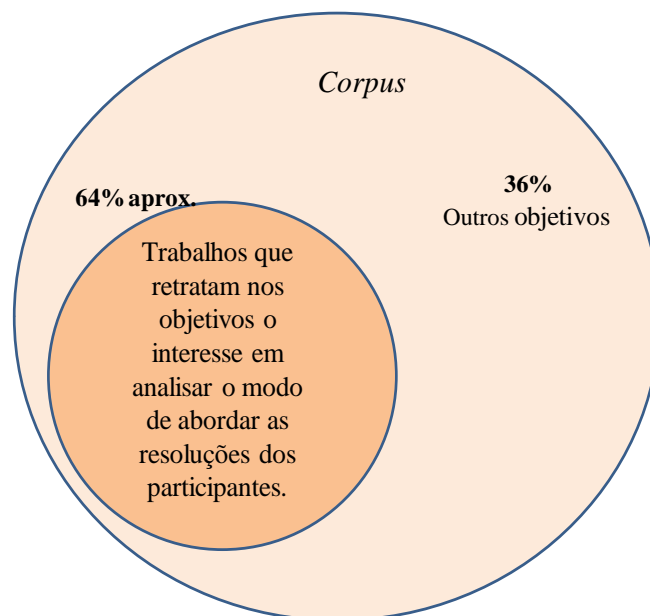


Figura 35: Proporção do objetivo “analisar o modo de abordar as resoluções” no *corpus*

Palavras que designam erro, dificuldade, concepções pseudoestruturais, falhas, problemas, aparecem, explicitamente nos objetivos da publicação, em 14 trabalhos dos 43 quantificados no parágrafo anterior (cf. Fig. 36). O restante dos trabalhos será examinado, e a quantificação, apresentada na ocasião da análise da categoria *resultados*, no próximo capítulo.

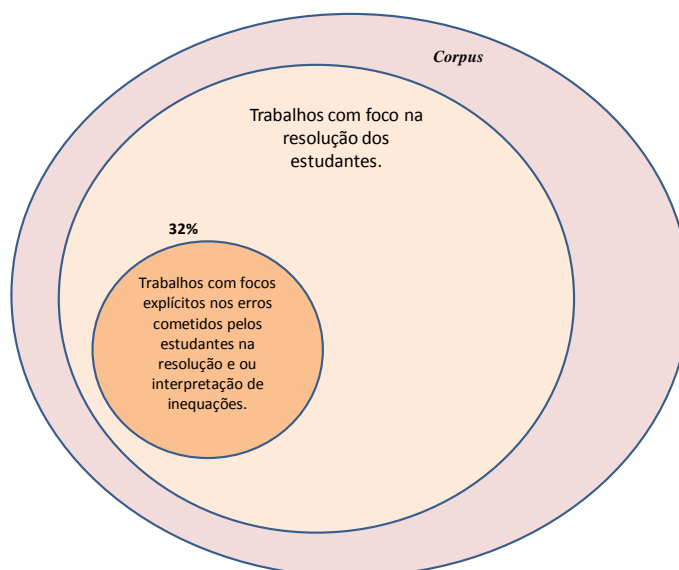


Figura 36: Proporção entre o foco nos erros e na resolução dos estudantes

Bazzini (1998), afirma na primeira frase de seu artigo que a dificuldade encontrada pelos estudantes tem sido motivo para várias pesquisas: “Le difficoltà incontrate dagli studenti de scuola secondaria relativamente all rizzazione di equazione e disequazioni sono al centro di molti studi di ricerca didattica”. (BAZZINI, 1998, x-39)<sup>46</sup>. Nesse trecho, observamos uma preocupação que registra indícios de que pesquisadores europeus e outros, desde 1998, atêm-se ao tema em questão.

## **METODOLOGIAS DE ENSINO E TEORIAS**

Para analisar essa categoria, isto é, entender as finalidades de outras pesquisas, fizemos nova releitura dos resumos e da obra. Se, por acaso, os resumos não apresentassem os objetivos ou se a publicação não tivesse um resumo, enveredávamos pela leitura completa do texto, buscando o seu alvo principal.

Consideramos metodologia de ensino todos os tipos de roteiros, de instruções, de abordagens para ensinar, de ferramentas, de métodos e técnicas, de atividades para diferentes situações didáticas, conforme a tendência ou a corrente pedagógica adotada pelo professor ou pela instituição, de forma que gere os conhecimentos propostos e que o aluno aprenda. Podemos considerar, resumidamente, que *são os caminhos para atingir um objetivo* (LIBÂNEO, 1994).

Dos 67 trabalhos, identificamos 13 cujo escopo é apresentar algum tipo de metodologia de ensino para inequações (cf. gráf. 10). Alguns fundamentam suas escolhas metodológicas em teorias, que supomos importantes ser destacadas. Com o intuito de examinar de forma cuidadosa, abrimos um subtópico para essa classificação.

---

<sup>46</sup> As dificuldades encontradas por alunos de escolas secundárias em relação à resolução de equação e inequação são o foco de muitas pesquisas da didática.

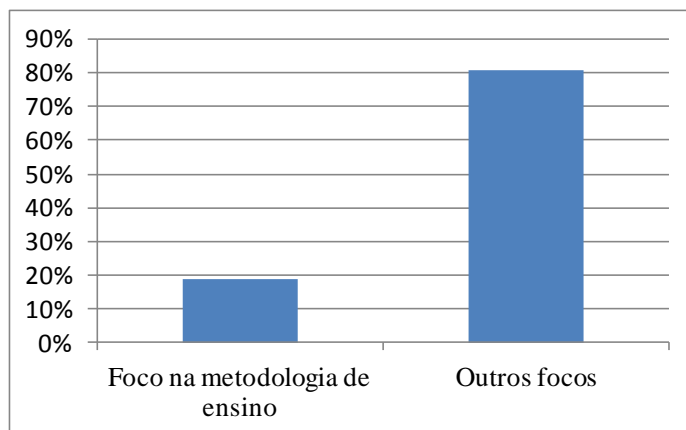


Gráfico 10: Proporção do foco nas abordagens metodológicas em relação ao todo

Apesar de existirem diversos enfoques para o significado de *aprendizagem*, vamos considerar, em nosso trabalho, *um processo pelo qual competências, habilidades, conhecimentos, comportamentos ou valores são adquiridos ou modificados como resultado de estudo, experiência, formação, raciocínio e observação*. Nos humanos, ela está relacionada à educação e ao desenvolvimento pessoal, deve ser devidamente orientada e é favorecida quando o indivíduo está motivado. Esse processo pode ser analisado por diferentes perspectivas, sob a visão de diferentes teorias de aprendizagem. O estudo da aprendizagem utiliza os conhecimentos e as teorias da neuropsicologia, da psicologia, da educação e da pedagogia. Para planejarmos uma metodologia de ensino, acreditamos que o alicerce em uma teoria é fundamental para sustentar as opções metodológicas e dar mais segurança ao professor.

As fundamentações teóricas que nortearam, e algumas ainda norteiam, o ensino e o aprendizado têm mudado e têm transformado, principalmente na área de matemática, a maneira como os educadores pensam e elaboram o planejamento educacional. Teorias, como a de Piaget, Vigotski, Skinner, Thorndike, Pestalozzi, Montessori, Verganud, Ausubel, Duval, entre outros, balisam, ainda hoje, várias metodologias de ensino de matemática. Teoria e prática estão atreladas como nos indica D'Ambrósio (1996)

Cada indivíduo tem a sua prática. Todo professor, ao iniciar sua carreira, vai fazer, na sala de aula, basicamente, o que ele viu alguém, que o impressionou, fazendo. E vai deixar de fazer algo que viu e não aprovou. Essa memória de experiências é impregnada de emocional, mas aí entra também o intuitivo – aqueles indivíduos que são considerados “o professor nato”. Mas, sem dúvida, o racional, isto é, aquilo que se aprendeu nos cursos, incorpora-se à prática docente. E à medida que a vamos exercendo, a crítica sobre ela, mesclada com observações e reflexões teóricas, vai-nos dando elementos para

aprimorá-la. Essa nossa prática, por sua vez, vai, novamente, solicitar e alimentar teorizações que vão, por sua vez, refletir em sua modificação (p.91).

Cientes da importância de pesquisas que tratam de metodologias de ensino para inequações, partimos para investigá-las. Registramos algumas expressões, palavras ou frases originais retiradas dos resumos e ou dos textos cujos objetivos transparecem uma investigação sobre processos de ensino. Alvarenga (2006) indica:

El propósito principal de este trabajo es presentar un conjunto de construcciones mentales – esquema, que el estudiante puede desarrollar a fin de comprender el concepto de inequación. Con base en ese conjunto de construcciones mentales presento una propuesta metodológica de enseñanza para mejorar la enseñanza-aprendizaje de este concepto.<sup>47</sup>(p.iv)

Para Borello (2010): “con base en todo esto pudimos percatarnos de la necesidad llevar a cabo un rediseño del discurso matemático escolar que, a través de actividades basadas en las prácticas de comparar y de acotar, regrese la desigualdad a la escuela devolviéndole su significado y vuelva a darle su justo lugar a la inequación”<sup>48</sup>(p.iv)

Autores italianos também se têm preocupado com o tipo de abordagem para esse conteúdo matemático: “in questa comunicazione abbiamo scelto di presentare alcune linee guida e alcuni risultati preliminari di un programma di ricerca riguardante l’approccio alle disequazioni com allievi principianti (III° media)<sup>49</sup> (GARUTI, 2001, p.1)

Rivera e Becker (2004), em um de seus trabalhos, assinalam:

We give a sociocultural account of the mediating functions handheld graphing calculators and social interaction play in students’ mathematical understanding. We discuss the evolution of students’ abilities to symbolize, model, and develop collective

---

<sup>47</sup> O objetivo principal deste trabalho é apresentar um conjunto de construções mentais, regime, que o aluno pode desenvolver, a fim de entender o conceito de desigualdade. Com base nesse conjunto de construções mentais, apresento uma metodologia de ensino, para melhorar o ensino e a aprendizagem desse conceito.

<sup>48</sup> Com base nisto, percebemos a necessidade de realizar um *redesign* do discurso matemático escolar por meio de atividades práticas, baseadas na prática de comparar e cotar, para que se retorne às inequações na escola, de forma a restaurar o seu significado e, em seguida, dar justo lugar a elas.

<sup>49</sup> Nesta comunicação, optamos por apresentar algumas diretrizes e resultados preliminares da abordagem de um programa de investigação com respeito às inequações com os alunos iniciantes.

mathematical practices about polynomial inequalities in instrumented activity (p.81).<sup>50</sup>

Alguns trabalhos indicam a utilização de funções e seus respectivos gráficos como rico enfoque, apesar de limitado, como comenta Sackur (2004), para o estudo de inequações. Outros apontam a necessidade de prestar atenção quanto às metáforas utilizadas no processo de ensino tanto pelos professores quanto pelos alunos. Autores italianos, como Boero, Bazzini e Garuti (2001), escrevem “In this papers an embodied cognition perspective is considered in order to frame teaching and learning problems concerning inequalities. The nature and functions of some ‘grounding metaphor’ are discussed as well as the possibility of enhancing their use by students<sup>51</sup>” (p.1)

Kieran (2004) apresenta, em um de seus trabalhos, uma investigação, fruto de uma abordagem metodológica, que utiliza um filme baseado em um modelo proposto no TIMSS-R,<sup>52</sup> 1999, de inequações lineares. Apesar de não ser, explicitamente, o objetivo da autora apresentar uma metodologia de ensino, ela traz essa contribuição, e, por fugir aos padrões encontrados por nós, quanto aos objetivos das pesquisas, resolvemos destacá-la. Seu foco principal é a análise do comportamento dos estudantes frente a esse modelo, a essa atividade.

Aliás, Assude (1998), da mesma forma que Kieran (2004), não tem como foco principal apresentar uma opção da abordagem metodológica, porém ela baseia-se em Chevallard, para apontar “técnicas fortes” e “fracas” com o intuito de chamar a atenção para pontos importantes a ser destacados no ato de ensinar. Entre os processos metodológicos sugeridos, localizamos os principais:

- Trabalhar com inequações de forma funcional, fazendo uso de gráficos.

---

<sup>50</sup> Nós levamos em conta a mediação sociocultural na compreensão das funções, manipulando calculadoras gráficas portáteis e jogos de interação social para a aprendizagem matemática dos estudantes. Discutimos a evolução das habilidades dos estudantes, para simbolizar, modelar e desenvolver práticas matemáticas coletivas sobre inequações polinomiais em atividade instrumentada.

<sup>51</sup> Neste trabalho, uma perspectiva da cognição corporificada é considerada, a fim de enquadrar o ensino e a aprendizagem de problemas relativos às inequações. A natureza e as funções de algumas “metáforas básicas” são discutidas tanto como a possibilidade de melhorar a sua utilização por estudantes.

<sup>52</sup>Third International Mathematics and Science Study-Repeat- TIMRSS is a trends in Mathematics and Science Achievement Around the World. TIMSS 1999 was the second assessment in the series of IEA studies to measure trends in students' mathematics and science achievement. Was conducted by the TIMSS & PIRLS International Study Center at Boston College and included 38 countries.(Disponível em: <<http://timss.bc.edu/timss1999.html>>)

- Utilizar metáforas adequadas e matematicamente corretas, principalmente ao estudar as funções de forma gráfica.
- Utilizar a calculadora gráfica como ferramenta que auxilia a análise de variação da função e a consequente análise do conjunto-solução da inequação.
- Estudar inequações lineares sob um contexto real, sob o ponto de vista da modelagem, pode maximizar a interpretação, não somente do conjunto-solução, e auxiliar a elaboração do modelo e da resolução que supomos ser frutos de uma maneira correta de interpretar.

Sackur (2004) mostra-se cautelosa para as possibilidades de erros a ser cometidos pelos aprendizes quando lidam com inequação de forma funcional gráfica. Ela justifica tal cautela, apontando diferenças entre denotação em Álgebra e denotação em Cálculo, além de esse método, se usado sozinho, poder limitar a capacidade do aluno em fazer as transformações de mudança de registros, de Representações Semióticas, como é indicado pela Teoria de Duval.

Algumas abordagens metodológicas apresentam-se suportadas por teorias que nos cabe salientá-las, como a utilizada por Rivera e Becker (2004). A perspectiva sociocultural foi a base para a implementação metodológica.

Our overall concern in this investigation is to provide a sociocultural basis for meaning objetification of mathematics concepts and process – that is, by surfacing both the social nature of technological tools and the social transactions that take place in classroom activity which assist students as a collective to establish viable shared practices and collective representations (Durkheim,1915)<sup>53</sup> (RIVERA; BECKER ,2004,p.81).

Boero e Bazzini (2004) destacam a importância do ensino baseado em uma análise epistemológica segundo as *metáforas básicas*. Eles utilizam a Teoria de Corporificação, de Lakoff e Nuñez (2000), e afirmam que “our research study aims to show how different kind of *grounding metaphor* can intervene (as crucial tool of

---

<sup>53</sup> Nossa preocupação geral neste estudo é fornecer uma base sociocultural para significar objetivação de conceitos e processos matemáticos, isto é, trazer à tona a natureza social das ferramentas tecnológicas e as operações sociais que ocorrem na atividade de sala de aula, que auxiliam os alunos como um coletivo para estabelecer práticas viáveis compartilhadas e representações coletivas.

thinking) in novices' approach to inequalities and to discuss possible refinements of the idea of grounding metaphor”<sup>54</sup> (p.142)

O italiano Bagni (2005) apresenta uma contribuição diferenciada para o debate que diz respeito à história e à didática. Ele faz importante resgate da história da álgebra e aponta como equações e inequações foram tratadas ao longo do tempo por pesquisadores. Nesse resgate surgem elementos que podem justificar alguns entraves para o aprendizado. Ele defende o emprego da história no ensino e posiciona-se:

According to the socio-cultural perspective by L. Radford, knowledge is linked to activities of individuals and, as we above noted, this is strictly related to cultural intuitions: knowledge is not built individually, but into a wider social context (RADFORD, BOERO e VASCO, 2000, p.164). The role played by history must be interpreted with reference to different socio-cultural situations (RADFORD, 2003) and is gives us the opportunity for a deep critical study of considered historical periods<sup>55</sup> (p.655).

As francesas Sackur e Maurel (1999, 2000) apresentam as ferramentas teórico-metodológicas utilizadas pela *Association pour le Développement du Génie Cognitif – GECCO*, que podem nortear uma metodologia de ensino, visando minimizar erros em relação a atividades, como: *se  $a > b$ , então  $ax > bx$* . Elas fazem uma reflexão sobre os enunciados e as demonstrações matemáticas e apontam as ferramentas teóricas: o *conhecimento local e as três orientações* - psicológica, social e o espaço real; a *denotação* e o *jogo de quadros (Jeu de Cadre)* (gráfico ou algébrico) (R. Douady) como nortes para planejar e implementar atividades e práticas pedagógicas.

Tsamir e Reshef (2006) estimularam os estudantes entre 14 e 15 anos a utilizar três métodos para a resolução de inequações quadráticas: gráfico, quadro de sinais e conectivos lógicos. O primeiro envolve a interpretação gráfica, isto é, emprega as parábolas; o segundo diz respeito a encontrar os zeros de uma equação equivalente e usar o quadro de sinal para determinar a solução; o último envolve a translação de inequação em um sistema de equações lineares que são conectadas por “e” e “ou”. Por meio de entrevistas e análise de protocolos, afirmaram que a preferência delas é

---

<sup>54</sup> Nossa pesquisa pretende mostrar como diferentes tipos de metáforas básicas podem intervir (como ferramenta crucial do pensamento) nos estudos de iniciantes às inequações e discutir possíveis refinamentos da ideia de *metáfora básica*.

<sup>55</sup> De acordo com a perspectiva sociocultural de L. Radford, o conhecimento está ligado a atividades dos indivíduos e é estritamente relacionado com instituições culturais: o conhecimento não é construído individualmente, mas em um contexto social amplo (RADFORD; BOERO; VASCO, 2000, p.164). O papel desempenhado pela história deve ser interpretado com referência a diferentes situações socioculturais (RADFORD, 2003) e dá-nos a oportunidade para um estudo crítico e profundo de considerados períodos históricos.

pelo método gráfico. Notamos uma preocupação das autoras em apresentar aos estudantes múltiplas opções de resolução, traçando um método de ensino pouco, ou nada, focalizado por outros autores.

A unidade de registro caracterizada pela palavra *metodologia* aparece poucas vezes nos textos, porém consideramos as similares, como:

- Teaching
- Didatics, didattica, didactiques, didática
- L'approccio
- Planning
- Instruccion, instrumented
- To take a place in classroom
- Activity, actividades
- L'acte d'enseignement
- Sequência didática, sequência de atividades

Foi por meio dessas expressões que identificamos e classificamos os trabalhos cujo foco era, de forma direta ou indireta, expor, avaliar e ou refletir sobre um tipo de abordagem metodológica sustentada ou não por uma teoria. Atrelando essa categoria à anterior, podemos afirmar que, em geral, as pesquisas tiveram mais interesses nos erros do que nas possibilidades de minimizá-los. (cf. Fig.37)

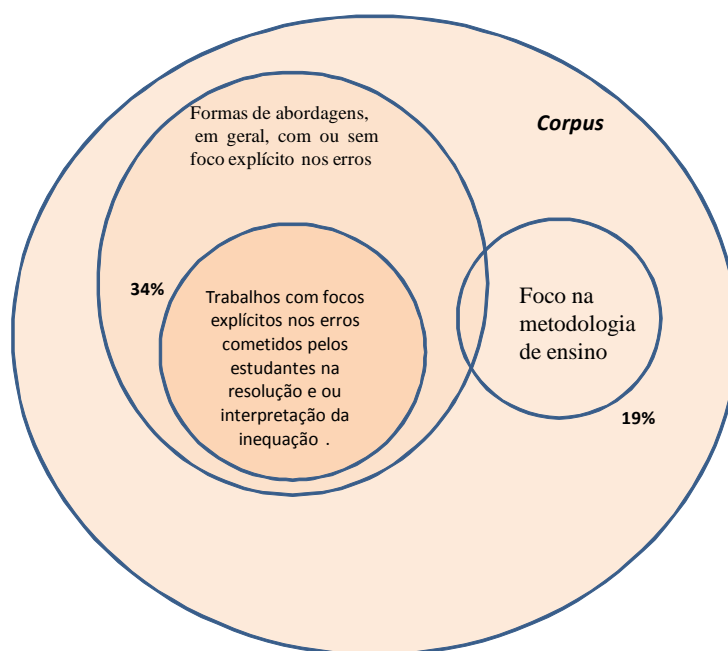


Figura 37: Proporção entre alguns focos e outros dos trabalhos mapeados, com intersecção entre o foco na metodologia de ensino e as formas de abordagens dos estudantes

## PESQUISAS TEÓRICAS

Trabalhos que indicam, em seus objetivos, uma análise teórica sobre o tema estiveram presentes, mas em menor quantidade de publicações do que o interesse em investigar ou propor uma metodologia de ensino. Dos 67 que fazem parte da nossa seleção, 8 esboçaram esse enfoque, mas, explicitamente, foram 5 somente. Nessa subcategoria, consideramos as investigações que tiveram por alvo principal fazer uma análise de propostas teóricas, uma revisão bibliográfica, um levantamento de trabalhos sobre o tema ou os estudos que, de certa forma, fizeram uma revisão das pesquisas apresentadas, como foi o caso do fórum exclusivo para uma discussão sobre esse tema no PME 28, em 2004.

Com o intuito de distinguir os trabalhos, primeiro analisamos os resumos e, se eles não existiam ou não revelavam suas intenções, buscamos, no texto completo, algo que nos indicasse, de forma mais clara, os intentos dos pesquisadores. Relemos várias vezes, a fim de encontrar pistas que pudessem garantir o enquadramento dos textos nessa classificação, pois muitos trabalhos, apesar de apresentar suas preferências teóricas para analisar os dados e nortear sua investigação, não podem ser encaixados em uma tipologia de *pesquisa teórica*. Estamos interessados em *pesquisas teóricas* consideradas como as que têm por finalidade aprofundar conhecimentos e discussões.

No tratamento da categoria *Metodologias de pesquisa*, essa característica será novamente apresentada e complementada. O pesquisador está interessado em satisfazer uma necessidade intelectual de conhecer e compreender determinados fenômenos (BARROS; LEHFELD, 2000).

As palavras ou expressões que serviram de unidade de registro e nortearam nosso enquadramento nessa categoria são, no original:

- *proposer un encadrement de la problématique didactique et cognitive* (BOERO, 1998, p.x-3)
- *avancer un peu par rapport à SFIDA-8* (BOERO, 1998, p.x-3)
- *Faire le point sur ma recherche en cours* (BOERO, 1999, p.xi-47)
- *fonctionnement de nos outils théoriques et méthodologiques* (SACKUR; DROUHARD; MAUREL; PÉCAL, 1997, p.1)
- *survey* (ALVARENGA; MACHADO, 2011, p.248)
- *studies have shown* (ROWNTREE, 2009, p.311)

O autor que mais se preocupou com esse tipo de enfoque foi Paulo Boero, pois apresentou, entre 1998 e 1999, 2 trabalhos de fundo teórico que incitam uma reflexão sobre outros aspectos que envolvem o estudo de inequações, como epistemológicos, cognitivos, didáticos, e convidam a uma pesquisa pluridisciplinar. Boero (1999) destaca o duplo objetivo:

*Faire le point sur ma recherche en cours sur les inéquations, en essayant de mettre en évidence la pluralité des approches et des outils que semblent nécessaires pour traiter le sujet d'une façon assez exhaustive; de ce point de vue, les inéquations constituent à mon avis un sujet "paradigmatique" pour un débat sur la recherche en didactique des mathématiques (surtout à propos de dépendance ou non des outils et des méthodes d'autres disciplines – en particulier de la psychologie)*  
 - produire une première version d'un document pour le WG 'Algèbre' de PME, finalisé à l'ouverture d'un débat en vue des travaux de ce groupe à PME –XXIII<sup>56</sup> (p.XI-47).

---

<sup>56</sup> Fazer uma atualização na minha pesquisa em curso sobre as desigualdades, tentando destacar a pluralidade de abordagens e instrumentos que parecem necessários para tratar do assunto de uma forma justa, exhaustiva; a esse respeito, as desigualdades são, na minha opinião, um "paradigma" para uma discussão da matemática de investigação em didática (sobretudo da dependência ou não de ferramentas e métodos de outras disciplinas, especialmente da psicologia)

- Produzir o primeiro esboço de um documento para o GT Álgebra do PME finalizados para abrir uma discussão para o trabalho do grupo em PME XXIII.

Tall (2004) e Radford (2004) ponderaram sobre os trabalhos apresentados no PME 28, fórum RF02. A autora Rowntree (2009) faz uma rápida incursão pelos trabalhos publicados. Ela expõe trabalhos de pesquisadores mais citados nas referências bibliográficas de outros artigos, como, por exemplo: Tsamir e Almog (2001); Tsamir e Bazzini (2004). As autoras Alvarenga e Machado (2010) analisaram 17 produções relacionadas ao tema em questão.

## CURRÍCULO

Se a quantidade de publicações, cujo escopo está em torno de abordagens teóricas, é pequena, as que remetem ao currículo é menor ainda. Em nosso inventário, há somente 2 trabalhos cuja finalidade, de forma direta ou indireta, é a situação das inequações no currículo escolar (cf. Fig. 38). Citamos *direta* no sentido de estar explícita no resumo ou na introdução, e *indireta* é aquela sobre a qual precisamos fazer uma análise do texto, para localizar o real fim da investigação que, aliás, pode vir não como objetivo geral, mas como um dos específicos.

Somente a pesquisadora Assude (1997, 2002) levou em consideração essa abordagem. No trabalho de 1997, ela parece iniciar a preocupação em relação ao currículo quando aponta as técnicas fortes e fracas que podem nortear o professor na ocasião do ensino. Contudo, na publicação de 2002, ela aprofunda o tratamento, revelando fenômenos específicos a ser estudados e fenômenos genéricos que regem a organização do currículo. Elencamos trechos que corroboram o enquadramento realizado e alguns registros de unidade e de contexto que balizaram nossas interpretações e categorizações:

- “... *‘techniques faibles’* les techniques qui permettent de faire vivre dans le curriculum des problèmes que ne pourraient pas y vivre vu la complexité des outils<sup>57</sup>” (1997,p.IX-9)

UR: curriculum

UC: techniques faibles, faire vivre

- “En visant à elucidar l’évolution de l’enseignement au collège, au XX siècle, de ce ‘petit’ objet que sont les inéquations, c’est dans cette double

---

<sup>57</sup> Técnicas fracas são as que permitam vivenciar, no currículo, os problemas que não poderiam ser vivenciados por ferramentas complexas.

perspective d'étude à long terme de l'évolution du curriculum que notre propre travail se situe"<sup>58</sup> (2002, p.211)

- UR: curriculum
- UC: l'évolution de l'enseignement au collège, l'évolution du curriculum

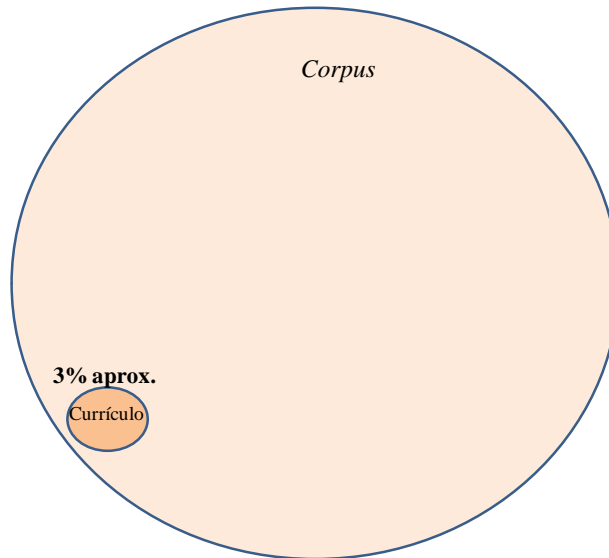


Figura 38: Proporcionalidade entre o todo e o foco no currículo

Na terceira tabela, apresentamos uma combinação de análise estrutural e fenomenológica dos resultados encontrados pelos investigadores. Dessa forma, podemos fazer uma interpretação mais acurada, além de destacar as inter-relações entre os objetivos e os resultados obtidos por essas pesquisas. Com o intuito de comparar quantitativamente os tipos de enfoques dos objetivos, apresentamos uma tabela (cf. Tab. 14).

<sup>58</sup> Com o objetivo de elucidar a evolução do ensino no fundamental maior, no século XX, deste pequeno objeto que são as inequações, é nesta dupla perspectiva de longo prazo de evolução do currículo que nosso trabalho se situa.

Tabela 14: Objetivos e suas porcentagens em relação ao *corpus*

<b>Objetivos</b>	<b>Porcentagem</b>
Estudar o tipo de abordagem	64%
Apresentar e discutir uma metodologia	19%
Examinar pesquisas e enfoques teóricos	12%
Analisar direções para o currículo escolar	3%
Outros objetivos que não enfocamos	2%
<b>Total</b>	<b>100%</b>

Podemos concluir que a maioria das publicações inventariadas teve por objetivo principal estudar o tipo de abordagem dos estudantes quando deparam com a resolução e ou a interpretação de uma inequação.

## REFERENCIAL MATEMÁTICO E TEÓRICO-EDUCACIONAL

Nessa categoria, inserimos o tipo de inequação que os pesquisadores utilizaram para coletar dados e o referencial teórico-educacional que balizou as análises e ou os planejamentos das pesquisas. Por referencial teórico-educacional, remetermo-nos às teorias que suportaram as investigações.

Para Creswell (2010), em estudos qualitativos, a teoria “aparece no início e proporciona uma lente que define o que é observado e as questões indagadas, como nas etnografias ou na pesquisa reivindicatória. Nas pesquisas de métodos mistos, os pesquisadores podem tanto testar teorias quanto gerá-las” (p.76). O PME 29 e 34, entre outros, dedicou um fórum, para discutir o papel da teoria na educação matemática. De acordo com Lester (2005):

Pesquisa em educação matemática é uma área interessante e importante para tal análise. Embora a pesquisa em educação matemática fosse bem caracterizada, há menos de 15 anos, por Kilpatrick (1992) e outros como sendo, em grande parte, *a-teórica*, a leitura de recentes artigos nos principais jornais e revistas de Pesquisa em Educação Matemática revelam que a teoria está viva e bem: na verdade, Silver e Herbst (2004) têm notado que expressões, como “baseado na teoria”, “quadro teórico” e “teorizar”, são comuns. De fato, eles observam que manuscritos são frequentemente rejeitados, por ser *a-teóricos*. O mesmo acontece com as propostas submetidas ao PME. Contudo, as preocupações levantadas décadas atrás persistem;

muitos pesquisadores ignoram, não compreendem ou abusam da teoria em seus trabalhos (p. 173).<sup>59</sup>

Por referencial matemático, entendemos os tipos de inequações que foram utilizadas nas pesquisas e os suportes teóricos matemáticos utilizados para a análise dos dados. Queremos identificar os elementos matemáticos que os autores apresentaram, a fim de discutir o tema, os recursos matemáticos que foram contemplados com o intuito de orientar as investigações, os entendimentos e as interpretações dos participantes e dos pesquisadores, aliás, de forma geral, dos envolvidos nas pesquisas. Além disso, com base no levantamento dos referenciais matemáticos, podemos realizar outras pesquisas ou aprofundar os resultados já existentes. Subdividimos essa classificação por: *Tipos de inequações*, *Abordagem matemática correlacionada*, *Abordagem interdisciplinar reflexiva*. O referencial teórico educacional relaciona-se às teorias que suportaram as pesquisas (cf. Fig. 39).

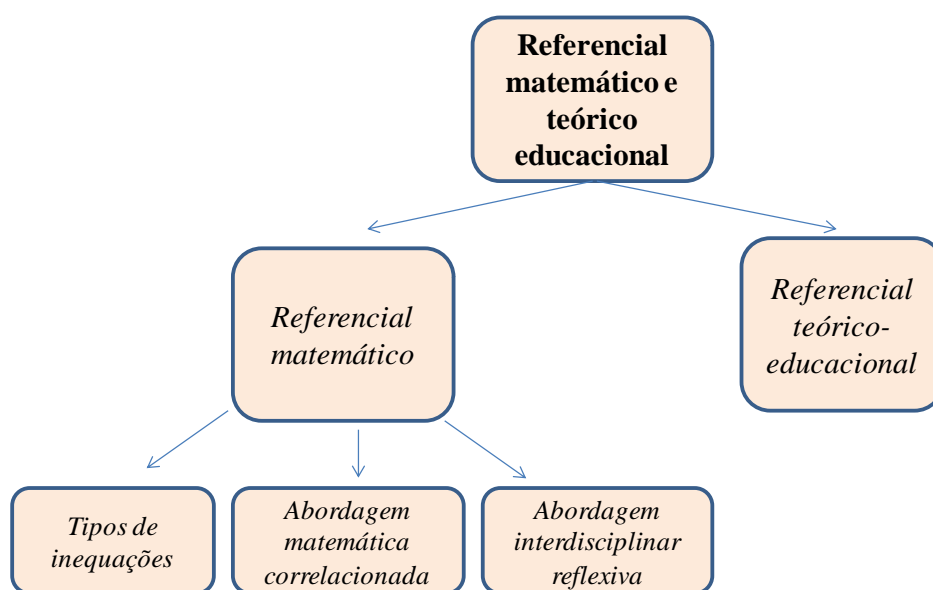


Figura 39: Classificação da categoria referencial teórico matemático e teórico-educacional

<sup>59</sup> Mathematics education research is an interesting and important area for such an examination. Although math research was aptly characterized less than 15 years ago by Kilpatrick (1992) and others as largely *atheoretical*, a perusal of recent articles in major MER journals reveals that theory is alive and well: indeed, Silver and Herbst (2004) have noted that expressions such as “theory-based”, “theoretical framework,” and “theorizing” are common. In fact, they muse, manuscripts are often rejected for being atheoretical. The same is true of proposals submitted for PME meetings. However, the concerns raised decades ago persist; too often researchers ignore, misunderstand, or misuse theory in their work.

## REFERENCIAL MATEMÁTICO

Voltamos aos trabalhos, com foco diferenciado que nos permita explorar a matemática. Buscamos identificar quais eram as ferramentas matemáticas trabalhadas, enfocadas.

A matemática, como expressão da mente humana, reflete a vontade ativa, a razão contemplativa e o desejo da perfeição estética. Seus elementos básicos são a lógica e a intuição, a análise e a construção, a generalidade e a individualidade. Embora diferentes tradições possam enfatizar diferentes aspectos, é somente a influência recíproca destas forças antitéticas e a luta por sua síntese que constituem a vida, a utilidade e o supremo valor da Ciência Matemática (COURANT; ROBBINS, 2000, p.XI).

### *Tipos de inequações*

Nesta subcategoria, alocamos os tipos de inequações tratadas nos textos, a maneira como elas são citadas nas investigações, nas atividades ou em exemplos mencionados pelos autores. Pode ser que algumas interceptem, quanto ao tipo, com outras, isto é, sabemos que a expressão nomeada *quociente*, como  $\frac{(x+1)}{x} > 3$ , se  $x > 0$ , pode apresentar-se na forma de uma linear, como  $(x + 1) > 3x$ , mas atemo-nos à maneira como está expressa no texto e não em suas possíveis maneiras de ser demonstradas. A ideia é mapear os tipos de inequações enfocadas com o intuito de trazer à tona as que podem ser estudadas em pesquisas futuras. Podemos afirmar que, de uma leitura do alto, isto é, por uma extensa visão, o grau de dificuldade das atividades propostas pelos pesquisadores é de nível, no máximo, relativo ao primeiro ano do ensino médio.

Das publicações mapeadas, o autor Boero (1998a, 1998b), em dois trabalhos, envolve as inequações trigonométricas em suas reflexões, porém, em nenhum deles, examina como os estudantes resolvem tais inequações. Outros autores, como Boero, Bazzini e Garuti (2001), propõem conhecer como os estudantes utilizam as metáforas nas resoluções gráficas das inequações trigonométricas, inclusive.

O valor absoluto está envolvido nas ferramentas de coleta de dados em 5 publicações. As inequações do tipo paramétricas simples, que são, ou se tornam lineares, são abordadas em 6. As polinomiais com grau maior ou igual a três estão

presentes em 4 estudos, e as resoluções do tipo dupla desigualdade fazem-se presente em somente um.

As do tipo decompostas em fatores lineares ou não, intituladas *produto*, como  $(x - 2)(x - 3)^2 < 0$ , são englobadas em 10 investigações, porém as quocientes, como  $\frac{(x+1)}{x} > 3$  ou  $\frac{5}{x} > (x - 1)$ , já foram mais enfocadas e estão presentes em 18. As mais utilizadas nas ferramentas de coleta de dados pelos pesquisadores são, sem dúvida, as de primeiro e segundo graus. Dos 67 trabalhos, localizamos as inequações do primeiro grau em 32 e as do segundo grau em 20. Salientamos que vários trabalhos tratam de 2 ou mais tipos de inequações (cf. Gráf. 11).

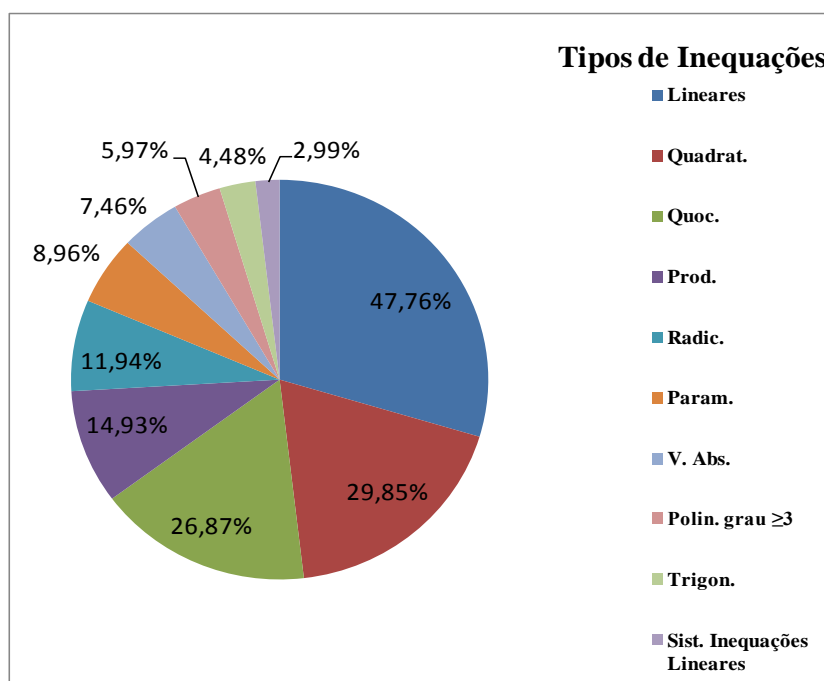


Gráfico 11: Tipos de inequações e suas porcentagens mapeadas

Podemos observar que 3 pesquisas estiveram interessadas em investigar a abordagem do tema sob o ponto de vista de modelagem, mas somente 2 delas analisaram a capacidade dos estudantes em modelar um fenômeno que envolve, em sua interpretação e resolução, uma inequação linear. Quanto às inequações que contêm radicais quadráticos, são 8. Esse tipo de inequação mobiliza, se envolvida em quocientes, um número maior de concatenação e aplicação de propriedades. Entretanto, a quantidade de autores que se debruçaram em observar qual o significado do sinal de

desigualdade não passou de 2. Acreditamos ser esse um enfoque imprescindível e que foi de pouco interesse. Alguns poucos pesquisadores, 2, De Souza (2008) e Boero (1998a,1998b), mostraram interesse em analisar uma inequação sob o ponto de vista analítico e topológico, isto é, como uma relação entre duas variáveis que pode gerar um espaço no plano.

#### *Abordagem matemática correlacionada*

Nesta subcategoria, procuramos responder a questões, como:

- Quais elementos matemáticos foram privilegiados pelo autor?
- Quais estruturas e objetos matemáticos foram considerados além dos tipos de inequações?

Foi baseado na colocação de Davis e Hersh (1985) que tivemos a necessidade de particionar essa subcategoria em variados aspectos relacionados à matemática. Para esses autores:

O Discurso Matemático informal, como parte do discurso natural, é composto de nomes, verbos, adjetivos etc. Os nomes designam objetos matemáticos: por exemplo, o número 3, o número  $e = 2,718\dots$ , o conjunto dos primos, a matriz  $\begin{pmatrix} 100 \\ 012 \end{pmatrix}$ , a função zeta de Riemann  $\xi(Z)$ . As estruturas matemáticas, por exemplo, o sistema de números reais ou o grupo cíclico de ordem 12, são objetos algo mais complexo do que nomes, e consistem em objetos matemáticos unidos por certas relações ou leis de combinação. Os símbolos de combinação ou de relação, tais como, “igual”, “maior que”, adição, diferenciação, exercem um papel semelhante aos verbos. Os adjetivos matemáticos são as restrições ou qualificativos, por exemplo, grupo, comparado com grupo cíclico. (p.171)

Assim, resolvemos, também, catalogar nomes, verbos, adjetivos matemáticos etc. Observamos que, em alguns artigos, os autores detêm-se a investigar como os estudantes interpretam a solução de uma inequação. Trabalhos desse tipo concentram-se em Tsamir e Almog (1999); Bazzini e Tsamir (2001); Tsamir e Bazzini (2001a, 2002a, 2004). Porém, Alvarenga (2006) e Lim (2006), da mesma forma, interessaram-se por investigações com esse foco. A importância desse estudo está, inclusive, em estimular o entendimento e a aplicação das propriedades de ordenação do conjunto dos números reais. Por meio de questões propostas nos questionários de instrumentos de coleta de dados, como as abaixo elencadas, pudemos conferir a preocupação dos pesquisadores.

- Given the set  $S = \{x \in R : x = 3\}$ . Consider the following statement:

S can be the solution of both an equation and an inequality. Explain your answer.

- Indicate which of the following is the truth set (the solution) of  $5x^4 \leq 0$ .

- (a)  $\{x : x > 0\}$  (b)  $R$   
 (c)  $\{x : x < -5\}$  (d)  $\{x : 0 < x < 1/5\}$   
 (e)  $\emptyset$  (f)  $x = 0$  (g)  $\{x : x \leq 0\}$

Explain your answer. (TSAMIR; BAZZINI, 2004, p.794)<sup>60</sup>

Em Alvarenga (2006) destacamos:

- **3** - Abajo, hay una tabla con los valores de las expresiones  $x^2$  y  $3x + 4$ , para números enteros entre  $-5$  y  $5$ , incluyendo  $-5$  y  $5$ .  
**a** ¿Para cuáles valores de esta tabla tenemos  $x^2 < 3x + 4$ ?  
**b** Esta tabla puede sugerir una respuesta a la cuestión: ¿para cuál conjunto de números reales la desigualdad  $x^2 < 3x + 4$  es satisfactoria? ¿Cuál es la respuesta? Justifique.  
**c** ¿V o F? ¿Si  $x = 4,92$ , entonces  $x^2 < 3x + 4$ ?<sup>61</sup> (Anexo, p. 176)

---

<sup>60</sup> Dado o conjunto  $S = \{x \in R : x = 3\}$ . Considere a seguinte afirmação: S pode ser solução tanto de uma inequação quanto de uma equação. Explique sua resposta. Indique quais dos seguintes conjuntos é a solução de  $5x^4 \leq 0$ . Explique sua resposta (TSAMIR; BAZZINI, 2004, p.794)

<sup>61</sup> **3**-Abaixo, há uma tabela com os valores das expressões  $x^2$  e  $3x + 4$ , para números inteiros entre  $-5$  e  $5$ , incluindo  $-5$  e  $5$ .

Para quais valores dessa tabela temos  $x^2 < 3x + 4$ ? Esta tabela pode sugerir uma resposta à questão: para qual conjunto de números reais a desigualdade  $x^2 < 3x + 4$  é satisfatória? Qual é a resposta? V ou F? Se  $x=4,92$ , então  $x^2 < 3x + 4$  (Anexo, p.176).

$x$	$x^2$	$3x + 4$
-5	25	-11
-4	16	-8
-3	9	-5
-2	4	-2
-1	1	1
0	0	4
1	1	7
2	4	10
3	9	13
4	16	16
5	25	19

**4a-** Si 2,3 es solución para  $f(x) \geq 0$ , ¿qué número podemos afirmar como solución de  $f\left(\frac{x}{2}\right) \geq 0$ ? ¿Cómo hacer una generalización sobre la solución de  $f\left(\frac{x}{k}\right) \geq 0$ ?

**4b** – Si 4,6 es solución para  $f(x) \leq 0$ , ¿qué número podemos afirmar como solución de  $f(2x) \leq 0$ ? ¿Cómo hacer una generalización sobre la solución de  $f(kx) \leq 0$ ? (Anexo, p.186)

Outros aspectos a salientar estão relacionados ao estudo pelo conteúdo de funções. Pelo menos 11 foram realizados nessa linha. Incluímos os que trataram das inequações sob o aspecto funcional, as representações gráficas e ou as tabelas. Todavia, a maioria desses estudos envolveu a resolução por meio de gráficos, alguns, inclusive, fazem uso das calculadoras.

A abordagem funcional apareceu no SFIDA IX, de acordo com nosso levantamento, quando Assude (1998) classificou a resolução por meio funcional gráfico (TFG), como uma “técnica fraca” e justifica:

En ce qui concerne la TFG, nous pouvons aussi la considérer comme une “ technique faible” car elle permet de vivre, comme nous l’avons montré précédemment, des objets plus complexes (tout en

---

<sup>62</sup> **4a** - Se 2,3 é solução para  $f(x) \geq 0$ , que número podemos afirmar como solução de  $f\left(\frac{x}{2}\right) \geq 0$ ?

Como fazer uma generalização sobre a solução de  $f\left(\frac{x}{k}\right) \geq 0$ ?

**4b** - Se 4,6 é solução para  $f(x) \leq 0$ , que número podemos afirmar como solução de  $f(2x) \leq 0$ ? Como fazer uma generalização sobre a solução de  $f(kx) \leq 0$ ?

choisissante des variables didactiques convenables) qu'il serait loisible de faire à ce niveau. Là nous retrouvons le fait que Michèle en Artaud a mis évidence dans sa thèse que les objets graphiques sont des objets transactionnels entre les objets économiques et les objets mathématiques, et au moins dans la classe de seconde que nous avons et les courbes ont une niche de substitution de certains objets mathématiques. Or, dans le cas du système d'enseignement des mathématiques, et au moins dans la classe de seconde que nous avons observé à travers un manuel (ce qui est très peu), les objets graphiques ont ainsi une fonction de "substitution" d'autres objets mathématiques et notamment des fonctions dont l'expression serait très complexe dans cette classe, et cela permet de "déterminer un savoir moyen" (Artaud) qui est moins coûteux que ce qu'on aurait dû mettre place. (p. IX-13)<sup>63</sup>

De outro modo, alguns autores estimularam seus participantes a utilizar as funções para as resoluções de inequações como podemos observar em Boero e Bazzini (2004) "we have planned two teaching experiments at the VIII-grade level with rather limited aims: investigating the feasibility of an early functional approach to inequalities; and revealing students' potential and difficulties in dealing with this subject as a special case of comparison of functions."<sup>64</sup>(p.141). Para esses autores, as maneiras de ensinar inequações têm omitido o tratamento funcional, limitando as possibilidades de aprendizagem:

In most countries, inequalities are taught in secondary school as a subordinate subject (in relationship with equations), dealt with in a purely algorithmic manner that avoids, in particular, the difficulties inherent in the concept of function. This approach implies a "trivialisation" of the subject, resulting in a sequence of routine procedures, which are not easy for students to understand, interpret and control. As a consequence of this approach, students are unable to manage inequalities which do not fit the learned schemas.

---

<sup>63</sup> No que diz respeito à TFG, também podemos vê-la como uma "técnica fraca", pois permite vivenciar, como temos demonstrado precedentemente, os objetos mais complexos (os em escolhas de variáveis didáticas adequadas), o que seria possível fazer a este nível. Nós descobrimos que Michele, em Artaud, tem destacado a tese de que objetos gráficos são transacionais entre objetos econômicos e objetos matemáticos, pelo menos na segunda classe que temos, e as curvas têm um nicho de substituição de certos objetos matemáticos. Ou, no caso do sistema de ensino de matemática e, pelo menos, na segunda série que foi observada por meio de um manual (o que é muito pouco), os objetos gráficos têm uma função "de substituição" de outros objetos matemáticos e, notadamente, as funções cujas expressões sejam muito complexas nesta classe, e isso ajuda a "determinar um saber médio" (Artaud) inferior à cota que deveríamos ter (p. IX-13).

<sup>64</sup> Nós planejamos duas experiências de ensino no nível de grau VIII com objetivos bastantes limitados: investigar a viabilidade de uma precoce abordagem funcional às inequações; revelar o potencial dos alunos e suas dificuldades em lidar com este assunto, como um caso especial de comparação de funções.

[...]In general, graphic heuristics are not exploited and algebraic transformations are performed without taking care of the constraints deriving from the fact that the  $>$  sign does not behave like the  $=$  sign (Tsamir et al., 1998). Similar phenomena were described in some studies concerning the French situation (Assude, 2000; Sackur and Maurel, 2000).

We may ask ourselves what are the reasons of this situation. In a *didactical anthropological perspective* (Chevallard, 1987), one reason could be the fact that equations (and inequalities) are considered (in most of European countries, including Italy) as a typical content of school Algebra; this subject matter is distinguished from Analytic Geometry and does not include functions. This might explain why inequalities (and equations) are not dealt with in those countries from a functional point of view. But even in countries where functions (and Analytic Geometry) belong to school Algebra (see NCTM Standards, 1989 and 2000) the procedural, algebraic approach prevails in many curricula and even in innovative proposals (Dobbs and Peterson, 1991) (BOERO; BAZZINI, 2004, p.140)<sup>65</sup>.

Em contrapartida a tais afirmações, a francesa Sackur (2004) chama a atenção para o cuidado que os professores devem dar, ao tratar das inequações sob a forma funcional:

Graphs of functions are used increasingly to solve algebraic inequalities. This phenomenon is most probably in relation with the increasing use of graphic calculators in schools. Most teachers seem to see the use of graphs as something that should help students in their solving of inequalities. In relation to some observations in our classrooms (students aged 15 and 17), we came to consider that this is not always the case and that there is a need to study some of the problems that arise when one changes a problem in algebra into a problem on graphs.

---

<sup>65</sup> Na maioria dos países, as inequações são ensinadas no ensino médio como um assunto secundário (relacionado a equações), tratadas de uma maneira puramente algorítmica que evita, em particular, as dificuldades inerentes ao conceito de *função*. Esta abordagem implica uma "banalização" do assunto, resultando em uma sequência de procedimentos de rotina, que não são fáceis para os alunos compreenderem, interpretar e controlar. Como consequência dessa abordagem, os alunos são incapazes de gerir as inequações que não se encaixam nos esquemas aprendidos.

[...] Em geral, heurísticas gráficas não são exploradas, e transformações algébricas são realizadas sem cuidar das restrições decorrentes do fato de que o sinal  $>$  não se comporta como o sinal de  $=$  (TSAMIR *et al.*, 1998). Fenômenos similares foram descritos em alguns estudos sobre a situação francesa (Assude, 2000; Sackur e Maurel, 2000). Podemos perguntar-nos quais são as razões desta situação. Em uma perspectiva didática antropológica (Chevallard, 1987), uma razão pode ser o fato de que as equações (e as inequações) são consideradas (na maioria dos países europeus, incluindo Itália) como um conteúdo típico de Álgebra escolar; este assunto distingue-se da Geometria Analítica e não inclui funções. Isso pode explicar por que as inequações (e as equações) não são tratadas nesses países, sob o ponto de vista funcional. Mas, mesmo em países onde as funções (e a Geometria Analítica) pertencem à Álgebra escolar (cf. Normas NCTM, 1989 e 2000), a abordagem processual algébrica prevalece em muitos currículos e em propostas inovadoras (DOBBS and PETERSON, 1991, p.141)

[...]We will first address Duval's theory on semiotic registers to point out some of the difficulties that can arise (p.148)<sup>66</sup>

Em seus estudos, Alwyn Pang e Dindyal (2010) comentam que suas análises são corroboradas pelas de Tsamir, Almog e Tirosh (1998), em que as manipulações algébricas são as preferidas pelos estudantes, apesar de que a gráfica fornece maior quantidade de resoluções corretas.

Tsamir e Reshef (2006) apontam que, na literatura, podemos verificar três abordagens para o ensino de inequações quadráticas: método gráfico, método da tabela de sinais (ou varal) e método de conectivos lógicos. Alguns professores ensinam por método único, outros por vários métodos, em paralelo. Alvarenga (2006) emprega três tipos de esquemas mentais necessários para a compreensão do tema: esquema algébrico, de interpretação e de resolução gráfica.

O certo é que não foi esquecido nas investigações o tratamento funcional, e isto nos indica sua importância, porém questionamos: os aportes foram suficientes a ponto de refletir sobre o progresso, a melhoria do ensino e da aprendizagem desse tema? Ou caberiam mais investigações que englobassem a complexidade do assunto?

Vale destacar que algumas investigações agregaram às inequações os parâmetros, isto é, curvaram-se em analisar situações-problema do tipo: "Solve the inequality:  $(a - 5)x > 2a - 1$   $x$  being the variable and 'a' a parameter <sup>67</sup>" (TSAMIR, BAZZINI, 2002b, p. 290). Isso remete às possibilidades de o parâmetro 'a' refletir-se, diretamente, nas mudanças, ou não, de sinal. Esse tipo de ente matemático foi abordado, principalmente, pelas pesquisadoras Pessia Tsamir e Luciana Bazzini.

Além disso, podemos citar alguns enfoques de resolução destacadas e, de certa forma, criticadas pelos investigadores, como a Tabela de Sinais<sup>68</sup> (ou Regra do Varal), por serem extremamente algoritmizadas se abordadas sem uma interpretação, uma

---

<sup>66</sup> Gráficos de funções são usados, cada vez mais, para resolver inequações algébricas. Esse fenômeno, provavelmente, tem relação com o aumento do uso de calculadoras gráficas nas escolas. A maioria dos professores parece ver o uso de gráficos como algo que deve ajudar os alunos na resolução de inequações. Em relação a algumas observações em nossas salas de aula (alunos com idades entre 15 e 17), consideramos que este não é sempre o caso e que há uma necessidade de estudar alguns problemas que surgem quando se muda um problema de álgebra para um problema de gráficos.

[...] Inicialmente, vamos tratar da teoria de Duval sobre registros semióticos, para apontar algumas dificuldades que podem surgir.

<sup>67</sup> Resolva a inequação  $(a - 5)x > 2a - 1$ , sendo  $x$  a variável e "a" o parâmetro (TSAMIR, BAZZINI, 2002b, p.290).

<sup>68</sup> As expressões *number line method* ou *sign-chart method* foram utilizadas por vários autores; aqui, traduzimos como *Tabela de Sinais*.

explicação lógica e sistemática. Por Tabela de Sinais, como abordada no capítulo 1, interpretamos uma análise mecânica dos sinais positivos e negativos da(s) expressão(ões) associada(as) depois de localizadas as raízes da equação originada de tais expressões (cf. Fig 40).

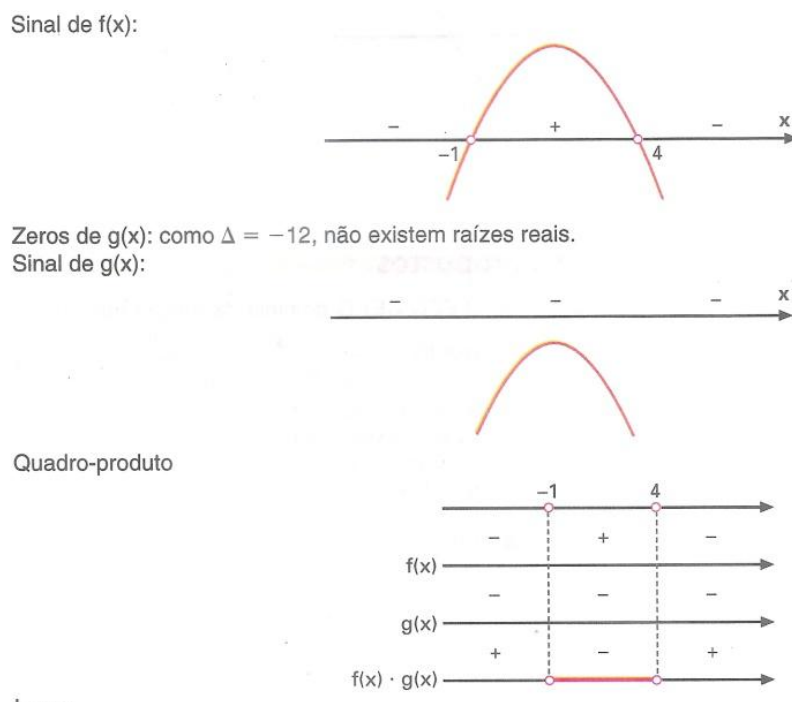


Figura 40: Exemplo de uma resolução que utiliza a Tabela de Sinais  
Fonte: Santos *et. al.* (2004, p.78)

Esse tipo de abordagem disfarça a necessidade de utilizar e entender, corretamente, a concatenação dos conectivos lógicos. Tal necessidade surgirá em outras ocasiões que não poderão ser contornadas, e o estudante deparará com uma dificuldade ainda maior. Para Boero (1998) :

La portée des techniques est très limitée. Aujourd'hui elles n'ont pas de débouchés directs et évidents ni dans les applications aux autres sciences ou aux autres matières scolaires, ni dans les professions, ni dans les mathématiques des mathématiciens. Mais ces techniques ont une persistance très forte dans l'enseignement (même dans le cas d'adoption de programmes expérimentaux qui les excluent explicitement!). Pourquoi? Pure inertie du système d'enseignement (enseignants, manuel, parents...)? Fonction d'encadrement mental des étudiants (discipline des procédures à suivre, contenu logique)? Facilité pour l'enseignement et l'évaluation? Facilité pour l'apprentissage – comme conséquence de la réduction de la complexité du problème de la solution des inéquations à travers leur modélisation logico-algébrique?<sup>69</sup> (p. X-4)

<sup>69</sup> O alcance das técnicas é muito limitado. Hoje, elas não têm oportunidades diretas e evidentes nem nas aplicações às outras ciências ou aos outros meios acadêmicos, nem nas profissões, nem

Observamos a veemência dessa citação de Boero quanto às maneiras tão somente algoritmizadas de ensinar tal conteúdo.

Outra característica a ser considerada e retratada por alguns autores relaciona-se ao uso incorreto dos conectivos lógicos destacado em 5 publicações. Pouco, mas marcada em duas pesquisas, vem à tona também a questão da interpretação dos símbolos de ordenação que 3 pesquisadores enfocam, sem contar os que envolveram a interpretação de uma solução, intrinsecamente relacionada ao sinal de desigualdade.

Importante dimensão do tema está vinculada ao significado de equivalência, isto é, duas inequações são equivalentes quando têm o mesmo conjunto-solução, e o que almejamos quando resolvemos uma inequação é, de fato, o seu conjunto-solução; essa é uma descrição mais simples possível de sua solução. Para proceder a essa busca, entram em jogo as propriedades a ser empregadas, para realizar a transformação na inequação inicial em outra, de maneira que possamos, cada vez mais, visualizar, de forma simples e direta, a solução, ou as soluções. Então, temos na “cena”: propriedades, transformações, equivalências, conjuntos-soluções. Esses “atores” contracenam nos estudos de: Sfard e Linchevski (1991, 1994); Steinberg, Sleeman e Katorza (1991), Alvarenga (2006); Bazzini (1998), entre outros. Contudo, apesar de ter aparecido tal interesse nas publicações, o tratamento ainda é incipiente, tendo em vista a importância dessa abordagem matemática.

Outros aspectos estão relacionados na publicação de Tall (2004), ao fazer uma reflexão sobre os trabalhos apresentados no fórum do PME 28. Segundo ele:

Later developments in the use of inequalities include the formal notion of limit, where the epsilon-delta method will certainly benefit from meaningful grounding of inequalities, but will also need to focus on the manipulation of symbols and the development of formal proof. Inequalities at a formal level involve axioms for order in a field  $F$ , for example, by specifying a subset  $P$  of  $F$  that has simple properties (if  $a \in P$ , then one and only one of these holds:  $a \in P$ ,  $-a \in P$  or  $a = 0$ ; if  $a, b \in P$  then  $a + b, ab \in P$ .) In this case  $a > b$  is *defined* to be true when  $a - b \in P$ . This use of ‘rules’ is not a meaningless procedural activity but a meaningful formal approach that has the potential of giving new meanings. For instance, a structure theorem may be proved to show that every ordered field ‘contains’ the rational numbers and may also

---

na matemática dos matemáticos. Mas, essas técnicas têm uma persistência muito forte na educação (mesmo na adoção de programas experimentais que as excluem expressamente). Por quê? Pura inércia do sistema de ensino (professores, livros didáticos, pais...)? Função do enquadramento, treinamento mental dos alunos (procedimentos disciplinares, conteúdo lógico)? Facilidade de ensino e avaliação? Facilidade para o aprendizado, como resultado da reduzida complexidade de resolução das inequações por meio de sua modelagem lógico-algébrica?

contain ‘infinitesimals’ that are elements in  $F$  which are smaller than any rational number. In this way intuitive concepts at one stage (infinitesimals as ‘arbitrarily small’ variable quantities) can be given a formal mathematical meaning.<sup>70</sup> (p.160)

Consideramos os aspectos elencados por Tall de suma importância, porém no ensino universitário, apesar de que, nas séries iniciais do ensino fundamental, as crianças iniciam o estudo de expressões matemáticas que envolvem o sinal de igualdade e já aplicam as operações inversas. No ensino fundamental final, aparecem as primeiras expressões inter-relacionadas com o sinal de desigualdade, então os estudantes logo iniciam a aplicação das propriedades dos números reais, principalmente as de ordenação, com o intuito de resolução. Porém, sem ainda ter o entendimento de um corpo ordenado dos reais nem o conhecimento básico das propriedades, eles utilizam-nas inconscientemente, baseando-se nas terminologias utilizadas pelos professores, como: “passar para o outro lado”, “fazer a operação inversa”, “se somou, tem que subtrair para ficar ‘igual’”, entre outras. O tratamento por um conjunto ordenado só ocorre, de forma mais aprofundada, nos cursos de Análise na Reta. Na mesma publicação, o autor remete-nos a uma discussão que envolve uma categorização da álgebra em que os estudantes, inconscientemente ou não, alocam-se: álgebra avaliativa, manipulativa e axiomática. É possível fazer um paralelo com alguns enfoques de Alvarenga (2006) quando a autora utiliza a Teoria APOS com a finalidade de classificar os níveis de concepções dos estudantes universitários. Para Tall (2004):

A study of longterm development of symbolism in arithmetic and algebra (Tall *et al.*, 2001) led to a categorization of algebra (Thomas & Tall, 2001) in three levels, which we termed ‘evaluation algebra’, ‘manipulation algebra’ and ‘axiomatic algebra’. The first encompasses the idea of an expression, say  $3+2x$  being used simply for evaluation,

---

<sup>70</sup>Desenvolvimentos posteriores sobre o uso das inequações incluem a noção formal de *limite*, em que o método *delta-épsilon*, certamente, beneficiar-se-á com a base significativa das inequações, mas é preciso também concentrar-se na manipulação de símbolos e no desenvolvimento da demonstração formal. Inequações em um nível formal envolvem axiomas na ordem de um corpo  $F$ , por exemplo, pela especificação de um subconjunto de  $P$  de  $F$  que tem propriedades simples (se  $a \in P$ , em seguida, um e apenas um destes tem:  $a \in P$ ,  $-a \in P$  or  $a = 0$ ; se  $a, b \in P$ , então  $a + b, ab \in P$ .) Nesse caso,  $a > b$  define ser verdade quando  $a - b \in P$ . Esse uso de “regras” não é uma atividade procedimental sem sentido, mas uma abordagem formal significativa que tem o potencial de produzir novos significados. Por exemplo, um teorema estrutural pode ser provado, para mostrar que cada corpo ordenado “contém” os números racionais e pode, também, conter “infinitesimais” que são elementos em  $F$  menores do que qualquer número racional. Desta forma, conceitos intuitivos em um estágio (infinitesimais como quantidades variáveis “arbitrariamente pequenas”) podem ser dados em um sentido matemático formal.

say in a spreadsheet or in a graph-drawing program. The second encompasses the idea of an expression as a thinkable entity to be manipulated. The third concentrates on the properties of the manipulation and leads to an axiomatic approach to algebra in terms of groups, rings, fields, ordered fields, vector spaces, etc. (p.161)<sup>71</sup>

Ainda nos falta um comentário a respeito do limiar entre a lógica matemática e as inequações. A análise realizada aponta-nos que esse tratamento matemático pouco foi valorizado. Somente alguns autores comentaram sobre ele. Quando consideramos a lógica matemática, referimo-nos aos quantificadores lógicos, aos condicionais do tipo *se...então...*, aos bicondicionais *...se e somente se...*, às proposições. Por exemplo, pudemos observar uma publicação com o objetivo de analisar a compreensão dos estudantes em relação à fórmula proposicional: *Se  $a > b$ , então  $ax > bx$* , porém sem nenhum tratamento relacionado à lógica matemática. Duas publicações fizeram uma referência superficial a esse tipo de abordagem. Sobre a conexão com as equivalências, que são fórmulas proposicionais do tipo bicondicional, não houve nenhuma publicação em nosso inventário.

Assim, podemos considerar que os referenciais matemáticos mais utilizados foram: as manipulações algébricas (algoritmizadas); as funções, em sua forma gráfica de apresentação, sob o aspecto de uma inequação poder ser interpretada como uma análise gráfica da variação de funções (ou de uma função); o conjunto-solução de uma inequação. Os tratamentos algoritmizados por Tabela de Sinais, a estrutura axiomatizada que envolve uma inequação, as equivalências, as transformações, a modelagem foram menos focalizados. Quase nenhum enfoque nesse mapeamento envolveu a lógica matemática. Sem ater-nos às quantidades especificamente, podemos ilustrar uma perspectiva de enfoques de referenciais matemáticos por meio do gráfico 12.

---

<sup>71</sup> Um estudo do desenvolvimento a longo prazo do simbolismo em aritmética e álgebra (Tall et al., 2001) levou a uma categorização de álgebra (Thomas & Tall, 2001) em três níveis nomeados de "álgebra de avaliativa", "álgebra manipulativa" e "álgebra axiomática". O primeiro engloba a ideia de uma expressão, digamos  $3 + 2x$ , sendo usada apenas para avaliação, digamos, em uma planilha ou em um programa de esboço gráfico. O segundo engloba a ideia de uma expressão como uma entidade pensável para ser manipulada. O terceiro concentra-se nas propriedades da manipulação e leva a uma abordagem axiomática para a álgebra, em termos de grupos, anéis, corpos, corpos ordenados, espaços vetoriais, etc. (p.161)

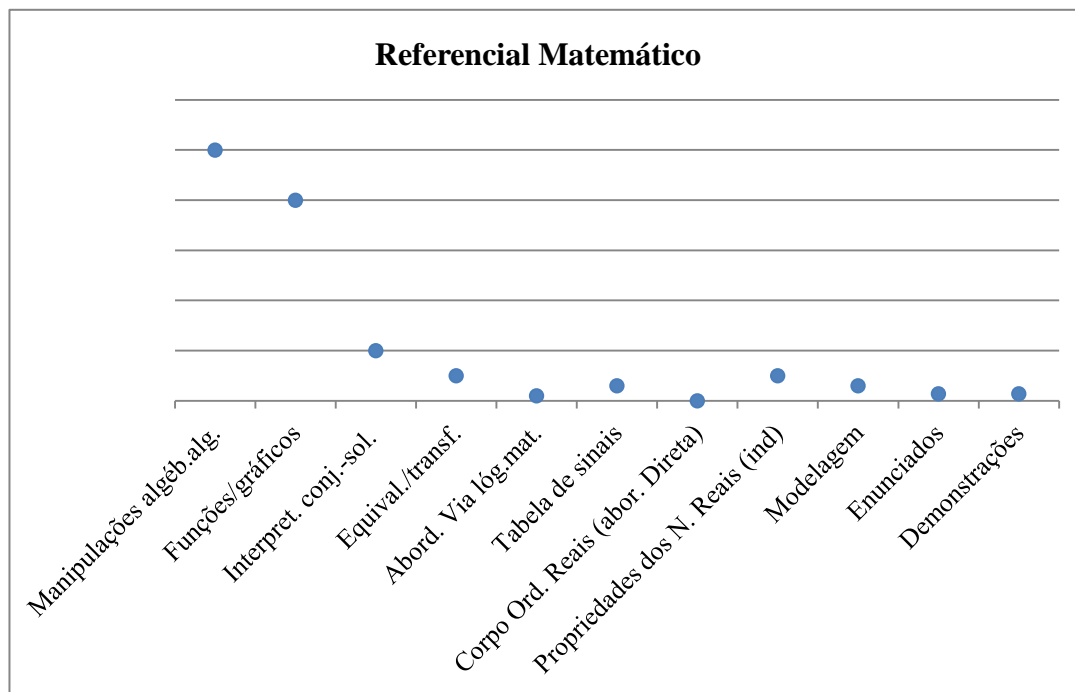


Gráfico 12: Ideia proporcional do tratamento dado às inequações de acordo com as publicações

#### *Abordagem interdisciplinar reflexiva*

Essa subcategoria pretende responder à questão: quais abordagens matemáticas estão inter-relacionadas à educação matemática e às áreas interdisciplinares que procuram, em outras, o conhecimento complementar para suas análises (Psicologia, Filosofia, Sociologia, História, Antropologia, Tecnologia etc)? Não estamos interessados em destacar os referenciais teóricos, mas, sim, separar as abordagens realizadas pelos autores quanto à relação entre matemática e outras áreas das ciências. Dessa forma, elencamos alguns estudos que destacaram a matemática sob o ponto de vista sociocultural, epistemológico, histórico, da análise de livros oficiais e didáticos, das tecnologias e da pesquisa pluridisciplinar. (cf. Fig. 41)

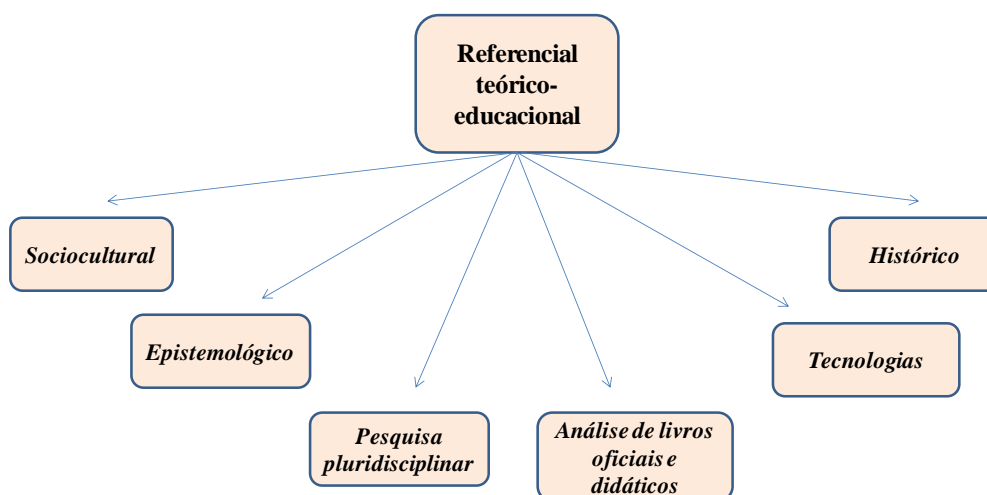


Figura 41: Tipologias do referencial teórico-educacional

### *Contexto sociocultural*

Os pesquisadores Rivera e Becker (2004), Bazzini, Boero e Gautti (2001a, 2001b), Bazzini e Tsamir (2002) e Tsamir e Bazzini (2002) interessaram-se em analisar o contexto sociocultural no qual os estudantes estavam imersos e as influências em seus aprendizados. Os diagnósticos foram de formas variadas, sobre a influência das metáforas, ou sobre uma comparação entre estudantes israelenses e italianos ou sobre o aspecto de interação com outros aprendizes. Rivera e Becker (2004) destacam a independência tanto reflexiva como determinística do papel desempenhado pelos fatores sociais e psicológicos na aprendizagem matemática.

### *Contexto epistemológico*

A visão epistemológica está, especialmente, encerrada nos trabalhos dos italianos Boero (1998) e Bagni (2005) e das francesas Maurel e Sackur (1998). Eles tratam de questões relacionadas às inequações escolares e às dos matemáticos, encontradas em certas classes de problemas em que pode residir a origem de erros cometidos pelos estudantes. As francesas marcam a necessidade epistêmica da atividade matemática: “Nous avons cherché à décrire ce plus, des mathématiques qui n’est pas dans le texte et que nous voulons enseigner. Aujourd’hui, nous allons nous intéresser seulement à l’un de ses aspects: ce que nous appelons la nécessité épistémique<sup>72</sup>” (p.

<sup>72</sup> Procuramos descrever mais, a matemática que não está no texto e que queremos ensinar. Hoje, estamos interessados apenas em um aspecto, o que nós chamamos de necessidade epistêmica.

XI-37). Por sua vez, Boero (1998) levanta a importância de ir mais longe nas investigações de problemas, como, por exemplo, trabalhar com um sistema de inequações e ou com uma classe de inequações caracterizadas por parâmetros:

Cet essai d'analyse interprète la difficulté de trouver les solutions du système  $x + y > 0$ ,  $x - 2y < 1$  ou de l'inéquation  $x^2 + Kx > 0$  en dépendance du paramètre K, si on reste sur le terrain du traitement logico-algébrique. Mais bien sur le traitement logico-algébrique devient une composante nécessaire du processus de solution si on considère le cas suivant:  $|x + y| > 1$ . Question a approfondir: aller plus loin dans cette analyse.<sup>73</sup> (BOERO,1998, p. X-5).

Mesmo com o chamado de Boero e depois de 14 anos, não observamos investigações que tratavam, diretamente, dessas questões. Somente alguns autores, de forma superficial e indireta, apresentaram-nas. Bagni (2005) remete a um tratamento que analisa as origens das técnicas empregadas na resolução quando se quer resolver, por exemplo,  $f(x) > g(x)$ ; neste caso, a primeira coisa a ser feita, em geral, é  $f(x) = g(x)$ . Por esse exemplo, ele ressalta a importância da abordagem epistemológica no ensino de matemática. Ele faz um paralelo entre os obstáculos encontrados pelos alunos e os encontrados pelos pesquisadores no decorrer do entendimento de determinado objeto matemático.

### *Contexto histórico*

O mesmo autor trata da visão histórica do desenvolvimento das técnicas de resolução, ressaltando que “the selection of historical data to be presented in classroom practice is epistemologically relevant: this selection reflects some epistemological choices by the teacher, too”<sup>74</sup> (p.654). Assim, ele busca, na história, inclusive da álgebra, e em livros textos antigos, explicações para o tratamento dado pela escola às inequações. A abordagem realizada por ele envolve várias dimensões do ensino, como sociocultural, epistemológica e histórica. Segundo o autor:

Moreover, an interesting quotation can be considered with reference to 20<sup>th</sup> century. P. Odifreddi writes: “The contribution by Von Neumann was the solution, in 1937, of a problem posed by L. Walras in 1874

<sup>73</sup> Este ensaio analítico interpreta a dificuldade de encontrar soluções do sistema  $x + y > 0$ ,  $x - 2y < 1$  e da inequação  $x^2 + Kx > 0$ , dependência em K, se ficarmos no terreno do tratamento lógico-algébrico. Mas, o tratamento lógico-algébrico torna-se componente necessário em um processo de solução se considerarmos o seguinte caso:  $|x + y| > 1$ . Questão a aprofundar: ir mais longe nesta análise.

<sup>74</sup> A seleção de dados históricos a ser apresentada em sala de aula é epistemologicamente relevante: reflete algumas escolhas epistemológicas também por parte do professor.

[...]. He noted that model must be expressed by inequalities (as we usually do nowadays) and must not be expressed just by equations (as mathematicians were accustomed to do in that period), then he found a solution by Brouwer's theorem"<sup>75</sup>.(BAGNI, 2005,p.659).

Ele reflete sobre a simetria entre as resoluções dos estudantes de uma inequação como se fossem uma equação e as resoluções dos matemáticos, os quais, ao longo da história, ao resolverem uma situação-problema que envolve uma inequação, transformam-na em uma resolução por uma equação. De maneira semelhante, a autora Assude (2002) faz ponderações sobre o contexto equacional, o estrutural e o funcional, o empírico e a modelação das inequações na história.

#### *Análise de textos oficiais e livros didáticos*

Autores, como Assude (2002) e Bagni (2005), fazem, em suas respectivas publicações, breve comentário sobre o enfoque dado às inequações nos livros textos antigos. Borello (2010) e De Souza (2008), mesmo sem ser o alvo de suas teses de doutoramento, complementam seus estudos com um levantamento de como esse tema é apresentado nos livros mexicanos e brasileiros, respectivamente.

#### *Tecnologias*

O enfoque matemático por meio das calculadoras pode ser visto em dois trabalhos, a saber, Rivera e Becker (2004) e Weber (1998). Ambas as resoluções foram realizadas por meio de uma calculadora gráfica. Alvarenga (2006) implementou atividades a ser feitas, utilizando o computador por meio do programa ISETL (*Interactive Set Language*), e De Souza (2008) desenvolveu uma metodologia de ensino com o intuito de coletar dados, utilizando o *software* Graphmatica. Dessa feita, notamos que o ensino de inequações por tecnologia quase não foi focado. Boero (1998) registra que:

la diffusion des ordinateurs et des calculatrices graphiques introduit des éléments de nouveauté importants dans le cadre historiquement constitué dans les différents pays. De plus en plus les inéquations au sens logique-algébrique ont tendance à être traitées d'une façon

---

<sup>75</sup> Além disso, uma citação interessante pode ser considerada com referência ao século 20. P. Odifreddi escreve: "A contribuição de Von Neumann era a solução, em 1937, de um problema proposto por L. Walras, em 1874 [...]. Ele observou que o modelo deve ser expresso por inequações (como geralmente fazemos hoje em dia) e não deve ser expresso apenas por equações (como os matemáticos estavam acostumados a fazer nesse período), então ele encontrou uma solução pelo teorema de Brouwer".

graphique-visuelle (en ouvrant la voie à la possible considération de l'aspect fonctionnel)<sup>76</sup> (p.XI-48).

Isso registra a importância que o autor dá às tecnologias educacionais, trazendo à tona elementos modernos de ensino e aprendizagem. Assim, pesquisas nessa área são bem-vindas e indispensáveis. Nessa linha, incluímos uma discussão atual frente às tecnologias educacionais, como a apresentada pelos autores Frota e Borges (2004):

A nosso ver, a superação das barreiras para o uso efetivo de tecnologia nas escolas depende de dois movimentos paralelos: do professor enquanto sujeito, no sentido de se formar para uma incorporação tecnológica, e do sistema educacional, enquanto responsável pela implantação das condições de incorporação da tecnologia na escola.

Centramos o foco de nosso trabalho no movimento que cada professor de matemática precisa realizar, com vistas a sua própria formação para a tecnologia.

Entendemos que tal percurso compreende três etapas, que correspondem a uma evolução do entendimento do professor sobre as concepções do uso da tecnologia na Educação Matemática e de sua atitude de *consumir a tecnologia para incorporar a tecnologia e matematizar a tecnologia*. (FROTA; BORGES, 2004, p.2)

### *Pesquisa pluridisciplinar*

Esse assunto foi tratado por Boero (1998) quando aponta vínculos do tema em questão com:

- o sujeito, enquanto estudante e inserido em um processo educacional;
- a matemática, propriamente, “relève d’une conception diverse des inéquations selon les différents secteurs des mathématique”<sup>77</sup> (p. XI-48) ;
- a antropologia; sobre esse aspecto, ressalta Boero (1998):

[...]est alors nécessaire à propos de la nature et des conditions d’existence du savoir en jeu; il faut considérer les différents protagonistes sur la scène (mathématiciens des différents secteurs, enseignants et formateurs d’enseignants dans les divers pays, élèves) et étudier le sens que le mot “inéquations” a pour eux, les techniques de traitement qu’ils associent à ce mot, etc. Ici une approche dit “anthropologique” semble très appropriée<sup>78</sup>(p.XI-48).

<sup>76</sup> A disseminação de computadores e calculadoras gráficas introduz novos elementos importantes no quadro historicamente constituído em diferentes países. De mais a mais, as inequações no sentido lógico-algébrico tendem a ser tratadas de maneira gráfico-visual (abrindo o caminho para a consideração possível do aspecto funcional)

<sup>77</sup> Marca de uma concepção diversa de inequações de diferentes setores da matemática.

<sup>78</sup> É, então, necessário, a propósito da natureza e das condições de existência do saber em jogo, considerar os diferentes protagonistas da cena (os matemáticos de diferentes setores, professores e formadores de professores em diferentes países, estudantes) e estudar o significado que a palavra "inequação" tem para eles, as técnicas de tratamento que associam a essa palavra, etc. Aqui, uma abordagem dita "antropológica" parece muito apropriada.

- a história, que indica a necessidade de uma investigação que valorize o aspecto histórico do conhecimento matemático e o saber concernente a inequações no âmbito da matemática dos matemáticos, a propósito da constituição da inequação da matemática escolar. Como isso pode ter acontecido? Como as inequações vieram a fazer parte do processo de escolarização?;
- as novas tecnologias, que apontam a ausência de pesquisas, considerando o uso das tecnologias no ensino e na aprendizagem do tema em questão;
- a dimensão cognitiva e didática, que Boero (1998) aponta para um caminho pouco explorado sobre a dimensão cognitiva e didática do estudo de inequações por técnicas e tecnologias (no sentido da Antropologia do Didático de Chevallard);
- a dimensão cognitiva pelo estudo de funções, que assinala outra trilha pouco explorada sobre a dimensão cognitiva do estudo de inequações e funções. Neste caso, cabe ressaltar que a trilha começou a ser explorada depois dessas observações do autor. Não podemos afirmar se tiveram influências nas pesquisas realizadas, mas, pelo nosso inventário, algumas pesquisas foram conduzidas, de 1999 para cá, nessa linha.

Assim, após o ano de 1998, pudemos observar que vários autores tiveram preocupação com a abordagem interdisciplinar reflexiva. Isso fez que buscassem, nas áreas de filosofia, sociologia, história, antropologia, tecnologia e psicologia, recursos teóricos e práticos, para fundamentar suas pesquisas em relação ao assunto aqui mapeado. Nesta categoria, não apresentamos as unidades de registro, pois entendemos que elas sozinhas não dão conta de expressar e validar os argumentos e os aspectos envolvidos nessa tipologia, então destacamos trechos amplos das falas dos pesquisadores.

## **REFERENCIAL TEÓRICO-EDUCACIONAL**

Nesta categoria, temos por finalidade levantar os referencias teóricos utilizados pelos autores para suas fundamentações e direcionamento de pesquisas. Os resultados podem fazer emergir dados que ancoram importantes referências para futuras investigações. Perscrutamos, novamente, as publicações com o intuito de levantar os

referenciais teóricos e, de certa forma, comparar com os resultados obtidos da primeira tabela, onde nos baseamos somente nos dados bibliográficos. Identificamos 16 tipos diferentes de marcos teóricos.

English e Sriraman (2005), na coordenação do fórum RF04 sobre Teorias da Educação Matemática, apontam que:

Nossa concepção e preferência por determinada teoria em educação matemática, invariavelmente, influencia a nossa escolha de questões de pesquisa e o nosso quadro teórico. Embora tenhamos feito significativos avanços na investigação em educação matemática, o nosso campo tem sido criticado nos últimos anos pela falta de foco, por suas divergentes perspectivas teóricas e uma continuada crise de identidade (Steen, 1999). No alvorecer deste novo milênio, o momento parece oportuno para nossa comunidade fazer um exame de consciência sobre as múltiplas e amplamente diferentes teorias matemáticas e projetar possíveis percursos para o futuro. Em particular, precisamos considerar o importante papel da construção da teoria na pesquisa em educação matemática. (2005, p.170, tradução nossa)<sup>79</sup>

Assim, notamos, claramente, a preocupação dos pesquisadores quanto ao emprego de teorias em educação matemática. Desse modo, o mapeamento desses referenciais teóricos relativos às investigações sobre o ensino e a aprendizagem de inequações é pertinente. Apresentamos, por meio da tabela 15, os marcos teóricos, seus respectivos autores e a quantidade aproximada que apareceram nas publicações inventariadas.

---

<sup>79</sup> Our conception and preference for a particular mathematics education theory invariably influences our choice of research questions as well as our theoretical framework in mathematics education research. Although we have made significant advances in mathematics education research, our field has been criticized in recent years for its lack of focus, its diverging theoretical perspectives, and a continued identity crisis (Steen, 1999). At the dawn of this new millennium, the time seems ripe for our community to take stock of the multiple and widely diverging mathematical theories, and chart possible courses for the future. In particular, we need to consider the important role of theory building in mathematics education research. (2005, p.170)

Tabela 15: Referencial teórico, autoria, quantidade aproximada e publicações correlacionadas

<b>Referencial teórico</b>	<b>Autoria</b>	<b>Qt.</b>	<b>Publicações</b>
T. Antropológico do Didático	Chevallard	3	Assude (1997); Boero e Bazzini (2004); Boero (1998)
Ferramentas teóricas do GECO	Grupo GECO	2	Sackur e Maurel (1998,1999, 2000); Sackur, Drouhard, Maurel e Pécal (1998)
Modelo interpretativo ABC	Arzarello, Bazzini e Chiappini	3	Chiappini, Molinari (1998); Bazzini(1998); Bazzini e Ascari (1999); Bazzini eTsamir (2003)
Registro de Representação Semiótica	Duval	5	De Souza (2008); Sackur (2004); Chiappini e Molinari (1998) e outros
Teoria APOS	Grupo RUMEC	2	Alvarenga (2006); Alvarenga (2003)
Denotação e sentido	Frege	4	Sackur (2004) e outros
A noção de conhecimento formal, intuitivo e algorítmico	Fischbein	3	Tsamir e Bazzini (2002); Bazzini e Tsamir (2003); Sackur (2004)
Obstáculo epistemológico	Brousseau	1	Blanco e Garrote (2007)
Teoria da fusão conceitual	Fauconnier e Turner	1	Roh e Halani (2011)
Cognição corporificada	Lakoff e Nuñez	2	Boero, Bazzini e Garuti (2001); Boero e Bazzini (2004)
Teoria da reificação - concepções pseudoestruturais	Sfard	2	Sfard e Linchevski (1994)
Variante operacional	Vergnaud	1	Cortes e Pfaff
Análise de erros	H. Radatz, Borasi e outros	10	Tsamir, Tirosh, Tiano (2004); Alwyn Pang e Dyndal (2010); Vayavutjamai (2010) e outros
Teoria da antecipação	Piaget, Glasersfeld e Harel	1	Lim (2006)
Socioepistemologia	Grupo de Pesquisa do CINVESTAV-MX	1	Borello (2010)
Teoria de Vigotski	Vigotski	2	Boero e Bazzini (2004); Rivera e Becker (2004)
<b>TOTAL</b>		<b>43</b>	

Neste mesmo fórum, RF04, Lermann (2005) apresenta um levantamento sobre as teorias utilizadas pelos autores dos trabalhos apresentados no PME de 1990, até 2001. Apresentamos a sua tabela (cf. Fig. 42) e, posteriormente, fazemos uma reflexão sobre tais levantamentos.

Year	Theoretical fields other than educational psychology and/or mathematics
1990	Brousseau
1991	Philosophy of mathematics
1992	Vygotsky
1993	Vygotsky
1994	Brousseau, Chevallard, Poststructuralism
1995	Embodied cognition, Educational research
1996	Vygotsky, Situated cognition, Philosophy of mathematics
1997	Situated cognition, Vygotsky, Philosophy of mathematics
1998	Situated cognition, Vygotsky, Philosophy of mathematics
1999	Socio-historical practice
2000	Chevallard

Figura 42: Campos teóricos  
Fonte: (LERMANN, 2005, p.181)

Nesta referência, destacamos as teorias criadas por Chevallard, Vigotski, Brousseau, a cognição corporificada e as teorias relacionadas às práticas sócio-históricas. As outras citadas podem ser amplamente interpretadas e, como não temos as interpretações utilizadas por Lermann, não as comentamos. Porém, as destacadas interceptam-se com as elencadas por nós.

Quantitativamente, no nosso mapeamento, as mais utilizadas foram: Denotação e Sentido, de Frege, Representação Semiótica, de Duval e Análise de Erros, de Radatz, Borasi e outros (cf. Gráf. 13)<sup>80</sup>. Lermann (2005) lembra que algumas destas abordagens podem ser mais propícias a futuros desenvolvimentos do que outras, em particular, as teorias de compressão cognitiva do processo de entidades mentais manipuláveis (que estão ausentes em todas as apresentações) direcionam para a possibilidade de que a

<sup>80</sup> Contabilizando a Teoria de Representação Semiótica e as ideias de Frege sobre Denotação e Sentido inseridas na Semiótica, então teremos um total de, pelo menos, 9 trabalhos fundamentados nessa linha teórica. A Análise de Erros não esteve explicitamente referenciada, a não ser por um autor, mas a consideramos como permeando a maioria dos trabalhos.

construção de entidades mentalmente manipuláveis é provável ser mais produtiva para desenvolvimentos a longo prazo.

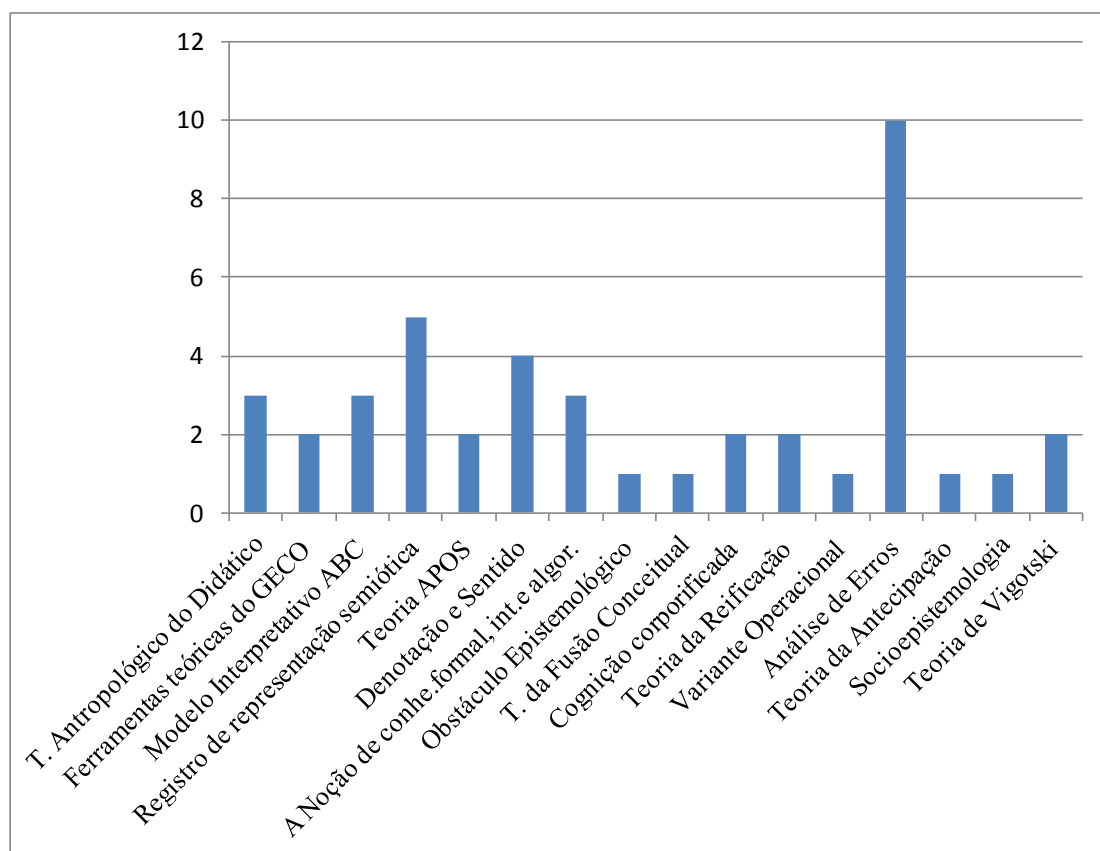


Gráfico 13: Quantitativo dos referenciais teóricos de acordo com a tabela 15

Para finalizar a descrição dessa categoria, lembramos uma citação de Tall (2004):

De que forma os trabalhos apresentados neste fórum direcionam os problemas em nível local e na produção de uma teoria global útil? [...] Uma organização como a PME tem de visar a soluções não só locais para problemas, mas também globais de desenvolvimento a longo prazo. Os trabalhos neste fórum apresentam ingredientes essenciais, para contribuir com a ampliação desse esquema. <sup>81</sup>(p.161)

Esse trecho impulsiona-nos a sugerir que pesquisas, segundo esse tema, ainda necessitam de uma teoria global que dê conta das inúmeras facetas envolvidas no ensino e no aprendizado de inequações.

<sup>81</sup> In what ways do the papers presented in this forum address problems both at a local level and also in producing a helpful global theory? [...]An organization such as PME needs to aim not only for local solutions to problems, but also for global views of long-term development. The papers in this forum present essential ingredients to contribute such a wider scheme.

## METODOLOGIA DE PESQUISA E COLETA DE DADOS

Essa classificação tem por desígnio central levantar as metodologias de pesquisas, de coletas de dados, utilizadas pelos pesquisadores que fazem parte do nosso mapeamento. Essa é uma fase de indagação para os investigadores, e obtêm-se dados da realidade pela aplicação de técnicas. A escolha do instrumento de pesquisa, porém, dependerá do tipo de informação que se deseja obter ou do tipo de objeto de estudo. Lermann registra, no fórum *Theories of Mathematics Education*, uma reflexão sobre a pesquisa de campo.

Vou comentar a respeito da eficácia da pesquisa educacional em um momento de múltiplos paradigmas e às vezes concorrentes, aqui descritos como discursos. "Eficácia" é uma noção problemática, apesar de que, certamente, figura nos discursos atuais examinados. Ela surge, porque a natureza educacional é uma pesquisa de campo com uma face para a teoria e outra para a prática. Isto contrasta com campos, como a psicologia, em que as teorias e as descobertas podem ser aplicadas, mas a prática não faz parte da característica da pesquisa nesse campo. Pesquisa em educação, ao contrário, chama os seus problemas a partir da prática e espera que seus resultados tenham aplicabilidade ou, pelo menos, significado na prática. Medicina e computação são semelhantes campos intelectuais a este respeito.<sup>82</sup> (LERMANN, 2005, p.182)

Dividimos as metodologias de pesquisa em duas dimensões: campo e teórica (cf. Fig. 43).

---

<sup>82</sup> [...]I will comment on concerns about the effectiveness of educational research in a time of multiple and sometimes competing paradigms, described here as discourses. 'Effectiveness' is a problematic notion, although one that certainly figures highly in current discourses of accountability. It arises because by its nature education is a research field with a face towards theory and a face towards practice. This contrasts with fields such as psychology in which theories and findings can be applied, but practice is not part of the characteristic of research in that field. Research in education, in contrast, draws its problems from practice and expects its outcomes to have applicability or at least significance in practice. Medicine and computing are similar intellectual fields in this respect.

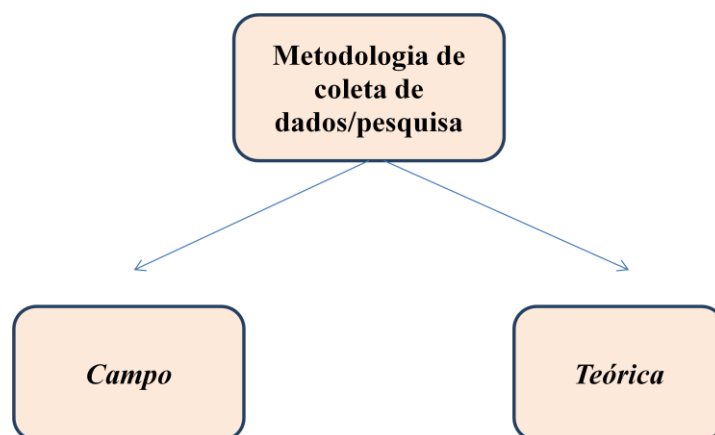


Figura 43: Os tipos de pesquisas

Segundo Lermann (2005), a análise dos trabalhos do PME, de 1990 a 2001, mostrou que pouco mais de 85% de todos os papéis no processo teve uma orientação para o empírico, com mais 5% passando do teórico para o empírico, e isso mudou pouco ao longo dos anos. Acontece o mesmo com as publicações por nós mapeadas?

Diretamente relacionados com o tipo de pesquisa serão os métodos e as técnicas a serem adotados. Entendemos por *métodos* os procedimentos mais amplos de raciocínio, enquanto *técnicas* são procedimentos mais restritos que operacionalizam os métodos, mediante emprego de instrumentos adequados (SEVERINO, 2007).

## **CAMPO**

Dos 67 trabalhos inventariados a maioria, 58, tratou de uma pesquisa de campo, coletando dados por meio de entrevistas e análises de protocolos. Alguns poucos complementaram com análise de documentos oficiais, didáticos e filmagens. Isso vem ao encontro da nossa hipótese: quase todos se debruçaram em analisar os erros cometidos pelos estudantes quando estão resolvendo uma inequação e, para analisar os erros, é necessário fazer um exame criterioso dos protocolos e das entrevistas.

Em nosso mapeamento, examinando o interior dos trabalhos, localizamos 26 trabalhos cujo foco foi coletar dados de estudantes do ensino médio. No ensino fundamental, registramos em torno de 6 publicações. Com interesse em coletar dados no ensino superior, detectamos 7 pesquisas. Também fez parte da instância das investigações o entendimento dos professores quanto ao ensino e à aprendizagem das inequações que resultou em torno de, pelo menos, 4 trabalhos (cf. Gráf. 14).

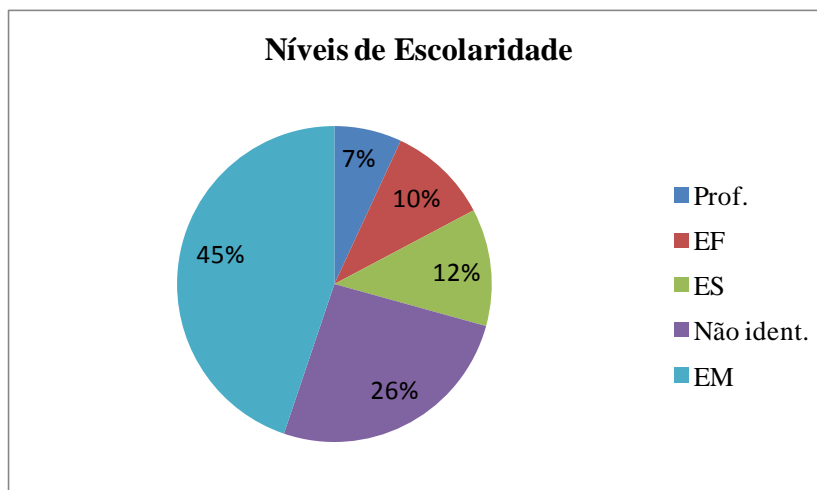


Gráfico 14: Nível de escolaridade segundo a análise do interior dos trabalhos

### *Caracterizações dos sujeitos das pesquisas*

Pela análise realizada no interior dos trabalhos, de fato, a maioria dos sujeitos cursava o ensino médio, e suas nacionalidades foram bem variadas como já comentado no capítulo anterior, na ocasião do exame das mensagens emitidas pelos títulos. São os respondentes das seguintes nacionalidades: brasileiros, americanos, israelenses, mexicanos, singapurenses, italianos, tailandeses, gregos, canadenses, franceses e espanhóis, entre os identificados na metodologia de pesquisa.

Cabe uma questão a ser analisada nos resultados: a forma dos estudantes abordarem as inequações seria diferente nesses países?

## **TEÓRICA**

Para diferenciar os trabalhos bibliográficos, que, por sua vez, podem ser interpretados como a necessidade de sempre localizar a pesquisa em um meio científico, utilizando para isso o recurso de um levantamento bibliográfico, ou revisão da literatura, optamos por intitular essa classificação de *Teórica*.

De acordo com Demo (1994 e 2000), podemos assinalar, pelo menos, quatro espécies de pesquisa, mas "na prática, mesclamos todos, acentuando mais este ou aquele tipo de pesquisa" (2000, p. 22). A pesquisa teórica é "dedicada a reconstruir teoria, conceitos, ideias, ideologias, polêmicas, tendo em vista, em termos imediatos, aprimorar fundamentos teóricos" (p. 20). Ainda para o autor: "o conhecimento teórico adequado

acarreta rigor conceitual, análise acurada, desempenho lógico, argumentação diversificada, capacidade explicativa" (1994, p. 36).

Assim, a pesquisa teórica é orientada no sentido de reconstruir teorias, quadros de referência, condições explicativas da realidade, polêmicas e discussões pertinentes. Não implica imediata intervenção na realidade, mas nem por isso deixa de ser importante, pois seu papel é decisivo na criação de condições para a intervenção. Desta feita, destacamos que, dos 67 trabalhos analisados, apenas 9 trataram de um estudo teórico. Acreditamos ser esse um número bem pequeno em comparação com a quantidade de publicações sobre o assunto. Esse quantitativo pode ser um indicador da necessidade de mais publicações desse tipo, pois, mesmo não querendo intervir, diretamente, na realidade desse ensino e dessa aprendizagem, elas tentam abrir um espaço para discussão sobre o tema, aprofundamento de estudo de conceitos, discussões de visões e conhecimentos (cf. Fig. 44).

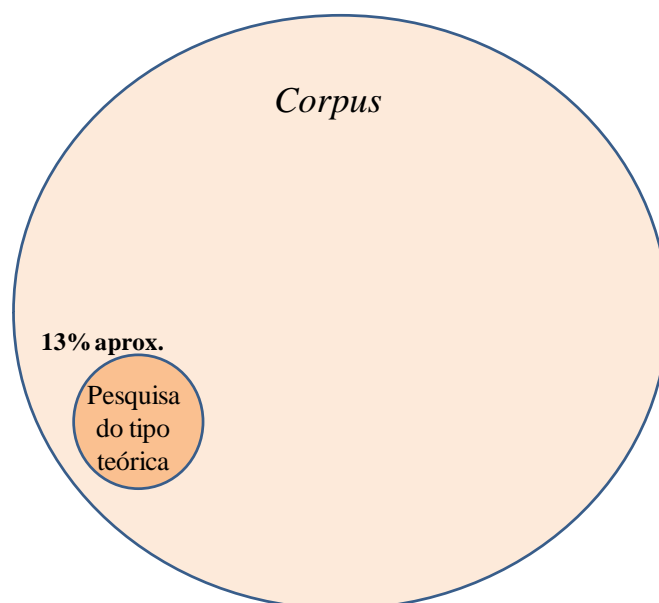


Figura 44: Proporcionalidade entre a pesquisa teórica e o conjunto de publicações inventariadas

De acordo com essa análise, a questão posta anteriormente tem como resposta: no nosso mapeamento, a maioria das pesquisas foi de campo por orientação empírica (cf. Gráf. 15).

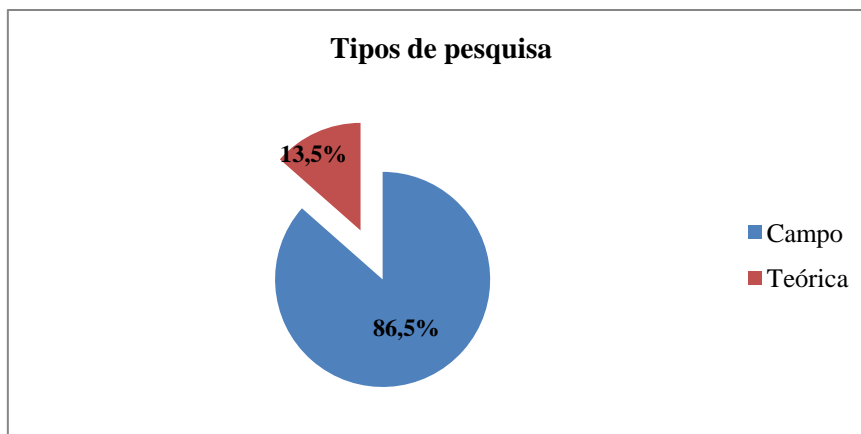


Gráfico 15: Porcentagem das pesquisas teórica e de campo em nosso levantamento

## CONSIDERAÇÕES

Se compararmos esses resultados com os do capítulo anterior, que se ateve, somente, aos dados bibliográficos, vamos perceber que as informações obtidas por aquele meio, mesmo limitado, não diferiu muito dos resultados obtidos das leituras acuradas dos resumos e completas das publicações. Por exemplo, nos títulos, identificamos referenciais teóricos utilizados que, pela leitura dos trabalhos, foram os mesmos, excetuando alguns casos em que o autor utilizou mais de uma teoria, para subsidiar sua metodologia e análise de dados.

Pelos títulos, também, pudemos, anteriormente, intuir que a pesquisa de campo prevaleceu, que as inequações mais utilizadas nos questionários aplicados foram as de primeiro e segundo grau e que a maioria dos participantes era aluno do ensino médio. Da 1ª tabela, observamos que o foco principal das publicações foi apresentar as abordagens empreedidas pelos estudantes e que as dificuldades e os erros tiveram destaque central. Todos esses resultados foram corroborados nesta etapa da pesquisa. Nas futuras análises da tabela de resultados, poderemos, da mesma forma, confrontar, aprofundar e complementar resultados. Neste processo de análise, não temos a intenção de apenas levantar as pesquisas existentes e elencá-las como componente de um encadeamento histórico linear, mas pretendemos, também, identificar questões relevantes ou significativas que nos valham como orientação, para abranger os tópicos já investigados e expresssos de maneira que comportem a elaboração de um conjunto de explicações ou de interpretações coerentes. Essa decomposição, identificação de situações semelhantes ou adversas, pode permitir futuras pesquisas que visem reelaborar

ou melhorar as já publicadas ou suscitar novas ideias que tendam complementar as já existentes.

## CAPÍTULO 6

---

### RESULTADOS DA ANÁLISE DA TERCEIRA TABELA

O objetivo deste capítulo é apresentar as análises dos resultados e das conclusões das 67 publicações que fazem parte de nosso inventário. Utilizamos o *software* NVIVO, para auxiliar-nos na análise de conteúdo. Novamente, a palavra foi utilizada como Unidade de Registro (UR) e as expressões como Unidade de Contexto (UC).

O *software* de análise qualitativa de dados da QSR International ajuda você a explorar, analisar e compreender, facilmente, informações em documentos, PDFs, tabulações de *surveys*, arquivos de foto, áudio e vídeo. Independentemente do seu material ou projeto, nosso *software* pode ajudá-lo a chegar, rapidamente, às respostas, comprovar suas descobertas e tomar decisões fundamentadas. (retirado de [http://www.qsrinternational.com/other-languages\\_portuguese.aspx](http://www.qsrinternational.com/other-languages_portuguese.aspx).)

Entendemos o termo *resultado* de um trabalho científico na acepção de Fiorentini e Lorenzato (2007) como uma resposta ao foco central da questão investigativa e as hipóteses iniciais, tentando estabelecer um diálogo, confrontando evidências empíricas obtidas pelo trabalho de campo, pois toda base de dados possui campos de dados ou campos de busca. Consideramos conclusões de trabalhos científicos na linha de Pozzebon (2006), em que a *conclusão* é um elemento importante para a compreensão do conjunto.

Para maior clareza reapresentam-se, de modo ordenado, as conclusões parciais, correspondentes aos objetivos e ao problema de pesquisa que foram elaborados na introdução do trabalho. Devem apresentar-se como elementos mínimos a retomada das principais ideias tratadas nas seções, a repetição das questões levantadas ou das conclusões obtidas e, finalmente, as palavras de encerramento do trabalho. É importante observar: nenhuma nova informação deve ser apresentada na conclusão. Os conteúdos da introdução e da conclusão, apesar de aparente proximidade, não devem repetir-se; essas partes constituem uma espécie de “negativo” uma da outra: a primeira enuncia o

que apresentará o trabalho e como o fará; a segunda retoma, pelo conteúdo, o que concluíram as discussões. Além disso, o autor avalia os resultados da pesquisa e pode propor novas possibilidades de trabalho na área. Como parte final do texto, devem encerrar-se, de forma clara, as deduções levantadas ao longo da discussão do tema, sem apresentação de dados quantitativos.

## **O SOFTWARE QRS NVIVO 9**

O NVIVO 9 é a última versão do NVIVO e está em português. Suas origens estão no *software* QRS NUDIST (*Nonnumerical Unstructured Data Indexing, Searching and Theorizing*), apresentado à comunidade em 1981 e destinado a auxiliar os pesquisadores a lidar com dados não numéricos e não estruturados em análise qualitativa. Foi um dos primeiros programas de pesquisa qualitativa de sua espécie. Fornece múltiplas vantagens para o gerenciamento de material textual e multimídia, e documentos como transcrições de entrevistas, notas de campo e artigos relacionados que foram armazenados como arquivos texto podem ser analisados. O NUDIST *software* foi desenvolvido por Tom Richards, para apoiar a investigação social e ajudou a mudar a maneira como a pesquisa qualitativa era conduzida. Este e o QRS NVIVO 9.0® estão fundamentados no princípio da codificação e do armazenamento de textos em categorias específicas. O programa pode ser utilizado para análise de dados em várias áreas, tendo como limite a impossibilidade de analisar documentos com dados quantitativos. Uma de suas maiores vantagens é a capacidade de operar e agrupar uma diversidade de dados que tenham algo em comum. O *software* é pago, e mais informações estão disponíveis em <http://www.qsrinternational.com/what-is-qualitative-research.aspx>.

## **A PREPARAÇÃO DOS DADOS**

As publicações foram analisadas uma a uma e tabeladas como no exemplo abaixo (cf. Fig. 45), destacando o número da publicação (igual em todas as outras tabelas), parte do título, dos nomes dos autor(es) e os resultados e as conclusões em português, de forma resumida, utilizando uma legenda, para diminuir o número de páginas, possibilitando maior visibilidade entre os dados.

Ao resumir, retirando dos artigos os resultados principais e as conclusões, empregamos várias palavras similares que retratavam a análise qualitativa e ou quantitativa apresentada pelos autores dos trabalhos inventariados. Assim, a utilização de um *software* como o Word é limitada ou trabalhosa, tendo em vista as inúmeras palavras que necessitavam ser analisadas.

Nº	Título	Autor	Resultados e ou conclusões
1	<i>Algebra Student's Knowledge of Equivalence</i>	Steinberg R.M; sleeman D.H.; kctorza D.90	Muitos estudantes fizeram os cálculos por meio de um valor numérico, de cada lado da igualdade e compararam as respostas. Outros se basearam na transformação entre equações, aplicando operações algébricas, e alguns deram razões incorretas e, às vezes, sem sentido. Muitos estudantes não têm bom conhecimento do conceito de equivalência entre equações e mesmo os que têm não conseguem utilizar o conceito, para, efetivamente, analisar um par de equações. (p.119)

Figura 45: Exemplo de organização dos dados

Trabalhar com grande quantidade de dados de forma manual pode limitar nossa visualização a respeito das evidências que fundamentam as categorias e limitar a visão holística, ao desviarmos a atenção para dados somente pontuais, sem atermo-nos aos contextos e às possíveis correlações entre as características predominantes.

Para tabular os dados, utilizamos uma espécie de código, para minimizar a quantidade de páginas com intuito de melhorar o aspecto visual, porém, ao escrevermos os resultados, tivemos de decodificar para que a leitura fosse agradável e acessível. Assim, a análise e o registro tornaram-se um processo demorado que demandou tempo e atenção, além de paciência. Isso nos conduziu a um contato reiterado com os dados, possibilitando um exame mais acurado deles.

Iniciamos a utilização do NVIVO 09 e, depois de localizarmos, em cada parte da tabela, termos (UR) que nos interessavam, alocamo-los em categorias. Em seguida, refinamos as análises, reorganizando as informações, porém com base, somente, nas categorias realizadas inicialmente. Nosso olhar, nesse momento, não mais era direcionado pelas informações da tabela, mas pelas categorias.

## **A UTILIZAÇÃO DO SOFTWARE**

No início da análise, não tínhamos a intenção de utilizar outro *software* além do Word, por meio das ferramentas, *localizar* e *realçar*, como já vínhamos fazendo. Porém, deparamos com várias informações que deveríamos comparar, contrastar,

observar padrões, então fomos à busca de um *software* que nos desse apoio. Tivemos contato com o NVIVO, e o fato de a versão mais recente estar em português induziu-nos a investir nele, por acreditarmos que forneceria recursos que nos ajudariam a agilizar essa etapa de investigação.

As categorias iniciais foram predeterminadas com base nas análises anteriores. Utilizamos recursos, como criação de nós (categorias) (cf. Fig.46), realce de codificação para todos os nós, nós mais e menos codificados e densidade de codificação. Ao optar pelo recurso *explorar* nova consulta, pesquisa de texto, procurar por similaridades, incluindo sinônimos (cf. Fig.47) ou especializações e pedir para mesclar resultados encontrados em nó existente, ampliamos a possibilidade de encontrar padrões de forma rápida e relativamente confiável, porque os dados não estão no original, tendo em vista já terem sido organizados e traduzidos ao português. Utilizamos as cores laranja, para referir a fonte de dados (3ª tabela), e azul, para os nós atrelados a essa fonte de dados. Usamos o NVIVO, para codificar, automaticamente, as fontes com base nas palavras ou nas frases. Por exemplo, executamos uma consulta de pesquisa de texto para a palavra *erros* e, automaticamente, codificamos todas as ocorrências. Procuramos palavras exatas, frases ou conceitos semelhantes.

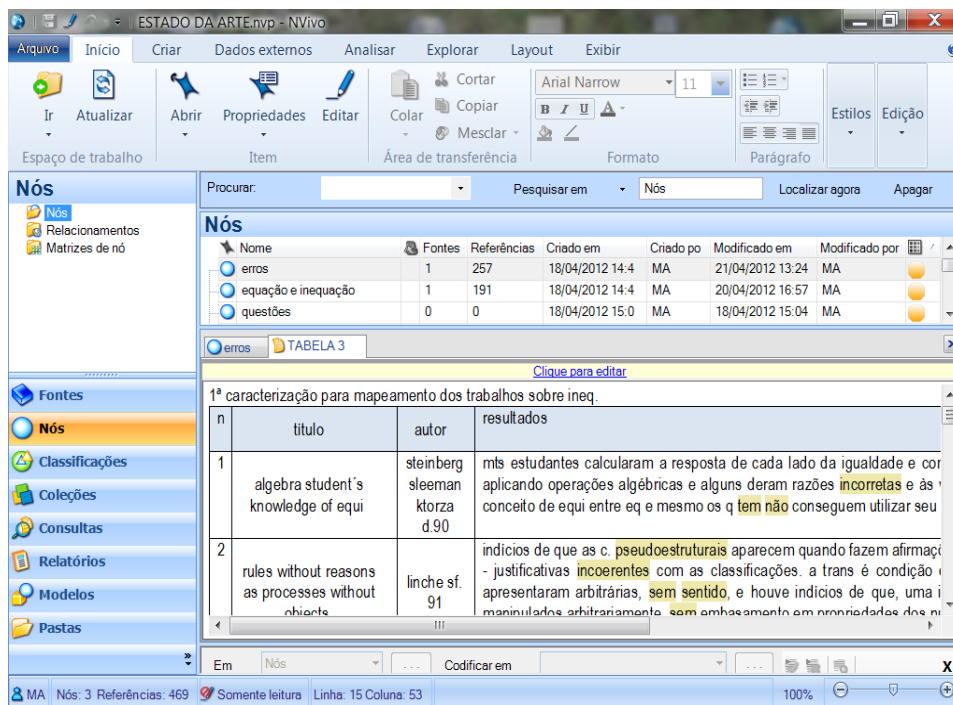


Figura 46: Ilustração de uma janela do NVIVO09  
Fonte: NVIVO 09

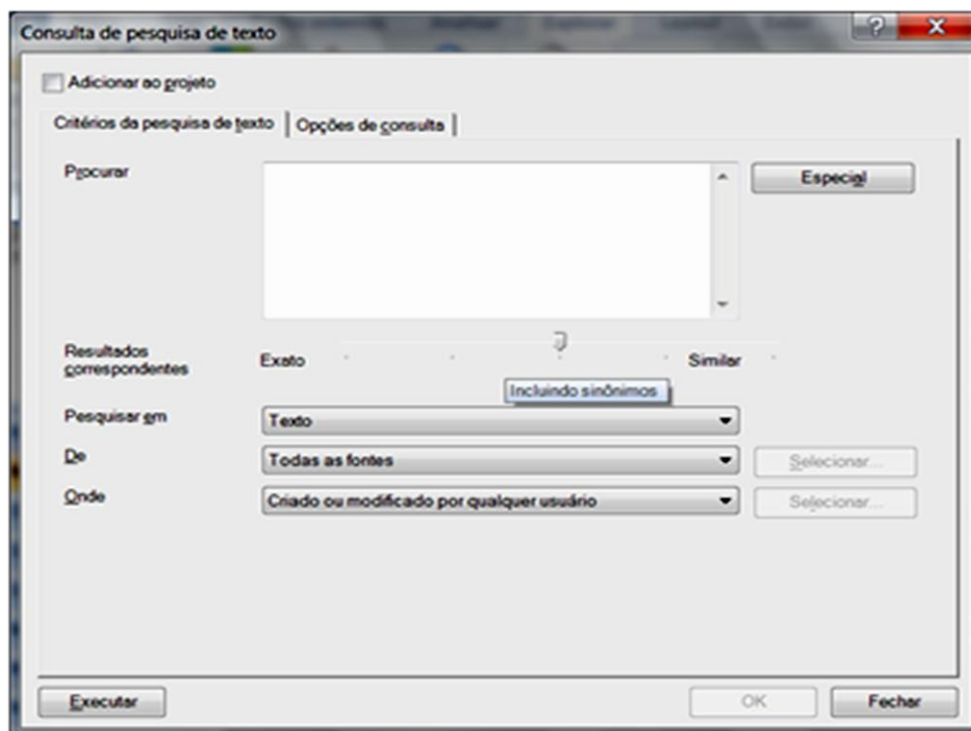


Figura 47: Apresentação de uma janela onde é possível optar pelo tipo de resultado correspondente, utilizando palavras similares

Fonte: NVIVO 09

## RETROSPECTO E ASPECTOS FUNDAMENTAIS

Os aspectos principais que nortearam esta etapa foram motivados pelos resultados das análises anteriores. São eles:

- Erros cometidos pelos estudantes;
- Relação entre equação e inequação;
- Sugestões pedagógicas;
- Enfoque entre transformação e equivalência;
- Questões reflexivas ou investigativas levantadas pelos autores.

Esses aspectos balizaram as categorias *a priori*, e, à medida que fomos trabalhando com os dados, novas observações surgiram e, conseqüentemente, outras categorias ou subcategorias.

No início, baseando-nos somente nos dados bibliográficos, autor(es), título, data, local de publicação e tipo de publicação, concluímos que:

- Os pesquisadores pouco se concentraram em analisar ou influenciar a organização curricular, a localização de inequações na grade disciplinar (antes, depois ou em paralelo a equações, junto com funções ou isoladamente, etc) e refletir sobre uma didática que possibilite aos estudantes mais entendimento sobre o assunto.
- A origem dos dados é variada, e a idade deles é ampla, pois levantamos publicações em 22 anos de investigações, apresentamos quem as produziu e inferimos algumas motivações e circunstâncias, porém podemos levantar mais dados de outras categorias e evidenciar outras relações.
- Mais investigadores brasileiros poderiam envolver-se e trabalhar com outros aspectos, além dos já evidenciados, pois existe pouca colaboração brasileira.
- Os trabalhos já produzidos não retratam o aprofundamento que se faz necessário quanto ao tema, e as pesquisas foram restritivas.
- O objetivo de muitas delas foi o erro e os entraves dos estudantes em relação às inequações lineares e quadráticas (cf. subcategoria *Formas de abordagem*); as inequações mais utilizadas para coleta de dados foram as lineares e as quadráticas.
- Houve diversidade de referenciais teóricos utilizados.
- Algumas pesquisas enfocaram o conceito de função correlacionado ao de inequação.
- Várias pesquisas focalizaram seus temas em uma investigação conjunta entre inequação e equação.
- Estudantes universitários e do ensino médio foram os participantes principais, e suas nacionalidades foram variadas.
- A grande atenção dos pesquisadores foi quanto à aprendizagem.
- As investigações tiveram pouca preocupação com o ensino na acepção geral da palavra, isto é, não envolveram currículo e metodologia.
- Os pesquisadores que mais se preocuparam com o tema foram os israelenses e os italianos. Apesar de muitas publicações italianas, a concentração foi, principalmente, em uma autora.

Esses e outros resultados, baseados somente nos títulos, impeliram-nos a pesquisar no interior dos trabalhos inventariados, a fim de verificar se tais resultados, de fato, retratam a realidade sob a visão dos objetivos, das metodologias e dos referenciais teóricos. As análises, baseadas nesses parâmetros, conduziram-nos ao capítulo anterior. Delas constatamos, resumidamente, que:

- Analisar os tipos de concepções dos estudantes, ao resolver as inequações, foi o maior foco dos pesquisadores; os erros foram a grande atenção.
- Somente 19% dos trabalhos tiveram como um dos objetivos analisar as abordagens metodológicas por meio das quais os estudantes aprendiam, e a maioria constatou que era pelo método tradicional.
- Pouquíssimas publicações apresentaram resultados quanto à pesquisa teórica, e a maioria optou pela pesquisa de campo como um espaço tridimensional para coleta de dados.
- A princípio, somente 3% dos trabalhos inventariados preocuparam-se com um enfoque no currículo, mas, ao depararmos com as conclusões, uma porcentagem maior de publicação fez algum comentário sobre aspectos relacionados a isso.
- As inequações lineares e quadráticas foram as mais utilizadas para a coleta de dados.
- As abordagens matemáticas privilegiaram a coleta de dados, interseccionando-os com as funções, os parâmetros, os gráficos.
- Apesar de poucas, houve investigações que se interessaram em analisar o modo de os estudantes lidarem com os conectivos, as propriedades de ordem dos números reais, o conjunto-solução, as equivalências e as transformações.
- Foram coletados e analisados dados em vários países.
- O contexto sociocultural, pluridisciplinar, epistemológico, histórico, as tecnologias e a análise de livros didáticos foram incluídos em poucas publicações.

Depois de familiarizarmo-nos com os resultados obtidos nos capítulos anteriores, apresentamos os dessa etapa. Os anteriores tiveram forte influência na categorização e

na análise dos dados coletados nas conclusões e nos resultados das publicações mapeadas. Algumas questões podem ser apresentadas como balizadoras dessa fase:

- Os resultados obtidos anteriormente corroboram os atuais?
- Na etapa de conclusão, surgiu dado novo?
- Os referenciais apresentados foram utilizados pelos investigadores ou somente elencados e comentados?
- O enfoque dado aos erros e às dificuldades continuou predominante?
- Os pesquisadores apresentaram propostas de mudança no ensino e na aprendizagem deste tema?
- Qual é a influência das teorias cognitivas de aprendizagem segundo os autores?
- Quais aportes matemáticos foram destacados?
- O comportamento dos sujeitos das pesquisas dependeu de suas nacionalidades?

## CATEGORIZAÇÃO

Recorremos ao NVIVO 09, para distinguir 4 categorias, a saber (cf. Quadro 5):

- Formas de abordagens: incluímos as maneiras como os sujeitos das pesquisas resolveram e ou interpretaram as inequações. Focalizamos erros e dificuldades, ao abordar tal conceito. Essa categoria foi subdivida em *erros de interpretação* e *erros de resolução*. Empregamos como UR palavras, como *erros*, *dificuldades*, *concepções pseudoestruturais*, *fracasso* e similares em várias línguas.
- Natureza dos erros: destacamos a(s) gênese(s), segundo os autores das publicações. Este item tem por objetivo auxiliar o direcionamento curricular e o planejamento dos professores. As UR foram expressões utilizadas pelos autores que refletiram tal natureza, como: *causa*, *epistemologia*, *cognição* e similares.
- Questões reflexivas e investigativas: incluímos as questões dos autores, a fim de nortear os próprios trabalhos e ou com o propósito de indicar caminhos para futuras pesquisas. Neste caso, as UR foram símbolos, isto é, os pontos de interrogações.
- Aspectos metodológicos: levantamos as sugestões e os comentários sobre os aspectos metodológicos apontados pelos autores das publicações mapeadas que envolvem as inequações. Isso visa reunir metodologias indicadas com o intuito

de melhorar o ensino e a aprendizagem. Serviram como UR: *atividades, sugestões, metodologia, abordagem* e similares.

<b>Categorias</b>	<b>Subcategorias</b>
Formas de abordagens	Erros de interpretação
	Erros de resolução
Natureza dos erros	-----
Aspectos metodológicos	-----
Questões reflexivas e ou investigativas	-----

Quadro 5: Categorias que surgiram dos dados da terceira tabela para complementar e aprofundar as análises

## **FORMAS DE ABORDAGENS**

Entre as inúmeras maneiras que os pesquisadores poderiam ter direcionado os trabalhos, os erros e as dificuldades foram os escolhidos. Os resultados de, pelo menos, 58 trabalhos apontam os erros dos participantes, ao resolver ou interpretar as inequações. Mesmo que o objetivo principal dos estudos não tenha sido a análise dos erros, ao apresentar os resultados e a conclusão, esse foi o enfoque que a maioria deu pela pesquisa teórica ou de campo. Utilizamos, no NVIVO 09, a opção *explorar, consulta de pesquisa de texto, resultados*, incluindo sinônimo, ao procurar pelas UR: *erros, dificuldades, incoerências, inconsistência, problema, pseudoestruturais, pseudoestrutura, incorretas, fracasso, imprópria, sem sentido, não entendimento, não tem conhecimento, aprendizagem muito limitada, resolução de equação*. Ao retornarmos à terceira tabela, para verificarmos o contexto onde tais erros se localizavam, tínhamos a necessidade de reler os trabalhos originais e checar se o resumo apresentado na tabela estava adequado. Nesse ir e vir, NVIVO, tabela 3 e trabalhos originais (cf. Fig.48), acreditamos ter apurado nosso olhar, refinando e tornando mais confiáveis nossos resultados, isto é, gerando confiabilidade no produto das análises.

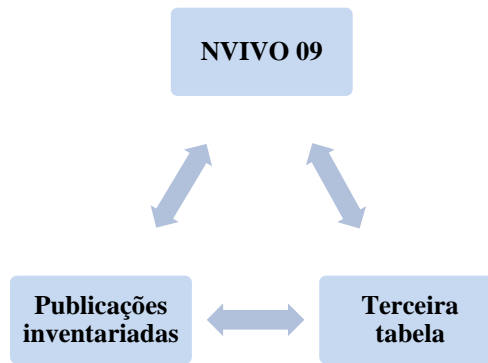


Figura 48: Diagrama indicativo do uso do NVIVO 09

### *Erros de Interpretação*

Neste item, elencamos as maneiras apresentadas pelos autores como os estudantes interpretam uma inequação, principalmente os erros de interpretação. Reiteramos que a característica de uma interpretação é exposta segundo a apresentada no capítulo 1. Assim, estão envolvidos, em uma interpretação, o sinal da desigualdade, um conjunto numérico, os intervalos numéricos, a(s) expressão (ões) algébrica(s), o conjunto-solução, a(s) função(ões), os conectivos lógicos, os quantificadores, as propriedades dos números reais, em particular, a ordenação, entre outros aspectos matemáticos. Apesar de muitas características situarem em uma zona de interface, separamos algumas com o intuito de destaque para melhor entendimento. São, entre outras:

- equação e inequação, para a maioria dos estudantes, é uma cadeia de símbolos sem significado nos quais certos processos bem definidos são rotineiramente aplicados;
- as mesmas propriedades para a adição valem para a multiplicação;
- a maioria dos participantes não consegue explicitar o valor absoluto em função de seu argumento e separar as desigualdades existentes;
- a maioria dos participantes de uma pesquisa não respondeu às questões relativas à representação no plano de conjuntos, como  $\{(x,y): y > x, x < y-1\}$ ;
- houve muitos erros cometidos, ao marcar números na reta numérica; muitos nem responderam à proposição; o modelo numérico deles é o conjunto dos números naturais;
- os erros encontrados apontam complexa relação entre sinal, denotação e sentido (Frege);

- quando o aluno resolve  $x^2 \geq 4$  como  $x \geq \pm 2$ , fica evidente que o sinal gráfico aponta para a resolução de uma equação. Tal ação está armazenada na memória. O sinal ativa um procedimento familiar válido em situações do tipo  $x^2 = 4$ ;

- somente 50% responderam que  $x = 3$  podia ser solução de uma inequação em uma atividade do tipo: “Considere o conjunto  $S = \{x \in R: x = 3\}$  e verifique a seguinte afirmação:  $S$  pode ser solução tanto de uma equação como de uma inequação”;

- o mesmo aconteceu para  $x = 0$ . Muitos afirmaram que a resposta de  $5x^4 \leq 0$  era  $x \leq 0$ . Soluções como  $\pi$  ou  $R$  são problemáticas para os estudantes;

- muitos aceitaram que  $x = 0$  podia ser solução de uma das tarefas, mas  $x = a$  não podia ser solução de uma inequação;

- não leem uma inequação da direita para a esquerda;

- há dificuldade em modelar, isto é, passar de uma afirmação dada para a linguagem algébrica referente à desigualdade;

- não reconhecem a diferença semântica entre equação e inequação;

- a noção de intervalo é limitada aos números inteiros;

- não conseguem ler desigualdades do tipo  $-I > I$  ou  $I < x$ ;

- usam letras, sem atribuir significado a elas (sempre são números inteiros); há dificuldades em usar as letras, em interpretar as variáveis e o que a vem a ser uma variável dependente e independente em uma relação funcional;

- a solução de uma inequação só pode ser uma desigualdade, nunca uma igualdade;

- muitos erros estão relacionados à não compreensão do sinal de desigualdade como o usado no contexto matemático;

- uma inequação não é mais que uma cadeia de símbolos que podem ser manipulados arbitrariamente, sem embasamento em propriedades dos números reais;

- raramente, validam a solução obtida;

- segundo a maioria dos participantes, a inequação estava resolvida quando explicitavam, na solução, expressões do tipo, é “a união de intervalos” ou, “é um intervalo”;

- não entendem a própria solução;

- os respondentes foram piores nas respostas em relação a inequação do que equação. Existem similaridades entre as concepções dos estudantes e a visão expressada por Peacock, De Morgan e Hilbert: os símbolos matemáticos, embora interpretáveis de maneiras diferentes, não têm significado em si próprios. As respostas dos estudantes são

inconsistentes em relação à definição estrutural de equivalência oferecida nos livros. Eles veem as regras de álgebra arbitrárias mesmo se, intuitivamente, são aceitáveis e justificáveis para os seus propósitos (SFARD; LINCHEVSKI, 1994);

- As concepções resultantes sobre o significado, a definição e a caracterização de uma inequação foram: inequação como um amálgama de imagens ou símbolos encontrados em matemática, como um relativo estranho de uma equação, como uma ferramenta usada na otimização de contextos, como uma metáfora dinâmica de escala e como vista pelo matemático – um complexo conceito matemático que poderia ser expresso em diferentes registros – simbólico, por meio de intervalo, ou gráfico e poderia desempenhar diferentes funções – comparar quantidade, expressar e resolver restrições ou deduzir igualdades (HAMALGHI, 2010).

### *Erros de Resolução*

Neste item, incluímos tipos de erros de resoluções dos participantes apresentados nas publicações. Por resolução, entendemos o que foi exposto no capítulo 1, sobre a caracterização do tema, e que envolve manipulações algébricas e ou gráficas, desenvolvimentos e estratégias desenvolvidos, a fim de obter o conjunto-solução. Foram elencados, em especial:

- justificativas incoerentes com as classificações feitas pelos respondentes, ao analisar pares de inequações transformáveis (ou não) e ou equivalentes (ou não). A transformabilidade é condição essencial à equivalência. As decisões sobre transformações permitidas apresentaram-se arbitrárias, sem sentido;

- concepções pseudoestruturais são mais amplamente encontradas do que normalmente suspeitamos (LINCHEVSKI; SFARD, 1991). Tais concepções, no âmbito do tratamento da inequação e da equação, surgem quando os estudantes consideram uma fórmula proposicional como uma cadeia de símbolos semanticamente permitidos para a qual transformações formais são usadas, para encontrar a solução e são as únicas fontes de significado;

- alto índice de erros em relação à resposta se é permitido multiplicar por 0 ambos os membros de uma equação e de uma inequação. Os resultados são compatíveis com os apresentados por Linchevski e Sfard (1991) sobre concepção pseudoestrutural, e, além disso, os estudantes não reconhecem a invariância de denotação, ao variar o sentido (Frege) (Modelo ABC);

- o método de resolução por meio de, apenas, manipulações algébricas proporcionou a maior taxa de soluções incorretas;

- as perguntas sobre o que era uma inequação e uma equação e como resolvê-las tiveram alto índice de acertos. Houve, também, grande número de acertos com relação ao entendimento teórico das operações a ser utilizadas na equação e na inequação, porém, na ocasião de aplicar tais propriedades na análise de equivalências e transformações, esse índice caiu, principalmente no que se trata de equivalente e transformável em relação àquelas do tipo equivalente, mas não transformável;

- dificuldades com valores a ser excluídos com denominador diferente de zero e com os valores sob a raiz quadrada;

- escolha inadequada dos conectivos lógicos;

- o objetivo dos participantes foi isolar a variável, sem preocupar-se com a validade dos seus procedimentos;

- dedução incorreta dos sinais de fatores de produto e ou quociente de expressões algébricas;

- resolver uma equação ao invés de uma inequação;

- multiplicar e ou dividir por fatores que não são necessariamente positivos;

- formação de conexões com raízes quadráticas sem significado;

- elevar o quadrado da inequação dada com o objetivo de extrair uma ou outra raiz quadrada, sem levar em consideração as regras de existência da raiz;

- os estudantes que usam a abordagem gráfica para resolver as inequações racional e quadrática obtêm, em geral, soluções corretas. Eles aplicam essa abordagem apenas às racionais e às quadráticas;

- muitos deles não conseguem aplicar as propriedades de ordem dos reais para analisar equações e inequações, equivalências e ou transformações (ou não transformação). Eles não reconhecem a invariância de denotação, ao variar o sentido (não varia o conjunto-solução, mesmo variando a expressão algébrica); ser transformável é, para eles, condição necessária para equivalência (BAZZINI, 1995, 1998);

- a contradição principal na transição do trabalho com proposições (típico da aritmética) para operar com funções proposicionais (típico da álgebra) é que, no primeiro caso (em relação à aritmética), avaliar se a proposição é verdadeira é imediatamente obtido pela inspeção direta da proposição em si; no segundo caso (álgebra), a avaliação direta da veracidade deve ser suspensa até que tenha sido

identificada através de algum método de cálculo numérico que permite expressá-la. O principal problema didático é o desenvolvimento de ensino de habilidades de trazer ao plano de consciência a necessidade de suspender a avaliação e submeter ao resultado do cálculo o controle que é preciso, isto é, só avaliar se determinado(s) valor(es) satisfaz(em) a inequação, depois de checar todo o procedimento algébrico e ou gráfico realizado; (CHIAPPINI; MOLINARI,1998)

- não explicitam o uso do quantificador nas soluções, como, por exemplo:  
 $\forall x \in R$ ;

- não apresentam ter conhecimento dos parâmetros e demonstram incapacidade de operar sobre termos literais;

- sempre consideram o denominador como positivo;

- em uma publicação, o autor expressa que o topo das estranhezas foi encontrado nas resoluções de  $-7x^2 < \sqrt{7}$ ;

- grande porcentagem reconhece que um parâmetro  $a$  não pode ser multiplicado, sem mudar o sinal da inequação, mas não sabe utilizar isso, ao resolver. Isso aconteceu com mais de 80% dos participantes, tanto em Israel quanto na Itália;

- trabalham intuitivamente, com o modelo de balanceamento, afirmando ser permitido fazer a mesma operação em ambos os lados da inequação;

- estudantes italianos e israelenses usam algoritmo intuitivo de equação para resolver inequação e desenvolveram um modelo “algoritmo equacional”; muitos não fazem exclusão do zero no denominador e multiplicam, sem alterar o sinal, achando que sempre é um número positivo, qualquer que seja a variável; explicaram que era permitido fazer a mesma coisa em ambos os lados, tanto na equação quanto na inequação, pois “é o método do balanceamento”;

- lidam com produtos da seguinte maneira: se  $a.b > 0$ , então  $a > 0$  e  $b > 0$  etc.;

- fazem inapropriadas decisões quanto aos conectivos lógicos;

- rejeitam que  $\{x|x = a\}$ ,  $R$  ou  $\emptyset$  seja uma solução possível;

- apresentam incoerência entre a resolução verbal e a escrita;

- muitos não são capazes de aceitar que uma inequação pode ter infinitas soluções;

- agem de forma instrumental somente e não relacional;

- indicam ter problemas para montar uma inequação, isto é modelar uma situação por meio de uma inequação; alguns encontraram dificuldades para resolver uma inequação linear algebricamente;

- apresentam problemas na leitura de uma desigualdade do tipo  $x \leq 14$  ( $x$  igual ou menor que 14), por ter o sinal de igualdade junto com o de desigualdade;

- possuem dificuldade em trabalhar com 0 em todos os sentidos, seja em exclusão, seja em inclusão; não conseguem transformar ideias de resolução de inequação padrão para uma não padrão; têm dificuldade de resolver e interpretar solução com zero ou com valor  $\neq 0$  (por exemplo,  $5x^4 \leq -9$  e  $5x^4 \leq 0$ );

- indicam ausência de aspectos formais lógicos em todos os protocolos de dois grupos pesquisados e presença quase coerciva, às vezes velada, de aspectos intuitivos numéricos; nenhum deles fez as conexões matemáticas entre a resolução funcional gráfica e a algébrica;

- quase 70% dos estudantes de Israel e da Itália não conseguem valorizar o domínio de uma função e demonstram pouco conhecimento de objetos matemáticos. Tratam de inequação de maneira tradicional, por meio de padrões de exercícios, e a solução é alcançada passo a passo; assim, apresentam dificuldades com equivalências de inequações, e tratar de inequação como objeto matemático não é fácil para eles;

- não reconhecem equivalência entre inequações;

- não aparentam dominar os aspectos formais ligados à resolução algébrica;

- reconhecem a importância do sinal  $>$  ou  $<$ , mas, na resolução, ignoram-nos;

- revelam dificuldade de usar e relacionar diferentes técnicas de resolução;

- fazem manipulações sem sentido, desconexas, desprovidas de explicações;

- empregar as propriedades de relações de ordem e operações necessárias para resolução algébrica constitui uma mudança cognitiva não trivial.

Estes aspectos não estão separados por níveis de escolaridade, porém destacamos que os participantes do ensino médio, segundo os trabalhos inventariados, apresentaram todos esses erros. Os de nível superior concentram-se em: não conseguem analisar equivalências; não se preocupam com propriedades válidas para ser aplicadas à manipulação algébrica; fazem uso da tabela de sinais sem saber o porquê; não conseguem fazer a análise gráfica da variação da função nem passar da resolução gráfica para a algébrica; têm dificuldade em tratar da manipulação algébrica como se fosse uma demonstração do tipo  $p \Leftrightarrow q$ , onde  $p$ ,  $q$ , são inequações e o símbolo  $\Leftrightarrow$  indica bicondicionalidade, portanto equivalência; demonstram escassa organização e concatenação entre a linguagem verbal, algébrica e gráfica e problemas com simplificação; resolvem uma inequação com regras advindas da resolução de uma

equação, e muitos demonstram um conhecimento puramente algorítmico. No quesito *Interpretação*, ressaltamos, no ensino superior, sobretudo, o não entendimento dos conectivos lógicos e quantificadores; não checam a validade da solução encontrada; não conseguem lidar com parâmetros, e, para muitos, a solução de uma inequação só pode ser expressa em termos de uma desigualdade. De forma ampla, podemos indicar que os autores não apontam diferenças substanciais entre os conhecimentos dos sujeitos participantes universitários e os do ensino médio.

## **NATUREZA DOS ERROS**

Analisar as dificuldades e os erros cometidos pelos participantes e buscar suas origens, levantando dados que permitam nortear os planejamentos dos professores, as direções metodológicas a ser tomadas e considerá-los como uma oportunidade de reflexão pedagógica pode constituir-se em importante momento de aprendizagem não somente para o aluno, mas também para o professor, pois possibilita compreender como os alunos se apropriam de determinado conhecimento matemático (CURY, 2008). Os erros, inclusive, não evidenciam, apenas, o que os alunos não sabem, pelo contrário, podem fornecer pistas sobre como os alunos aprendem e compreendem determinado conteúdo. Ao tentar compreender a natureza do erro e suas contribuições para a aprendizagem de conceitos matemáticos, abrimos um espaço para melhor entendimento e significação desses conceitos. Assim, selecionamos algumas observações dos autores que buscam situar a natureza dos erros cometidos:

- o lento desenvolvimento histórico da álgebra, dando um salto dos tipos retórico e sincopado para o simbólico, induz dificuldades aos processos cruciais na álgebra de construção e interpretação das letras (variáveis, parâmetros e incógnitas). Um exame cuidadoso da aprendizagem de álgebra leva a crer que os problemas têm suas raízes nos níveis iniciais de escolaridade: a relação dialética entre a linguagem natural e a linguagem simbólica, incluindo semântica e sintaxe, e as relações entre os procedimentos;

- uma discussão sobre as concepções procedimentais e estruturais e sobre a “passagem” da aritmética para a álgebra pode fincar uma estaca, um marco;

- as causas das patologias podem estar associadas a métodos de ensino que favoreçam os aspectos relacionais e não os procedimentais dos conceitos introdutórios.

Isso é, então, a causa do fracasso da construção dos processos primários geradores de objetos matemáticos que, por sua vez, formam a base para a construção de outros processos em uma alternância de processos e objetos que assumem o seu pleno significado na dialética de sua relação;

- as raízes desses comportamentos podem ser de naturezas variadas e identificáveis no hábito de resolver questões de moldes tradicionais e nas possíveis dificuldades inerentes ao tratamento das variáveis, ou seja, a intenção de ter, sob controle, todas as variáveis do problema ao mesmo tempo;

- a prática generalizada de tratar equação e inequação sequencialmente e não integrada favorece a criação de estereótipos em sua resolução processual e não propicia uma abordagem integrada e relacional. Ao introduzir equação e, em seguida, as inequações, em termos gerais, implica que os procedimentos válidos de solução para equação continuam a predominar comparados com os de inequação. Assim, a inequação é vista como uma espécie de "equação patológica" ou "doença da equação" e é tratada como tal. Assim, a relação procedimental-relacional é completamente distorcida;

- o conhecimento aritmético age como um obstáculo epistemológico, no sentido de Brousseau;

- o fenômeno de obstáculos cognitivos surge, porque o subconsciente individual liga propriedades incidentais a experiências anteriores já não apropriadas a novos contextos, ao invés de usar o som da linguagem metafórica para chamar experiências anteriores (David Tall (2004) chama de "encontro-anterior"). Existe uma hipótese que infere serem, precisamente, esses "encontros-anteriores" nas resoluções das equações lineares os causadores de problemas nas resoluções de inequações;

- Sfard e Linchevski (1991) pontuam a falta de atenção aos processos primários, geradores de objetos matemáticos e que são a base para a construção de outros processos. Bazzini (1995), apesar de aceitar a importância de uma aproximação didática que integre, de modo harmônico, os aspectos processuais e estruturais, enfatiza que a causa de tais erros é a escassa atenção, ao diferenciar objeto do modo como se apresenta, isto é, a notação de uma expressão algébrica com respeito ao sentido que assume;

- os erros podem estar fundamentados nas crenças intuitivas que competem, com sucesso, com os conhecimentos adquiridos formalmente. No ato de manipular, algebricamente, uma inequação, a interferência intuitiva prevalece;

- tais comportamentos “incorretos” derivam, provavelmente, do papel do componente “sinal”, que, se tomado superficialmente, pode induzir a ativação do sentido de equação; (BAZZINI; BOERO; GARUTI, 2001)

- o problema de confundir equação e inequação tem raízes profundas e pode residir em não compreender o verdadeiro significado dos símbolos da igualdade ou da desigualdade.

Ao longo das características elencadas, percebemos o uso de marcos teóricos utilizados pelos pesquisadores, como os propostos por Linchevsky e Sfard (1991), Frege (1892), Fischbein (1987), Tall (2010), Brousseau (1983), Trigueiros (1997), entre outros não localizados explicitamente por nós. Ao refletir sobre a natureza dos erros, percebemos as dimensões cognitivas, epistemológicas, históricas e didáticas tangenciadas pelos autores.

## **ASPECTOS METODOLÓGICOS**

Destacamos as sugestões e os aspectos metodológicos apontados pelas publicações para o tratamento do conceito de inequação. Esta categoria complementa a anterior, pois alguns autores tiveram a preocupação em apresentar uma reflexão sobre as possíveis causas das dificuldades e dos erros cometidos pelos respondentes e alguns comentários sobre questões metodológicas. Porém, esses dois aspectos não foram contemplados no mesmo trabalho por todos os autores. Entre as reflexões sobre os aspectos metodológicos, salientamos:

- a possível razão para o não entendimento e o fracasso algébrico escolar pode ser o confronto entre o modelo desenvolvimental e a maneira estrutural do ensino de álgebra. Quanto à equação e à inequação, apesar de ensinadas simultaneamente, a inequação demanda mais da compreensão do estudante do que a equação. O ensino formalista matemático tem prevalecido;

- todo conhecimento é local, é verdadeiro no sentido usual de certos limites dos quais os estudantes, muitas vezes, não têm conhecimento. Existem três dimensões cognitivas a ser consideradas: espaço psicológico (ser coerente em si mesmo), validade e eficácia. É importante identificar o conhecimento local de um aluno e agir sobre ele. Ao não demandar tempo para entender o porquê de uma transformação algébrica, a álgebra perde a sua força quanto à possibilidade que oferece de entender a manipulação realizada. É importante salientar a resistência dos alunos em relação a mudanças, então

é necessário convencê-los a isso e trabalhar com suas crenças. A álgebra é difícil de ser ensinada como é difícil de ser aprendida, pois, muitas vezes, não há razão, somente aplicação de regras da sintaxe, ignorando-se a denotação e a compreensão, ou seja, a finalidade de escrever transformações algébricas para resolver o problema proposto. As três dimensões tratadas são indissociáveis (Grupo GEICO, 1997);

- a realidade matemática é baseada no princípio da não contradição (os professores precisam enfrentar a realidade matemática); é imprescindível ensinar o porquê das regras; é possível fazermos várias entrevistas, para detectar o conhecimento local, inclusive com a mesma pessoa, voltar o aluno para si mesmo, para suas ações e não apenas de acordo com o conhecimento matemático; assim, ficará mais fácil mudá-lo de direção (Grupo GEICO, 1997);

- segundo as ferramentas do GEICO, é importante levar em consideração a tripla abordagem do aspecto metodológico de ensino de álgebra: conhecimento local (alunos dão um exemplo e dizem que vale para todos os outros, atribuem um valor e vale para o resto); conformidade (exemplo de resoluções totalmente desconexas, sem sentido, com regras algébricas); mudanças de orientações (dão exemplos de estudantes que mudaram suas maneiras de pensar, depois de trocar ideias com colegas de sala) (Grupo GEICO, 1997);

- é importante uma análise epistemológica, didática e cognitiva da abordagem dos estudantes de ensino superior na resolução de inequação. Sob o aspecto didático, são questionadas as técnicas de tratamento desse conteúdo no ensino médio: consistem em, somente, reconduzir a regra de multiplicação dos sinais dos binômios, ensinam inequação só do tipo  $(...)(...) > 0$  ou  $(...)(...)/(...)(...) < 0$ , ao invés de, por exemplo,  $P(x) > Q(x)$ , pois reduz-se a complexidade, e limitam-se às técnicas de ensino. É apontada a superficialidade como são tratadas as inequações (BOERO, 1998a);

- o tema *inequação* varia de enfoque no currículo: na Europa, em geral, aspectos algébricos lógicos são mais considerados; nos EUA, os aspectos funcionais. Assim, a álgebra é uma parte importante da geometria analítica e dos estudos da função. Existe uma diversidade de abordagens e ferramentas que parece ser necessária para tratar do assunto de forma profunda. Necessitamos de:

- conhecer os sujeitos aprendentes; estudar as nuances da palavra *inequação* para eles, as técnicas de tratamento, etc. – antropologia;
- utilizar computadores e calculadoras - novas tecnologias;

- validar a constituição histórica da inequação e a constituição desse conteúdo matemático no currículo de diversos países - história;
- comparar a abordagem funcional com a lógico-algébrica – cognição;
- encorajar o estudo sobre perdas e ganhos em termos de desenvolvimento intelectual da matemática. A transição do nível “técnico” ao “tecnológico” é difícil. Existe alta confiança dos estudantes em usar a tabela de sinais. A abordagem funcional perde na consideração de estudo das variáveis envolvidas, do estudo lógico-verbal. São várias dimensões a ser estudadas.

- a utilização de tecnologia em um currículo convencional pode indicar melhores resultados quando comparado com um método tradicional de ensino. Os resultados da análise de covariância (ANCOVA) mostram que um grupo experimental, em determinada investigação, teve escores significativamente melhores nas questões envolvendo as soluções de intervalo para o valor absoluto e nas desigualdades que com uma função quadrática. Apesar do aumento no rendimento, os dados refletem que o tratamento não fez efeito positivo significativo nas atitudes dos alunos em relação à matemática;

- pesquisadores em quatro estudos condenam a introdução de inequação depois de equação. Para eles, neste caso, a diferença entre sentido e denotação é completamente desviada;

- a escola deveria fornecer a oportunidade de praticar diferentes abordagens e ensinar a comparação entre elas. A abordagem funcional estimula uma dinâmica de abordagem visual-qualitativa (equilíbrio);

- todos os estudos sugeriram que a abordagem corrente para inequação baseada em procedimentos puramente algorítmicos produz uma aprendizagem limitada. Os professores deveriam explorar a abordagem funcional na sala de aula e indicam que as estratégias didáticas deveriam fazer uso de uma abordagem global e dinâmica para funções, utilizando representação gráfica, gestos e metáforas. Os resultados mostraram que os sujeitos estudaram sob o ensino tradicional;

- a forma epistemológica e cognitiva é uma boa estratégia junto com funções, para planejar e analisar o ensino de inequação;

- três trabalhos (VIRIKIOS; FARMAKI, 2006, BAZZINI; BOERO e GARUTI 2001, BOERO, 1998) indicam modelagem para introduzir inequação e apresentá-la em paralelo e não na sequência de equação. A resolução pode ser de diferentes maneiras,

devemos usar diferentes tipos de registros e atribuir valores para checar a solução. É importante que o professor valorize os conceitos teóricos fundamentais e seja capaz de organizar situações didáticas, para melhorar o conhecimento dos estudantes;

- dado o papel fundamental da inequação na álgebra e na análise, acreditamos que deva ser aprendida e compreendida por caminhos em que o foco sobre o aspecto relacional esteja presente desde início e, metaforicamente, iluminar a escolha e a execução procedimental;

- a maneira tradicional de ser ensinada fornece aos estudantes ferramentas para uma resolução algoritmizada. Duas publicações sugerem uma discussão teoricamente orientada. Os professores não devem apresentar exemplos só locais para o ensino de álgebra, mas, sim, globais. Fazer álgebra não é exatamente manipulação formal. Devemos fornecer diferenciadas abordagens, não somente resoluções passo a passo (BAZZINI; TSAMIR, 2002);

- O uso de gráficos induz a novas dificuldades específicas a funções. Não se garante que, quando se resolve, graficamente, uma inequação, aprende-se a mesma matemática que resolver algebricamente. É importante saber o que faz os alunos aprenderem matemática quando resolvem algebricamente e ou graficamente uma inequação;

- um desafio é encontrar maneiras didáticas de deixar os estudantes atentos às armadilhas, ao tentar resolver as inequações por métodos de resolução de equação;

- o uso da calculadora TI-90 conduziu os estudantes a uma construção gráfica raciocinada e não a esmo. Também facilitou o desenvolvimento de um tipo de algoritmo que os conduzia de uma resolução de inequação linear ou quadrática a outra qualquer do tipo polinomial (RIVERA; BECKER, 2004);

- Radford (2004) aponta dois motivos para as dificuldades em lidar com equação e inequação: a natureza da compreensão apofântica<sup>83</sup> e a natureza apodítica<sup>84</sup> de suas

---

<sup>83</sup> Chamamos de método apofântico o que consiste em extrair, pela dedução e pelo clareamento, os juízos virtuais, contidos implicitamente num juízo já aceito e que podem levar a consequências totalmente imprevisíveis previamente. Disponível em: <<http://www.filoinfo.bem-vindo.net/filosofia/modules/lexico/entry.php?entryID=495>>

<sup>84</sup> O conhecimento apodítico é aquele em que obtemos a causa pela qual algo é, “quando sabemos que essa é a causa de algo, e quando, além disso, não é possível que esse algo seja outro que não este”. São duas as características da ciência: 1ª) conhecer a causa de um fato; 2ª) dadas certas premissas, decorre delas uma conclusão necessária. O conhecimento das causas e das necessidades caracteriza a ciência apodítica, constituindo a demonstração (*apódeixis*), formando o silogismo científico. Este supõe uma necessidade formal, própria desta forma de raciocinar. (ROHDEN, 1998, p.255).

transformações. Precisamos de melhor conceito de predicação capaz de integrar em si mesmo a pluralidade de sistemas semióticos que estudantes e professores usam, tais como, diálogo, gestos, gráficos, ações corporalizadas etc. Julgamentos predicativos deveriam ser compostos de um complexo de cadeias de gestos: sinais escritos, trechos de diálogos e artefatos mediados por ações corporais. Assim, as transformações efetuadas pelos estudantes não estariam confinadas ao reino da lógica e das manipulações formais simbólicas;

- professores devem incluir atividades que promovam a solução com único valor, por exemplo,  $x = 3$ ; devem fazer também o contrário, dar uma solução e pedir uma inequação que corresponda à solução dada e discutir possibilidades, como  $<$ ,  $>$ ,  $\leq$ ,  $\geq$ ,  $=$ ; uma inequação do tipo  $ax^{2n} \leq 0$  leva a maior quantidade de soluções corretas quando analisadas verbalmente;

- o professor, baseado em evidências, ciente das categorias das maneiras de pensar, associadas às ações mentais de imaginar e prever, pode ajudar a melhorar a compreensão dos estudantes para que avancem de impulsivos e tenazes a analíticos e explorativos. As categorias podem ser elencadas como as de imaginar (*foreseeing*): rapidamente aplicar um procedimento (antecipação impulsiva); ser tenaz na maneira de entendimento (antecipação tenaz); explorar diferentes ideias (antecipação explorativa); analisar o problema, identificando um objetivo (antecipação analítica) e aplicar, espontaneamente, sua maneira de pensar de forma pertinente ao problema (antecipação interiorizada). Possuir termos explícitos para caracterizar a predição (baseado nas evidências) dos alunos permite ao professor diferenciar maneiras desejáveis de pensar associado a predições menos desejáveis que outras e ajuda os estudantes a passar da predição associação-baseada à predição coordenação-baseada (LIM, 2006);

- algumas publicações sugerem que o professor apresente vários métodos e deixe o gráfico por último e indicam que, se fosse para escolher somente um método, o gráfico seria o melhor;

- outras publicações aconselham a não tratar das inequação de forma tão rápida; assegurar que os símbolos utilizados sejam claramente diferenciados, valorizar a semântica; estabelecer claras diferenças entre equação e inequação; usar diferentes linguagens e passar de uma para outra; ao introduzir notação formal, não se desconectar com o significado e usar várias abordagens de resoluções;

- três trabalhos apontam que os professores ensinam sob o aspecto algorítmico e falham no aspecto formal, podem dar um tratamento gráfico, mas não relacionam ao algébrico; devemos, primeiro, lidar com os erros de concepções dos professores; em geral, os professores não trabalham muito com a visualização gráfica;

- é fundamental que os professores passem a investigar a sua prática profissional, tendo como finalidade a compreensão do modo como ela influencia os erros cometidos e as dificuldades percebidas pelos alunos (BELTRÃO, 2010);

- as convicções dos professores podem ser de fontes diferentes que variam conforme a visão de si próprio, de sua profissão, a importância e o significado que dá a educação, entendida em sentido amplo. As mediações culturais relacionadas com a matemática que formam professores em todo o discurso matemático escolar começam em instituições onde estudaram, chegando às escolas onde ensinam;

- as razões pelas quais o professor se conforma com os alunos aprenderem algumas habilidades mecânicas são muitas: falta de tempo, facilitação do ensino e da avaliação, necessidade de enquadrar mentalmente os alunos. Se os professores tentam trabalhar o raciocínio, isto é, estimulam que pensem no que fazem, terá de enfrentar "impopularidades", ou seja, terá de lutar para que estejam aptos a, verdadeiramente, entender as coisas e não apenas a aprender as técnicas. Isso prevê que, em relação à aprendizagem, os alunos perguntem por que, mas o que deve ser natural tornou-se estranho e até ofensivo. Os professores não são ajudados pelo contexto social e cultural onde trabalham, a sociedade valoriza tudo que pode ser obtido imediatamente, fácil e divertido, e o trabalho a ser proposto, que deveria o ser natural esforço de reflexão, não encontra terreno fértil. As instituições de ensino tornam-se mais voltadas à quantidade de conceitos ensinados e não à qualidade do que foi aprendido, uma vez que têm, para atender aos tipos de "novos alunos", desafios competitivos, para obter boa avaliação no mercado educacional (BORELLO, 2010);

- a revisão bibliográfica, assim como a grande maioria das entrevistas com os professores, tem confirmado a importância do método gráfico no ensino das inequações (BORELLO, 2010);

- É possível incluir as equivalências e as transformabilidades quando se confunde equação com transformabilidade;

- atividades de aritmética não devem ser necessariamente transferidas para a álgebra;

- os estudantes preferem a abordagem algébrica, para resolver, mas os que optaram pela abordagem gráfica, de maneira ampla, têm mais acertos;

- a notação formal não pode ser desconectada da aquisição do significado. Essa falta de conexão é um dos principais problemas que enfrentamos no processo de ensino e aprendizagem. Conhecendo as partes não se conhece o todo, por isso os conteúdos devem ser ensinados de forma integrada. É proposto o ensino de inequação lineares, utilizando a comparação com uma balança, empregando diferentes linguagens e a transferência de uma para outra: natural, geométrica e algébrica (BELTRÃO, 2010);

- é possível encontrar alunos que atribuem ao símbolo igual ( $=$ ) o mesmo sentido de implicação ( $\rightarrow$ ), isto é “de isto segue aquilo”. Assim, quando passam para a inequação e a introdução dos símbolos maior ( $>$ ) e menor ( $<$ ), maior ou igual a ( $\geq$ ) e menor ou igual a ( $\leq$ ), não têm um *insight* sobre a diferença entre eles e o símbolo da igualdade e, ao limitar-se a aprender algumas técnicas de resolução memoristicamente e nunca para entender o que fazem, criam uma confusão entre as duas “operações”- equação e inequação - cuja notação é semelhante, mesmo se o seu significado é profundamente diferente. A diferença intrínseca entre equação e inequação é algo que os professores não aprofundam;

- os conteúdos de Matemática devem ser ensinados de forma integrada. A introdução da notação formal não pode ser desconectada da aquisição do significado. A falta de conexão é um dos principais problemas que enfrentamos no processo de ensino e aprendizagem da matemática. Todo nosso trabalho deve ser orientado para a busca de alternativas educacionais destinadas a fornecer o significado que constituirá a principal base para o aprendizado da matemática;

- se o objetivo for ajudar os estudantes a tornar-se fluentes em manipulação significativa de simbolismo, a abordagem gráfica não é a ideal. Enfocar diferentes registros pode negligenciar uns aspectos e considerar outros (TALL, 2004);

- Alvarenga (2006) enfoca um tratamento que inclui o funcional-gráfico, o lógico-algébrico, o uso de tecnologias, as atividades que visem às interpretações, enfim, metodologias baseadas nos esquemas mentais necessários para interpretar e resolver as inequações, envolvendo suas variadas facetas matemáticas;

- Uma autora aponta, baseando-se em Chevallard (1995), a Técnica Algébrica (TA) e a Técnica Funcional (TF) como fortes. A Técnica Algébrica com uso da Tabela de Sinais (TAS) e a Técnica Funcional Gráfica (TFG) são apontadas como fracas.

Apesar de os objetivos dos trabalhos não apresentarem a abordagem metodológica como o foco, vários autores assinalam, nas conclusões, sugestões relacionadas aos métodos de ensino, à formação dos professores, ao currículo e às reflexões direcionadas ao contexto algébrico. Tais pontos de debate e opiniões sobre o tema podem auxiliar a extração de dados a ser aprofundados ou que complementem os tratamentos realizados nas investigações mapeadas.

## QUESTÕES REFLEXIVAS E INVESTIGATIVAS

Segundo Bogdan e Biklen (1994), as propostas para estudo qualitativo são mais sucintas do que as do quantitativo e devem incluir uma lista de questões abertas de investigação que ajudem a enquadrar o foco do estudo, que tentam refletir o terreno que se vai examinar. De acordo com Creswell (2010), podemos ter uma questão central, que é ampla e pede uma exploração do terreno ou do conceito central em um estudo, e ter subquestões associadas.

De qualquer forma, uma pesquisa científica busca, de maneira sistemática, compreender um problema ou um fenômeno, em geral, proposto de modo interrogativo e fundamentado nos objetivos do pesquisador. Contudo, pode ser que, ao longo do ato de pesquisar, surjam outras indagações que possibilitam os processos analíticos e sintéticos. Diante disso, resolvemos destacar, no nosso mapeamento, questões que foram apresentadas pelos investigadores, para dar o direcionamento inicial, e indagações postas ao longo e ao final do estudo, dando um sentido de que devemos continuar, pois o tema não foi esgotado naquele trabalho.

Conforme Hamaghi (2010), a principal questão posta em 1998, no PME 22, ainda permanece sem resposta: quais são as concepções dos estudantes sobre inequações? Ao longo desses 20 anos, desde a indagação de 1998, podemos destacar:

- Quando os alunos do ensino secundário lidam com variáveis e parâmetros e olham para expressões, como  $2x(5-x^2)$  ou  $\sqrt{a-b}$ , ao resolver equações ou inequações padrões, que tipo de objetos veem com os olhos da sua mente e manipulam em suas cabeças, quais são as razões para as decisões que tomam? Primeiro, se o aluno é capaz de resolver qualquer tipo de equação ou inequação, qual é a importância de que possa, também, justificar o procedimento? Segundo, se insistirmos na compreensão da álgebra

relacional, que tipo de compreensão de conceitos algébricos devemos estar preparados para aceitar como satisfatório? (SFARD; LINCHEVSKY, 1994)

- Existe uma diversidade de abordagens e ferramentas que parece ser necessária para tratar do assunto de forma profunda. Isso depende ou não das ferramentas e dos métodos de outras disciplinas, em especial, a psicologia? Pura inércia do sistema de ensino? Função do enquadramento mental dos estudantes? Facilidade de ensino e avaliação? Facilidade para aprendizagem como consequência da redução da complexidade do problema da resolução de inequações mediante sua modelação lógico-algébrica? A abordagem lógico-algébrica é fonte de reais dificuldades? (BOERO, 1998)

- Como introduzir inequação? Como atingir as inconsistências dos alunos? Como validar a correção de soluções específicas para inequação? Pode  $x=3$  ser solução de uma inequação? (TSAMIR; BAZZINI, 2001a, 2001b)

- Devemos ensinar por meio de método único ou trabalhar com vários? Que métodos são apropriados para cada propósito? Como poderíamos basear ideias instrucionais em pesquisas para ser implementadas? (TSAMIR; ALMOG, 2001)

- A perspectiva algorítmica de manipulações algébricas proporciona aos estudantes as regras para resolver, mas negligencia questões, como "por que isso é a solução?" e "como eu posso ter certeza de que a solução a que cheguei é correta?": 1. Os alunos do ensino médio aceitam a expressão  $\{x / x = a\}$  como a solução de uma inequação quando: (a) apresentada em uma tarefa de escolha múltipla? (b) apresentada em uma tarefa reversa, isto é, pergunta se um dado conjunto pode ser o conjunto-verdade (a solução) de uma equação ou de uma inequação? 2. São consistentes as reações dos alunos a estas duas tarefas? Quais ideias intuitivas e modelos algorítmicos podem ser identificados nas soluções dos estudantes dos dois países, Israel e Itália? O que aprendemos com este estudo, sobre as soluções dos alunos para as inequações que resultam em um valor único? Quais são as possíveis razões para as soluções incorretas? O que podemos concluir a respeito de instrução pedagógica relacionada? Questões gerais surgem: como podemos promover a conscientização dos alunos de suas tendências intuitivas? Como alunos podem ser levados a sentir a necessidade de examinar a veracidade de suas soluções? Também surgem questões específicas: qual é a forma de introduzir inequações? Como lidar com inconsistências em relação a interpretações e resoluções de inequações? Como validar a correção de soluções específicas, e qual pode ser o papel do computador baseado em um jogo de instruções para promover aos alunos as soluções corretas? (TSAMIR; BAZZINI, 2002a).

- Quais são as concepções de equação e inequação dos estudantes? Quais são os raciocínios corretos e incorretos? Quais são os caminhos promissores, para ensinar o tópico de equações e inequações? Quais inovações curriculares podemos sugerir? Existe uma teoria global que envolva a teoria local de equações e inequações? (BAZZINI; TSAMIR, 2004).

-O método gráfico seria o escolhido pelos respondentes para outras inequações como as racionais? Utilizar múltiplos métodos favorece outro tópico matemático? Como identificar estudantes que preferem somente um método? Qual é a sequência ideal para ensinar? (TSAMIR; RESHEF, 2006).

- Pesquisas sobre inequações tentam responder a questões diferentes, tais como: quais são os erros mais comuns? Quais são as possíveis origens das soluções incorretas? Que tipo de referencial teórico pode ser usado para analisar o raciocínio dos estudantes sobre inequações algébricas? Qual é o papel do professor, o contexto, os diferentes modos de representação e as tecnologias que promovem a compreensão dos estudantes? (HAMALGHI, 2010).

- Por que os estudantes evitam a linguagem algébrica? (BELTRÃO, 2010).

-Os professores apresentam lacunas conceituais em inequação? (BELTRÃO, 2010).

-Quais são as áreas de pesquisa que relacionam demonstrações, equações e inequações, mas não são consideradas nesse artigo? Quais são as estruturas alternativas, para analisar os processos cognitivos dos estudantes quando fazem demonstrações e como elas são úteis para ser exploradas em nossa questão de pesquisa (ROH; HALANI, 2011).

- Quais os reais interesses do Fórum RF02 (2004)? De que maneira os trabalhos apresentados estão direcionados a problemas tanto em nível local como na produção de teoria global útil? Quais são os reais propósitos de ajudar os estudantes a operar com equações e inequações? (TALL, 2004).

- O enfoque por meio de metáforas pode assegurar alto nível de controle do processo de solução, mas qual é o processo? A atividade (*enactive*) visual (conhecimento obtido por meio da interação percepção-ação no meio) pode dar um sentido fortalecido corporificado a relações globais entre funções como entidades, mas como relacionar isso à manipulação significativa de símbolos? (TALL, 2004).

- Necessitamos olhar para diferentes tipos de resoluções segundo diferentes tipos de necessidades? Isto é, ricas incorporações têm mostrado que podem ser apropriadas

em alguns contextos, para resolver uma inequação em um problema específico, e impróprias em outros, nos quais os conceitos em construção, se não resolvidos, tornam-se “encontros-anteriores”, causando obstáculo para aprendizagem posterior (TALL, 2004).

- Todos os estudantes seguem pelo mesmo tipo de desenvolvimento piagetiano ou seguem suas jornadas por descobertas matemáticas, usando métodos que são mais ou menos adequados e dão diferentes tipos de possibilidades para desenvolvimentos futuros? (TALL, 2004).

- Quais são os conceitos prévios necessários à compreensão de inequações? Como um aluno constrói ou entende o conceito de inequação? Quais são as estruturas mentais e as conexões com outros conteúdos matemáticos necessárias à compreensão da ideia de inequação? Como a interpretação de inequação pode influenciar as resoluções de problemas que envolvem o conceito? Quais resultados surgem da comparação entre o desempenho dos grupos de alunos que tiveram uma aprendizagem sob o ensino ‘tradicional’ e os que aprenderam sob a proposta metodológica de ensino aqui adotada? (ALVARENGA, 2006).

## CONSIDERAÇÕES

Apesar de, nos objetivos das publicações, pouca atenção ter sido apresentada em relação aos aspectos metodológicos e curriculares, nas conclusões e nos resultados, a maioria dos autores apresentou alguma observação e ou sugestão sobre essa questão. Da mesma forma, observamos que, nas questões diretivas e ou reflexivas, eles externalizam preocupações quanto a essas características.

Podemos observar que, de fato, a maior quantidade de focos investigativos esteve relacionada às abordagens dos estudantes quanto aos erros e às dificuldades enfrentadas, ao resolver e interpretar as inequações. Nesse sentido, mesmo em países culturalmente tão diferenciados e localizados tão distantes uns dos outros, os erros cometidos pelos estudantes foram praticamente os mesmos. Tudo indica que não houve uma diferença substancial de comportamento frente às inequações entre os participantes do ensino médio e do ensino superior. Aliás, os tipos de inequações analisadas por eles não são também muito diferentes em grau de complexidade e necessidade de mobilizar ferramentas matemáticas avançadas para enfrentar o assunto.

As questões postas pelos autores foram muito parecidas. Algumas, como as que trouxeram uma inquietação com tópicos epistemológicos, com a formação dos professores, com questões curriculares e metodológicas, com o referencial mais propício para a análise, com a linguagem algébrica, com tópicos cognitivos e históricos, com demonstrações e conceitos matemáticos contribuem para um debate rico e diversificado que pode complementar e aprofundar as áreas de pesquisas e promover a melhoria da compreensão matemática.

Inicialmente, apresentamos algumas perguntas que nos ajudariam a direcionar nossas análises e podemos, por meio delas, concluir que os resultados obtidos nos capítulos anteriores corroboram os encontrados nas conclusões e nos resultados das publicações. Porém, apesar de não ser o principal objetivo, as pesquisas enfocaram aspectos relacionados ao currículo e à metodologia de ensino. Os referenciais apontados pelos autores foram utilizados pela maioria deles. Em outras palavras, a maioria das publicações empregou, realmente, as teorias indicadas, e, nesse sentido, as advindas da semiose destacaram-se, como Denotação e Sentido, de Frege, e Registros de Representação Semiótica, de Duval, além de teorias sobre aspectos algorítmicos e intuitivos, de Fischbein. É interessante observar que tais teorias foram prevaletentes nos trabalhos de Bazzini e Tsamir. Outras foram empregadas tanto para a implementação de atividades para a coleta de dados quanto para a análise de protocolos e entrevistas. A variedade de teorias mobilizadas levou Tall (2004) a questionar a quantidade e a localidade delas, indicando a necessidade de uma que fosse ampla e que desse conta das variáveis envolvidas na situação de ensino e aprendizagem de inequações.

Os aportes matemáticos mais tratados pelos investigadores estão relacionados às transformações e às equivalências, ao conjunto-solução, ao emprego das propriedades referentes à boa ordenação e às funções e seus gráficos. Os trabalhos transpareceram uma insatisfação dos pesquisadores com o nítido tratamento puramente algorítmico, que, por meio de educadores, sistema curricular e escolar, privilegia a mecanização das manipulações algébricas e pretere o raciocínio, a oportunidade de entendimento e ampliação do conhecimento matemático que o tema oferece.

## CAPÍTULO 7

---

### CONSIDERAÇÕES FINAIS

Queremos, neste capítulo, revisar os nossos argumentos e, se necessário, reelaborá-los, certificar-nos das implicações apresentadas nos anteriores e tecer considerações finais importantes que surgiram ao longo do processo quase incessante de ir e vir aos trabalhos mapeados e que se relacionam aos objetivos aqui propostos. Entendemos que a etapa da coleta de dados, por si só, já faz parte da análise, e seu norteamento é laborioso e repleto de momentos em que a dúvida toma conta. Tivemos de refinar a quantidade de trabalhos e optar por quais deveriam ser excluídos.

Estamos certos de que essa etapa parece não ter fim mesmo no empreendimento da análise do material, pois, todos os dias são produzidos novos documentos científicos, e outros que estavam submersos há algum tempo podem vir à superfície quando partimos para esse olhar investigativo mais acurado da produção científica. Ao fazer o levantamento para a formação do *corpus* e estando em contato com leituras profundas ou diagonais, aumentamos nosso poder de questionamento, e isso nos leva a mais e mais mapeamentos. Cientes de que, em um momento, temos de parar e fechar os olhos ao que ainda nos impulsiona e parece reluzir, limitamos nosso campo de análise, mas não de pesquisa, em 67 trabalhos. Isto significa que a quantidade de leituras ultrapassou essa marca, e ficamos convictos de que podemos “garimpar em outras minas” e obter preciosas publicações.

As fases da análise fundamentaram-se no tipo de tratamento que demos às publicações. No nosso caso, os recursos visuais, por meio do tratamento em tabelas, forneceram-nos informações mais claras, proeminentes, e, dessa forma, pudemos analisar convergências, divergências, semelhanças, quantidades, palavras similares, argumentos, repetições, entre outros aspectos. Então, criamos três tabelas:

- 1ª tabela – com os dados bibliográficos coletados sem uma leitura interior dos trabalhos;

- 2ª tabela – fruto de uma leitura interior, destacando objetivos, metodologias de pesquisas e referenciais teóricos;
- 3ª tabela – com os principais resultados e conclusões das 67 publicações.

A nosso ver, esse tipo de tratamento facilitou o levantamento e a análise do estágio atual das publicações que se debruçam sobre o processo de ensino e aprendizagem de inequações sob o ponto de vista científico. Evidenciamos que o ato de elaborar a tabela, da mesma forma, torna-se um processo analítico em que se faz necessário ler, destacar informações e agrupá-las de acordo com as tipologias que predeterminamos pelo cabeçalho. Retomar esse agrupamento com o intuito de encontrar aspectos importantes, coerentemente postos, contextos, discrepâncias, consonâncias é mais um processo de análise. Então, os dados dispostos em tabela proporcionam, ao mesmo tempo, uma visão integral e parcial.

A análise de conteúdo forneceu-nos recursos, como a Unidade de Registro (UR). Além de explorarmos os resumos e o interior dos trabalhos sobre os aspectos das palavras emitidas pelas mensagens dos autores, pudemos trazer à tona o que, em muitas ocasiões, estava implícito, como a quantidade de repetições das palavras nos mais variados trabalhos, e isso retrata insistência nas investigações. Não olhamos, isoladamente, cada UR, mas procuramos evidenciar os contextos em que ocorrem. As UR giraram em torno de palavras similares, porém, pelo fato de termos de interpretar tais unidades em várias línguas, pode ter escapado algum dado importante. Então, conjuntamente, procuramos as Unidades de Contexto (UC), para subsidiar e respaldar nossos entendimentos. Em última instância, quando nos vimos diante de várias informações, recorremos a um *software*, o NVIVO 09, em português.

Cabe interessante esclarecimento quanto às línguas utilizadas na análise quanti-qualitativa: as palavras *desigualdade* e *inequação* possuem interpretações diferenciadas, dependendo do idioma. Mesmo em português, utiliza-se *desigualdade*, para expressar tanto uma comparação numérica quanto algébrica, por exemplo, Desigualdade de Bernoulli, como pode ser visto em livros de análise (LIMA, 1999):  $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ . A mesma expressão pode ser entendida como uma inequação: comparação entre duas expressões na qual, pelo menos, uma envolve uma variável. Em espanhol, como designado por Borello (2010), podem vir interpretadas de forma diferenciada:

**Desigualdad:** Es la relación de no igualdad entre dos expresiones o cantidades numéricas que se formaliza a través de los símbolos de diferente de ( $\neq$ ), mayor ( $>$ ), mayor igual ( $\geq$ ), menor ( $<$ ), menor igual ( $\leq$ ).

**Inecuación:** Es la relación de desigualdad entre dos expresiones que contienen una o más incógnitas. Su solución corresponde al conjunto de valores que satisfacen la desigualdad.(p.i)<sup>85</sup>

O autor Bagni (2005) assim retrata a diferença:

In several languages the word *inequality* can assume two different version, so it is translated by two different words: for instance, in French, these words are *inégalité* (in Italian: *disuguaglianza*) and *inéquation* (*disequazione*). With reference to these words, the mentioned difference would be summarised as follow: an *inéquation* is the mathematical statement of an *inégalité*.<sup>86</sup>

## AS TABELAS

A primeira tabela fundamentou-se somente nos dados bibliográficos e revelou-nos aspectos determinantes logo no início da investigação. Os títulos foram elementos fundamentais em nossa análise de conteúdo e, por meio de unidades de registros, como *inequações, funções, erros, compreensão, idade, escolaridade* e outras, em 5 línguas, no singular ou no plural e por meio de unidades de contextos, como, movimentação das pesquisas de cada autor, nacionalidade, local de trabalho, parcerias, efeitos da disseminação e outros, revelaram-nos uma fonte rica de informações em um *estado da arte*. Aliás, todas as informações bibliográficas, típicas em fichas catalográficas, foram basilares para o levantamento de subsídios que nos permitiram conhecer o estágio atual das pesquisas sobre nosso tema.

A segunda tabela, elaborada nos moldes de categorias *a priori*, como objetivos, metodologia de pesquisa e referencial teórico, não só complementou as informações anteriormente coletadas, mas também as aprofundou, pois ateu-se ao interior dos trabalhos e ou a seus resumos. Como resultados, obtivemos respaldo às análises

---

<sup>85</sup> **Desigualdade:** é uma relação de não igualdade entre duas expressões ou quantidades numéricas que se formaliza por meio de símbolos de *diferente* ( $\neq$ ), *maior* ( $>$ ), *maior ou igual* ( $\geq$ ), *menor* ( $<$ ), *menor ou igual* ( $\leq$ ).

**Inequação:** é a relação de desigualdade entre duas expressões que contêm uma ou mais incógnitas. Sua resolução corresponde ao conjunto de valores que satisfazem a desigualdade (p. i)

<sup>86</sup> Em muitas línguas, a palavra *inequação* pode assumir duas diferentes versões e ser traduzida por duas palavras diferentes: em francês, essas palavras são *inégalité* (em italiano *disuguaglianza*) e *inéquation* (*disequazione*). Com referência a essas palavras, a diferença poderia ser resumida assim: uma *inéquation* é uma afirmação matemática de uma *inégalité*.

OBS: O autor apresenta a seguinte nota de rodapé: Sometimes in English, an *inequation* denotes a statement that two quantities or expressions are *not the same, or do not represent the same value* (written by a crossed-out equal sign:  $x \neq y$ )

anteriores, isto é, corroboramos dados inferenciados da primeira tabela, como: a maioria dos objetivos das publicações foi a análise das dificuldades dos estudantes e dos professores em lidar com as interpretações e as resoluções das inequações; os investigadores mobilizaram vários tipos de referenciais teóricos com o intuito de elaborar, implementar e analisar os dados colhidos, maiormente, por meio de protocolos e entrevistas; as pesquisas, em sua maioria, foram de campo, com participantes de vários níveis escolares, sobretudo com estudantes do ensino médio, de variadas nacionalidades, israelenses, canadenses, brasileiros, franceses, italianos, gregos, tailandeses, singapurenses e americanos. Não obstante, vários países subsidiaram eventos e ou editoraram periódicos que trataram do tema. Isso indica que as informações foram de fontes bem variadas, com participantes de várias culturas e que aprenderam as inequações sob maneiras, supostamente, baseadas em suas respectivas culturas, valores sociais e curriculares, portanto diferenciadas. No entanto, mesmo assim, os erros e as dificuldades foram os mesmos e reincidentes. Então, ou as maneiras de ensino, ainda que em diferentes países, foram as mesmas, ou a natureza das dificuldades são oriundas de dimensões didáticas, cognitivas e epistemológicas. Porém, as investigações não se ativeram a esses detalhes e observações, que supomos ser diretivos se queremos melhorar a compreensão matemática dos estudantes.

Essa tabela colaborou com aspectos intrínsecos ao ensino e à aprendizagem de inequações que, somente após um desmembramento dos trabalhos, pudemos observar. No quesito *referencial teórico matemático*, vimos um tratamento informal por parte dos pesquisadores que não estão pautados pela complexidade envolvida nesse assunto. Entendemos que o nível de estudo dos participantes não permitiu um tratamento mais sistemático da álgebra, e isso fez que muitos tentassem contornar esse aspecto e olhassem para o tratamento gráfico.

Para os autores Lins e Gimenez (1997):

Quando olhamos para os diferentes tipos de caracterização da atividade algébrica, encontramos desde a rigidez das caracterizações “puras” por conteúdos até certa despreocupação em identificar, do ponto de vista do conteúdo, que tipo de atividade matemática particular está acontecendo: basta que seja atividade matemática, rica e flexível.

É certo que, tratando-se da educação matemática escolar, não podemos esquecer que já é um saber institucional do qual esta deve *também* [sic] se ocupar. Se há propostas de educação algébrica que *parecem* [sic] não se preocupar com isso, é apenas porque seus defensores acreditam que, ao longo de certo tempo, esse saber

institucional tende a aparecer, “naturalmente” ou por direcionamento do professor, por meio da escolha das tarefas. (p.112)

O direcionamento institucional, ao qual se referem os autores e que tende a aparecer ao longo do tempo, também, depende do tipo de ensino que será proporcionado, e observamos pelas publicações que, mesmo no nível universitário, esse saber não aparece nessas investigações nem temos indicações de que apareceram ao longo do processo do ensino e da aprendizagem universitária. Então, refletimos: quando aparecerá? A matemática não é uma ciência fundamentada em uma linguagem própria, em referências axiomáticas intrínsecas? Ou deve ser tratada somente como ferramenta, que fomenta a análise de situações-problema provenientes de outras ciências? O saber institucional tem subsidiado as duas faces da matemática ou nenhuma delas? Particularmente, acreditamos que o saber escolar, lastimavelmente, não tem fomentado o conhecimento matemático ao nosso estudante, e isso pode ser observado nos resultados das pesquisas inventariadas.

A inequação enquanto uma linguagem que modela alguns fenômenos, inclusive relacionados à otimização e às restrições de situações, não tem sido tratada de maneira apropriada, assim como tem sido relegado o papel capital que ela possui, ao lidar com as propriedades dos números reais e a lógica matemática, que, por sua vez, estão na base dos fundamentos dessa ciência. Pelos trabalhos mapeados, tem tido um tratamento superficial ou extremamente abstrato. De acordo com Linchevski e Sfard (1991), esse conceito é apresentado como uma fórmula proposicional, o que distancia de ser manipulável, tratável e transformável de maneira dinâmica.

Resumidamente, podemos indicar que os autores apresentaram a maneira pela qual os alunos aprenderam, afirmando que foi a convencional como apontado por Tsamir e Bazzini (2001a, p.60, tradução nossa):

Em ambos os países, os estudantes participantes aprenderam esse tópico por uma maneira convencional, sendo apresentados diferentes métodos de resolução de inequação. Por exemplo, parábolas ou reta numérica para resolver inequações quadráticas e ‘multiplicar pelo quadrado do denominador’ para resolver inequações racionais.

O foco está em “como resolver” e não “por que se resolve assim”, como apontado por Tsamir, Almog e Tirosh (1998, p.129). Também sobre esse aspecto, considera a autora Garuti (2001, p.1, tradução nossa):

Em muitos países, as inequações são ensinadas nas escolas secundárias como conteúdo sujeito às equações, geralmente de forma puramente algorítmica, evitando as dificuldades relacionadas com o

conceito de função. Por exemplo, na Itália, os estudantes aprendem, de maneira rígida e prescritiva, a lidar com as inequações de segundo grau (ex.  $x^2 + kx + 1 > 0$ ) dependentes de um parâmetro: eles têm de resolver a equação  $x^2 + kx + 1 = 0$  (distinguindo entre três casos – não há solução real, duas soluções reais coincidentes, duas soluções distintas reais) – então constroem um esquema em que "concordância" e "variações" do sinal em relação aos valores do parâmetro  $k$  proporcionam ao aluno as soluções da inequação dada. Pode-se notar que esta abordagem envolve uma banalização do conteúdo do jogo, é, em outras palavras, o resultado de procedimentos de rotina, não é fácil de entender nem de interpretar. Como resultado desta abordagem, os estudantes são incapazes de tratar de inequações que não correspondam ao padrão aprendido.

As autoras indicam a maneira mecanizada de resolução e nem sequer apontam algum indício de que o ensino se atenha às interpretações. Cabe ressaltar a consideração de Bazzini, Boero e Garuti (2001) que apontam, segundo Vigotski, a estreita relação entre pensamento e linguagem e que, se não for levada em consideração toda a álgebra, plena de sinais, seria reduzida a mecanismos manipulativos e a nenhuma significação.

Além disso, sinais suportam um tipo de “inteligência corporificada”, na qual são historicamente construídos para algum propósito e, como tal, carregam padrões de raciocínios prévios. Sinais, ferramentas e outros artefatos culturais não falam por si só, mas adquirem vida na vida dos indivíduos por meio de ações de comunicação e interação onde eles se tornam dotados de significados. (p.122, tradução nossa)

Alguns autores debatem quando e como introduzir a álgebra formal, como Virikios e Farmaki (2006), que sugerem, segundo seus resultados, uma postergação do tipo de ensino de álgebra formal. Vaiyavutjamai e Clements (2006) abrem um debate que relaciona o ensino tradicional ao tratamento algébrico e apontam a ênfase na manipulação algébrica desprovida de significado, com pouca atenção aos aspectos semânticos. Nós, por nossa vez, destacamos que a linguagem algébrica nasce com a matemática sistematizada, portanto, com a matemática dita escolar e não podemos relativizar sua significação e importância. Ensinar a resolução de inequação por vários métodos, todos desprovidos de significados, de nada adianta para o enriquecimento dos alunos, pois ensinar matemática não é exemplificar matemática, como normalmente esse conceito é tratado.

Utilizar vários métodos de ensino, inclusive por meio de tecnologias, como calculadoras e computadores, não nos exime do compromisso de organizar os passos, registrar e analisar por meio de linguagens matemática, principalmente a algébrica. Não importa a idade do aprendiz, iniciante ou não, ele vai deparar com tal linguagem que

necessita conhecer para ter sucesso, ao lidar com as situações matemáticas formais. Não esperamos que um estudante do terceiro ano do ensino fundamental já conheça e saiba lidar com os conceitos de números reais; tudo a seu tempo, mas sem obscurecer ou negligenciar a matemática como uma ciência que tem seus métodos próprios de escrita, leitura, histórica e socialmente constituída, com estruturas e leis intrínsecas e características próprias. Alijar o aluno desse conhecimento é distanciá-lo de sua cidadania.

O ato de elaborar e analisar a segunda tabela fomentou um debate para o tipo de tratamento matemático que é necessário e viável para o conceito de inequação. Estamos certos de que a pouca atenção atribuída pelas publicações a esse tratamento e as dificuldades advindas dele não foram pontuais, mas globais. Na terceira tabela, levantamos tanto algumas hipóteses sobre as naturezas de tais dificuldades como sugestões para abordagens metodológicas que proporcionem atividades que possibilitem maior entendimento da interpretação e das resoluções.

Além disso, com o propósito de nortear futuras linhas de pesquisas, elencamos questões reflexivas postas pelos autores dos trabalhos mapeados. Insistimos que seja um campo a ser explorado e que o já feito não é suficiente para mudar o contexto do estado atual do ensino e da aprendizagem de inequações. Assim, sugerimos uma abordagem metodológica de ensino que possa iniciar-se com a contextualização e, depois, na resolução, dar uma parada na interpretação do modelo que rege, matematicamente, a situação-problema.

Ademais, apresenta-se o conjunto dos números reais e os outros também de forma a induzir o aprendiz a estendê-los; para isso, adaptam-se regras operativas que não sejam contraditórias, e, acima de tudo, cria-se uma extensão absolutamente lógica que faça valer todos os processos operatórios postos a subconjuntos numéricos, como os Naturais, os Inteiros, os Racionais. Mediante tais extensões, podemos demandar um tempo para o estudo da estrutura e da organização dos fundamentos, apresentar, discutir e analisar a lógica dos conectivos e dos quantificadores que está intrinsecamente ligada à linguagem matemática.

Assim, inicia-se com as operações como as que devemos mobilizar para resolver as inequações lineares, embasadas na adição e na subtração de valores numéricos, e, posteriormente, generalizam-se tais operações. Paralelamente, apresentam-se os gráficos que corroborem esses processos de resolução, e direciona-se ao conceito de função. Desta feita, avançamos às resoluções que envolvem propriedades específicas de

multiplicação e restrições necessárias para que tenham sentido e que determinados conceitos sejam coerentes, como o da radiciação. É importante discutir a “divisão por zero”, e, para isso, podemos recorrer a cálculos, como:

- solicitar aos estudantes que dividam, por exemplo, 34 por 2 e analisem a unicidade do resultado;
- propor a divisão de 0 por 0, examinar e discutir a unicidade do quociente;
- promover um debate sobre a divisão de 34, por exemplo, por 0;
- analisar o quociente da divisão de 0 por 34.
- solicitar uma reflexão geral; se necessário, propor novas divisões com as mesmas características e uma generalização ou uma “regra geral”.

A discussão sobre as propriedades da radiciação é válida mesmo em turmas universitárias. Analisa-se, assim, o porquê da necessidade de extrairmos a raiz quadrada, a quártica etc, somente de números não negativos se nos restringirmos ao conjunto dos números reais.

Não menos importante é a análise da ordenação dos números racionais e a discussão sobre a densidade desse conjunto e a dos números irracionais no conjunto dos números reais. Propõem-se comparações entre números pertencentes a combinações entre esses dois conjuntos: racional x racional, irracional x racional. A dúvida pode pairar em uma turma, independentemente do grau escolar, se questionarmos a validade de uma desigualdade, como:

$$\frac{\sqrt{3}}{5} < \frac{2}{3}$$

Como promovê-la? Podemos iniciar por uma comparação entre 5 e 3; depois, proceder sobre  $\sqrt{3}$  e 2 e analisar  $\frac{1}{5}$  e  $\frac{1}{3}$ . Na sequência, analisar a desigualdade proposta, tendo como base os resultados desses valores. Esse é um caminho, mas existem outros que, da mesma forma, podem ser explorados pelo professor.

A ênfase deve ser posta na especulação, na criação de hipóteses, na intuição, enfim, no ato de pensar. Um exemplo, nessa mesma linha, são os vários tipos de expressões algébricas que representam a mesma ideia com maneiras de representar diferentes, como:  $t + t^2$ ,  $x(x + 1)$ ,  $\frac{r^3}{r} + \frac{4r}{4}$ , se  $r \neq 0$ .

Tais expressões são representações diferentes, mas têm o mesmo sentido. Então, postulamos ser importante demandar um tempo para ensinar os alunos a observar as várias maneiras de representar um ente matemático, chamando-os a analisar, a pensar:

mudou a variável, mudou o sentido? Essas expressões, realmente, representam as mesmas ideias? Como isso poderia ser interpretado geometricamente? É possível? Tais expressões poderiam representar uma função? Como poderia ser escrito? Nesse contexto, quando as expressões se envolvem em inequação, podemos aproveitar para analisar as transformações e as equivalências. Este foi um enfoque dado por autores, como Linchevski e Sfard (1991), Bazzini (1995) e Steinberg *et al.* (1991). O direcionamento, dependendo do grau escolar, pode ser conectado ao ensino de funções.

De tal modo, podemos construir uma rede de conhecimentos que nos permita inter-relacionar conceitos e mobilizá-los quando pertinente. Cientes de que a construção do conhecimento matemático pode não ser linear como aparece no planejamento escolar, nós, professores, podemos conectar diversos tipos de registros: geométricos, algébricos, numéricos, analíticos em uma linguagem dotada de sentido lógico que permita uma visão do tipo holística da matemática, cuja base é o conhecimento não ser visto como um conjunto compartimentado que possua atividades cognitivas e epistemológicas isoladas, mas, sim, um conjunto único, um sistema aberto, em contínua interação e enredamento.

Corroboramos Silva e Buriasco (2006) quando afirmam que:

Não é possível um enunciado algébrico ser representado na intuição, porque é preciso traduzi-lo para a linguagem cotidiana. O cotidiano, o mundo real, não é imediatamente possível para o universo algébrico. A tradução de uma linguagem para outra apresenta problemas e interfere na aprendizagem do aluno.

[...] As fórmulas são expressões algébricas que representam regras, e elas precisam ser interpretadas. Seguir uma regra é interpretar, e a interpretação demanda leitura e a tradução de seus signos. “O que” fazer obedece à regra; “como” fazer constitui a demonstração. A demonstração procede segundo uma técnica e produz novo conceito. A técnica de descrição e de representação de objetos, num jogo de linguagem, converte-se em conceitos. (p.49)

Ressaltamos o pouco interesse retratado pelas publicações em estudar o comportamento dos estudantes frente a conteúdos correlatos, como: a ordem e as propriedades do conjunto dos números reais, o uso dos conectivos lógicos, a interpretação de intervalos, a interpretação do sinal de desigualdade (somente um trabalho apresentou essa proposta de forma explícita) e o emprego da ideia de equivalência e transformação entre inequações (só encontramos dois trabalhos explícitos).

A maneira de os estudantes resolverem as inequações foi, de fato, o foco que imperou. O estudo do modo de resolver de universitários também foi um tipo de

inquietação examinada, porém, para nós, nada mudou em termos de ferramentas de coleta de dados dos estudantes do ensino médio. Pesquisas epistemológicas, curriculares e metodológicas clamam atenção.

A terceira e última tabela proporcionou-nos uma análise geral e parcial dos resultados das pesquisas. Pudemos correlacioná-la com objetivos, referenciais e metodologia de pesquisa apresentados na 2ª tabela. Então, percebemos que os autores se apresentaram coerentes e preocupados com as pesquisas nessa área. Os resultados das análises de dados, coletados de vários países, não variou muito, porém o que mais nos chamou a atenção é, mesmo com registros de publicações desde 1991 até o ano de 2010, haver pesquisadores inquietos em relação às abordagens das pesquisas, suscitando mais investigações sobre o tema. A esse respeito, levantamos e elencamos as questões reflexivas e investigativas expostas por muitos deles ao final do trabalho. Entendemos que elas podem dar novas direções desde que os pesquisadores se mostraram cientes da necessidade de aprofundamento ou complementação das já realizadas.

Com o propósito de ressaltar novas direções para trabalhos vindouros, revisamos as questões elencadas que ponderamos ser principais:

- A abordagem lógico-algébrica é fonte de reais dificuldades?
- O tratamento e o estudo dependem das ferramentas e dos métodos de outras disciplinas, em especial a psicologia?
- Quais são as concepções dos estudantes sobre inequações?
- Como introduzir inequação? Como atingir e trabalhar com a inconsistência dos alunos?
- Devemos ensinar por meio de único método ou vários? Que métodos são apropriados para cada propósito? Como poderíamos basear-nos em ideias instrucionais, para ser implementadas?
- Quais inovações curriculares podemos sugerir? Existe uma teoria global que envolva a teoria local de equações e inequações?
- Os professores apresentam lacunas conceituais em inequação?
- Quais são as áreas de pesquisa que relacionam demonstrações, equações e inequações, mas não são consideradas? Quais são as estruturas alternativas para analisar os processos cognitivos dos estudantes quando fazem demonstrações e como elas são úteis para ser exploradas em nossa pesquisa?
- Quais são os esquemas mentais propícios ao ensino e à aprendizagem de inequações no ensino fundamental?

## **AS CATEGORIAS**

Nossa investigação não somente teve o interesse na categorização, mas também na descrição e na interpretação que são etapas essenciais da metodologia de análise utilizada, a de conteúdo, então optamos por apresentá-las em conjunto com o propósito de descrever um roteiro, conduzindo a descrições sistemáticas qualitativas ou quantitativas que ajudam a reinterpretar as mensagens e a atingir uma compreensão de seus significados num nível além da leitura comum. Deste modo, foram 12 categorias subdivididas em outras 32 (cf. Quadro 06), frutos das interpretações das três tabelas.

<b>Etapas</b>	<b>Categorias</b>	<b>Subcategorias</b>		
<b>1ª</b>	Autor (es)	-----		
	Títulos	Foco na aprendizagem, no tipo de abordagem		
		Foco no ensino: currículo, didática, instrumentação, instrução		
		Referenciais teóricos		
		Relação entre equações e inequações		
		Funções		
		Tipos de inequações		
		Epistemologia		
		Pluridisciplinaridade		
	Nível de escolaridade dos sujeitos da pesquisa			
Tipo de publicação	Periódico			
	Evento			
	Trabalho acadêmico			
Data da publicação	-----			
País da editoração	-----			
<b>2ª</b>	Objetivo da publicação	Tipos de resoluções, de forma geral		
		Metodologias de ensino e teorias		
		Pesquisas teóricas		
		Currículo		
	Referencial matemático e teórico-educacional	Referencial matemático	Tipos de inequações	
			Abordagem matemática correlacionada	
		Abordagem interdisciplinar reflexiva	Contexto sociocultural	
			Epistemológico	
			Histórico	
			Análise de textos oficiais e livros didáticos	
Tecnologias				
Pesquisa pluridisciplinar				
Referencial teórico-educacional				
Metodologia de pesquisa e coleta de dados	Teórica			
	Campo	Nacionalidade dos estudantes		
<b>3ª</b>	Formas de abordagens	Erros de interpretação		
		Erros de resolução		
	Natureza dos erros	-----		
	Aspectos metodológicos	-----		
Questões reflexivas	-----			

Quadro 6: Resumo das categorias resultantes da análise de 67 publicações

Os dados chegaram ao estado bruto e processá-los facilitou o trabalho de compreensão, interpretação e inferência a que aspira a análise de conteúdo, a qual, em sua vertente qualitativa, parte de uma série de pressupostos, que, no exame de um texto, servem de suporte, para captar seu sentido simbólico, nem sempre manifesto e único, que poderá ser focado em função de diferentes perspectivas. Por isso, um texto

contém muitos significados, e os aqui apresentados são só alguns dos que podem emergir segundo a experiência do pesquisador e do educador matemático. Seguimos, em nosso estudo, os processos da análise de conteúdo, constituída de cinco etapas:

- 1 - Preparação das informações;
- 2 - Unitarização ou transformação do conteúdo em unidades;
- 3 - Categorização ou classificação das unidades em categorias;
- 4 - Descrição;
- 5 - Interpretação.

Todo processo de categorização ou classificação necessita definir o elemento unitário a ser classificado, e, assim, encontramos diferentes mensagens divididas em elementos menores. Procuramos definir as unidades de análise de modo a ter um significado completo a elas mesmas, porém é uma prática da análise de conteúdo definir, juntamente com estas unidades, outro tipo de unidade, a de contexto. A essência das nossas unidades de registros foi a palavra *inequação* em variadas línguas; depois, ampliamos para outras, como *erros*, *dificuldades*, *comportamentos* e similares. Por sua vez, as unidades de contexto não se ativeram somente às palavras, mas também a frase e expressões, como: *développement et d'étude, uso de vários registros*. É uma unidade mais ampla do que a de análise que serve de referência, fixando limites contextuais para interpretá-la.

A categorização é um procedimento de agrupar dados, considerando a parte comum existente entre eles. Classificamos por semelhança ou analogia e levamos em consideração as características indicadas por Bardin (2011): exclusão mútua, homogeneidade, pertinência, objetividade, fidelidade e produtividade. Depois de descrever e interpretar as categorias, seguindo o objetivo inicial, apresentar um panorama das publicações científicas cuja temática envolve o ensino e a aprendizagem de inequações, isto é realizar um *estado da arte* sobre o ensino e a aprendizagem de inequações, refletimos sobre os objetivos específicos que consideramos atingidos:

- Categorizar e inter-relacionar aspectos relativos ao estado do conhecimento sobre o ensino e a aprendizagem de inequações.

- Evidenciar palavras, frases e fragmentos que caracterizaram as pesquisas, interpretando as mensagens contidas nos títulos, nos resumos e na íntegra dos textos.

- Localizar períodos de produção, fazendo um mapeamento e analisando tanto os tipos de publicações como as tendências, os autores, as teorias utilizadas, os eventos, os periódicos e os trabalhos acadêmicos que mais se interessaram pelo tema.

- Apontar dados numéricos sobre as publicações.

- Sistematizar as pesquisas sobre o assunto, identificar temáticas e abordagens dominantes e emergentes e indicar caminhos para novas investigações.

- Detectar lacunas e campos inexplorados abertos à pesquisa futura.

- Expor os resultados obtidos de um levantamento centrado nos dados bibliográficos.

Diante disso, podemos reafirmar que é um campo de pesquisa a ser mais explorado em: epistemologia, conhecimento do professor sobre o tema, enfoque curricular, conceitos matemáticos correlacionados, abordagens metodológicas e outros. As questões reflexivas foram respondidas com a análise dos dados tabelados:

- Todas as tabelas ajudaram-nos a responder às questões: quais categorias e subcategorias surgem do levantamento das pesquisas? As pesquisas existentes são suficientes para analisar e propor soluções aos problemas relacionados ao ensino e à aprendizagem de inequações? Existe um esgotamento do tema? Quais foram os principais enfoques das investigações? É possível inter-relacionar as categorias destacadas? Como?

- A primeira tabela, principalmente, colaborou com a resposta a: que eventos, autores e épocas mais proporcionaram debates sobre o tema? O que podemos extrair das mensagens apresentadas nos títulos, nos resumos e da leitura integral dos textos? As publicações concentram-se em algum país ou se encontram espalhadas entre os continentes? Existe algum indício dessa concentração ou espalhamento? Os resultados obtidos das análises baseadas somente nos dados bibliográficos são compatíveis com os da análise dos resumos e da íntegra dos artigos?

- A segunda indicou-nos respostas a: quais metodologias de ensino, referenciais teóricos, metodologias de pesquisa e enfoques foram privilegiados?

Quanto à questão *como posicionar o Brasil nesse inventário de pesquisas?*, podemos responder que as pesquisas de doutoramento são poucas, bem como os artigos científicos. Ao que tudo indica, esse tema não atrai tanto os olhares dos pesquisadores brasileiros.

As seguintes hipóteses exteriores foram comprovadas:

- Ainda é necessário pesquisar mais sobre o assunto.
- Os *anais* do PME apresentaram mais publicações sobre o tema.
- Houve muitas pesquisas sobre como os estudantes resolvem as inequações.

Estamos certos de que outros ângulos e outras categorias poderiam ser explorados, mas os elencados suportaram nossa investigação, e a maneira de tratar dos dados segue um resultado interessante e indica um caminho de metodologia de pesquisa. Além disso, os títulos revelaram uma fonte repleta de informações. Lamentavelmente, não podemos declarar o mesmo dos resumos, pois poucos retrataram, de fato, a força de suas respectivas pesquisas.

Enfim, precisamos continuar as pesquisas buscando complementar ou aprofundar as já existentes trazendo reflexões sobre a situação curricular de inequações: Elas precisam ser estudadas no ensino fundamental, no ensino médio? Como? Como aproveitar a oportunidade que esse conceito permite para tratar, de forma enredada, outros objetos matemáticos, paramatemáticos ou protomatemáticos? Além das questões curriculares podemos fomentar investigações que tratem de questões epistemológicas e didáticas em relação ao ensino e aprendizagem de inequações e outras que possam investigar como os professores concebem as inequações e como suas concepções podem refletir na compreensão dos seus estudantes.

Enfatizamos que as pesquisas se ativeram principalmente na análise dos erros cometidos, que os protocolos e entrevistas analisadas foram advindos de participantes de todos os continentes e que diversos tipos de aportes teóricos foram mobilizados na coleta e análise dos dados. Assim posto, consideramos pertinentes investigações que abram caminhos para a construção de teorias que deem conta da complexidade que envolve o ensino e a aprendizagem de inequações.

Vemos que os caminhos a trilhar são variados, o campo é vasto e se quisermos aproveitar a produção científica acadêmica para a melhoria do ensino e da aprendizagem, não só, mas também de inequações e validar ainda mais a área de educação matemática devemos continuar as investigações e, principalmente, explicitar as contribuições dos resultados e fazer com que elas cheguem às salas de aulas.

---

## REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. A. *Fundamentos da didática da matemática*. Curitiba: UFPR, 2010.

ALVARENGA, K. B. La enseñanza de inequaciones desde el punto de vista de la Teoría APOE. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa – RELIME*. v.6, n.3, p.200-219, 2003.

\_\_\_\_\_. *Inecuaciones: un análisis de las construcciones mentales de los Estudiantes Universitarios*. Tese de Doutorado em Matemática Educativa. Instituto Politécnico Nacional - Centro De Investigación En Ciencia Aplicada Y Tecnología Avanzada – CICATA. México, 2006.

ALVARENGA, K. B; MACHADO, S.A.D. PME Inequalities Production: A Survey. THE INTERNATIONAL CONFERENCE OF PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION. 2011. In: *Proceedings of PME XXV*. v.1, 2011. p.248 .

ALVES-MAZZOTTI, A. J. A “revisão da bibliografia” em teses e dissertações: meus tipos inesquecíveis – o retorno. In: BIANCHETTI, L.; MACHADO, L. M. N. (Org.). *A bússola do escrever: desafios e estratégias na orientação de teses e dissertações*. Florianópolis: UFSC: Cortez, 2002. p. 25-44.

ALWYN, PANG W.; DINDYAL, J. Students errors in the solution of inequalities at the junior college level. THE INTERNATIONAL CONFERENCE OF PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION. 2010. In: *Proceedings of PME XXIV*. v.4, 2010. p. 17-24.

APPOLINÁRIO, F. *Dicionário de metodologia científica: um guia para a produção do conhecimento científico*. São Paulo, Atlas, 2009.

\_\_\_\_\_. *Metodologia da Ciência - Filosofia e Prática da Pesquisa*. São Paulo: Editora THOMSON, Ano de Edição: 2, 2012.

ASIALA, *et al.* A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. *CBMS Issues in Mathematical Education*, v.6. 1996.

ASSUDE, T. De l’usage de “techniques faibles” et “techniques fortes” dans l’organisation du curriculum. SÉMINAIRES FRANCO-ITALIEN DE DIDACTIQUE DE L’ALGÈBRE – SFIDA. In: *Actes des Séminaires SFIDA IX*, 1997. p.IX9-IX14.

\_\_\_\_\_. Un phénomène d’évolution curriculaire: Le cas des inéquations au college. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, v.22, p.211-236, 2002.

AURÉLIO, B. H. F. *Novo Dicionário Aurélio da língua portuguesa*. Curitiba: Positivo, 2004.

ÁVILA, G.S.S. *Cálculo das funções de uma variável*. Rio de Janeiro: LTC, 2003.

\_\_\_\_\_. Equações e inequações com radicais. *Revista do Professor de Matemática*. Rio de Janeiro, SBM. n.38,1998.

BAGNI, G. T. Inequalities and equations: history and didactics. In: Anais do CERME 4, 652-661, 2005. Disponível em: <<http://www.malhatlantica.pt/mathis/Conferencias/conferencias.htm>>. Acesso em: abril de 2010.

BARDIN, L. *Análise de Conteúdo*. São Paulo:Edições 70, 2011.

BARROS, A. J. S.; LEHFELD, N. A. S. *Fundamentos de Metodologia: Um Guia para a Iniciação Científica*. São Paulo: Makron Books, 2000.

BAZZINI, L. Equazioni e Disequazioni riflessioni sul concetto di equivalenza. In: *La didattica Dell álgebra nella scuola secondaria - V CONVEGNO INTERNUCLERI PAVIA - ITALIA*, juillet, p. 44-53, 1995. Disponível em: <[http://didmat.dima.unige.it/progetti/COFIN/h\\_cofin.html](http://didmat.dima.unige.it/progetti/COFIN/h_cofin.html)>. Acesso em: jun. de 2010.

\_\_\_\_\_. Riflessioni didattiche sul concetto di equivalenza per equazioni e disequazioni. SÉMINAIRES FRANCO-ITALIEN DE DIDACTIQUE DE L'ALGÈBRE – SFIDA. In: *Actes des SFIDA X*, 1998. p.X39-X43.

\_\_\_\_\_. The Mutual Influence of Theory and practice in Mathematics Education: implications for research and teaching. In: *ZDM Mathematics Education*, 2007, v.39, p.119-125.

BAZZINI, L.; ASCARI, M. Disequazioni: Il ruolo Del segno. SÉMINAIRES FRANCO-ITALIEN DE DIDACTIQUE DE L'ALGÈBRE – SFIDA. In: *Actes des SFIDA XII*. 1999, p.XII7-XII12.

BAZZINI, L; BOERO, P.; GARUTTI R. Reveling and Promoting the Student's Potential in Algebra: a case study concerning Inequalities. In: *Proceedings of ICMI 12*, v. 1, 2001a, p.53-60.

\_\_\_\_\_. Algebraic Expressions and The Activation of Senses. CONGRESS OF EUROPEAN RESEARCH IN MATHEMATICS EDUCATION 2 (CERME). In: *Anais of CERME 2*, 2001b. p. 447-455.

BAZZINI, L; TSAMIR, P. Research based Instruction: widening students perspective when dealing with inequalities. In: *Proceedings of ICMI 12*, v.1, 2001, p.61-67.

\_\_\_\_\_. Le disequazioni tra procedure e relazioni: uno studio comparativo su studenti italiani e israeliani. In: *Actes del L'insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate - LIMSI*. v.25, p.247-270, 2002a. Disponível em:

<[didmat.dima.unige.it/progetti/COFIN/biblio/art\\_bazz/BAZZ&02a.pdf](http://didmat.dima.unige.it/progetti/COFIN/biblio/art_bazz/BAZZ&02a.pdf)>. Acesso em: agosto de 2010.

\_\_\_\_\_. Teaching Implications Deriving From a Comparative Study on The Instruction of Algebraic Inequalities. In: COMMISSION INTERNATIONALE POUR L'ÉTUDE ET L'AMÉLIORATION DE L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES - CIEAEM 54. *Proceedings of CIEAEM 54*, 2002b. Disponível em: <[http://didmat.dima.unige.it/progetti/COFIN/biblio/art\\_bazz/BAZZ&02c.pdf](http://didmat.dima.unige.it/progetti/COFIN/biblio/art_bazz/BAZZ&02c.pdf)>. Acesso em: novembro de 2010.

\_\_\_\_\_. Connections between theory and research findings: the case of inequalities. In: *Anais of CERME 3*, 2003. Disponível em: <<http://www.malhatlantica.pt/mathis/Conferencias/conferencias.htm>>. Acesso em: abril de 2010.

BELTRÃO, R.C. Dificuldades dos Alunos para Resolver Problemas com Inequações. *Revemat: R. Eletr. de Edu. Matem.* Florianópolis, v. 05, n. 1, p.84-95, 2010.

BIEMBENGUT, M.S. *Mapeamento na Pesquisa Educacional*. São Paulo: Ciência Moderna, 2008.

BLANCO, L. J.; GARROTE, M. Difficulties in Learning Inequalities in Students of the First Year of Pre-University Education in Spain. *Eurasia Journal of Mathematics Science & Technology Education*, v.3, n.3, p.221-229, 2007.

BLOCH, A. Inequações - produto. *Revista do Professor de Matemática*, v. 23, 1991. CD-ROM.

BOERO, P. Inéquations: aspects didactiques, épistémologiques et cognitifs. SÉMINAIRES FRANCO-ITALIEN DE DIDACTIQUE DE L'ALGÈBRE – SFIDA. In: *Actes des SFIDA X*, 1998a. p.X3-X6.

\_\_\_\_\_. Inéquations: pour une recherche pluridisciplinaire. SÉMINAIRES FRANCO-ITALIEN DE DIDACTIQUE DE L'ALGÈBRE – SFIDA. In: *Actes des SFIDA XI*, 1998b. p. XI47-XI52.

BOERO, P; BAZZINI, L. Inequalities in Mathematics Education: A need complementary perspectives. THE INTERNATIONAL CONFERENCE OF PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION 2004. In: *Proceedings of PME XXVIII*, v.1, 2004. p.139-143.

BOERO, P; BAZZINI, L.; GARUTI, R. Metaphors in teaching and learning mathematics: a case study concerning inequalities. THE INTERNATIONAL CONFERENCE OF PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION. 2001. In: *Proceedings of PME XXV*, v. 3, 2001. p.9-16.

BOERO, P; GARUTI, R. Les inéquations fonctionnelles: lieu de développement et d'étude de la maîtrise des fonctions. SÉMINAIRES FRANCO-ITALIEN DE DIDACTIQUE DE L'ALGÈBRE – SFIDA. In: *Actes des SFIDA XII*, 1999. p.XII3-XII6.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. *Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto - PT: Porto, 1994.

BONOMI, M.C. Minicurso: Funções, Equações e Inequações. In: *Anais do VI Encontro Nacional de Educação Matemática*. São Leopoldo – RS, v.I, 1998. p.337-338.

BORASI, R. Exploring mathematics through the analysis of errors. *For the learning of Mathematics*, v.7, p.2-8, 1987.

BORBA, M. C.; ARAÚJO J. *Pesquisa qualitativa em Educação Matemática*. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

BORELLO, M. *Relación entre las concepciones del maestro y el aprendizaje de los alumnos en el caso de las desigualdades. Un estado del Arte*. Dissertação de Mestrado em Matemática Educativa. Instituto Politécnico Nacional - Centro De Investigación En Ciencia Aplicada Y Tecnología Avanzada – CICATA. México, 2007.

\_\_\_\_\_. *Un Planteamiento De Resignificación De Las Desigualdades A Partir De Las Prácticas Didácticas Del Profesor. Un Enfoque Socioepistemológico*. Tese de Doutorado em Matemática Educativa. Instituto Politécnico Nacional - Centro De Investigación En Ciencia Aplicada Y Tecnología Avanzada – CICATA. México, 2010.

BRASIL. *Orientações Curriculares para o Ensino Médio*. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, SEB, 2006.

\_\_\_\_\_. *Parâmetros Curriculares Nacionais*. Secretaria de Ensino Fundamental. MEC, 1998.

\_\_\_\_\_. *Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio*. Secretaria de Ensino Médio. MEC, 2000.

\_\_\_\_\_. *Parâmetros Curriculares Nacionais + para o Ensino Médio*. Secretaria de Ensino Médio. MEC, 2002.

BROUSSEAU, G. Les obstacles épistemologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, v. 4, n. 2, p. 165-198, 1983.

\_\_\_\_\_. *Theory of didactical situations in mathematics: didactique des mathématiques*, 1970 - 1990. Traduzido por Nicolas Balacheff *et al.* Londres: Kluwer Academic Publishers, v. 19, 1998.

CAMPOS, T. M. M.; DE SOUZA, V.H. Resolução de desigualdades com uma incógnita: uma análise de erros. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*. n. 14, p.37 – 48, 2008. Disponível em: <[http://www.fisem.org/web2/union/fisem\\_antigo/descargas/14/Union\\_014.pdf#page=37](http://www.fisem.org/web2/union/fisem_antigo/descargas/14/Union_014.pdf#page=37)>. Acesso em: agosto de 2011.

CANTORAL, R. *et al.* *Desarrollo del Pensamiento Matemático*. México: Trillas, 2000.

CASTRUCCI, B.; GIOVANNI, J. R.; GIOVANNI Jr., J. R. *A conquista da matemática: a + nova. Ensino Fundamental*. São Paulo: FTD, 2002.

CELLARD, A. A análise documental. In: POUPART, J. et al.(Orgs.). *A pesquisa qualitativa: enfoques epistemológicos e metodológicos*. Petrópolis: Vozes, 2008.p.295-316.

CHEVALLARD, Y. La fonction professorale: esquisse d'un modèle didactique. In: *Actas de VIII Ecole d'Eté de didactique des mathématiques*. Ed par Noirfalise R. et PerrinGlorian MJ, 1992. p. 83-122.

CHEVALLARD, Y . L' analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage-Editions, v.19, n.2, p.221-265,1999.

CHIAPPINI, G; MOLINARI, M. Presentazione di um modelo di approccio alle disequazioni con ragazzi di 11-12 anni. In: *Séminaires Franco-Italien de Didactique de L'Algèbre – SFIDA XI*, 1998. P. XI45-XI54.

CHIZZOTTI, A. *Pesquisa qualitativa em ciências humanas e sociais*. Petrópolis: Vozes, 2006.

CORTES, A.; PFAFF, N. Solving equations and inequations: operational invariants and methods constructed by students. THE INTERNATIONAL CONFERENCE OF PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION. 2000. In: *Proceedings of PME XXIV*, v. 2, 2000. p. 193-200.

COURANT, R.; ROBBINS, H. *O que é Matemática – Uma abordagem elementar de métodos e conceitos*. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2000.

COUTINHO, C. P. *Percursos da investigação em Tecnologia Educativa em Portugal: uma abordagem temática metodológica a publicações científicas (1985 – 2000)*. Monografias em Educação. 2005. Centro de Investigação em Educação. Universidade do Minho, Braga. Disponível em: <<http://claracoutinho.wikispaces.com/O+que+%C3%A9+An%C3%A1lise+de+Conte%C3%BAdo%3F>>. Acesso em: julho de 2011.

CRESWELL, J.W. *Projeto de Pesquisa – métodos qualitativo, quantitativo e misto*. Porto Alegre: Artmed, 2010.

CURY, H. N. Análise de Erros. *O que podemos aprender com as respostas dos alunos*. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

D'AMBRÓSIO, U. *Educação Matemática - da teoria à prática*. Campinas-SP: Papyrus, 1996.

DAMM, R. F. Registros de Representação. MACHADO, S. D. A. (Org.). In: *Educação Matemática. Uma (nova) introdução*. São Paulo, SP: EDUC, 2008, p.167-188.

DANTE, L. R. *Tudo é Matemática*. 8ª série. São Paulo: Ática, 2010.

\_\_\_\_\_. *Matemática: contexto e aplicações*. V. único. 2.ed. São Paulo: Ática, 2007.

DAVIS, P.; HERSH, R. *A experiência matemática*. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1985.

De MORAIS FILHO, D. C. *Manual de Redação Matemática*. Campina Grande - PB: Fábrica de Ensino, 2009.

\_\_\_\_\_. *Um convite à Matemática - Fundamentos lógicos com técnicas de demonstração, notas históricas e curiosidades*. Campina Grande-PB: Fábrica de Ensino, 2010.

De SOUZA, V.G.; CAMPOS, T. Inequations Resolution Using Various Registers. THE INTERNATIONAL CONFERENCE OF PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION. In: *Education Proceedings of PME XXXII v.1*, 2008. p.338.

De SOUZA, V.G. *O uso de vários registros na resolução de inequações - uma abordagem funcional gráfica*. 2008. Tese de doutorado em Educação Matemática. PUC SP, 2008.

DEMANA, F. *et al. Pré-Cálculo*. São Paulo: Pearson/Addison Wesley, 2011.

DOBBS, D.E. ; PETERSON, J.C. The Sing-Chart Method for Solving Inequities. *Mathematics Teacher*, p.657-664,1991.

DUVAL, R. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). *Aprendizagem em Matemática*. Campinas, SP: Papyrus, p. 11-33, 2003.

DICIONÁRIO ESENCIAL. Espanha: Santillana,1996.

ENGLISH, L.; SRIRAMAN, B. Theories of Mathematics Education. In: CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION. 2005. In: *Proceedings of PME XXIX*. 2005. p. 170-172.

ESTADOS UNIDOS DA AMÉRICA - *Math Standards And Expectations*. Disponível em: <<http://www.nctm.org/standards/content.aspx?id=312>>. Acesso em: julho de 2011.

FARFÁN, R. M.; ALBERT, A. *Un acercamiento gráfico a la resolución de desigualdades – con uso de las calculadoras TI-81 y TI-85*. v.3. México: Iberoamérica, 1997.

FERREIRA, N. S. A. As pesquisas denominadas “estado da arte”. *Educação e Sociedade*. Campinas, ano 23, n.79, p.257-272, 2002. Disponível em: <<http://www.scielo.br/pdf/es/v23n79/10857.pdf>>. Acesso em: jan. de 2010.

FIGUEIREDO, N. M. A. *Método e metodologia na pesquisa científica*. 2a ed. São Caetano do Sul - SP: Yendis, 2007.

FIorentini, D.; Lorenzato S. *Investigação em Educação Matemática – percursos teóricos e metodológicos*. Campinas: Autores Associados, 2007.

FIorentini, D. The interaction between the formal, the algorithmic and intuitive components in a mathematical activity. 1994. In: BIEHLER, R.*et al.* (Eds) *Didactics of Mathematics as Scientific Discipline*. Netherlands, Dordrecht: Kluwer, p. 231-245, 1994. Disponível em:

<[http://books.google.com.br/books?id=mFzldfFUHZ0C&pg=PA231&lpq=PA231&dq=FISCHBEIN,+E.+The+interaction+between+the+formal,+the+algorithmic+and+intuitive+components+in+a+mathematical+activity.&source=bl&ots=vRJeNwbqoN&sig=3WGhdfqgxfQjYmZbFQwQ\\_Rk4qw&hl=ptBR&ei=58CBTtmjOYHLgQedu dBT&sa=X&oi=book\\_result&ct=result&resnum=1&ved=0CB8Q6AEwAA#v=onepage&q=FISCHBEIN%2C%20E.%20The%20interaction%20between%20the%20formal%2C%20the%20algorithmic%20and%20intuitive%20components%20in%20a%20mathematical%20activity.&f=false](http://books.google.com.br/books?id=mFzldfFUHZ0C&pg=PA231&lpq=PA231&dq=FISCHBEIN,+E.+The+interaction+between+the+formal,+the+algorithmic+and+intuitive+components+in+a+mathematical+activity.&source=bl&ots=vRJeNwbqoN&sig=3WGhdfqgxfQjYmZbFQwQ_Rk4qw&hl=ptBR&ei=58CBTtmjOYHLgQedu dBT&sa=X&oi=book_result&ct=result&resnum=1&ved=0CB8Q6AEwAA#v=onepage&q=FISCHBEIN%2C%20E.%20The%20interaction%20between%20the%20formal%2C%20the%20algorithmic%20and%20intuitive%20components%20in%20a%20mathematical%20activity.&f=false)>. Acesso em: agosto de 2010.

FRANCO, M. L. P. B. *Análise de Conteúdo*. Brasília: Plano Editora Ltda, 2003.

FLEMMING D. M. ; GONÇALVES M. *Cálculo A*. Florianópolis: UFSC, 2010

FONTALVA, G. *Um estudo sobre inequações: entre alunos do ensino médio*. 2006. Dissertação de Mestrado. Pontífica Universidade Católica de São Paulo, 2006.

FERREIRA, B. *Análise de Conteúdo*. 2002. Disponível em <<http://www.ulbra.br/psicologia/psi-dicas-art.htm>>. Acesso em: jan. de 2010.

FREGE, G. Über Sinn und Bedeutung' ('Sobre o Sentido e a Denotação'), in *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik*, C, 1892, p. 25-50.

FREGE, G. *Lógica e Filosofia da Linguagem*. São Paulo: Editora USP, 2009.

FRANDSEN, H. The Last Word on Solving Inequalities. *The Mathematics Teacher*. Universit of Tennessee Knoxville. New York, p. 439-41, 1969.

FROTA, M. C. R; BORGES, O. Perfis de entendimento sobre o uso de tecnologia na educação matemática. In: 27<sup>a</sup>. *Reunião Anual da ANPEd*. Rio de Janeiro- RJ: ANPEd. 2004. p. 1-17.

GALLO, E.; BATTÚ, M. Quali modelli e controlli intervengono lavorando su disequazioni? SÉMINAIRES FRANCO-ITALIEN DE DIDACTIQUE DE L'ALGÈBRE – SFIDA. In: *Actes des SFIDA XI*, 1998. p.X25-X37.

GAMBOA, S. S. Tendências Epistemológicas: dos tecnicismos e outros “ismos” aos paradigmas científicos. In: FILHO J.C.S.; GAMBOA, S.S.(orgs.). *Pesquisa Educacional: quantidade-qualidade*. São Paulo: Cortez, 2002.

GARNICA, A. V. M. As demonstrações em educação matemática: um ensaio. *BOLEMA*, 18, p.91-99, 2002.

- GARUTI, R. Attivita' sulle disequazioni come contesto per lo Sviluppo dei concetti di variabile e funzione. *Rivista di Matematica della Universita di Parma*, p.1-9, 2001. Disponível em: <<http://www.math.unipr.it/~rivista/guzzoni/AVVENIMENTI/PDFMONTICELLI/Garuti.pdf>>. Acesso em: jan. 2011.
- GIOVANNI, J.R.; GIOVANNI Jr., J. R. *A Conquista da Matemática*. 8ª série. São Paulo: FTD, 2008.
- GIOVANNI, J. R.; CASTRUCCI, B.; GIOVANNI JR, J. R. *A conquista da Matemática: A +nova*. v. 8. São Paulo – SP: FTD, 2002.
- GUIDORIZZI, H. L. *Um curso de cálculo*. Rio de Janeiro e São Paulo: LTC, 1987.
- GOULART, M. C. *Matemática No Ensino Médio*. 1ª Série. São Paulo: Scipione, 2008.
- HALMAGHI, E. Undergraduate student's conceptions of inequalities: sanding the lens. THE INTERNATIONAL CONFERENCE OF PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION. 2010. In: *Proceedings of PME XXXIV*, v.3, 2010. p.41-46.
- HOAUAISS, A. *Minidicionário Hoauaiss*. 3a ed. Rio de Janeiro: Objetiva, 2008.
- IGLIORI, S. B. C. A noção de “obstáculo epistemológico” e a educação matemática. In: *Educação Matemática Uma (nova) introdução*. MACHADO, S. D. A. (Org.). São Paulo- SP: EDUC, p. 113-142, 2008.
- IEZZI, G.; DOLCE, O.; MACHADO, A. *Matemática e Realidade - 7ª Série Ensino Fundamental*. São Paulo: Atual, 2005a.
- IEZZI, G.; DOLCE, O.; MACHADO, A. *Matemática e Realidade - 6ª Série Ensino Fundamental*. São Paulo: Atual, 2005b.
- JUNIOR C., F.S. *Uma abordagem funcional para o ensino de inequações no Ensino Médio*. 2011. Dissertação de Mestrado. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo.2011.
- KIERAN, C. The equation/inequality connection in constructing meaning for inequality Situations. THE INTERNATIONAL CONFERENCE OF PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION. 2004. In: *Proceedings of PME XXVIII*, v.1, 2004. p.143-147.
- KILPATRICK, J. A History of Research in Mathematics Education. In: *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: Simon& Schuter Macmillan,1992.
- KING, J. L. A Method for Solution of Nonlinear Inequities. *Mathematics Teacher*. Los Angeles, California, p.739-40, 1973.
- KRUTETSKII, V. *The Psychology of mathematics abilities in schoolchildren*. Chicago: The Univesity of Chicago Press, 1976.

LAKOFF, G.; NUÑEZ, R. *Where Mathematics come from? How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being*. New York: Basic Books, 2000.

LAKATOS, M. E.; MARCONI, M. A. *Metodologia do Trabalho Científico*. 4 ed-São Paulo. Revista e Ampliada. Atlas, 1992.

LEITHOLD, L. *O Cálculo com Geometria Analítica*. Tradução de C. de Carvalho, São Paulo: Harbra, 1994.

LERMAN, S. Theories Of Mathematics Education: a Problem of Plurality? THE INTERNATIONAL CONFERENCE OF PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION.2005. In: *Proceedings of PME XXIV*, 2005. p. 179-182.

LESTER, F. The Place Of Theory In Mathematics Education Research. THE INTERNATIONAL CONFERENCE OF PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION.2005. In: *Proceedings of PME XXIV*, 2005. p. 172-178.

LIBÂNEO, J. C. *Didática*. Editora: Cortez, 1994.

LITVINENKO, V.; MORDKOVICH, A. *Solving problems in algebra and trigonometry*. Moscou: MIR. 1987.

LIM, K. *Student's mental act of anticipating in solving problems involving algebraic inequalities and equation*. Doctor of Philosophy in Mathematics and Science Education. University Of California, San Diego, EUA, 2006a.

\_\_\_\_\_.Characterizing student's thinking: algebraic, inequalities and equations. In: *The International Conference of Psychology of Mathematics Education Proceedings - PME NA XXVI*. v.2, 2006b, p.102-109.

LIMA, E. L. *Exame de textos – Análise de livros de Matemática para o Ensino Médio*. Rio de Janeiro: IMPA, SBM, 2001.

LINCHEVSKY, L; SFARD, A. Rules without reasons as process without objects- the case of equations and inequalities. THE INTERNATIONAL CONFERENCE OF PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION.1991. In: *Proceedings of PME*. v. 2, 1991. p. 317-324.

LINS, R.C.; GIMENEZ, J. *Perspectivas em Aritméticas e Álgebra para o século XXI*. Campinas: Papirus, 1997.

LOPES *et al.*.*Cálculo a uma variável*.v.1. Rio de Janeiro: PUC-Rio, 2002.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M.E.D.A. *Pesquisa em educação: abordagens qualitativas*. São Paulo, EPU, 1986.

MACHADO, S.D.A. (org). *Educação Matemática – Uma (nova) introdução*. São Paulo: EDUC, 2008.

MACHADO, N. J. *Epistemologia e Didática*. 5. ed. São Paulo: Cortez Editora, 1995.

MALARA, N.; BRANDOLI, M.T.; FIORI, C. Comportamenti di studenti in ingresso all'università di fronte allo Studio di disequazioni. In: *Séminaires Franco-Italien de Didactique de L'Algèbre – SFIDA XII*, 1999. p. XII13-XII28.

MARANHÃO, M. C. S. A. Expressões, equações e inequações - pesquisa, ensino e aprendizagem. In: *Anais do IX ENEM*, 2007. Disponível em: <[http://www.sbem.com.br/files/ix\\_enem/Html/posteres.html](http://www.sbem.com.br/files/ix_enem/Html/posteres.html) 2007>. Acesso em: agosto de 2011.

MARIANI, R.C.P. *Transição da Educação Básica para o Ensino Superior: a coordenação de registros de representação e os conhecimentos mobilizados pelos alunos no curso de Cálculo*. Tese de Doutorado. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006.

MARIANI, R.C. P.; SILVA, B. A. As variáveis visuais na coordenação de registros de representação: um estudo sobre inequações a partir da comparação de funções. In: *Publicações da 29ª Reunião ANPED*. 2006. Disponível em: <<http://www.anped.org.br/reunioes/29ra/29portal.htm>>. Acesso em: março de 2012.

MARCHI, J. J. Bases do Conhecimento Científico e sua Influência na Formação da Ciência da Administração. I COLÓQUIO DA EPISTEMOLOGIA E SOCIOLOGIA DA CIÊNCIA DA ADMINISTRAÇÃO. In: *Atas do I Colóquio da Epistemologia e Sociologia da Ciência da Administração*, Florianópolis, 2011. Disponível em: <<http://www.coloquioepistemologia.com.br/anais.html>>. Acesso em: dez. de 2012.

MAY, T. *Pesquisa social: questões, métodos e processo*. Porto Alegre: Artmed, 2004.

MCGOWEN, M.; TALL, D. Metaphor or Met-before? The effects of previous experience on the practice and theory of learning mathematics. *Journal of Mathematical Behavior*. 29, p.169–179, 2010.

MELO J. J. *Docência de inequações no ensino fundamental da cidade de Indaiatuba*. Dissertação de Mestrado. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2007.

MELO, M. *O ensino de desigualdades e inequações em um curso de licenciatura em matemática*. Dissertação de Mestrado. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2007.

MESSINA, G. Investigación en o investigación acerca de la formación docente: un estado del arte en los noventa. *Revista Iberoamericana de Educación*, n.19. Madrid, 1999. Disponível em: <<http://www.rieoei.org/oeivirt/rie19a04.PDF>> . Acesso em: agosto de 2011.

MEGID, J.N. *Tendências da Pesquisa Acadêmica sobre o Ensino de Ciências no Nível Fundamental*. Tese de doutoramento. Faculdade de Educação. Universidade Estadual de Campinas- SP, 1999.

MINAYO, M.C.S. *O desafio do conhecimento: pesquisa qualitativa em saúde*. 11ª ed. São Paulo: HUCITEC, 2008.

MILLES, M. B.; HUBERMAN, A. M. *Qualitative Data Analysis*. Califórnia: SAGE, 1994.

MIORIM, M. A. Livros didáticos de Matemática do período de implantação do Movimento da Matemática Moderna no Brasil. In: CONGRESSO IBERO-AMERICANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. *Anais do V CIBEM*. 2005, Porto, Portugal.

MIORIM, M. A. *Introdução à história da educação matemática*. São Paulo: Atual, 1998.

MONTICELI, A. R. *Um Estudo Sobre Sistemas De Inequações Lineares*. Dissertação de Mestrado. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica- Universidade Estadual de Campinas, São Paulo, 2010.

MOISE, E. E. *Cálculo. Um curso universitário*. São Paulo: Edgard Blücher, 1972.

MORAES, R. Análise de conteúdo. *Revista Educação*, Porto Alegre, v. 22, n. 37, p. 7-32, 1999.

MOREIRA, M. A. *Teorias de Aprendizagem*. São Paulo: EPU, 2011.

MORI; I. ONAGA, D. S. *Matemática- Ideias e Desafios*. 7ª série. São Paulo: Saraiva, 2000.

MOTTA, C. D. Van B.; BROLEZZI, A. C. *A Influência do Positivismo na História da Educação Matemática no Brasil*. 2006. Disponível em: < [http://www.faced.ufu.br/colubhe06/anais/arquivos/426CristinaDalva\\_AntonioCarlos.pdf](http://www.faced.ufu.br/colubhe06/anais/arquivos/426CristinaDalva_AntonioCarlos.pdf)>. Acesso em jan.2011.

MÜNEN, M. A.; FOULIS, D. J. *Cálculo*. Rio de Janeiro: LTC, 1982.

NÓBREGA-TERRIEN, S. M. ;TERRIEN J. Trabalhos Científicos e o Estado da Questão: reflexões teórico-metodológicas. *Estudos em Avaliação Educacional*, v.15, n.30. jul-dez, 2004.

OLIVEIRA, M. M. *Como fazer pesquisa qualitativa*. Petrópolis: Vozes, 2007.

OLIVEIRA, M. A. Teoria da Significação. In: *Reviravolta Linguística-Pragmática na Filosofia Contemporânea*. São Paulo: Loyola, 1996.

OLIVEIRA, F.D.; GARNICA A.V.M. *Análise de Livros Didáticos de Matemática: um Enfoque Hermenêutico*. 2006. Disponível em: <<http://www.fae.ufmg.br/ebapem/completos/05-10.pdf>>. Acesso em: abril de 2012.

PARISH, C. R. Inequalities, absolute value, and logical connectives. *The Mathematics Teacher*. Dec., p.756-7, 1992.

PATTON, M. *Qualitative evaluation and research methods*. Beverly Hills, CA: Sage. 1990, p.169-186. Disponível em: <<http://legacy.oise.utoronto.ca/research/field-centres/ross/ctl1014/Patton1990.pdf>>. Acesso em: dez. de 2011.

PIRES, A.P. Sobre algumas questões epistemológicas de uma metodologia geral para as ciências sociais. In: POUPART, J. *et al.* (orgs). *A Pesquisa Qualitativa-enfoques epistemológicos e metodológicos*. Petrópolis: Vozes, 2010.

PORTUGAL. *Ministério da educação*. Departamento do ensino secundário matemática a 10º ano. Cursos Científico-Humanísticos de Ciências e Tecnologias e de Ciências Socioeconómicas, 2001.

POZZEBON, P. M. G (Org). *Mínima metodológica*. Campinas: Editora Alínea, 2006.

RACHLIN, S. The Algebra That Students Need to Know to Avoid Remedial Mathematics Courses in College. *Mathematics Education Dialogues. Algebra? A gate! A barrier! A mystery*. NCTM, 2000.

RADFORD, L. Syntax and Meaning. THE INTERNATIONAL CONFERENCE OF PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION.2004. In: *Proceedings of PME XXVIII*, v.1, 2004. p. 161-165.

RIO GRANDE DO SUL. Secretaria de Educação. *Referencial Curricular do Ensino Médio. Vol. 3, parte 1 e 2*. Rio Grande do Sul: SED, 2009. Disponível em: <[http://www.educacao.rs.gov.br/pse/html/refer\\_curric.jsp?ACAO=acao1](http://www.educacao.rs.gov.br/pse/html/refer_curric.jsp?ACAO=acao1)>. Acesso em: agosto de 2011.

RIVERA, F.; BECKER, J. R. Sociocultural account of students collective mathematical understanding of polynomial in instrumented activity. THE INTERNATIONAL CONFERENCE OF PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION.2004. In: *Education Proceedings of PME XXVIII*, v. 4, 2004. p. 81-88.

ROHDEN, L. Racionalidade retórica - Uma linguagem filosófico-hermenêutica em Aristóteles. *Síntese: Nova Fase*. Belo Horizonte, v. 25 n. 81, p. 249-266, 1998.

ROH H. K; HALANI A. Analysis of undergraduate student's cognitive processes when writing proofs about inequalities . In: *Preliminary Report on Proceedings of Research Undergraduate Mathematics Education*, 2011. Disponível em: <[http://sigmaa.maa.org/rume/crume2011/RUME2011\\_FinalSchedule\\_files/Preliminary ReportsShortPapers/](http://sigmaa.maa.org/rume/crume2011/RUME2011_FinalSchedule_files/Preliminary ReportsShortPapers/)>. Acesso em: julho de 2011.

ROMANOWSKI, J. P.; ENS, R. T. As Pesquisas Denominadas Do Tipo "Estado Da Arte" Em Educação. *Revista Diálogo Educacional*, vol. 6, núm. 19, set.-dez., p. 37-50, 2006.

ROWNTREE, R. V. Students' Understandings and Misconceptions - of Algebraic Inequalities. *Journal School Science and Mathematics – JSSM*, v.109,6, p.311-313, 2009.

SÁ-SILVA, J. R.; ALMEIDA, C.; GUINDANI, J. F. Pesquisa documental: pistas teóricas e metodológicas. *Revista Brasileira de História & Ciências Sociais*. Ano I, n.1, Julho, 2009.

SACKUR, C.; DROUHARD J; MAUREL, M.; PÉCAL, M. Comment recueillir des connaissances cachées en algèbre et qu'en faire ? *Repères*, n. 28, 1997. Disponível em: <[http://irh.unice.fr/IMG/pdf/Reperes\\_no28-2.pdf](http://irh.unice.fr/IMG/pdf/Reperes_no28-2.pdf)>. Acesso em: out.2010.

SACKUR C.; MAUREL M. Les outils théoriques du GECO et les inéquations en classe de seconde. SÉMINAIRES FRANCO-ITALIEN DE DIDACTIQUE DE L'ALGÈBRE – SFIDA. In: *Actes des SFIDA XI*, 1998. p.X7-X18.

\_\_\_\_\_. Les inéquations en classe de seconde et l'expérience de La necessite. SÉMINAIRES FRANCO-ITALIEN DE DIDACTIQUE DE L'ALGÈBRE – SFIDA. In: *Actes des SFIDA XII*, 1999. p.XI35-XI46.

\_\_\_\_\_. Les inéquations en classe de seconde - Une tentative pour enseigner la nécessité des énoncés mathématiques. *Petit x 2*, IREM Grenoble, n.53, p.5-26, 2000. Disponível em: <[http://www-irem.ujf-grenoble.fr/revues/revue\\_x/fic/53/53x1.pdf](http://www-irem.ujf-grenoble.fr/revues/revue_x/fic/53/53x1.pdf)>. Acesso em: agosto de 2010.

SACKUR, C. Problems related to the use of graphs in solving inequalities. THE INTERNATIONAL CONFERENCE OF PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION.2004. In: *Proceedings of PME XXVIII*, v.1, 2004. p.148-151.

SANTOS, C. A. M; GENTIL, N.; GRECO, S. E. *Matemática*. Série Novo Ensino Médio. V. único. São Paulo: Ática, 2004.

SANTOMÉ, J. T. *Globalização e interdisciplinaridade – o currículo integrado*. Porto Alegre: Artes Médicas, 1998.

SILVA, M. C. N.; BURIASCO, R. L. C. Organizando informações: uma questão de tratamento. *Educação Matemática Revista*. n. 20/21, 2006.

SFARD, A; LINCHEVSKY, L. Equations and Inequalities – process without objects? THE INTERNATIONAL CONFERENCE OF PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION. 1992. In: *Proceedings of PME XVI*. v.3, 1992. p.136.

\_\_\_\_\_. Between Arithmetic and Algebra: In the search of a missing link the case of equation and Inequalities. In: *Rendiconti Del Seminario Matematico - Università e Politecnico Di Torino - RSMUPT*, v. 52 ,3. 1994, p.279-309. Disponível em: <<http://seminariomatematico.dm.unito.it/rendiconti/cartaceo/52-3/279.pdf>>. Acesso em jun. 2011.

SERGIPE. Secretaria de Educação. *Referencial Curricular da Educação Básica*. Sergipe: SEED, 2011. Disponível em: <[http://www.seed.se.gov.br/arquivos/Referencial\\_Curricular\\_v08.pdf](http://www.seed.se.gov.br/arquivos/Referencial_Curricular_v08.pdf)>. Acesso em: agosto de 2011.

SEVERINO, A. *Metodologia do Trabalho Científico*. São Paulo: Cortez, 2007.

SILVA, C. M. S. *A Matemática Positivista e sua difusão no Brasil*. Vitória: EDUFES, 1999.

SILVA, B. Contrato Didático. MACHADO, S. D. A. (Org.). In: *Educação Matemática. Uma (nova) introdução*. São Paulo, SP: EDUC, 2008, p.49 -76.

SWOKOWSKI, E.W. *Cálculo com Geometria Analítica*. Trad. A Alves. v1, 2.ed. São Paulo: Makron Books, 1994, 744p.

STANLEY, J. H. An Algorithm for Inequalities. *Mathematics Teacher*, p.609-612, 1979.

STEINBERG, R. M.; SLEEMAN, D. H.; KATORZA D. Algebra student's knowledge of equivalence of equations. *Journal for Research in Mathematics Education*, p.112-121, 22, v.2, 1991.

TALL, D. Reflections on research and teaching of equations and inequalities. THE INTERNATIONAL CONFERENCE OF PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION.2004. In: *Proceedings of PME XXVIII*, v 1, 2004. p.158-161.

TAVARES, R.N. O. Uma maneira abreviada de resolver algumas inequações. In: *Revista do Professor de Matemática*. v.05, 1984. CD-ROM.

TRIGUEROS, M.; URSINI, S. Understanding of different uses of variable: A study with starting college students. THE INTERNATIONAL CONFERENCE OF PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION.1997. In: *Proceedings of PME XXI*, 4.1997. p. 254-261.

TSAMIR, P; ALMOG No answer as a problematic response: the case of inequalities. THE INTERNATIONAL CONFERENCE OF PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION. 1999. In: *Proceedings of PME XXIII*, v.1.1999. p.328.

\_\_\_\_\_. Students' Strategies and difficulties: The case of algebraic inequalities. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technologies – IJMEST*, v.32, 4, p.513-524, 2001.

TSAMIR, P; ALMOG N.; TIROSH D. Student's solutions of inequalities. THE INTERNATIONAL CONFERENCE OF PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION.1998. In: *Proceedings of PME XXII*, v.4, 1998. p.129-136.

TSAMIR, P; BAZZINI L. Can  $x=3$  be the solution of an inequality? A study of Italian and Israeli students. THE INTERNATIONAL CONFERENCE OF PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION.2001a. In: *Proceedings of PME XXV*, v.4. 2001a. p.303-310.

\_\_\_\_\_. Can  $x=3$  be the solution of an inequality? A study of Italian and Israeli students , *Educação Matemática Pesquisa*, p.57-66, 2001b.

\_\_\_\_\_. Algorithmic Models: Italian and Israeli student's solutions to algebraic inequalities. THE INTERNATIONAL CONFERENCE OF PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION.2002. In: *Proceedings of PME XXVI*,v.4.2002a. p.289-296.

\_\_\_\_\_. Student' algorithmic, formal and intuitive knowledge: the case of inequalities. In: *Proceedings of Second International Conference On The Teaching Of Mathematics – ICTM (at the Undergraduate Level )*. 2002b. Disponível em: <<http://www.math.uoc.gr/~ictm2/Proceedings>>. Acesso em: jul.2010

\_\_\_\_\_. Students solution to similarly structures inequalities. THE INTERNATIONAL CONFERENCE OF PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION.2003. In: *The International Conference of Psychology of Mathematics Education Proceedings - PME XXVII*, v.1. 2003a. p.258.

\_\_\_\_\_. Reducing similar inequalities with different solutions. MEDITERRANEAN CONFERENCE ON MATHEMATICAL EDUCATION - MCME. In: *Anais do 3rd MCME*, 2003b.

\_\_\_\_\_. Consistencies and Inconsistencies in student's solution to algebraic 'single-value' inequalities. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technologies- IJMEST* 35, p.973-812, 2004.

TSAMIR, P.; RESHEF, M. Student's preferences when solving quadratic inequalities. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, v.28.1, p.37-41, 2006.

TSAMIR P.; TIROSH D.; TIANO N. New Errors and old Errors: The Case Of Quadratic Inequalities. THE INTERNATIONAL CONFERENCE OF PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION.2004. In: *The Proceedings of PME XXVIII*, 1. 2004, p.155-158.

VAIYAVUTJAMAI, P. *Factors influencing the teaching and learning of equations and inequations in two government secondary schools in Thailand*. Tese de doutorado em Filosofia. Sultan Hassanah Bolkihah Institute of Education Universiti Brunei Darussalam, Tailândia, 2004.

VAIYAVUTJAMAI P.; CLEMENTS M. A. (Ken). Effects of classroom instruction on student performance on and understanding of linear equations and linear inequalities. *Mathematical Thinking Learning*, 8, p.113-147, 2006.

VANDYK, R. P. Expressions, equations, and inequalities. *The Mathematics Teacher*. Jan., p. 41-42, 1990.

VELOSO, W. P. *Metodologia do Trabalho Científico- Normas Técnicas para Redação de Trabalho Científico*. Curitiba: Juruá. 2011

VERGANUD, G. Teoria dos campos conceituais. In: *Anais do 1º Seminário Internacional de Educação Matemática*. Rio de Janeiro, p. 1-26, 1993.

VIRIKIOS, P.; FARMAKI, V. Introducing algebraic thinking to 13 year-old students: the case of inequality. THE INTERNATIONAL CONFERENCE OF PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION.2006. In: *Proceedings of PME XXX*, v. 5, 2006, p. 321-328.

VON GLASERSFELD, E. Anticipation in the constructivist theory of cognition. In: *Computing anticipatory systems*, p. 38-47, Woodbury, NY: American Institute of Physics, 1998.

WEBER, T. E. *Graphing technology and its effect on solving*. Tese de Doutorado. Wayne State University, Detroit, MIT. EUA, 1998.

### **Sites**

<http://www.math.uoc.gr/~ictm2/>

<http://sigmaa.maa.org/rume/Site/News.html>

[http://www.math.sjsu.edu/~rivera/SJSU/San\\_Jose\\_State\\_University.html](http://www.math.sjsu.edu/~rivera/SJSU/San_Jose_State_University.html)

[http://www.laurentian.ca/Laurentian/Home/Departments/School+of+Education+French/Faculty+and+Staff/Luis+Radford/luis\\_radford\\_index.htm?Laurentian\\_Lang=en-CA](http://www.laurentian.ca/Laurentian/Home/Departments/School+of+Education+French/Faculty+and+Staff/Luis+Radford/luis_radford_index.htm?Laurentian_Lang=en-CA)

<http://qualis.capes.gov.br/webqualis/>

<http://www.nctm.org/standards/content.aspx?id=4294967312>

<http://www.hindawi.com/journals/jia/>

---

## APÊNDICE I

### EXPRESSÕES DOS TEXTOS NA LÍNGUA ORIGINAL E A TRADUÇÃO EM PORTUGUÊS

- **Action, Process, Object e Schema - Ação, Processo, Objeto e Esquema.**
- *Algebraic thinking* – pensamento algébrico.
- *Algorithmic Models: Italian and Israeli student's solutions to algebraic inequalities* - modelos algorítmicos: soluções dos estudantes italianos e israelenses para inequações algébricas.
- *Between arithmetic and algebra: in the search of a missing link the case of equations and inequalities* - entre aritmética e álgebra: na busca do elo perdido: o caso das equações e inequações.
- *Characterizing student's thinking: algebraic, inequalities and equations* - caracterizando o pensamento dos estudantes: algébrico, equações e inequações.
- *Comportamenti* – comportamentos, procedimentos.
- *Comportamenti di studenti in ingresso all'università di fronte allo Studio di disequazioni* - procedimentos dos estudantes ingressantes na universidade frente ao estudo de inequações.
- *Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* – Congresso da Sociedade Europeia para Pesquisa em Educação Matemática.
- *Connaissances*- conhecimentos.
- *Consistencies and inconsistencies*- consistências e inconsistências.
- *Consistencies and inconsistencies in student's solution to algebraic 'single-value' Inequalities* – consistências e inconsistências nas soluções dos estudantes de inequações algébricas com uma 'única solução'.
- *Curriculum, curriculaire*- currículo, curricular.

- *De l'usage de "techniques faibles" et "techniques fortes" dans l'organisation du curriculum* - O uso de "técnicas fracas" e "técnicas fortes" na organização do currículo.
- *Didactics, didattiche, didactiques*- didáticas.
- *Educational Resources Information Center* – Centro de Informação de Recursos Educacionais.
- *Equations and inequalities – process without objects?*- Equações e inequações – processo sem objetos?
- *Graphing technology and its effect on solving inequalities* -Tecnologia gráfica e seus efeitos na resolução de inequações.
- *Inequalities and equations: history and didactics*- Inequações e equações: história e didáticas.
- *Inequalities in mathematics education: a need complementary perspectives*- Inequações na educação matemática: uma necessidade de perspectivas complementares.
- *Inéquations: aspects didactiques, épistémologiques et cognitifs* - Inequações: aspectos didáticos, epistemológicos e cognitivos.
- *Inequations resolution using various registers* – Resolução de inequações usando vários registros.
- *Journal of Inequalities and Applications*- Jornal de Inequações e Aplicações.
- *Le disequazioni tra procedure e relazioni: uno studio comparativo su studenti italiani e israeliani* – As inequações como procedimento e relações: um estudo comparativo entre estudantes italianos e israelenses.
- *Les inéquations en classe de seconde: une tentative pour enseigner la nécessité de énoncés mathémat*- As inequações em uma classe do 1º ano do ensino médio: uma tentativa de ensinar a necessidade dos enunciados matemáticos.
- *Les inéquations en classe de seconde et l'expérience de la necessite* – As inequações em uma classe do 1º ano do ensino médio e a experiência da necessidade.
- *Les inéquations fonctionnelles: lieu de développement et d'étude de la maîtrise des fonctions* - As inequações funcionais: lugar do desenvolvimento e estudo de para dominar as funções.
- *Mental act* - ação mental.
- *Mental Act of anticipating* - ação mental de antecipação.

- *Missing* – perdido, que falta.
- *Modelo di approccio* - modelo de abordagem.
- *National Council Teacher Mathematics* – Conselho Nacional de Professores de Matemática.
- *No answer as a problematic response: the case of inequalities* – Nenhuma resposta como uma resposta problemática: o caso das inequações.
- *Operational invariants* - Invariantes operacionais.
- *Presentazione di un modello di approccio alle disequazioni con ragazzi di 11-12 anni* - Apresentação de um modelo de abordagem às inequações com estudantes de 11-12 anos.
- *Problems related to the use of graphs in solving inequalities* – Problemas relacionados ao uso de gráficos na resolução de inequações.
- *Quali modelli e controlli intervengono lavorando su disequazioni?*- Quais modelos e controles intervêm no trabalho sobre inequações?
- *Research based instruction: widening students perspective when dealing with inequalities* – Instrução baseada em pesquisa: ampliando as perspectivas dos estudantes quando lidam com inequações.
- *Research in Undergraduate Mathematics Education Community* – Pesquisa na Comunidade de Educação Matemática Universitária.
- *Reveling and promoting the student's potential in Algebra: a case study concerning inequalities* – Revelando e promovendo o potencial do estudante em álgebra: um estudo de caso relativo às inequações.
- *Riflessioni didattiche sul concetto di equivalenza per equazioni e disequazioni* – Reflexões didáticas sobre o conceito de equivalência para equações e inequações.
- *Rules without reasons as process without objects: the case of equations and inequalities* – Regras sem razão como processos sem objeto: o caso de equações.
- *Séminaires Franco-Italien de Didactique de L'Algèbre* – Seminários Franco-Italianos de Didática da Álgebra.
- *Sociocultural account of students collective mathematical understanding of - polynomial in instrumented activity* – Relato sociocultural da compreensão matemática coletiva de estudantes sobre uma atividade.

- *Solving equations and inequations: operational invariants and methods constructed by students* – Resolvendo equações e inequações: invariantes operacionais e métodos construídos pelos estudantes.
- *Student' algorithmic, formal and intuitive knowledge: the case of inequalities* – Conhecimentos algorítmicos, formais e intuitivos dos estudantes: o caso de inequações.
- *Student's mental act of anticipating in solving problems involving algebraic inequalities and equation* - Ação mental de antecipação dos estudantes na solução de problemas envolvendo inequações e equações.
- *Student's potential* - potencial dos estudantes.
- *Student's preferences when solving quadratic inequalities* – Preferências dos estudantes quando resolvem inequações quadráticas.
- *Student's solutions of inequalities* – Resoluções de inequações pelos estudantes.
- *Student's understandings and misconceptions of algebraic inequalities*- Compreensões e concepções errôneas dos estudantes sobre inequações algébricas.
- *Students' strategies and difficulties: The case of algebraic inequalities* – Estratégias e dificuldades dos estudantes: o caso das inequações algébricas.
- *Teaching implications deriving from a comparative study on the instruction of algebraic inequalities* – Implicações de ensino que derivam de um estudo comparativo de inequações algébricas.
- *Techniques faibles et techniques fortes* - técnicas fracas e técnicas fortes.
- *Un planteamiento de resignificación de las desigualdades a partir de las prácticas didácticas del profesor. Un enfoque Socioepistemológico* – Uma apresentação de resignificação das desigualdades a partir das práticas didáticas do professor: um enfoque socioepistemológico.
- *Undergraduate student's conceptions of inequalities: sanding the lens* – Concepções de inequações de estudantes universitários: polindo as lentes.
- *Understanding* – compreensão.
- *Without* - sem.

---

## APÊNDICE II

### EXEMPLO DE LEGENDA UTILIZADA NA ORGANIZAÇÃO DOS DADOS EM TABELAS

e = equivalência	c (n,z,r, c) = conjunto numérico
f = funções	dd = dupla desigualdade
t = transformação	va = valor absoluto
eq = equação	PA = paramétricas
inq = inequação	Tr = inequação trigonométrica
d = desigualdade	EM = ensino médio
i = igualdade	R = resumo
P = produto	EF = ensino fundamental
Q = quociente	1° = inequação linear
R = que envolvem raízes	2° = inequação quadrática
Pol=inequações polinomiais de variados graus	3 ° = inequação cúbica