LUIS CARLOS BARBOSA DE OLIVEIRA

COMO FUNCIONAM OS RECURSOS-META EM AULA DE ÁLGEBRA LINEAR?

MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

PUC/SP

São Paulo

2005

LUIS CARLOS BARBOSA DE OLIVEIRA

COMO FUNCIONAM OS RECURSOS-META EM AULA DE ÁLGEBRA LINEAR?

*Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de **MESTRE EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**, sob a orientação da **Profa. Dra. Silvia Dias Alcântara Machado***

PUC/SP

São Paulo

2005

Banca Examinadora

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Dissertação por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: ______________________________ **Local e Data:** _______________

A minha esposa Monica, que me apoiou e sempre me incentivou na busca desta realização.

A minha filha Beatriz pelas horas de ausência e a suas avós que substituíram esses momentos.

AGRADECIMENTOS

A *Deus* por me iluminar e permitir que pudesse alcançar este objetivo.

A minha orientadora, *Professora Doutora Silvia Dias Alcântara Machado* pela experiência e sabedoria que compartilhou comigo durante toda a jornada, como aprendiz de pesquisador.

Aos professores da banca examinadora, *Professor Doutor Amarildo Melchiades da Silva* e *Professora Doutora Tânia Maria Mendonça Campos*, pelas valiosas contribuições oferecidas.

Ao *Professor Siqueira*, que permitiu observar as suas aulas e que forneceu muito material para análise.

A *CAPES*, pela ajuda financeira para concluir esta pesquisa.

A todos os *Professores do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP*, que me ajudaram a trilhar o duro caminho da pesquisa em Educação Matemática.

A *todos os meus amigos*, que de uma ou de outra maneira contribuíram para a realização deste projeto. Em especial, ao amigo Edson Arnaldo Mendes, que me encorajou a seguir por este caminho.

A *todos os funcionários da PUC-SP*, em especial, o meu amigo *Francisco Olimpio da Silva*, Secretário do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, por sua ajuda, em todos os momentos, por sua dedicação e por sua amizade.

À *UNINOVE*, instituição que me acolheu, e a todos os meus colegas professores dessa instituição. Em especial, ao coordenador Roberto Pepi Contieri, que acreditou na realização deste trabalho.

O Autor

RESUMO

Esta pesquisa teve como objetivo investigar os recursos-meta, utilizados por um professor de Álgebra Linear, em sala de aula, que ajudaram alguns de seus alunos na compreensão da noção de base. Para tanto, essas aulas foram assistidas e audiogravadas para se levantar e analisar os recursos-meta observados. A teoria utilizada na analise dos recursos-meta foi a Alavanca-Meta de Jean Luc Dorier e Aline Robert e os três princípios para o ensino e a aprendizagem de Guershon Harel. Elaborou-se um guia de entrevista semi-estruturada que foi aplicado em uma amostra de alunos participantes do estudo, com o intuito de observar se algum dos recursos selecionados tornou-se alavanca-meta aos alunos. Como resultado, constatou-se que apenas um dos recursos selecionados tornou-se alavanca-meta para a maioria dos alunos entrevistados.

Palavras-Chave: Álgebra Linear, Base, Recursos-meta, Alavanca-meta, Sala de aula, Entrevista.

ABSTRACT

This research aimed the investigation of the meta resources, used by a linear algebra professor in a classroom, helping his students to better understand the notions of basis. To achieve this, the classes were watched and recorded, in order to get and analyze the observed meta resources. The theory used in the meta resources analysis was the meta lever from Jean Luc Dorier and Aline Robert, and the three principles for teaching and learning from Guershon Harel. An interview guide was elaborated and applied in a sample of students who participated in the research, with the intention of evaluating if any of the selected resources would become a meta lever for the students. As a result, it was concluded that only one of the selected resources became a meta lever for most of the interviewed students.

Key-words: Linear Algebra; Basis; Meta resources; Meta Lever; Classroom; Interview

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Atualmente, a Álgebra Linear consta do currículo dos vários cursos das chamadas Ciências Exatas, como: Matemática, Engenharia, Física, Química, Ciências da Computação e outros.

Segundo Aline Robert, os conceitos da Álgebra Linear têm a característica de serem generalizadores, unificadores e simplificadores; estas características são responsáveis pelas dificuldades enfrentadas pelos alunos no ensino e aprendizagem de suas noções elementares, gerando um alto índice de reprovações, conforme pesquisas realizadas na Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP) (CELESTINO, 2000).

Um grupo de pesquisadores franceses, composto por Jean Luc Dorier, Aline Robert, Jacqueline Robinet e Mark Rogalsky sugere o emprego de metaconhecimentos matemáticos, passíveis de se tornarem "alavancas-meta", no ensino das noções elementares da Álgebra Linear, em sala de aula, tanto no discurso do professor como também em atividades bem planejadas.

Esta pesquisa visa a verificar se o professor utiliza, em sala de aula, recursos-meta que auxiliem os alunos na apreensão das noções elementares da Álgebra Linear, como: combinação linear, dependência e independência linear e base de um espaço vetorial, entre outros, e se esses recursos-meta tornaram-se alavancas-meta para alguns aos alunos do professor do estudo.

Assim, no capitulo I, apresentarei a problemática e o objetivo desta dissertação, o referencial teórico composto pela teoria da Alavanca-meta, desenvolvida pelo grupo de pesquisadores franceses e os três princípios do ensino e da aprendizagem de Guershon Harel, e também, a metodologia empregada para elaborar este trabalho de pesquisa.

No capitulo II, mostrarei a análise das transcrições das fitas utilizadas para gravar as aulas do professor de Álgebra Linear, nas quais serão destacados os recursos-meta utilizados pelo professor, passíveis de se tornarem alavancas-meta para seus alunos.

No capitulo III, serão apresentados o guia de entrevista, usado para entrevistar os alunos que assistiram às aulas do professor e a análise dessas entrevistas realizadas com esses alunos.

No capitulo IV, será apresenta a conclusão da pesquisa, destacando alguns dos recursos-meta utilizados pelo professor e quais se tornaram alavancas-meta para estes alunos e as considerações finais que podem ser observadas no decorrer do estudo.

CAPÍTULO I

Problemática e Quadro Teórico

Problemática

Em 2000, comecei a lecionar Geometria Analítica e Álgebra Linear no curso de Engenharia e pude perceber a grande dificuldade apresentada pelos alunos na aprendizagem das noções elementares da Álgebra Linear.

A princípio imaginei que a forma pela qual conduzia minhas aulas, poderia ser a causa dessas dificuldades e, assim, decidi estudar os problemas no ensino e aprendizagem da Matemática e, em especial, da Álgebra Linear.

Sabendo que a PUC-SP tinha um Programa de Estudos Pós-graduados em Educação Matemática, fui conhecer melhor esse programa e verifiquei que algumas pesquisas sobre Álgebra Linear já tinham sido levadas a cabo pelos pesquisadores do Programa.

Assim, após ter ingressado no Programa de Educação Matemática da PUC-SP, com meus colegas de turma, fui conhecer os grupos de pesquisa existentes e fiquei atraído pela proposta do grupo de estudos, cujo principal interesse de pesquisa versava sobre as questões educacionais ligadas à Álgebra. Nesse grupo, havia um projeto de pesquisa, que tinha como objetivo investigar os recursos-meta utilizados no desenvolvimento da noção de base de um espaço vetorial. O projeto era coordenado por Silvia Machado e intitulava-se “Sobre o desenvolvimento da noção de base de um espaço vetorial”,

Procurei a professora Silvia Machado e expus meu interesse em aprofundar os conhecimentos a respeito das dificuldades demonstradas pelos alunos com a aprendizagem das noções elementares da Álgebra Linear.

Em agosto de 2002, integrei-me ao grupo de pesquisa e passei a estudar alguns trabalhos relacionados com o projeto citado, como o de Claudia Araújo, já concluído, cujo objetivo era verificar a existência de recursos-meta nos livros didáticos usados nas principais universidades paulistas e o de Zoraide Padredi, em andamento, cujo objetivo era verificar se o professor, fora da sala de aula, citava recursos-meta, ao dissertar sobre a noção de base.

Pautado nos estudos que realizei a respeito do assunto, passei a me inteirar de outras investigações que tratavam de assuntos correlatos ao projeto, como a dissertação de mestrado de Marco Roberto Celestino que teve por objetivo apresentar um panorama das pesquisas brasileiras realizadas na década de 90, do século XX, sobre o ensino e a aprendizagem da Álgebra Linear. Por meio dessa leitura, verifiquei a existência de apenas seis trabalhos sobre o tema, quatro deles eram de Marlene Dias, um de Amarildo M. Silva e um de Rute Silva.

Dos trabalhos citados por Celestino (2000), a dissertação de Silva (1997) denominada "Uma análise da produção de significados para a noção de Base em Álgebra Linear" interessou-me por causa do título. Seu objetivo era explicitar alguns modos de produção de significados para a noção de base e para tanto o autor apoiou-se no Modelo Teórico dos Campos Semânticos (MTCS), teoria desenvolvida por Rômulo Lins. Dentre os resultados obtidos, Silva (1997) concluiu que os matemáticos, assim como os estudantes produzem significados distintos para esta noção. Por meio dessa conclusão, é possível explicar o desempenho insuficiente de um estudante, ao ser avaliado por um instrumento que não contenha elementos do campo semântico por ele construído para as noções envolvidas em suas questões.

Após constatar a existência de poucos trabalhos brasileiros a respeito do tema, procurei por investigações internacionais de Educação Matemática sobre a Álgebra Linear.

Verifiquei a existência de alguns estudos sobre o tema, investigados desde a década de 1980, por um grupo francês composto por pesquisadores da Didática da Matemática, como Jean Luc Dorier, Aline Robert, Jacqueline Robinet e Marc Rogalski, entre outros que chamarei de grupo francês.

Dentre essas pesquisas, há um levantamento feito sobre as principais dificuldades encontradas pelos estudantes franceses do primeiro ano da universidade. O resultado apontou que a forma axiomática utilizada para tratar as primeiras noções da Álgebra Linear, como espaço vetorial e base, causa no aluno uma sensação de fracasso que o impede de avançar no aprendizado.

Estas dificuldades são significativas por serem apresentadas por um número considerável de estudantes, conforme se pode depreender do que Marc Rogalski observou em um trabalho, cujo título é *Pourquoi un tel echec de l'enseignement de l'algèbre linéaire?*, quando afirma que:

> Sem dúvida, não existe na França, um primeiro ciclo universitário, onde os professores não constatem o fracasso do ensino tradicional da álgebra linear. (ROGALSKI, 1990, p 279)

Dorier (2002) apud Dorier et al (2002), argumenta que os alunos sentem-se oprimidos pelo elevado número de novas definições e pela falta de conexão com os conhecimentos anteriores, o que provoca neles uma sensação de estranhez: "Os estudantes usualmente sentem que estão aterrissando em outro planeta" (Dorier, 2002)

Procurei também estudos que apontassem as dificuldades enfrentadas pelos alunos quando da aprendizagem da Álgebra Linear e constatei que a primeira parte do livro *L'enseignement de l'Algèbre Linéaire en Question*, resultado da tese de doutorado de Jean Luc Dorier, apresenta em um dos capítulos um estudo bastante aprofundado, sobre a gênese da teoria dos espaços vetoriais. Esta pesquisa, de natureza epistemológica, analisa criticamente a evolução da Álgebra Linear desde os primeiros estudos sobre resolução de equações lineares até a teoria moderna dos espaços vetoriais. Na conclusão da parte do livro que trata do tema, o autor afirma:

> (...) a teoria dos espaços vetoriais representa naturalmente o bom ponto de vista para abordar os problemas de linearidade. A utilidade das estruturas algébricas não está mais em discussão, tanto este ponto de vista já mostrou a sua eficácia como também já faz parte da cultura matemática. (DORIER, 1997, p 101)

Além disso, o trabalho mostra que as dificuldades dos alunos com o aprendizado da Álgebra Linear revelam um obstáculo epistemológico, pois essas dificuldades são do mesmo tipo daquelas enfrentadas por sucessivas gerações de estudiosos no desenvolvimento dessa estrutura, isto é, a criação de uma forma axiomática e a utilização de uma notação própria para facilitar a manipulação matemática que ele denominou de **obstáculo do formalismo**. (grifo meu)

No livro acima, Dorier constatou que as estruturas algébricas, além de serem eficazes, já fazem parte da cultura matemática. Além disso, as noções elementares relacionadas com as estruturas dos espaços vetoriais são vistas pelos professores, como simples e eficientes. Esta constatação sempre gera uma certa confusão entre eles, pois não compreendem porque determinados estudantes sentem dificuldade na compreensão dessas noções. As explicações possíveis dos professores para tal problemática são de duas ordens: de um lado, a falta de prática com ferramentas do formalismo (linguagem formal, teoria dos conjuntos, geometria e lógica); por outro lado, a carência de conhecimentos sobre geometria e resolução de equações lineares.

Diante dos resultados, Dorier sugeriu que dois eixos de pesquisa deveriam ser perseguidos pelos pesquisadores do assunto:

> Dois grandes eixos de pesquisa parecem se destacar para o futuro imediato: o prosseguimento das pesquisas sobre a utilização da alavanca meta e sobre a avaliação de seus efeitos reais sobre a aprendizagem, e a análise das ligações entre os aspectos semióticos (gestão e conversão

> das representações) e os aspectos mais conceituais da aprendizagem em álgebra linear. (DORIER et al, 1997, p. 296)

O autor esclareceu que o significado da expressão alavanca-meta, no ensino diz respeito ao uso de informações ou conhecimentos sobre a Matemática, pois são recursos-meta que podem fazer os alunos refletirem sobre suas atividades. Se estes recursos-meta ajudarem os alunos na compreensão dos conceitos evidenciados, então, eles passarão a ser alavancas-meta para tais alunos. O tema alavanca-meta será mais aprofundado na apresentação do quadro teórico.

A preocupação com o ensino de Álgebra Linear não é exclusividade de pesquisadores franceses. No capítulo *Three Principles of Learning and Teaching Mathematics*, de autoria de Guershon Harel, que faz parte do livro *On the Teaching of Linear Algebra*, editado por Jean Luc Dorier, Harel descreve que, em 1990, nos Estados Unidos da América (EUA), foi formado um grupo de professores de vários departamentos de Matemática de diferentes universidades, denominado Linear Algebra Curriculum Study Group (LACSG), do qual ele fazia parte e cujo objetivo era encaminhar propostas relativas ao ensino e aprendizagem da Álgebra Linear.

Este grupo gerou um conjunto de recomendações para um primeiro curso de Álgebra Linear. Em seguida, houve numerosos encontros nacionais e vários livros didáticos foram escritos com base nessas recomendações.

No capítulo já citado, Harel apresenta sua interpretação sobre as recomendações elaboradas pelo LACSG. O autor divide estas recomendações, de acordo com três princípios básicos: o princípio da concretização, da necessidade e da generalização, que serão abordados de forma detalhada no item relativo ao quadro teórico.

Portanto, após este breve relato sobre alguns dos pesquisadores que se dedicaram ao assunto, pode-se constatar que, mundialmente, existe uma preocupação com o ensino e aprendizagem de Álgebra Linear.

De volta ao projeto, onde esta pesquisa encontra-se inserida, gostaria de colocar o leitor a par de alguns fatos. O presente projeto iniciou-se com a investigação de Cláudia Araújo, que analisou livros didáticos de Álgebra Linear em busca da existência de recursos-meta na abordagem de base e concluiu que, embora os prefácios dos livros analisados apresentassem indícios da existência de recursos-meta no conteúdo dos textos, no discorrer deles aparecem poucos recursos-meta com possibilidade de se tornarem alavancas-meta.

Zoraide Padredi encarregou-se de investigar a existência de recursos-meta no discurso do professor de Álgebra Linear, para tal entrevistou seis professores, onde tive a oportunidade de acompanhar duas dessas entrevistas, como auxiliar de pesquisa. Nestas observei que os professores discorreram sobre a forma de desenvolver a noção de base em sala de aula, sugerindo analogias e atividades, que julguei interessantes para facilitar a compreensão de algumas das noções elementares de Álgebra Linear.

Dentre as conclusões, Padredi explicita que os professores entrevistados sugeriram recursos-meta como analogias para facilitar a compreensão da noção de base e destacaram a noção de base como, prioritária, em um primeiro curso de Álgebra Linear.

As pesquisas realizadas por Araújo e Padredi responderam às primeiras questões do projeto que tratavam do emprego de recursos-meta, nos textos de livros didáticos de Álgebra Linear, utilizados nas principais universidades paulistas e no discurso do professor, fora da sala de aula, ao discorrer sobre a noção de base de um espaço vetorial. Assim, apesar da existência de poucos recursos-meta presentes em livros didáticos, constatamos que os professores fora da sala de aula revelam muitos recursos-meta, capazes de se tornarem alavancas-meta na aprendizagem da noção de base.

Os resultados apontados nos trabalhos das duas colegas de projeto levantaram a seguinte questão: quais dos recursos-meta, utilizados pelo professor em sala de aula, tiveram efeito de alavanca-meta para seus alunos?

Assim, encarreguei-me de tentar responder à questão. Durante a elaboração do projeto de pesquisa, reformulei esta questão em duas novas subquestões:

- Quais recursos-meta o professor utiliza, em sala de aula, ao desenvolver a noção de base na disciplina de Álgebra Linear?
- Qual o impacto desses recursos-meta, na compreensão do aluno sobre a noção de base?

Desse modo, estas questões levaram-me a explicitar o objetivo da pesquisa: investigar quais os recursos-meta que são utilizados pelo professor de Álgebra Linear ao desenvolver a noção de base de um espaço vetorial, têm efeito de alavanca-meta para seus alunos.

Quadro teórico

Para fundamentar minha investigação, utilizei sobretudo, as pesquisas do grupo de investigadores franceses composto por Jean Luc Dorier, Aline Robert, Jacqueline Robinet e Marc Rogalski, que passo a chamar de "grupo francês".

Dentre os resultados deste grupo, encontrados em *L'Enseignement de l'Algèbre Linéaire en Question*[1] (DORIER et al, 1997), ressalto o fato de que não foi encontrada nenhuma situação-problema que o aluno possa se defrontar em um primeiro curso de Álgebra Linear que dê origem ao desenvolvimento de noções elementares. As situações-problema existentes ou são complexas e exigem do aluno um conhecimento ainda não adquirido ou são tão elementares que ele pode resolvê-las sem o emprego dos conhecimentos de Álgebra Linear.

Desse modo, algumas situações-problema que poderiam dar oportunidade para o desenvolvimento da noção de base, por exemplo, seriam as que envolvem diagonalização de operadores ou classificação das cônicas, que são problemas intramatemáticos, ou ainda, problemas de genética, como a propagação de traços hereditários em gerações sucessivas que são extramatemáticos. No entanto,

[1] "O ensino da Álgebra Linear em Questão" - tradução do autor.

ambas as situações necessitam do conhecimento de autovalores e autovetores, assunto este desenvolvido, em geral, no final do curso de Álgebra Linear.

A não existência de situações-problema adequadas ao desenvolvimento das noções elementares de Álgebra Linear levou os citados pesquisadores franceses a defenderem a utilização de recursos-meta, em sala de aula, seja no discurso do professor ou em atividades cuidadosamente elaboradas, para facilitar a compreensão dos alunos sobre essas noções, fazendo-os refletir a respeito dos objetos matemáticos em questão.

Recursos-Meta e Alavanca-Meta: Como se deu a idéia?

Robert e Robinet (1993) no artigo *Prise en Compte du Méta en Didactique des Mathématiques*[2], dão conta das primeiras abordagens sobre a utilização do termo "meta", pois relatam que os professores, em sala de aula, usam em seu discurso naturalmente e sem perceber elementos que dizem respeito ao conhecimento e **sobre** o conhecimento de um dado assunto que denominaram de metaconhecimentos.

Dadas as inúmeras mudanças sofridas pelo termo metaconhecimento matemático, durante os anos que seguiram, nosso grupo de pesquisa decidiu utilizar o termo **recurso-meta** para se referir àquilo que, ao longo do tempo, foi chamado de metamatemática, metaconhecimento matemático e meta, simplesmente.

As autoras citadas argumentam que, durante as aulas, os professores costumam permear seus discursos com perguntas como "vocês compreenderam?" e "como se faz?", que estão, freqüentemente, inseridas em seus discursos em sala de aula, sem que percebam. Quando o professor expõe conhecimentos em sala de aula, é levado a rechear seu discurso estritamente matemático com frases que se relacionam, mas, sem conter, necessariamente, informações estritamente matemáticas. Exemplificando:

---

[2] “A consideração dos Recursos-Meta em Didática da Matemática”, tradução do autor.

> ... o professor pode falar de maneira qualitativa dos conhecimentos que ele está prestes a descontextualizar, ele pode explicar para o que eles servem, como utilizá-los, ele pode citar os erros freqüentes que causam... Há lá todo um discurso sobre matemática, por isso, mais ou menos importante, mais ou menos difuso, mais ou menos explícito como tal, que nós classificamos como discurso meta enquanto discurso sobre a matemática, precisamente. (ROBERT e ROBINET, 1993 p. 1)

As autoras ainda estabeleceram que o termo meta com as palavras cognição ou cognitivo ou conhecimento anunciam, a grosso modo, a metacognição, explicitando que:

> (...) utilizaremos o prefixo "meta", antes das palavras conhecimentos, ou cognitivo ou cognição para designar elementos de informação ou de conhecimentos SOBRE a matemática, sobre o seu funcionamento, sobre a sua utilização, sejam eles gerais ou realmente ligados a um domínio específico. (ROBERT e ROBINET, 1993, p. 17)

Assim, é importante perceber que, no ensino da Matemática, a distinção entre Matemática e "meta" (matemática) não é absoluta, pois reconhecer o caráter "meta" de certos conhecimentos depende dos conhecimentos anteriores do aluno exposto a essas noções. (ROBERT e ROBINET, 1993)

Retomando o termo “recurso-meta”, neste trabalho, chamarei de recursos-meta as informações ou conhecimentos **sobre** a Matemática a ser aprendida que podem envolver as operações matemáticas, seu uso e a própria aprendizagem da Matemática.

Os recursos-meta podem fazer os alunos refletir sobre os objetos matemáticos de Álgebra Linear, que estão sendo evidenciados. Em termos mais precisos, os recursos-meta significam:

> (...) informação que diz respeito ao que constitui o conhecimento matemático (métodos, estruturas, (re)organização). Os métodos são definidos como os procedimentos aplicáveis a um conjunto de problemas semelhantes em um dado campo: os métodos designam aquilo que há de comum à resolução de problema e não à própria técnica (o algoritmo). Isto

> implica uma certa classificação de problemas a resolver e a identificação das técnicas e ferramentas disponíveis. (DORIER et al, 2000, p. 151)

Os métodos são os procedimentos aplicados a um conjunto de problemas semelhantes. A organização e a reorganização referem-se à construção de novos esquemas cognitivos, com base naqueles já internalizados.

As informações contidas nas operações matemáticas também são consideradas recursos-meta, conforme trecho em destaque:

> (...) informação que diz respeito ao que constitui uma operação matemática: por exemplo, informação sobre o papel da interação de domínios na resolução de problemas (cf. abaixo), o papel dos questionamentos, exemplos e contra-exemplos, o papel da identificação dos parâmetros numa questão matemática, o papel da validação, etc. (DORIER et al, 2000, p. 151)

A interação de domínios, nova denominação para aquilo que Régine Douady chamou de “jeux de quadre” (jogo de quadros), no início de sua teorização, é uma das operações matemáticas muito utilizada pelos especialistas em Matemática para resolver problemas. Este recurso-meta pode auxiliar o aluno quando da solução de um problema.

Ao explicar o que Régine Douady entende por interação de domínios, Cristina Maranhão esclarece que, é um meio de se obter diferentes formulações de um dado problema, permitindo uma nova visão das dificuldades encontradas e, assim, disponibilizar ferramentas e técnicas para resolver a primeira formulação. Em termos mais precisos, se os conhecimentos de um certo domínio que podem ser seus conceitos, suas propriedades e até os procedimentos matemáticos que não são suficientes para avançar em uma dada situação, ou problema, o aluno deverá lançar mão dos conhecimentos de outros domínios. (MARANHÃO, 1999)

O professor pode apresentar um problema em um determinado domínio (no numérico ou no geométrico, ou no algébrico, ou das grandezas...) e, perceber que no domínio apresentado, por exemplo no algébrico, na tentativa de resolver o problema torna a solução de difícil encaminhamento, então, ele interpreta o problema em outro domínio, por exemplo, no geométrico, domínio esse, em que pode ser mais fácil perceber a solução. Assim, encaminhada a solução, ele voltará ao domínio anterior para efetivamente apresentar a solução.

Como exemplo desse recurso-meta, apresentarei o recurso utilizado por Rogalski, em seu artigo sobre o experimento de ensino de Álgebra Linear realizado em Lille, conforme abaixo:

> (...) identificar a equação linear $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = 0$ com o vetor do R^n $(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n)$ e passar da prática das combinações lineares das equações para a noção de posto de uma família de vetores (...) (ROGALSKI,1997, p. 165)

A questão dos exemplos e contra-exemplos diz respeito não só a apresentação deles em uma institucionalização de noções estudadas, mas, sobretudo, à forma da elaboração de questões em atividades propostas aos alunos que levem em conta o questionamento de situações, em que apareçam casos de exemplos da noção estudada como casos em que esta noção não pode ser verificada.

A questão da validação, diz respeito à capacitação do aluno verificar se sua resolução está correta. Esta operação matemática é a que mais contribui para a autonomia do aluno.

Naturalmente, Dorier não esgotou todos os tipos de recursos-meta no ensino de Matemática. A seguir, lembramos alguns dos outros recursos.

A dialética antigo-novo, utilizada pelo professor ao generalizar ou estender uma certa noção (antigo para o novo), ou buscar exemplos de uma noção em conhecimentos adquiridos anteriormente (novo para antigo) é considerada um recurso-meta.

Esta dialética é usada para descrever as fases da dialética ferramenta-objeto, teoria desenvolvida por Régine Douady. No artigo, "Dialética-Ferramenta-

Objeto", de autoria de Cristina Maranhão, ela explica o funcionamento da teoria e esclarece que ele passa por quatro fases.

> "Na primeira fase, chamada de antigo, o aluno mobiliza conhecimentos antigos para resolver, ao menos em parte, seu problema" (MARANHÃO, 1999, p. 116)

Maranhão esclarece que, nesta fase, os conhecimentos antigos são objetos matemáticos para os alunos que funcionam como ferramenta na busca de novos conhecimentos matemáticos por meio de problemas adequados que precisam envolver, pelo menos, dois domínios, de modo que um forneça referências ao outro e possibilitem meios de validação.

Na segunda fase, os alunos precisam lançar mão de novos conhecimentos, quando encontram dificuldade para resolver o problema proposto, completamente.

> Na segunda fase, chamada de pesquisa, os alunos encontram dificuldade de resolver completamente o problema e são conduzidos a colocar em jogo novos conhecimentos que são implícitos. (MARANHÃO, 1999, p. 117)

Na terceira fase, o professor realiza um debate sobre os conhecimentos antigos utilizados e os novos que foram criados, por meio da formulação das idéias dos alunos que são validadas ou refutadas.

> Em uma terceira fase, chamada de explicitação, os alunos descrevem o que obtiveram em seu trabalho, as dificuldades, os resultados obtidos. (MARANHÃO, 1999, p. 117)

Nas quarta e última fases, os alunos formulam propriedades, procedimentos e até conceitos do novo conhecimento matemático.

> Na quarta fase, chamada de novo implícito, pode ocorrer que certos elementos sejam formulados pelos alunos, como objetos do conhecimento matemático (conceitos, propriedades ou procedimentos), com sua condição de emprego no momento. (MARANHÃO, 1999, p. 118)

Outro recurso-meta é encontrado quando os professores, em seu discurso, costumam enfatizar que certos conhecimentos são importantes para a compreensão de uma nova noção. Frases como “esta noção é muito importante, pois vocês a utilizarão em ‘tal’ disciplina ou ‘situação’”, podem fazer os alunos refletirem sobre importância da noção.

O recurso-meta de fornecer informações sobre a natureza das noções a serem introduzidas, foi utilizado por todos os professores entrevistados por Padredi para relacionar as noções da Álgebra Linear com as de outras disciplinas e, até mesmo, com as noções da própria Álgebra Linear.

Outro recurso-meta empregado pelo professor ao discorrer sobre uma dada noção é comentar com os alunos os erros que comumente acontecem.

Os recursos-meta podem levar os alunos a refletirem sobre seus conhecimentos matemáticos, quando estiverem envolvidos em atividades adequadamente planejadas pelo professor ou, até mesmo, quando o professor estiver falando com eles, interrogando a si próprio e aos alunos, apontando seus erros, de modo a criar um cenário, no qual os alunos possam se questionar durante a resolução da atividade ou quando da devolução dos questionamentos do professor.

> De uma perspectiva interacionista (veja Vygotski, por exemplo), tais reflexões (sugeridas por recursos-meta)[3] podem promover maior comunicação entre os estudantes do que a própria matemática e pode dar-lhes a oportunidade de um envolvimento mais ativo com o próprio aprendizado. Estas reflexões são elementos sobre o conhecimento matemático, já que resolver um problema é: atuar sobre o conhecimento matemático. Esta forma de “ação ajuda” pode ser particularmente interessante para o estudante se os capacita a ver como certos conhecimentos podem ser reutilizados, ou reciclados, em diferentes situações, economizando assim energia e tempo deles. (DORIER et al, 2000, p. 153)

[3] explicação inserida pelo autor

Os alunos, ao iniciarem um primeiro curso de Álgebra Linear, já possuem conhecimentos adquiridos anteriormente em outras situações de ensino. Por exemplo, muitos afirmam que quatro vetores do espaço (R^3) são sempre linearmente dependentes, resultado veiculado em curso de cálculo vetorial são tratados, antes de Álgebra Linear.

Para que esses alunos compreendam o significado da dependência linear, agora em qualquer espaço vetorial, será necessário que eles percebam que aquele resultado está restrito ao R^3 ou a espaços vetoriais de dimensão 3. Assim, é preciso criar situações, intervenções que tornem explícitas a não adequação de tal resultado de cálculo vetorial nos espaços vetoriais, em geral. Dorier, apoiado na teoria de Piaget, considera que:

> De uma perspectiva construtivista (no sentido amplo do termo) nós queremos saber se estas intervenções não contribuem para um certo desequilibro, um desequilibro dinâmico entre metaconhecimento e conhecimento. Se o desequilibro é muito grande nada acontece, mas se ele é pequeno o suficiente, os estudantes são ajudados a dar o primeiro passo no desconhecido. (DORIER, 2000, p. 153)

O autor citado esclarece que, do ponto de vista de "passar do velho para o novo conhecimento", os recursos-meta podem atuar no papel de tornar explícito o que é esperado dos alunos, isto é, os recursos-meta ligados aos conteúdos pedagógicos podem ajudar os alunos quando uma mudança de ponto de vista for necessária. Para o autor citado, essa ajuda atuaria no sentido de auxiliar os estudantes a fazer relações ou previsões, pois estes recursos podem prevenir a dispersão das idéias, funcionando como uma ponte entre velho e novo conhecimento.

Para o grupo francês, a distinção entre Matemática e recursos-meta no ensino não é considerada absoluta, ou seja, reconhecer o caráter meta de certos conhecimentos depende das experiências anteriores dos estudantes confrontadas com o novo conhecimento. Isto significa que, se por um lado, um recurso-meta pode auxiliar a compreensão de um aluno sobre um certo objeto matemático, por outro lado, pode acontecer dele não contribuir para a compreensão de um outro aluno.

Mas afinal, o que é uma alavanca-meta?

Neste estudo, chamarei de alavanca-meta todo recurso-meta utilizado pelo professor que contribua para o aprendizado da noção matemática evidenciada. O sentido da palavra alavanca é facilitar, estimular e, até mesmo, elevar a uma posição de destaque o novo conhecimento adquirido.

Assim, se um dado recurso-meta contribuiu para que algum aluno se apropriasse do conhecimento que estava sendo ensinado, então, esse recurso-meta passa a ter estatuto de alavanca-meta para aquele aluno.

Dorier acredita que os recursos-meta podem ser considerados uma interface explícita entre os estudantes e a Matemática a ser aprendida. Eles funcionam como uma ponte ou uma rampa entre o velho e o novo conhecimento. Por meio de uma analogia, o autor explica que um recurso-meta assemelha-se a um fertilizante, pois, sozinho, ele não serve para qualquer propósito, mas desde que seja aplicado corretamente, chova o suficiente e a terra seja bem preparada, estimula o crescimento de certas sementes.

Ele admite, contudo, que existem certas restrições na forma em que determinados recursos-meta podem ser eficientemente utilizados no ensino. Para Dorier, os recursos-meta só contribuem para o processo do aprendizado se forem transmitidos corretamente, até um momento propício e dentro de atividades apropriadas.

Às vezes, os professores utilizam intervenções muito artificiais em justaposição com o resto do ensino, e o resultado final acaba sendo que os estudantes precisam aprender mais fórmulas, sem acrescentar algo a mais na aquisição do novo conhecimento.

O grupo francês esclarece que as intervenções por meio dos recursos-meta, às vezes, são muito artificiais em relação ao resto do ensino, e o resultado final faz com que o estudante seja obrigado a enfrentar outros conhecimentos, às vezes, mais complicados, que não acrescentam nada a mais na aquisição do conhecimento objetivado. Para eles, o uso de alavancas-meta significa a intervenção explicita do professor, na qual sua natureza específica deve ser explicada ao estudante.

Aqui aparece um paradoxo: a idéia de alavanca-meta quando colocada em prática no ensino de certos conteúdos pode tornar este aprendizado mais difícil, pois requer reflexões não usuais, cujo objetivo é permitir que mais estudantes aprendam os conteúdos em questão.

Para o grupo francês, a origem desse paradoxo pode ser encontrada na seguinte hipótese: os estudantes podem precisar fazer um desvio de suas práticas matemáticas e engajarem-se em certas reflexões que contribuam para o enriquecimento de suas representações matemáticas, para que suas práticas tornem-se mais compatíveis com o resultado desejado da atividade do recurso-meta utilizado.

Sob a perspectiva de longo prazo, mais abrangente, esse grupo alerta para o fato de que o ensino somente pode ser concebido se, após um dado período de tempo, forem constatadas mudanças nos hábitos dos estudantes. Além disso, este ensino inclui “dar e receber” entre a intervenção do professor e a ação do estudante e não pode acontecer rapidamente ou provocar resultados imediatos.

Conforme o grupo francês, o objetivo da utilização de recursos-meta não é o de reproduzir o comportamento do especialista em Matemática "pura", mas tornar a Matemática mais fácil de se aprender para um maior número de estudantes. Por outro lado, ele acredita que alguns aspectos do comportamento do especialista podem inspirar a elaboração de recursos-meta ao ensino e à aprendizagem da Matemática.

O grupo realizou uma análise do comportamento de um especialista na resolução de um problema ainda não resolvido, para verificar se havia elementos exportáveis para uma situação de sala de aula. Concluiu que a atividade do especialista é da mesma natureza que a dos estudantes, exceto que o especialista é mais confiante, possui muito mais conhecimento, mais referências, mais experiência que o estudante. Isto faz com que este avance rapidamente, com atalhos, verificações e tomadas de decisões estratégicas quase automáticas. E leva a concluir que seria benéfico aos estudantes trazer, mesmo que artificial e parcial, as informações prévias que o especialista utiliza quando confrontado com um problema.

O grupo francês considera que parte do trabalho do pesquisador em Educação Matemática consiste em buscar para um determinado grupo de estudantes, quais os métodos de resolução de problemas ensinar, quais verificações encorajar e quais reflexos automáticos devem ser adquiridos, ou seja, o trabalho do pesquisador consiste em planejar atividades matemáticas bem escolhidas para estimular reflexões sobre a natureza de certos conceitos.

No entanto, as características da utilização de recursos-meta são difíceis de diagnosticar: elas são imprecisas e variam de situação para situação. Quando estão presentes no ensino, são transmitidas indiretamente, em geral, oralmente, e não são avaliados de modo direto.

> Parece, então, que embora a introdução de recursos-meta, no ensino, seja possível em álgebra linear, mesmo que tais cenários sejam facilmente imaginados e possam até mesmo, ser ajustados sem dificuldade, seus efeitos são difíceis de ser testados. Em outras palavras, a avaliação dos efeitos desses recursos permanece problemática, tanto em medir seu impacto quanto na metodologia desta avaliação. (DORIER et al, 2000, p. 173)

A respeito das dificuldades na avaliação dos efeitos de um recurso-meta na compreensão do aluno, Marlene Dias, participante como observadora de uma das pesquisas realizadas pelo grupo francês, acrescenta o fato de que um recurso-meta por ser transmitido oralmente, em geral, não é registrado pelos alunos em seus apontamentos, tornando ainda mais difícil avaliar seu uso e efeito no ensino.

Se por um lado, os membros do grupo do projeto, no qual estou inserido, conheciam as dificuldades apresentadas na tentativa de discernir se um dado recurso-meta teve efeito de alavanca-meta para algum aluno, por outro lado, reconheço o fato de que este é um dos poucos veios de pesquisa para o ensino e aprendizagem da Álgebra Linear, em razão dos fatos já apontados.

Assim, na busca de recursos-meta para a introdução da noção de base de um espaço vetorial, torna-se pertinente descrever os principais resultados das pesquisas já realizadas pelo grupo a que pertenço e que, de algum modo, precederam e possibilitaram minha questão de pesquisa.

Dentre suas conclusões, Araújo observa que:

> ...embora em todos os três livros tenha sido possível destacar várias situações em que os autores tiveram oportunidade de criar condições para que seu discurso metamatemático funcionasse como uma alavanca-meta, poucas oportunidades foram aproveitadas ou aprofundadas. (ARAÚJO, 2002, p. 86)

Araújo também destaca os recursos-meta que encontrou nos três livros analisados, expostos no quadro abaixo:

> Em dois dos três livros, encontrei somente um trecho de metamatemática que poderia funcionar como alavanca meta. Em L1, quando os autores introduzem espaço vetorial, comparando características de dois conjuntos aparentemente distintos para mostrar que, apesar disso, possuem uma mesma estrutura algébrica. Em L2, quando após a definição de dependência linear, os autores mostram a equivalência entre as operações de adição e multiplicação por escalar dos vetores representados por segmentos orientados e a mesmas operações algébricas no espaço vetorial real $\mathbf{R}^3$. Em L3, foi possível identificar duas oportunidades de um discurso metamatemático passível de se constituir em alavanca meta: a utilização do termo vetor supérfluo na abordagem da noção de dependência linear ajudando o aluno a perceber a vantagem de utilizar conjuntos mais econômicos e a utilização de exemplos e **contra-exemplos.** (ARAÚJO, 2002, p. 85-86) (grifo do autor citado)

A seguir, aparecem descritas partes das conclusões de Padredi que ressaltam que os professores utilizam analogias para introduzir as noções elementares da Álgebra Linear, como as expostas, a seguir:

> A utilização de uma forma coloquial para a introdução de noções como a de base e de outras que estão intrinsecamente ligadas a essa foi exemplificada através de analogias: "vetores bem comportados", "grau de

> liberdade", "colchinha de crochê", "ambiente", "lucro", "economia", "tijolos", "parede". Estas analogias podem se tornar alavancas-meta para o ensino/aprendizagem de algumas noções e idéias de Álgebra Linear. (PADREDI, 2003, p. 117)

Para Padredi, a noção de base foi destacada, pela maioria dos professores como prioritária, em um primeiro curso de Álgebra Linear, como já havíamos comentado acima, a autora destaca que a noção foi abordada pelos professores, de três maneiras diferentes, conforme quadro abaixo:

> Surgiram três abordagens diferentes dessa noção no discurso dos professores: como um sistema de geradores minimal, como um sistema maximal linearmente independente e como uma justaposição de um sistema de geradores como um conjunto linearmente independente. (PADREDI, 2003, p. 117)

Padredi também constata que os professores utilizam como recursos-meta dar ênfase nas operações de adição e multiplicação por escalar, de maneira a caracterizar um elemento genérico de um espaço vetorial, de acordo com o seguinte trecho:

> Outra possível alavanca-meta é o recurso de se enfatizar as operações adição e multiplicação por escalar, como as ferramentas que estão inerentes à de espaço vetorial e que bastam para caracterizar um elemento genérico do espaço vetorial através de um número finito de vetores "bem comportados" desse espaço. (PADREDI, 2003, p. 118)

"A passagem do antigo para o novo conhecimento", tendo a Geometria Analítica, como o antigo também aparece no discurso dos professores entrevistados por Padredi. Para a autora, este recurso faz parte das informações constitutivas do funcionamento matemático e pode ajudar os alunos quando a mudança de ponto de vista é necessária.

A seguir, apresentarei alguns princípios indicados por Guerson Harel para o ensino e aprendizagem de Álgebra linear que foram utilizados pelas autoras acima, em suas análises e, certamente, poderão contribuir para as análises do presente trabalho.

Os três princípios do ensino e aprendizagem de Matemática

No capítulo *Three principles of learning and teaching*[4], que faz parte do livro "On The Teaching of Linear Algebra", organizado por Dorier, Guerson Harel sugere que existem abordagens no ensino de Álgebra Linear, que não estão de acordo com as necessidades pedagógicas dos alunos.

Ao fazer uma revisão nos livros didáticos de Álgebra Linear, Harel observa que havia a suposição de que os alunos principiantes seriam capazes de lidar com estruturas abstratas sem muita preparação e poderiam apreciar a economia de pensamento quando sistemas e conceitos particulares fossem tratados por meio de representações abstratas. Apoiado nessa observação, Harel aplica uma seqüência de ensino experimental a alunos recém-ingressos na universidade, utilizando esses pressupostos como hipótese e constata que estas suposições não tinham fundamento.

O autor leva em conta sua experiência como professor e estabelece três princípios a serem observados na constituição de um primeiro curso de Álgebra Linear: o princípio da concretização, da necessidade e generalização. (HAREL, 2000)

Assim, formula o princípio da concretização do seguinte modo:

> Para os estudantes abstraírem uma estrutura matemática de um dado modelo daquela estrutura, os elementos daquele modelo precisam ser entidades conceituais aos olhos dos estudantes; isto é, o estudante tem procedimentos mentais que podem tomar estes objetos como inputs (entradas). (HAREL, 2000, p. 180)

[4] "Três princípios de ensino e aprendizagem", tradução do autor.

Segundo Greeno (1983), apud Harel (2000) uma entidade conceitual é um objeto cognitivo, para o qual o sistema mental tem procedimentos que podem tomar o objeto como um argumento, uma entrada.

Um dos exemplos apresentados pelo autor para o princípio da concretização aborda o espaço vetorial das funções polinomiais, conforme ele comenta que, em geral, o aluno resolve corretamente os problemas de independência linear para vetores do R^n, porém, quando se trata de verificar se o conjunto $A = \{ x, x^2, x^3, x^4 \}$ do espaço vetorial $P_4(R)$ é linearmente independente, o mesmo aluno apresenta dificuldade para responder.

Harel (2000) entende que essa dificuldade vem do fato de que ele, aluno, não compreende os polinômios como funções, já que o conceito de função, como um vetor, não é concreto para ele. Isto é, esse estudante não concebe o conceito de função como um objeto matemático, como uma entidade em um espaço vetorial. Como resultado disso, quando ele forma a equação $ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 = 0$ para determinar se o conjunto A, descrito acima, é linearmente independente, ele não compreende que o zero do lado direito da equação é uma função, o polinômio nulo, e não o escalar zero; ou seja, ele não consegue interpretar a equação acima, como uma identidade entre duas funções; mesmo que ele a veja como uma equação em x.

Para o autor citado, se os alunos formarem o conceito de função como um objeto matemático, os elementos de $P_4(x)$ tornam-se objetos concretos, entidades conceituais, que os alunos podem tratar como entradas para outras operações.

Harel (2000) explica que o princípio da concretização tem como premissa que os estudantes constroem sua compreensão de um conceito baseado em um contexto que seja concreto para eles. Assim, o autor citado utiliza a Geometria Analítica de duas ou três dimensões, como o contexto concreto para introduzir as primeiras noções de Álgebra Linear, como conjunto gerador, dependência linear e base, conduzindo o estudante no sentido da abstração desses conceitos, globalmente, na Álgebra Linear.

O princípio da necessidade estabelece que o aluno precisa sentir necessidade intelectual de utilizar o objeto matemático que se pretende ensinar, conforme afirma Harel:

> Para o estudante aprender, ele precisa ver uma necessidade por aquilo que se pretende ensinar. Por necessidade, entende-se uma necessidade intelectual, como oposição à necessidade social ou econômica. (HAREL, 2000, p. 185)

Para o autor citado, este princípio está alinhado com a teoria piagetiana e com trabalhos de pesquisadores franceses, como a teoria das situações didáticas de Brousseau (1994) e a noção de problemática de Balacheff (1990). Segundo o autor, as principais ferramentas para modificar as concepções existentes são as verdadeiras atividades de resolução de problemas, em que o aprendiz aplica seus conhecimentos para resolver os problemas e modifica sua concepção quando encontra um conflito cognitivo.

Este conflito ou desequilíbrio, de acordo com Piaget, pode levar o aluno a questionar sua ação e fazê-lo procurar novos caminhos para resolver o problema. As situações didáticas devem promover um ambiente onde o aluno possa abstrair, de maneira reflexiva, as suas concepções matemáticas. Estas atividades educacionais devem oferecer aos estudantes, situações-problema que sejam realistas e apreciadas por eles. E, ainda, devem propiciar aos estudantes a conscientização de que eles estão procurando a solução para seus próprios problemas e não para um problema qualquer fornecido pelo professor.

Finalmente, Harel explica que o princípio da generalização complementa os outros dois princípios vistos anteriormente, o da concretização e o da necessidade. O princípio da generalização estabelece que:

> Quando o ensino está relacionado a um modelo concreto, isto é, um modelo que satisfaz o princípio da concretização, as atividades didáticas no interior desse modelo, devem permitir e encorajar a generabilidade dos conceitos. (HAREL, 2000, p. 187)

O objetivo desse princípio é habilitar o estudante a abstrair conceitos que ele aprendeu em um modelo específico, este princípio é exemplificado utilizando a definição de base, dada para um modelo geométrico tri-dimensional. Para este modelo, base pode ser definida como três segmentos orientados não-coplanares. Entretanto, esta definição é restritiva e dependente do modelo, pois não pode ser transferida para espaços vetoriais mais abstratos. (HAREL, 2000)

O autor citado declara que o conceito de base foi explorado pelos estudantes por meio do conceito de conjunto gerador minimal e que este conjunto, inicialmente, pode ser menos apropriado, pois os escalares envolvidos não precisam ser únicos, mas, em troca conduzem à necessidade de considerar conjuntos geradores minimais, que também necessitam ser ordenados de uma maneira específica para dar uma única representação escalar.

Os três princípios do ensino e da aprendizagem, mencionados acima, podem ajudar os alunos a melhor compreender as noções elementares de Álgebra Linear, sendo destacados, conforme já mencionei, nos trabalhos de Araújo e Padredi como recursos-meta passíveis de se tornarem alavancas-meta para alguns alunos.

Assim como Harel, Rogalski, também, contribui para as análises realizadas neste estudo. Passo, então, a apresentar algumas de suas idéias correlatas ao tema de nosso projeto de pesquisa.

O fracasso do ensino de Álgebra Linear

No artigo, *POURQUOI UN TEL ECHEC DE L'ENSEIGNEMENT DE L'ALGEBRE LINEAIRE?*[5]*,* Rogalski (1996), com base na constatação do fracasso no ensino de Álgebra Linear na França, descreve e analisa os comentários de estudantes de universidades francesas sobre as dificuldades apresentadas na aprendizagem desse assunto, identifica as causas dessas dificuldades e propõe algumas mudanças a serem implementadas no ensino de um primeiro curso de Álgebra Linear.

[5] Porque tal fracasso no ensino da Álgebra Linear?

Os alunos sujeitos da pesquisa de Rogalski responderam à questão: "Quais são para vocês as dificuldades deste domínio (Álgebra Linear)?”. A análise do autor levou-o a concluir que as dificuldades estão relacionadas sobretudo a cinco fatores: ao elevado grau de abstração, à dificuldade apresentada por certas noções, como a de espaço vetorial, base e dimensão; à grande quantidade de definições e resultados novos; às dificuldades apresentadas pelos cálculos requeridos e aos problemas de rigor nas demonstrações, e utilização dos símbolos.

Esta análise fez com que o autor deduzisse algumas das causas dessas dificuldades, e uma delas é o desconhecimento ou má interpretação da lógica elementar da Matemática, que leva o aluno a dificuldades nas demonstrações. Ao citar a dificuldade dos alunos com relação à implicação e equivalência, Rogalski (1990) relata que, em uma demonstração de independência linear, os alunos concluem que "se os a_i são nulos, ao mostrar que $a_1u_1 + \ldots + a_nu_n = 0$, então, os u_i são linearmente independentes". O que não é verdade, pois a demonstração precisa ser feita de maneira inversa, isto é, para que $a_1u_1 + \ldots + a_nu_n = 0$, os a_i são nulos.

Outra causa é a falta de domínio da linguagem dos conjuntos, utilizada, necessariamente, no desenvolvimento da Álgebra Linear. Um exemplo da má utilização dessa linguagem está na confusão gerada pelos alunos ao tratarem da intersecção e união de conjuntos, quando associam a união com uma soma vetorial.

A pouca ou nenhuma utilização de desenho, de construções geométricas ou de representações gráficas pelos alunos para modelizar problemas, trata-se de mais uma das causas apontadas por Rogalski. A confusão feita pelos alunos sobre o número de equações necessárias para definir uma reta no espaço, a mistura dos conceitos Afim e Linear e Euclidiano e Afim é um dos resultados da falta de domínio dessas representações. E a falta de flexibilidade do aluno ao tratar assuntos intramatemáticos, isto é, as dificuldades de conversão entre registros de representações semióticas.

Rogalski apresenta algumas propostas para o ensino de Álgebra Linear, que foram levadas a cabo, mas o efeito das mesmas ainda não foi totalmente avaliado , conforme consta deste trecho de seu trabalho:

> Certamente as idéias existem e algumas foram levadas a efeito mesmo, mas raramente foi feita uma avaliação das realizações efetivas, e até mesmo dos sentimentos subjetivos dos professores e dos estudantes implicados. (ROGALSKI, 1990)

Para o autor, idéias como "não começar o ensino de Álgebra Linear pela teoria axiomática abstrata", "desenvolver pré-requisitos antes e paralelamente à Álgebra Linear" e "desenvolver mais cedo problemas de resolução de equações lineares", parecem fazer consenso entre os pesquisadores do assunto.

Além disso, Rogalski (1990) apresentou algumas propostas mais abertas que ainda não foram testadas e avaliadas, mas que passa a considerar como elementos de discussão. Dentre elas, cita a modificação da natureza dos problemas de Álgebra Linear dados aos estudantes, o emprego de recursos-meta e o uso de meios específicos, como computador para visualização e desenhos simbólicos, etc.

Com relação à avaliação de seqüências didáticas que se apóiam nestas idéias, para Rogalski (1990), o problema é determinar o limiar mínimo das mudanças de modo a evitar simples mudanças que, além de colocar à prova o sucesso da seqüência, não são suficientes para garantir uma efetiva aprendizagem.

Metodologia de Pesquisa

Esta pesquisa pretende levantar o efeito dos recursos-meta utilizados por um professor de Álgebra Linear, em seu discurso ou em atividades desenvolvidas em sala de aula. Assim, procuro focalizar o desenvolvimento da noção de base pelo professor, para verificar se e quais desses recursos tornaram-se "alavancas-meta" para alguns de seus alunos.

Quero recordar ao leitor que uma de minhas questões é verificar se o professor utiliza recursos-meta em seu discurso, durante as aulas de Álgebra Linear e apontar esses recursos. A outra questão é investigar o efeito desses recursos-meta na compreensão da noção de base por seus alunos.

Para alcançar esses objetivos, utilizo uma pesquisa empírica, com abordagens descritivas e interpretativas, peculiares da pesquisa qualitativa, conforme Ludke e André (2001) descrevem em obra conjunta sobre esse tipo de investigação.

Neste trabalho, o ambiente natural, próprio de uma pesquisa qualitativa, é a sala de aula que oferece a possibilidade de levantar os recursos-meta que o professor usa no processo de ensinar as primeiras noções de Álgebra Linear, o que implica a observação dessas aulas.

É conhecido o fato da dificuldade existente em conseguir a aquiescência de um professor para observação de suas aulas. Além disso, torna-se necessário encontrar um professor que não só aceite a presença de um observador, como também utilize uma dinâmica mais interativa com seus alunos. Estes fatos precisam de uma seleção do professor a ser observado.

Além disso, esta investigação exige a confrontação de recursos-meta empregados pelo professor com a compreensão dos alunos sobre os conceitos abordados por meio desses recursos para verificar seus efeitos. O fato cria a necessidade de entrevistas com alunos e uma escolha criteriosa da amostra discente. O procedimento aponta para uma análise de dados com tendência a um processo indutivo.

Assim, a observação das aulas e a realização de entrevistas supõem que os dados sejam descritivos e obtidos diretamente no contato do pesquisador com a situação estudada, de acordo com a caracterização de uma pesquisa qualitativa, segundo Ludke e André (2001).

A seguir, descrevo os passos desta investigação em uma seqüência para facilitar a compreensão do leitor, no entanto, muitas vezes, os passos se repetiram e, em outras, aconteceram em conjunção com outros, de forma fragmentada.

Procedimentos metodológicos

Assim, escolhi uma instituição que possuía cursos de Ciências Exatas que, naturalmente, exigem a Álgebra Linear como disciplina de sua ementa. Optei por uma instituição particular, de renome, próxima de minha residência, para facilitar meu deslocamento até lá, uma vez que eu deveria assistir às aulas por, pelo menos, um semestre.

Selecionada a Instituição, analisei o quadro dos professores que ministravam Álgebra Linear e selecionei três deles que, por sua experiência e formação em pós-graduação, faziam parte da comunidade de educadores matemáticos. O critério baseou-se no fato de que desejava um professor que interagisse com a classe, de forma a aumentar a possibilidade da utilização de recursos-meta. Além disso, queria escolher um professor com experiência no ensino de um primeiro curso de Álgebra Linear.

Os pesquisadores encontram muitas dificuldades para receber autorização, a fim de observar uma aula, pois a maioria dos professores mostra-se relutante em permitir. Sabendo do fato, fui conversar com os professores, garantindo-lhes o anonimato e comprometendo-me a perturbar o mínimo possível a dinâmica de suas aulas. Depois de conversar com três, escolhi o professor Siqueira, que atendia as minhas necessidades de investigador. É bom ressaltar que se trata de um nome fictício para conservar o anonimato do profissional.

O referido professor dava aulas de Álgebra Linear em várias turmas, o que exigiu que eu escolhesse uma delas. Após assistir, durante duas semanas, às aulas em duas turmas do período matutino, escolhi a turma B, formada, em sua maioria, por alunos que cursavam a disciplina pela primeira vez e possuía poucos alunos repetentes.

Decidida a turma, passei a assistir às suas aulas de Álgebra Linear; para não interferir em seu andamento, posicionei-me em uma carteira isolada e distante dos alunos, a fim de evitar qualquer conversa sobre o conteúdo com eles.

No início, com a intenção de não intimidar o professor e seus alunos decidi fazer apenas anotações manuscritas sobre as ocorrências e recursos utilizados pelo professor. Nas primeiras cinco aulas, anotei os elementos do discurso e da prática do professor que julguei serem recursos-meta.

No final da quarta aula, conversando com o professor Siqueira sobre metodologia e a coleta de dados, ele sugeriu que eu audiogravasse as aulas, para facilitar minha tarefa de observador. Com a aquiescência do professor, passei a audiogravar suas aulas, a partir da sexta aula, deixando o gravador em cima de sua mesa, pois dali era provável que o aparelho captasse melhor sua voz.

Além da gravação, eu ainda anotava os gestos e expressões do professor, pois estes poderiam conter algum recurso-meta. Fui colecionando, também, as atividades elaboradas pelo professor, que eram distribuídas aos alunos.

As gravações das aulas foram feitas até a conclusão da abordagem da noção de base de um espaço vetorial, objeto de estudo deste trabalho.

Ao mesmo tempo, em que observava o professor, também, percebi a participação de um grupo de alunos, para tentar identificá-los e possibilitar a seleção dos futuros alunos a serem entrevistados.

Uma vez terminadas as gravações das aulas, iniciei sua transcrição, agregando os gestos e as anotações no quadro, feitas pelo professor, de modo a tornar mais completa a “história” das aulas.

Em seguida, fiz uma análise das transcrições, iluminando os recursos-meta com a possibilidade de se tornarem alavancas-meta para aos alunos desse professor. Minha intenção era confrontar uma amostra dos alunos do professor Siqueira com os recursos-meta selecionados, por meio de entrevistas individuais com esses alunos.

Para isso, elaborei um guia de entrevista para a realização das mesmas. Optei pela entrevista do tipo semi-estruturada, para permitir que o aluno discorresse livremente sobre a noção abordada e, assim, revelar se algum recurso-meta utilizado pelo professor incorporou-se à sua explicação, indicando, portanto, uma ajuda à sua compreensão sobre aquela noção.

Para fazer as entrevistas, selecionei uma amostra de alunos, pois a turma era grande, 43, e julguei que nem todos estariam aptos a fornecer os dados para minha pesquisa. Assim, estabeleci alguns critérios para escolha dos alunos.

Após a seleção dos alunos-alvo do estudo, passei a contatá-los, individualmente, explicando minha intenção de entrevistá-los. Deixei-os à vontade, para a escolha do dia e horário a serem entrevistados, de forma a diminuir a possibilidade de uma recusa da parte deles. Solicitei-lhes a permissão de gravar as entrevistas, explicando que era para enriquecer o trabalho, garantindo sigilo e anonimato.

Terminadas as entrevistas, iniciei suas transcrições; nesse processo, agreguei ao texto algumas observações que não foram registradas pela gravação do audio.

Com o texto da transcrição das entrevistas, iniciei sua análise. Desse modo, pude finalizar o trabalho com a apresentação dos recursos que se tornaram alavancas-meta aos alunos entrevistados.

CAPÍTULO II

Abordagem Empírica

Introdução

Neste capitulo, descrevo detalhadamente como ocorreu a escolha do professor e como foram feitas as observações e o registro de suas aulas.

Em seguida, descrevo sucintamente os assuntos abordados pelo professor aula a aula, destacando e analisando os recursos-meta por ele utilizados.

Sala de aula de um professor de Álgebra Linear

Escolha da Instituição

Após analisar o perfil de instituições de ensino superior de São Paulo, que continham cursos de Matemática e outras ciências exatas, optei por uma instituição particular, de renome que, por estar situada próxima a minha casa, facilitava o meu deslocamento até o local das aulas.

Escolha do Professor

Em seguida, busquei os nomes dos professores que estivessem ministrando aulas de Álgebra Linear na Instituição.

Conversei com três a respeito de minha intenção de assistir às aulas de Álgebra Linear para levantar os recursos utilizados pelo professor para facilitar o aprendizado de seus alunos. Expliquei que estava conversando com outros colegas, caso combinássemos assistir às suas aulas, seu anonimato seria garantido.

Baseado nas conversas com esses professores e na disposição de dois deles oferecerem as aulas para serem observadas, estabeleci como critério para a escolha de um deles: experiência no ensino de Álgebra Linear para licenciatura em Matemática, participação da comunidade de educadores matemáticos, e que tivesse declarado na conversa fazer um trabalho interativo com alunos em sala de aula. O critério baseou-se na vantagem de observar um professor que lecionasse a disciplina regularmente e com experiência no tema, pois teria mais oportunidades de criar recursos-meta. O fato de pertencer à comunidade de educadores matemáticos, provavelmente, propiciaria uma aula mais interativa, na qual os alunos pudessem se posicionar, evidenciando para o observador o efeito do uso dos recursos-meta.

Com esse critério, escolhi o professor Siqueira, que é um professor com experiência no assunto, leciona Álgebra Linear há mais de cinco anos, é mestre em Educação Matemática. No final de 2002, estabeleci com o professor que assistiria no semestre seguinte, isto é, primeiro semestre de 2003, às aulas de uma de suas turmas. O professor iria lecionar Álgebra Linear para alunos de Licenciatura em Matemática e de Ciências da Computação em 2003.

Em 2003, decidi observar as aulas do curso de Ciências da Computação, pois suas classes tinham de 30 a 40 alunos, e o curso de licenciatura, um número reduzido de alunos. Uma quantidade maior de alunos oferecia a possibilidade de obter um número razoável de alunos assíduos para a observação dos efeitos dos recursos-meta. Além disso, supus que este tipo de curso, que contém em seu currículo disciplinas que indicam a Álgebra Linear como co ou pré-requisitos, exigia que as noções elementares de Álgebra Linear, como a de base, merecessem uma atenção especial.

O professor Siqueira lecionava Álgebra Linear em duas turmas de Ciências da Computação. Após assistir às aulas nas duas turmas, optei pela B, pois foi a que se mostrou mais envolvida, levantando questões e dando contribuições ao professor, por meio das discussões ocorridas com os alunos, além do fato de ter identificado apenas três alunos repetentes, diferente da outra turma, com praticamente a metade dos alunos reprovados no ano anterior.

A turma B possuía 43 alunos, cinco deles eram mulheres. As aulas de Álgebra Linear ocorriam, uma vez por semana, das 9h5 às 10h45. A idade dos alunos variava entre 19 e 21 anos, indicando que haviam terminado o ensino médio recentemente.

Como se deu a observação?

Primeiro, estabeleci a relação entre observador e professor e observador e alunos. Para não interferir no andamento da aula e evitar qualquer conversa sobre o conteúdo com os alunos, posicionei-me em uma carteira isolada, no fundo da sala, distante do professor e dos alunos.

Nas primeiras cinco aulas, anotei por escrito, os elementos do discurso e da prática do professor que julguei passiveis de serem recursos-meta. Mas, no final da quarta aula, conversando com o professor Siqueira sobre metodologia e coleta de dados, ele sugeriu que eu audiogravasse as aulas, para facilitar minha tarefa como observador.

Em razão de problemas técnicos, só consegui fazer as gravações a partir da sexta aula. Deixava o gravador em cima da mesa do professor, pois dali, era mais provável que o ele captasse melhor a voz do professor.

Durante as aulas, precisava observar o professor, anotando seus gestos e expressões, pois estes poderiam conter algum recurso-meta. Fui colecionando também, as atividades elaboradas pelo professor, que eram distribuídas aos alunos. Observei a participação ou não de alguns alunos, para tentar identificá-los e possibilitar a seleção dos futuros alunos a serem entrevistados.

As gravações foram feitas até a conclusão da abordagem da noção de base de um espaço vetorial, objeto de estudo deste trabalho. Ao todo foram 14 aulas, nove gravadas e cinco somente anotadas.

Contudo, continuei assistindo às aulas do professor, com a mesma turma, para não perder o contato com os alunos e facilitar futuras inter-relações com os mesmos.

Descrição dos assuntos abordados e análise dos recursos-meta utilizados pelo professor aula a aula

A seguir, apresento, partes das aulas observadas, nas quais verifiquei a utilização de recursos-meta, no discurso do professor, e nas atividades, por ele proporcionadas. Para esta apresentação, utilizei as seguintes abreviações:

P = Professor; A = Aluno (um, em especial); C = classe (um grupo de alunos);
L = Investigador; "..." = Pausa na fala do professor; ".........." = Silêncio;
Negrito = Ressalta a ênfase na fala do professor.

Na apresentação abaixo, as primeiras cinco aulas observadas, não foram audiogravadas. Para destacar e analisar os recursos-meta utilizados pelo professor, durante as cinco primeiras aulas, as observações contaram somente com anotações, que registrei em papel. Nas aulas seguintes, até a abordagem da noção de base, as observações foram enriquecidas pelas transcrições das gravações em audio, feitas em sala de aula, além das anotações referentes às minhas observações durante as aulas.

A cada novo assunto, o professor deixava em uma pasta no “Xérox” da Instituição uma atividade que os alunos deveriam fotocopiar e trazer para a aula. Estas atividades eram relativas ao conteúdo a ser abordado no qual constavam um breve resumo teórico e uma série de exercícios.

O professor Siqueira iniciava as aulas, em geral, retomando os assuntos já abordados em sala de aula, por meio de perguntas dirigidas à classe sobre as noções trabalhadas. Esta prática é um recurso-meta com possibilidade de se tornar alavanca-meta para os alunos, pois de acordo com Régine Douady, citada por Maranhão (1999), ao refletirem, novamente, sobre um assunto já estudado, eles podem amadurecer e ampliar ainda mais seu conhecimento a respeito do assunto.

Durante as aulas, em geral, o professor sugeria aos alunos para resolverem algum dos exercícios, ocasião na qual, ficava circulando entre as carteiras, dirimindo dúvidas. Os exercícios que não tivessem sido resolvidos em sala de aula, deveriam ser solucionados fora da sala de aula. Em geral, quando interpelado pelos alunos sobre algum exercício que não souberam resolver fora da sala de aula, o professor discutia a resolução no quadro-negro.

1ª aula

O professor iniciou o curso de Álgebra Linear chamando os alunos a recordar a resolução de sistemas de equações lineares. Ele distribuiu uma lista de exercícios, denominada "AULA 1: Resolução de Sistemas Lineares", contendo sistemas de equações lineares, de ordem 2 até ordem 6.

Primeiramente, o professor abordou o uso da regra de Cramer na resolução de sistemas lineares e comentou que o método é interessante para matrizes quadradas de ordem dois e três e perguntou se essa regra ainda seria interessante para ser utilizada com matrizes de ordem maior que três. Neste caso, o professor estava provocando a reflexão do aluno sobre as limitações ou dificuldades de utilização de uma técnica, o que se configura como um recurso-meta.

Logo em seguida, o professor expôs o método de eliminação de Gauss, também denominado método do escalonamento ou triangularização, resolvendo um sistema linear de quatro equações por meio desse método.

2ª aula

Na aula seguinte, o professor comentou e resolveu alguns sistemas deixados como exercícios na aula anterior, utilizando o método do escalonamento.

Em seguida, apresentou no quadro-negro a interpretação geométrica das possíveis soluções de sistemas lineares de ordem 2, discutindo graficamente suas soluções. Assim, afirmou que um sistema de duas equações e duas incógnitas pode ser representado no plano cartesiano por duas retas e que se o sistema tem solução única, é porque as duas retas interceptam-se em um único ponto. Se houver mais de uma solução, é porque essas retas são coincidentes e se não houve solução, é porque as retas são paralelas, não coincidentes. Aqui, o professor utilizou o recurso-meta da interação de domínios, entre os domínios algébrico e geométrico para fazer o aluno refletir sobre o significado da solução de um sistema linear de ordem 2.

3ª aula

Nesta aula, o professor dedicou-se a desenvolver a resolução de sistemas lineares com quatro ou mais incógnitas. Mostrou como resolver um sistema linear por meio de uma de suas representações matriciais (matriz composta por uma submatriz dos coeficientes e uma matriz-coluna dos termos independentes); escalonando a matriz e interpretando o resultado obtido. O professor chamou a atenção para a vantagem do método “mais enxuto” na resolução de sistemas lineares, o que considero um recurso-meta.

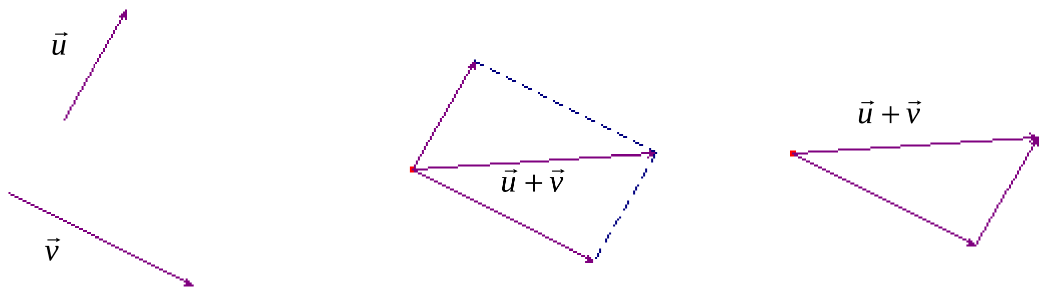
4ª aula

O professor iniciou a aula solicitando que os alunos resolvessem os problemas propostos na primeira parte da atividade "Aula 2: Espaços Vetoriais". Dado que considerei alguns elementos dessa parte da atividade como recurso-meta que transcrevo, a seguir:

1. INTRODUÇÃO

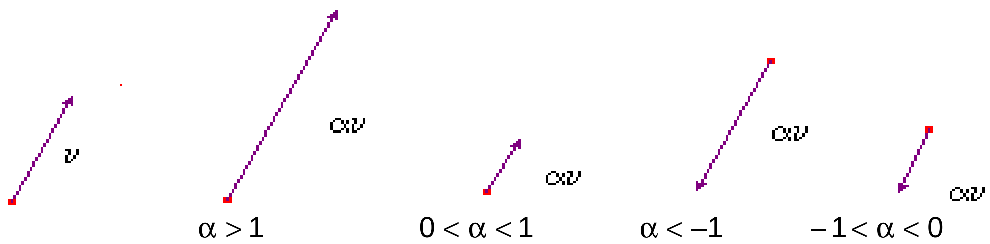
a) Conjunto dos Vetores da Geometria Analítica.

Vamos tomar o conjunto dos vetores da Geometria Analítica definidos por meio de segmentos orientados e observar que nesse conjunto é definida a operação de adição:



Para a operação de adição, valem as seguintes propriedades: comutativa, associativa, existência do elemento neutro (o vetor nulo, representado por um ponto qualquer do espaço) e que todo elemento admite oposto. Verifique.

Nesse conjunto, temos também definida a operação multiplicação por escalar que nos permite multiplicar qualquer vetor por um número real α.



Para essa multiplicação, valem as seguintes propriedades considerando $\alpha,\ \beta \in \Re$.

a) $(\alpha\beta)\vec{u} = \alpha(\beta\vec{u})$

b) $(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$

c) $\alpha(\vec{u}+\vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$

d) $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$

Considerando os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ abaixo e $\alpha = 3$, $\beta = -2$ verifique estas propriedades.

b) O Conjunto das Matrizes Reais

Agora vamos observar, em particular, o conjunto das matrizes $M_{2\times 3}(\Re)$. Neste conjunto, temos a operação de adição que é definida por:

$$M_{2\times 3}(\Re) \times M_{2\times 3}(\Re) \to M_{2\times 3}(\Re)$$

$$(A, B) \mapsto A + B$$

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \end{pmatrix}$$

Considere as matrizes: $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -2 & 6 & -5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 3 & 1 & -6 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -4 & 10 & -1 \end{bmatrix}$ e verifique se para a operação de adição no conjunto das matrizes 2×3 valem as propriedades: comutativa, associativa, existência do elemento neutro e que todo elemento admite oposto.

No conjunto das matrizes 2×3 é definida a operação multiplicação por escalar: $\Re \times M_{2\times 3}(\Re) \to M_{2\times 3}(\Re)$, $(\alpha, A) \mapsto \alpha A$.

Considerando $\alpha = 3$, $\beta = -2$ verifique se valem as propriedades:

a) $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$

b) $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$

c) $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$

d) $1 \cdot A = A$

Finalmente, vamos observar se as mesmas operações e suas propriedades valem para o conjunto $\Re^2 = \{(x, y) : x, y \in \Re\}$.

O conjunto dos vetores da Geometria Analítica definidos por meio de segmentos orientados, o conjunto das matrizes $M_{m\times n}(\Re)$ (*m* e *n* naturais não nulos) e o conjunto dos pares ordenados reais apresenta uma coincidência estrutural em relação a um par de operações definidas sobre eles. Isto significa que essas operações e propriedades caracterizam alguns conjuntos que, embora tenham natureza diferente dos vetores do espaço, "comportam-se" como eles. Dizemos que esses conjuntos têm a mesma estrutura.

Esta parte da atividade, por apresentar uma seqüência parcialmente semelhante à seqüência apresentada em (CALLIOLI, et al, 1990), cabe a reprodução das considerações feitas por Araújo (2002) a respeito de trecho semelhante desse livro: quando lançam mão de "coincidências" estruturais dos conjuntos para atingir a descontextualização via definição de espaço vetorial, que apresenta um discurso <u>sobre</u> espaços vetoriais, isto é, recurso-meta.

É importante notar que a atividade, além de comparar os conjuntos de vetores da geometria analítica com o conjunto de matrizes e suas operações de soma e multiplicação por escalar, como o livro já citado, sugere que o aluno verifique se o conjunto R^2 - espaço vetorial de pares de números reais - possui as mesmas características que os dois anteriores.

Vale notar ainda que a atividade parte do "concreto" do "já conhecido", que são os conjuntos dos vetores da geometria analítica, R^2 e conjunto de matrizes para introduzir a noção de espaço vetorial, via definição (que foi apresentada logo a seguir na atividade), o que caracteriza uma "generalização". Assim, pode-se afirmar que esse desenvolvimento atende a dois princípios de Harel.

Verifiquei que, ao elaborar a atividade, o professor utilizou o recurso-meta "passando do antigo para o novo conhecimento", empregando a geometria vetorial e o conjunto das matrizes, como o antigo, para fazer os alunos refletirem sobre a generalização das operações com elementos de diferentes espaços vetoriais, isto é, refletirem sobre a estrutura dos espaços vetoriais.

5ª aula

O professor Siqueira trabalhou com a definição de espaço vetorial, estampada na atividade, comentando a importância do corpo dos escalares lembrando que a definição dada restringia-se aos espaços vetoriais sobre R, mas, que poderia ser estendida a qualquer outro corpo como, por exemplo, o dos Complexos. Assim, após a institucionalização, o professor solicitou aos alunos que resolvessem três exercícios de uma série, envolvendo a veracidade ou não da afirmação: "tal conjunto, com estas operações é um R - espaço vetorial", contido na atividade entregue na aula anterior e que transcrevo, a seguir:

Os conjuntos abaixo são espaços vetoriais. Verifique se esta afirmação é verdadeira.

1) O conjunto $\Re^3 = \{(x,\ y,\ z)/\ x, y, z \in\ R\}$ é um $\Re$-espaço vetorial.

Generalizando: $\Re^n$, $n \geq 1$ é um $\Re$-espaço vetorial:

Adição: $\Re^n \times \Re^n \rightarrow \Re^n$,

$$(a_1,\ a_2,\ a_3, ...,\ a_n) + (b_1,\ b_2,\ b_3, ...,\ b_n) = (a_1 + b_1,\ a_2 + b_2,\ a_3 + b_3, ...,\ a_n + b_n)$$

Multiplicação por escalar: $\Re \times \Re^n \rightarrow \Re^n$

$$\alpha(a_1,\ a_2,\ a_3,\ ...,\ a_n) = (\alpha a_1,\ \alpha a_2,\ \alpha a_3,\ ...,\ \alpha a_n)$$

2) *C*, o conjunto dos números complexos, é um $\Re$-espaço vetorial

Adição: $C \times C \rightarrow C$

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

Multiplicação por escalar: $\Re \times C \rightarrow C$

$$\alpha(a + bi) = \alpha a + \alpha bi$$

3) O conjunto das matrizes $M_{2\times 3}(\Re)$ é um $\Re$-espaço vetorial.

Adição: $M_{2\times 3}(\Re) \times M_{2\times 3}(\Re) \rightarrow M_{2\times 3}(\Re)$

$$(A,\ B) \mapsto A + B$$

Multiplicação por escalar: $\Re \times M_{2\times 3}(\Re) \rightarrow M_{2\times 3}(\Re)$

$$(\alpha,\ A) \mapsto \alpha A$$

Generalizando: O conjunto das matrizes $M_{mxn}(\Re)$ é um $\Re$-espaço vetorial

Adição: $M_{m\times n}(\Re) \times M_{m\times n}(\Re) \rightarrow M_{m\times n}(\Re)$

$$(A,\ B) \mapsto A + B$$

Multiplicação por escalar: $\Re \times M_{m\times n}(\Re) \rightarrow M_{m\times n}(\Re)$

$$(\alpha,\ A) \mapsto \alpha A$$

4) $\wp_2(\Re)$ é o conjunto dos polinômios reais de grau menor ou igual a 2, acrescido do polinômio nulo, é um $\Re$-espaço vetorial.

Adição: $\forall f(t), g(t) \in \wp_2(\Re)$, $f(t) + g(t) \in \wp_2(\Re)$

Multiplicação por escalar: $\forall f(t) \in \wp_2(\Re)$ e $\alpha \in \Re$, $\alpha f(t) \in \wp_2(\Re)$.

Generalizando: $\wp_n(\Re)$ é o conjunto dos polinômios reais de grau menor ou igual a *n* $(n \geq 0)$ acrescido do polinômio nulo é um $\Re$-espaço vetorial.

Adição: $\forall f(t), g(t) \in \wp_n(\Re)$, $f(t) + g(t) \in \wp_n(\Re)$

Multiplicação por escalar: $\forall f(t) \in \wp_n(\Re)$ e $\alpha \in \Re$, $\alpha f(t) \in \wp_n(\Re)$.

5) O conjunto $V = \{u \in R / u > 0\}$ com as operações assim definidas:

Adição: $u \oplus v = u \cdot v$

Multiplicação por escalar: $\alpha \otimes u = u^{\alpha}$ é um espaço vetorial sobre $\Re$.

6) $\Re^2$ munido de:

Adição usual

Multiplicação por escalar: $\alpha(m, n) = (-\alpha m, \alpha n)$ é um $\Re$-espaço vetorial?

7) *C* é um espaço vetorial sobre *C*.

Adição: usual.

Multiplicação por escalar: multiplicação usual dos complexos: $C \times C \to C$,

$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$

Observando esta lista de exercícios, elaborada pelo professor, notamos a existência de um contra-exemplo no sexto exercício, além da preocupação em apresentar diferentes conjuntos a serem manipulados. A existência do contra-exemplo é um recurso-meta que pode levar o aluno a refletir sobre a existência de conjuntos, que munidos das operações dadas não têm estrutura de espaço vetorial.

A apresentação de diferentes espaços vetoriais também será considerada um recurso-meta, pois permite ao aluno verificar a existência de outros conjuntos de mesma estrutura, ao mesmo tempo, em que é chamado a enfrentar as dificuldades da manipulação sintática desses espaços.

6ª aula

Conforme já foi descrito na metodologia, apresentada no capitulo anterior, comecei a fazer as audiogravações a partir desta aula.

O professor Siqueira iniciou a aula indagando aos alunos se encontraram dificuldade na resolução dos exercícios, sugeridos na aula anterior, a serem feitos fora da sala de aula (o professor refere-se a lista apresentada neste trabalho à p. 50. Alguns alunos indicaram o sétimo exercício:

7) C é um espaço vetorial sobre C.

Adição: usual.

Multiplicação por escalar: multiplicação usual dos complexos: $C \times C \rightarrow C$, $(a+bi)\cdot(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$

e o professor, então, comentou:

> Qual é o grande nó da Álgebra Linear? É vocês estarem escrevendo corretamente aquilo que vocês estão pensando. Existe uma dificuldade grande em escrever estas coisas. Então pelo menos uma vez na vida temos que pegar e mostrar que é um espaço vetorial. É trabalhoso, né? Não é simples e é trabalhoso, mas ao menos uma vez na vida temos que fazer isso.

Aqui, o professor chamou a atenção dos alunos para o fato de que a grande dificuldade da Álgebra Linear, "o nó", é seu formalismo, usando o recurso-meta de fornecer informações sobre a natureza das noções a serem introduzidas. A seguir, dá a entender que a dificuldade relatada está na manipulação algébrica. Ou seja, o aluno deveria analisar as operações definidas para o conjunto e à luz da definição contida no próprio texto, a validade de cada uma das oito propriedades, o que do ponto de vista do professor "Não é simples e é trabalhoso, mas ao menos uma vez na vida temos que fazer isso".

A seguir, o professor chamou a atenção para o sexto exercício constituído pelo contra-exemplo:

6) $\Re^2$ munido de:

Adição usual

Multiplicação por escalar: $\alpha(m, n) = (-\alpha m, \alpha n)$ é um $\Re$-espaço vetorial?

E discutiu a operação definida como multiplicação por escalar:

> Quando vocês olham que cara tem. Essa você pode falar que não é. Se você acha que não é, qual seria o segundo passo?
>
> (...)
>
> Se não é, vai furar alguma propriedade. Qual é a que fura?

O professor realçou a importância de se analisar, primeiramente, como estão definidas as operações. Afirmou que como a adição era a usual, e já tinha sido alvo de verificação anterior, dever-se-ia analisar mais profundamente a multiplicação por escalar: "Quando vocês olham que cara tem. Essa você pode falar que não é". Siqueira, então, observou: “Se você acha que não é, qual seria o segundo passo?” e enfatiza que antes de se passar à verificação das propriedades de espaço vetorial, o aluno deva estudar quais das propriedades provavelmente aquela operação não vai satisfazer, dizendo “Se não é, ... qual é a que fura?” O professor fez uso de três recursos-meta: primeiro relevando o contra-exemplo e segundo fornecendo informações sobre as operações e terceiro mostrando que, ao invés do aluno, verificar todas as oito propriedades automaticamente, o que demanda muito tempo, ele deveria analisar as operações e tentar verificar quais delas, provavelmente, não serão satisfeitas o que economizaria tempo e trabalho.

Logo em seguida, o professor comentou que para verificar a validade de uma propriedade para uma operação não usual, do tipo $\alpha(u+v)=\alpha u+\alpha v$, convém separadamente desenvolver o primeiro termo do segundo e no final comparar os resultados para verificar se são iguais e observou que:

> Normalmente nestes casos atípicos é mais difícil resolver como a gente estava fazendo. Sair do primeiro e chegar no segundo.

O professor aqui, por meio de um recurso-meta, dá informações sobre a manipulação algébrica.

Em seguida um aluno pergunta pela resolução do exercício 4:

> 4) $\wp_2(\Re)$ é o conjunto dos polinômios reais de grau menor ou igual a 2, acrescido do polinômio nulo, é um $\Re$ -espaço vetorial.
>
> Adição: $\forall f(t), g(t) \in \wp_2(\Re)$, $f(t)+g(t) \in \wp_2(\Re)$
>
> Multiplicação por escalar: $\forall f(t) \in \wp_2(\Re)$ e $\alpha \in \Re$, $\alpha f(t) \in \wp_2(\Re)$.
>
> Generalizando: $\wp_n(\Re)$ é o conjunto dos polinômios reais de grau menor ou igual a n $(n \geq 0)$ acrescido do polinômio nulo é um $\Re$ -espaço vetorial.
>
> Adição: $\forall f(t), g(t) \in \wp_n(\Re)$, $f(t)+g(t) \in \wp_n(\Re)$

Multiplicação por escalar: $\forall f(t) \in \wp_n(\Re)$ e $\alpha \in \Re$, $\alpha f(t) \in \wp_n(\Re)$.

Explicando que esse exercício é um polinômio do tipo $at^2 + bt + c$, comenta:

Os elementos do conjunto do exercício 4, têm essa cara aí.

Neste caso, o professor de modo informal "essa cara" está dando uma outra forma de representar um polinômio, $f(t) = at^2 + bt + c$ que pode levar o aluno a refletir sobre o fato de que um polinômio é, na realidade, uma função.

Siqueira passou a tratar dos seguintes exercícios:

1) Dadas as matrizes quaisquer A e B do conjunto das matrizes reais 2 x 2, determine a matriz X, tal que $\dfrac{X - A}{2} = \dfrac{X + 2B}{3}$.

2) Dados os vetores quaisquer $\vec{u}$ e $\vec{v}$ determine o vetor $\vec{x}$, tal que $\dfrac{\vec{x} - \vec{u}}{2} = \dfrac{\vec{x} + 2\vec{v}}{3}$.

3) Dados dois pares ordenados quaisquer u e v determine o par ordenado x tal que $\dfrac{x - u}{2} = \dfrac{x + 2v}{3}$

Ao apresentar estas três equações, cada uma com vetores em diferentes espaços vetoriais, o professor está possibilitando ao aluno perceber que, embora cada uma esteja em diferentes espaços, os procedimentos de resolução são os mesmos, pois são baseados nas mesmas propriedades. Aqui, ele está usando o recurso-meta da economia de pensamento, ao incorporar as ferramentas para resolver as referidas equações.

Durante a feitura dos exercícios, o professor chamou a atenção dos alunos a respeito de alguns comentários:

A – Corta os denominadores.

(...)

A – Passa para o outro lado o 3A.

Em relação ao primeiro, disse: “Cuidado hein. **Corta denominador**. ... Não corta coisa nenhuma” e ao segundo comentou que: ”Ah, eu não sei passar nada de um lado para o outro”. Um pouco depois o professor lembra:

> Olha, gente. Cuidado, que vocês tem essa mania de “ah, passa pra lá, ah, muda de sinal”. Vocês já viram a sua conta bancária mudar de sinal?“. Ainda reitera: “Ah, muda de lado. Não muda de lado. Isto aqui é uma igualdade. As coisas não ficam pulando, saltitando, de um lado para o outro. Isto vira ... Isto é automático à medida que vocês trabalham e vão fazendo isso automaticamente.

Nestes casos, Siqueira parece querer que os alunos resolvam as equações, utilizando uma linguagem formal da Matemática que se refere às propriedades de espaço vetorial que justificam as manipulações feitas. Assim, Siqueira está trazendo informações a respeito do que constitui o conhecimento matemático.

Em seguida, o professor faz as seguintes questões: Onde eu vou usar as propriedades? O que é que sabemos? Conclui com a seguinte reflexão:

> (...)
> Que estes três conjuntos têm uma estrutura de espaço vetorial. E que todas aquelas propriedades valem, né? Uso estas propriedades para resolver o problema que eu tenho. Vai mudar alguma coisa se eu vou resolver agora estes vetores?

O que confirma sua intenção ao elaborar os três exercícios em diferentes espaços vetoriais, de fazer com que os alunos refletissem sobre as propriedades de um espaço vetorial seja ele qual for.

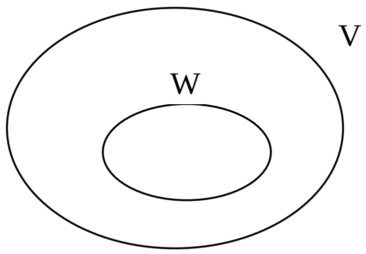
No final da aula, Siqueira remete os alunos à atividade "AULA 3: SUBESPAÇOS VETORIAIS", que possuía a definição de subespaço vetorial. O professor alerta os alunos sobre o fato de que nem sempre é preciso trabalhar com todo o espaço vetorial, pois, geralmente, pode-se trabalhar com um seu subconjunto. Aqui o professor utiliza o recurso-meta de antecipar uma noção a ser introduzida, sugerindo uma vantagem “à guisa” de motivação.

O professor, então, pergunta à classe o que é um sub-espaço vetorial e esta responde, lendo a definição constante da atividade:

> 1. Definição: Subespaço vetorial é um subconjunto W do espaço vetorial V, $W \neq \emptyset$ munido das mesmas operações de V que também tem estrutura de espaço vetorial.

Após o que, solicita aos alunos para verificarem se o subespaço vetorial $D = \{(x, y) \in \Re^2 / y = x\}$, é também um espaço vetorial. Siqueira comentou com os alunos que o conjunto D é um espaço vetorial, do mesmo tipo do conjunto W da definição acima, que é diferente do vazio, que tem as mesmas operações e que estas satisfazem as oito propriedades.

Logo, em seguida, o professor desenha o seguinte diagrama de Venn, que constitui um recurso-meta:



e comenta com a classe:

> P – Não é isso que a gente quer saber? Se esse D é um espaço vetorial?

Enquanto os alunos fazem a verificação a respeito do conjunto D ser um espaço vetorial, o professor faz algumas perguntas para ajudá-los a resolver o problema:

> P – Qual é a primeira coisa que precisamos fazer?
> C – Murmúrios.
> P – Primeira coisa? Qual é? Vamos!
> C – Murmúrios.
> P – Definir a Soma e a Multiplicação por escalar. Qual é a soma que a gente vai definir aí?
> C – ....

P – (...) Que conjunto que nós estamos trabalhando?

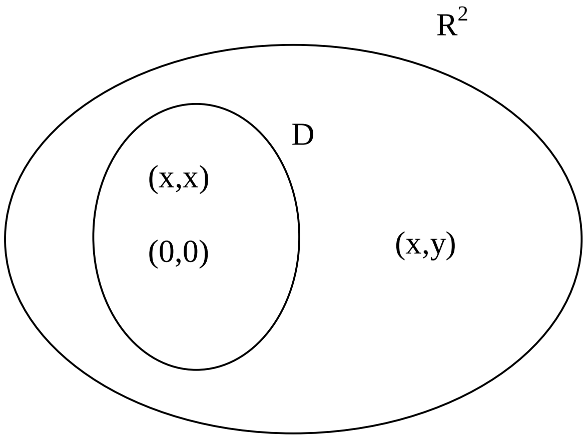
A – No R^2, professor.

P – No R^2, não é isso? R^2......Bem, é um subconjunto do R^2, então, qual é a operação de Adição que eu vou usar?

C – ....

P – A usual........Multiplicação por escalar, nós vamos fazer sobre R. Agora o que eu preciso fazer?.......Eu já pequei a adição e já peguei a multiplicação......Eu preciso mostrar que para qualquer elemento desse conjunto, que as propriedades valem.

Após algum tempo, o professor começou a fazer a verificação das oito propriedades, ajudado pelos alunos e, no final da resolução do exercício, mostrou que as oito propriedades estavam satisfeitas e concluiu que o conjunto D é um espaço vetorial. Siqueira termina a aula com a seguinte representação:



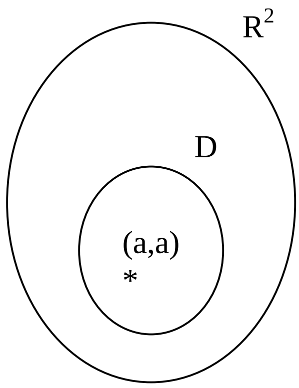
7ª aula

O professor inicia a aula, solicitando dos alunos a noção de subespaço vetorial estudada na aula anterior, recorda que um subespaço vetorial também é um espaço vetorial munido das mesmas operações do espaço vetorial a que pertence, após o que, pergunta para a classe se é possível garantir que um subespaço vetorial é espaço vetorial, sem verificar os oito axiomas. O professor está utilizando informações que dizem respeito ao que constitui uma operação matemática, utilizando o papel do questionamento. Segundo Dorier, este recurso-meta pode fazer o aluno refletir sobre a noção matemática em evidência.

Em seguida, retoma a discussão sobre o conjunto $D = \{(x, y) \in \Re^2 / y = x\}$, visto na aula passada, e questiona a classe sobre as características do conjunto D, com o seguinte diálogo:

> P - (...) O D, qual é a característica do conjunto D? Que cara tem os vetores de D?
>
> A – x é igual a y.
>
> P – x é igual a y. Então, me dê um elemento de D, genérico.
>
> A – (a, a).
>
> P – (a, a). Está aqui. O R^2 são todos os pares, o que é que está dentro de D, ..., todo mundo que tem qual cara? ... (a, a). O primeiro elemento e o segundo elemento do par ordenado são iguais. (...)

O professor, novamente, utilizou o seguinte diagrama de Venn, para mostrar "a cara" dos elementos de D:



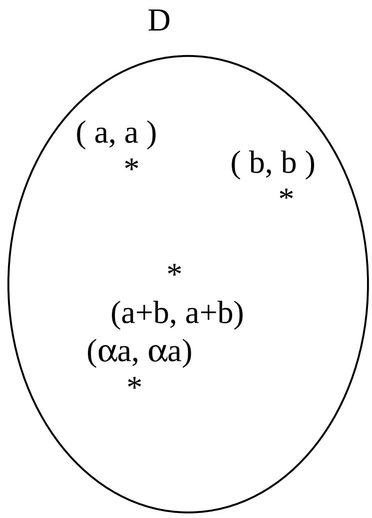
e estabelece o seguinte diálogo:

> P – O D já é um subconjunto de R^2.
>
> A – Você tem que provar que quando você faz uma adição ou uma multiplicação por escalar, você vai continuar dentro do D.
>
> P – Dentro do conjunto. Então, se eu pegar um par (a, a) e um par (b, b) aqui, se eu somar, o que vai acontecer?
>
> C – ....
>
> P – A soma, está aqui ou está aqui fora?
>
> C – Está dentro.
>
> P – Está dentro. $(a + b, a + b)$. Primeiro elemento é igual ao segundo. Multiplicação por escalar. Multipliquei por um Real alfa qualquer.

> $(\alpha a, \alpha a)$. Primeiro elemento e segundo elementos iguais. Está dentro do D?
>
> A – Está.

O professor está utilizando o recurso-meta de dar informações sobre o que constitui uma operação matemática, fazendo-os refletir na forma dos elementos do subconjunto e na definição de subespaço.

Ele explicou que pegando dois elementos do subconjunto e somando, o resultado da soma fica dentro do subconjunto e que ao multiplicar um elemento do subconjunto por um número real qualquer, α, o resultado também fica lá dentro. Ele utilizou o seguinte diagrama de Venn para representar sua explicação:



Em seguida, pergunta aos alunos se os quatro axiomas da adição valem par o subconjunto D. Após uma pequena pausa, conclui:

> P - Se valem para o R^2, valem para D, pois D é uma parte do R^2.

O professor está utilizando o recurso-meta do questionamento, que segundo Dorier, pode levar os alunos a refletirem sobre suas atividades.

Após garantir que os oito axiomas da operação de adição e multiplicação por escalar são satisfeitos para D, pois, como ele disse, "Se valem para o R^2, valem para D, pois D é uma parte do R^2", o professor responde aos alunos a questão sobre o que é preciso garantir para o subconjunto ser um subespaço vetorial, com o seguinte comentário:

> P – (...) Que o conjunto seja fechado para a adição e ele seja fechado para a multiplicação por escalar.

Com a exposição acima, o professor pode ter levado os alunos a perceberem a seguinte proposição, contida na atividade "AULA 3":

> **2. Proposição:** Critério Prático
>
> Seja *V* um espaço vetorial sobre $\Re$. Um subespaço vetorial de *V* é um subconjunto $W \subset V$ tal que:
>
> (i) $\forall u, v \in W, u + v \in W$
>
> (ii) $\forall \alpha \in \Re, \forall u \in W, \ \alpha \cdot u \in W$
>
> Isto significa que *W* é fechado para as operações de adição e multiplicação por escalar.

Em seguida, o professor comentou que, se o conjunto não possui o vetor nulo, então, o conjunto não é um subespaço vetorial, pois de acordo com o item ii) da proposição acima, se $\alpha = 0$, o vetor nulo está no subconjunto. Desta maneira, para o caso de não ser um subespaço vetorial, ele recomenda:

> **P- [...] Basta mostrar um contra-exemplo.**

Novamente, o professor está utilizando informações a respeito do que constitui a lógica matemática (que para invalidar uma conjectura basta dar um contra-exemplo) e uma operação matemática, enfatizando a economia de trabalho.

O professor solicitou aos alunos para que trabalhassem nos exercícios do item 3 da atividade "Aula 3". Mais adiante, ao atender a dúvida de um aluno sobre a verificação do exercício $W = \{(-x, x) \in \Re^2\}$ ser um subespaço vetorial, o professor fez o seguinte comentário:

> (...)

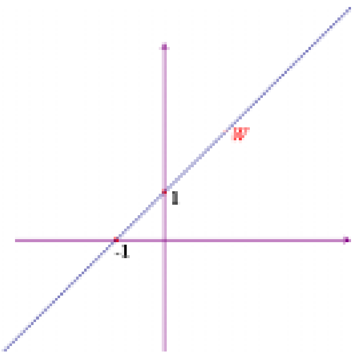
P – Então parem de ler (x, -x) como sendo um positivo e um negativo. Não é verdade. Eu tenho um par ordenado em que o primeiro elemento é o oposto do segundo. Números reais.

Com este comentário, o professor quer alertar os alunos sobre a formação dos elementos do conjunto, ao dizer "Eu tenho um par ordenado em que o primeiro elemento é o oposto do segundo". Em minha opinião, o comentário é um recurso-meta e fornece informações sobre a Matemática.

A aula foi encerrada com o professor resolvendo e comentando os seguintes exercícios:

b) $W = \{(1, 3), (0, 0), (2, 6)\}$

c)



d) $W = \{(x, y) \in \Re^2 / y = |x|\}$

Vale a pena notar, que o professor continua variando o tipo de exercícios propostos aos alunos.

8ª aula

O professor iniciou a aula solicitando à classe a noção de subespaço vetorial. Para o comentário "Subconjunto do espaço vetorial", dado por um aluno, Siqueira reforçou: "Um subconjunto de um espaço vetorial. Que tem as mesmas operações que foram definidas para o espaço vetorial" e, em seguida, estabeleceu com a classe, o seguinte diálogo:

(...)
Isso garante que ele seja um subespaço?
C – Não.
P – O que mais precisa?

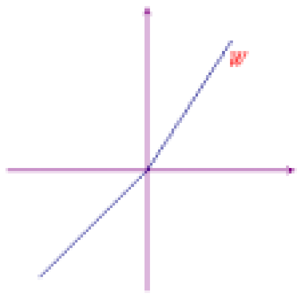
O professor, utilizando o recurso-meta do questionamento, tentou fazer os alunos refletirem sobre o uso do dispositivo prático, abordado na aula anterior, para o qual dados dois elementos do subconjunto, basta verificar se ao somar os dois elementos e ao multiplicar um elemento por um escalar, os resultados estão contidos no subconjunto.

Siqueira fez uma série de comentários e questionamentos para ajudar os alunos a recordar os dispositivos, conforme abaixo:

P - (...) um subespaço é o que? ... Um subconjunto de um espaço vetorial que também é espaço vetorial. Ora, aí o que é que acontece?
C – ………
P – O que acontece? ... Eu tenho que ter as duas operações. Quais são as operações?
A – Adição e multiplicação.
P – Adição e multiplicação por escalar. Mas, essas duas operações têm que ser as operações do espaço, não é isso? ... Ora, se esse subconjunto também é um espaço vetorial, eu só tenho que? Que as duas operações estão definidas e que valem para cada uma, aquelas propriedades, não é isso? Então, basta eu mostrar o que?
C – ………
P – O que é que basta, eu mostrar para eu saber se é subespaço?
A – As propriedades, lá.
P – As propriedades. Que propriedades? Vou ter que mostrar todas as propriedades?
C – Não.
P – Não. Então, não são as propriedades. O que é que eu devo mostrar?
A – Vale $u + v$ e αv.
P – Que o conjunto é fechado para a adição e para a multiplicação por escalar.

O professor insiste na estratégia de utilizar o recurso do questionamento para levar os alunos a refletirem sobre suas atividades. O papel do questionamento dentro da sala de aula, freqüentemente usado pelo professor, para Dorier é um recurso-meta.

Em seguida, ele desenha no quadro, o gráfico abaixo, que faz parte do exercício g, da Lista de exercícios da "AULA 3", descrita acima:



O professor pergunta aos alunos se o conjunto W, representado por um gráfico no sistema cartesiano, é um subespaço vetorial. Como podemos ver, o conjunto W é formado pela união de duas semi-retas que se iniciam na origem, com direções distintas. Ao se adicionar um elemento da primeira semi-reta com um da segunda, com certeza, a soma estará fora do conjunto W. Aqui, o professor utiliza o recurso-meta da mudança de quadros para fazer o aluno refletir no problema por meio de outro ponto de vista.

Em seguida, ele mostrou que o subconjunto não é um subespaço vetorial, por meio de um contra-exemplo.

Durante todo o restante da aula, os alunos resolveram os exercícios, sobre a verificação de o conjunto ser ou não um espaço vetorial, proposto na lista de exercícios, denominada "Aula 3".

É importante destacar que nesta lista de exercícios, o professor utilizou uma variedade de exercícios para os alunos verificarem a veracidade dos subconjuntos serem subespaços vetoriais

9ª aula

No início desta aula, o professor solicitou aos alunos trabalharem com a lista de exercícios denominada "Aula 04: Intersecção e somas de sub-espaços vetoriais", que trata das noções indicadas no título.

Esta lista também apresentava a definição de intersecção e a soma de subespaços vetoriais, que apresento a seguir:

> **Definição 1:** Sejam U e W subespaços vetoriais de um espaço vetorial V. Indicaremos por $U \cap W$ e chamaremos de interseção de U e W o seguinte subconjunto de V:
>
> $$U \cap W = \{u \mid u \in U \text{ e } u \in W\}$$
>
> **Definição 2:** Sejam U e W subespaços vetoriais de um espaço vetorial V. Indicaremos por $U + W$ e chamaremos de soma de U e W o seguinte subconjunto de V:
>
> $$U + W = \{u + w \mid u \in U \text{ e } w \in W\}$$

A lista inicia-se com uma questão que visa a escrever dois vetores, como soma de outros vetores. Um deles podia ser escrito como soma de várias maneiras e o outro, de uma única maneira. Ao usar este recurso-meta, o professor podia estar querendo fazer os alunos refletirem sobre a noção de soma direta.

Em seguida, o professor trabalhou a noção de interseção e soma de subespaços vetoriais e diz que ao pensar na “cara” dos elementos é fácil buscar a interseção por intermédio da característica de cada um. O termo "cara" é um recurso-meta que pode levar o aluno a refletir sobre a formação dos elementos do conjunto evidenciado.

Para a soma de subespaços, ele enfatizou que a operação não é a mesma que a união de conjuntos, ao contrário da interseção, que tem as mesmas características.

> P - A soma, cuidado, soma não é União

O professor está utilizando o recurso-meta da passagem do antigo para o novo conhecimento, fazendo os alunos refletirem sobre as operações com conjuntos. Mais uma vez, temos a teoria dos conjuntos sendo utilizada como um recurso-meta no ensino da Álgebra Linear.

O restante da aula foi utilizado para resolver alguns problemas propostos na lista de exercícios, como os seguintes:

> 1) Se $U = \{(x, 0) \mid x \in \Re\}$ e $W = \{(0, y) \mid y \in \Re\}$ são subespaços de $\Re^2$ determine:
>
> a) $U \cup W$ b) $U + W$ c) $U \cap W$ d) Verifique se $U + W$ é subespaço de $\Re^2$.
>
> 2) Se $U = \{(x, y) \in \Re^2 \mid y = x\}$ e $W = \{(x, y) \in \Re^2 \mid y = -x\}$ são subespaços de $\Re^2$ determine:
>
> a) $U \cup W$ b) $U + W$ c) $U \cap W$
>
> d) É possível escrever (12, -2) como soma de um vetor de *U* e um vetor de *W*?

10ª aula

Nesta aula, o professor pediu para os alunos utilizarem a lista de exercícios denominada "Aula 5”. Esta atividade aborda as noções de combinação linear e de conjunto gerador.

A atividade começa com a seguinte declaração:

> **COMBINAÇÃO LINEAR**
>
> **Esta é uma das características mais importantes de um espaço vetorial. Trata-se da obtenção de novos vetores a partir de vetores dados.**

Com a expressão "(...) umas das características mais importantes...", o professor chama a atenção dos alunos para o interesse desta noção. De acordo com Dorier, esta declaração é uma informação sobre a Matemática a ser aprendida, é um recurso-meta.

Em seguida, o professor escreveu no quadro o primeiro exemplo da lista:

> (1, 7) = _ (1, 1) + _ (1, 2) + _ (1, 3)
>
> P – A Idéia é ... combinação linear. O que seria combinação linear? ... A partir de alguns vetores dados, alguns vetores que eu tenho, eu produzir outros vetores. (...) Será que eu consigo colocar aqui, números, que na hora que eu fizer esta operação eu tenha (1, 7)?

Os alunos começaram a indicar números que deveriam preencher os espaços vazios, "_", e satisfazer a igualdade. Por meio desse estratagema os alunos conseguiram indicar três números que satisfizeram a equação.

Em seguida, o professor sugeriu o mesmo tipo de problema trocando os vetores por matrizes de ordem 2:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \_ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \_ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Neste caso, Siqueira utilizou o exemplo de matrizes, que dificultaria o calculo dos alunos por ensaio e erro, para assim, introduzir a técnica adequada para verificação de combinações lineares. No caso, foi usado um recurso-meta, que tornou evidente aos alunos a necessidade de aprender uma nova técnica que lhes possibilitaria resolver qualquer problema desse tipo.

Primeiro, o professor usou, os vetores da geometria analítica como a situação concreta e, em seguida, com a idéia das matrizes de ordem 2x2, ele criou a necessidade de uma técnica. Neste exemplo, percebe-se claramente, a utilização dos dois princípios de Harel o da concretização e da necessidade.

Depois da abordagem do conjunto de matrizes, Siqueira trabalhou com combinação linear em outros espaços vetoriais, levando os alunos a aplicarem a técnica introduzida em novos espaços vetoriais, o que provocou a generalização da técnica para os espaços vetoriais reais conhecidos. Este recurso meta constitui-se no terceiro princípio de Harel, o da generalização.

Nessa mesma aula, o professor introduziu a noção de “conjunto gerador”, e apresentou a simbologia [S] para o conjunto gerado pelo conjunto gerador S.

Afirmou que [S] era um subespaço vetorial e passou a tratar do seguinte exemplo da atividade "Aula 5”: "Se $V = \Re^3$, $u = (1, 0, 0)$ e $v = (1, 1, 0)$ determine $[u, v]$". Perguntou aos alunos:

> Agora eu quero saber que cara que tem o conjunto gerado pelos vetores u e v?

O professor utilizou o recurso-meta do questionamento para fazer os alunos refletirem sobre a forma do elemento genérico do conjunto gerado por u e v.

A seguir, o professor passou a discutir, na lousa, os seguintes exercícios:

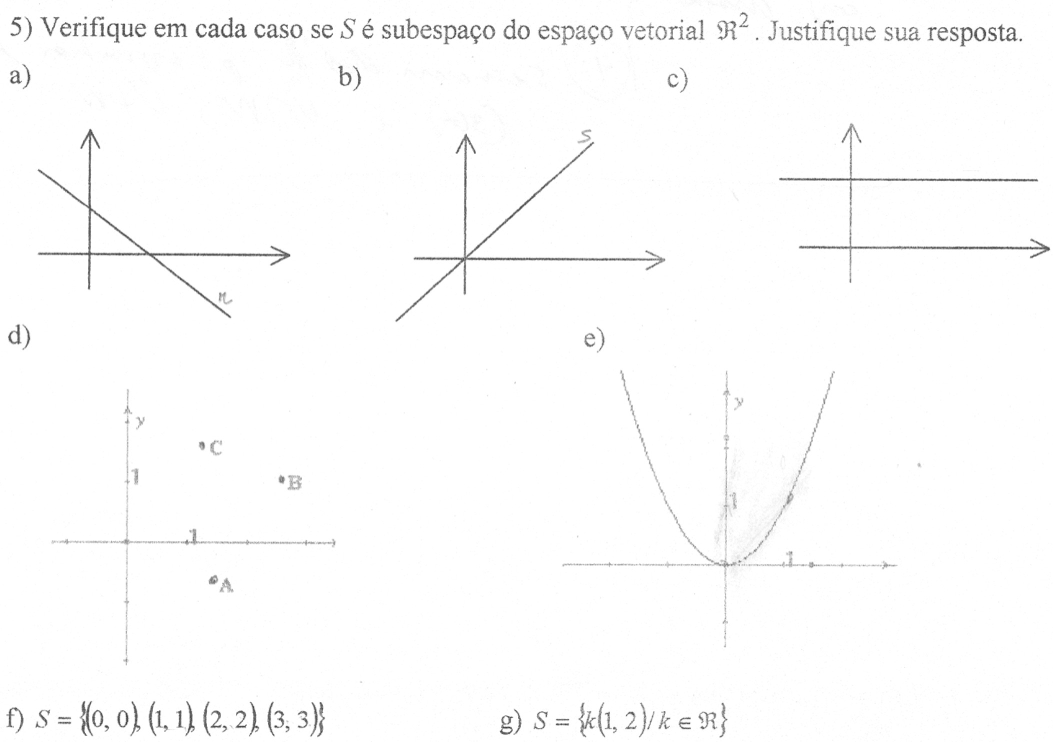
> 2) Determine o subespaço gerado pelo vetor $(0, 0) \in \Re^2$.
>
> 3) Se $V = \Re^2$ e $S = \{(1, 0), (0, 1)\}$ determine $[S]$.
>
> 4) $S = \{(1, 1), (2, 1)\}$ gera $\Re^2$?
>
> 5) Dar um sistema de geradores para o subespaço $W = \{(x, y, z, t) \in \Re^4 / x + y = 0 \; e \; z - y = 0\}$
>
> 6) Idem para o subespaço $U = \{(x, y, z, t) \in \Re^4 / 2x + y - t = 0 \; e \; z = 0\}$

Nesta seleção feita pelo professor, nota-se uma diversidade de enfoques sobre o tema. Os exercícios 3 e 4 mostram ao aluno que um mesmo espaço vetorial o R^2 pode ser gerado por diferentes conjuntos geradores. Os exercícios 5 e 6 solicitam a operação inversa dos exercícios anteriores, ou seja, dado um subespaço vetorial encontre os geradores. Isto pode fazer os alunos refletirem sobre a reversibilidade dos conceitos: Todo conjunto de vetores gera um subespaço vetorial e, por outro lado, todo subespaço vetorial é gerado por um conjunto de vetores.

11ª aula

Esta aula foi dedicada à primeira avaliação feita individualmente em sala de aula.

Nas 1ª e 5ª questões foram apresentados exercícios sobre noção de subespaço vetorial. Na 1ª são abordados um subconjunto do R^3 e outro do $M_2(R)$ - conjunto das matrizes quadradas de ordem 2. É interessante notar que a 5ª questão aborda o tema de subespaços do R^2 em diferentes domínios: gráfico e simbólico.


5) Verifique em cada caso se S é subespaço do espaço vetorial $\Re^2$. Justifique sua resposta.

a) b) c)

d) e)

f) $S = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ g) $S = \{k(1, 2) / k \in \Re\}$

Isto pode provocar uma reflexão do aluno sobre a interação entre domínios, pois para responder aos diferentes itens que apresentam gráficos, o aluno terá forçosamente que recorrer a elementos da estrutura de subespaço vetorial. Ainda é importante notar que a questão apresenta exemplos (b, g) e contra-exemplos (a,c,d,e,f) de subespaços vetoriais. É patente a intenção do professor apresentar questões que repetem recursos-meta utilizados em sala de aula.

As 2ª e 4ª questões versavam sobre subespaços gerados, na 2ª dados dois vetores do R^3, pede-se o subespaço gerado por eles, na 4ª dá-se o inverso: dados subespaços do R^3, solicita-se seus geradores. A 3ª questão tratava de combinações lineares no R^3.

12ª aula

O professor começou esta aula perguntando à classe sobre cada uma das noções estudadas desde o início: espaço vetorial sobre R, subespaço vetorial, soma e interseção de subespaços vetoriais e combinação linear. Ao final, comentou com os alunos sobre “a cara que têm os elementos do subespaço”, referindo-se ao elemento genérico de cada espaço vetorial estudado.

Assim, retomou os assuntos abordados na avaliação feita pelos alunos na aula anterior, para introduzir a noção de dependência linear, constante da sexta atividade, denominada "FICHA 06".

Siqueira, então, declarou a necessidade de um método, para:

> P - ... partir de alguns vetores e produzir outros. Eu tenho alguns vetores e eu consigo produzir outros.

Em seguida, o professor referiu-se à atividade denominada "FICHA 6", cujo inicio é o seguinte:

> A fim de identificar o conjunto gerador de um dado subespaço, precisamos conhecer algumas “relações algébricas” existentes entre os vetores do conjunto gerador.
>
> Vimos que o conjunto gerador $S = \{(1, 1), (1, 0), (1, 2)\}$ nos fornece o subespaço $[S]$ que é igual ao $\Re^2$. Vimos também que o conjunto gerador $L = \{(1, 1), (0, 1)\}$ nos fornece o subespaço $[L]$ que também é igual ao $\Re^2$.
>
> Mas, existem algumas diferenças entre *L* e *S*:
>
> - *L* possui 2 vetores e *S* possui 3 vetores.
>
> - Em *S*, o vetor (1, 2) é combinação linear dos vetores (1, 1) e (1,0), isto é, $(1, 2) = 2(1, 1) + (-1)(1, 0)$
>
> - Em *L*, não existe um vetor que seja combinação linear dos outros, isto é, não existe α tal que $(1, 1) = \alpha(1, 0) = (\alpha, 0)$ pois se $\alpha = 1$, 1 = 0 o que é absurdo.

Esta lista de exercícios inicia-se com um texto que tenta levantar nos alunos a idéia de que o conjunto $S = \{(1,1),(1,0),(1,2)\}$ e o conjunto $L = \{(1,1),(0,1)\}$ são geradores do R^2, mas que L e S são diferentes, pois S tem um elemento a mais que L e, ainda, em S, um de seus elementos é combinação linear dos outros dois.

O professor retoma oralmente com os alunos o inicio do texto. Nessa retomada, aponta o conjunto S e ocorre o seguinte diálogo:

> P – (...) a gente viu na aula passada, este S, se eu pegar as combinações lineares de S, eu gero ... R^2. Se eu pegar as combinações lineares de L eu gero o R^2. Agora mesmo, vocês disseram que este S gera o R^2, né? Bem, tenho este conjunto e tenho este conjunto e vou gerar o R^2. Aliás, eu tenho até três aqui no quadro. Se eu fosse escolher um deles para trabalhar, qual eu escolheria?
>
> P – escreve na lousa {(1,0),(01)}
>
> C – Murmúrios.
>
> A – Esse. (o aluno aponta para o conjunto formado pela base canônica do R^2).
>
> P – Óbvio. ... Tenho que pegar o quê?... O conjunto mais simples que eu teria para gerar o R^2.
>
> P – Posso partir daqui?
>
> O professor aponta para o conjunto $S = \{(1,1),(1,0),(1,2)\}$
>
> A – Pode.
>
> P – Posso. Só que o que vai acontecer?
>
> A – A gente vai ter mais trabalho.
>
> P – Eu vou ter mais trabalho (...)

Este diálogo apresenta uma situação propicia para o aluno refletir nas vantagens de um conjunto gerador minimal, sugerindo a idéia de conjunto linearmente independente. Com este recurso-meta, o professor dá a idéia da economia de trabalho, ao utilizar os menores conjuntos para trabalhar. Este recurso-meta foi mencionado por vários professores entrevistados por Zoraide Padredi.

Além disso, ele leva o aluno a refletir sobre um modo de verificar se um dado conjunto é linearmente dependente, por meio do seguinte comentário:

P – (...) um deles como combinação linear dos outros, é uma diferença que eu vou ter que ficar olhando. (...) Essa é uma das características de um conjunto que a gente vai chamar de L.D., ou seja, linearmente dependente. Eu tenho alguém que está dependendo dos outros, lá dentro do meu conjunto.

O professor utilizou o recurso-meta de fornecer informações sobre o que constitui o conhecimento matemático ao abordar as operações matemáticas envolvidas, tentando levantar no aluno a idéia de que um conjunto é linearmente dependente se algum de seus elementos é combinação linear dos demais.

Em seguida, o professor afirma que o conjunto S é linearmente dependente e o L é linearmente independente e indica as seguintes definições constantes da ficha 6:

<u>Definição</u>

Seja *V* um espaço vetorial e $S = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$, $S \subset V$. Dizemos que *S* é um conjunto linearmente independente (LI) se a igualdade $a_1u_1 + a_2u_2 + ... + a_3u_n = 0_V$ com $a_1, a_2, ..., a_n \in \Re$, só for verdadeira para $a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$

<u>Definição</u>

Quando o conjunto $S \subset V$ não é LI, dizemos que ele é linearmente dependente (LD). Ou ainda, se ao menos um dos $a_i \neq 0$.

O professor estabelece um diálogo com a classe para explorar a operacionalidade das definições acima:

P - (...) Então, vamos olhar o que está acontecendo aqui. Se eu fizer a combinação linear desses dois aí: $\alpha(1,1) + \beta(0,1)$. Isso aqui, aí na definição de vocês, ... eu estou colocando zero aqui, mas deve estar assim: (0,0). Eu peguei o elemento neutro do conjunto que eu estou trabalhando. Quem é o zero do R^2 ?

A – (0,0).

P – (0,0). Aí, então, eu ficar com alfa igual a zero e alfa mais beta igual a zero. Então, isso aqui só acontece... não tem como. O alfa é zero e alfa igual a beta igual a zero..

O professor escreve na lousa:

$$\alpha(1,1)+\beta(0,1)=(0,0)$$

$$\begin{cases}\alpha=0\\ \alpha+\beta=0\rightarrow\beta=0\end{cases}$$

$$\alpha=\beta=0\rightarrow L.I.$$

P – Olha, então, eu vou dizer que esse meu conjunto L aí é L.I

Assim, o professor escreve na lousa, enquanto fala para os alunos.

$$\{(1,1),(1,0),(1,2)\}$$

$$\alpha(1,1)+\beta(1,0)+\gamma(1,2)=(0,0)$$

P – Vamos ver aqui agora. Qual o sistema que tenho para resolver?

A – Alfa mais beta mais gama igual a zero e alfa mais dois gama igual a zero.

O professor repete a fala dos alunos enquanto escreve na lousa:

$$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=0\\ \alpha+2\gamma=0\end{cases}$$

Ele aguarda um momento para que os alunos resolvam o sistema acima. Como ninguém se manifesta, o professor intervém.

P – Gente, ... são duas equações e três incógnitas. O que é que eu tenho?

C – Murmúrios.

P – Quero saber a solução desse sistema linear. ... Quero respostas. ... Primeira coisa que eu sei desse sistema linear, o que é?

A – Tem várias soluções.

P – Que ele tem infinitas soluções. Segunda coisa que eu tenho? ... Se agora eu estou igualando o meu sistema ao vetor nulo, o que vai acontecer? ... Eu vou ter sempre sistemas lineares **homogêneos**.

C - ....

P – Sistema linear homogêneo. Eu posso ter um sistema linear impossível?

C – Não.

P – Não. Por quê? ... Porque eu não posso ter um sistema impossível?

A – Porque com o zero, [...] tem pelo menos um valor.

P – Qual?

A – O alfa ou o beta.

P – Tem pelo menos uma solução, ... em que todas essa incógnitas aí são iguais a zero. Isso sempre vai acontecer. Eu sempre vou ter a solução (0, 0, 0). Qual é a **minha discussão aqui**? ... Quero saber **quando** esta solução é única. Porque sistema linear homogêneo ou eu vou ter

> esta solução única, o (0, 0, 0) ou eu vou ter um sistema possível e indeterminado.

O professor utilizou o recurso-meta do questionamento, levando os alunos por meio de questões a perceberem a sutileza da definição de conjuntos linearmente independentes.

Após solicitar dos alunos várias verificações sobre a dependência linear de diferentes conjuntos, utilizando a definição o professor apresentou o dispositivo prático do escalonamento da matriz formada pelos vetores de um conjunto do R^3.

A seguir, Siqueira explica:

> Se eu der um conjunto para você e desejar que você elimine desse conjunto os elementos que estão fazendo com que ele seja l.d., aí você vai fazer, sabe o quê? ... Você vai resolver o sistema linear e vai dizer assim: há, é l.d. Eu digo, ótimo. Agora tira do conjunto quem é que está tornando esse conjunto aí, l.d. Joga fora para mim, que eu quero um conjunto l.i.

Este recurso-meta, empregado pelo professor pode fazer com que o aluno reflita na possibilidade de colocar e tirar vetores de um conjunto e suas conseqüências.

O professor Siqueira terminou esta aula, fazendo os alunos refletirem sobre o conjunto $S = \{1, x-1, x+1\}$:

> g) $S = \{1, x-1, x+1\}$
>
> P – Que conjunto eu estou trabalhando aqui?
>
> C – Os Reais.
>
> P – Que conjunto é este?
>
> A – R^3.
>
> P – É igualzinho. Eu escrevo isto no lugar de escrever isto. R^3 é uma terna.

> O professor compara a representação do vetor no R^3 com o conjunto do exercício g.
>
> P – Quais são os elementos daquele conjunto? ... O que é que eu tenho aí?
>
> A – 1.
>
> P – 1. O que mais? ... Quantos elementos eu tenho naquele conjunto?
>
> A – Três.
>
> P – Eu tenho três elementos neste conjunto. Que elementos são estes?
>
> A – $1,\ x-1,\ x+1$.

Este diálogo provocou a especulação sobre os elementos desse conjunto de polinômios que, geralmente, é confundido pelos alunos com elementos do R^3, conforme se verificou. Acredito que foi um recurso-meta que evidenciou a necessidade de localizar os vetores no devido espaço vetorial.

O recurso é utilizado com mestria por esse professor: ele faz com que o aluno explicite a confusão sobre determinado assunto para em seguida trabalhar a noção relativa à dificuldade.

13ª aula

Nesta aula, trabalhar-se-ia a atividade denominada de ficha 7, cujo conteúdo inicial remete à noção de base de um espaço vetorial, como segue:

> Queremos encontrar dentro de um espaço vetorial *V,* finitamente gerado, um conjunto finito de vetores, tal que qualquer outro vetor de *V* seja uma combinação linear dele, e mais, que todos os vetores desse conjunto realmente sejam necessários para gerar *V*. A esse conjunto, daremos o nome de base.

Esta frase reflete a idéia da necessidade de um conjunto gerador minimal, idéia essa também utilizada no discurso de professores entrevistados por Zoraide

Padredi que a considerou um recurso-meta passível de se tornar uma alavanca-meta para os alunos.

Logo após o comentário descrito, na mesma atividade, é apresentada a seguinte definição formal de base:

> <u>Definição</u>: Um conjunto finito $B = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ de vetores de *V* será uma base de *V* se:
>
> i) $B = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ é LI.
>
> ii) $[B] = V$.

Como se vê, trata-se de uma definição presente na maioria dos livros didáticos de Álgebra Linear, conforme afirma Araújo (2002).

No entanto, o professor iniciou a aula reportando-se a exercícios da atividade anterior que provocaram dúvidas nos alunos sobre a resolução requerida:

> O professor escreve no quadro: $C = \{(1,0), (0,1)\}$
>
> P – Outro conjunto que gere o R^2?
>
> C – Murmúrios.
>
> P – A primeira parte de dependência linear já começa com isso. ... e chamou de $L = \{(1,1), (0,1)\}$.
>
> O professor escreve no quadro:
>
> $L = \{(1,1), (0,1)\}$.
>
> P – Outro. ... Na primeira página de dependência linear, qual é o outro conjunto que gera o R^2?
>
> O professor escreve no quadro:
>
> $S = \{(1,1), (1,0), (1,2)\}$
>
> P – Ora, o que é que eu posso dizer? ... A gente ... este conjunto C gera o R^2, este conjunto L gera o R^2 e que este conjunto S **gera o R^2**, certo? ... Que diferença eles tem?
>
> A – Tem combinações lineares entre eles.
>
> P – l.i. ou l.d.. Quem é l.i. e l.d.?
>
> A – Os dois primeiros são l.i.. e ...

O professor utilizou o recurso-meta do questionamento, fazendo os alunos refletirem sobre os conhecimentos deste domínio, isto é, seus conceitos, as suas propriedades e até os procedimentos matemáticos em jogo. Em seguida, ele apontou para os conjuntos L e S e prosseguiu:

> P – [...] Por que eu escolheria este (L) e não este (S)?
> A – É l.i.
> P – Porque é l.i.. Mas ... não é qualquer l.i.? Este tem dois vetores e este tem?
> C – Três.
> P – Três. ... Eu poderia ter aqui um conjunto de quantos vetores?
> A – Mil.
> P – Mil. Gerava o R^2?
> A – Gerava.
> P – Qual é o melhor?
> A – O primeiro?
> P – Eu tenho que trabalhar com quem gera o R^2. Foi o que eu fiz.

Neste trecho, o professor enfatizou que existem muitos conjuntos geradores do R^2, e que esses conjuntos podem ter 2, 3,... 1000 elementos, para depois, fazer os alunos refletirem sobre esta idéia, com a seguinte pergunta: “Qual é o melhor?” Neste momento, implicitamente, o professor parece sugerir a idéia de se trabalhar com um conjunto minimal de geradores.

Após discutir a dúvida de um aluno sobre dois vetores do R^2, sempre serem linearmente independentes, o professor prosseguiu:

> P –... Quando você está me falando qualquer conjunto com dois vetores...
> A – Um subconjunto do R^2.
> P – Ah, de R^2. É do R^2 que você está pensando. Você tem que dizer, senão eu vou pensar em matrizes três por três, vou pensar em polinômios, vou pensar em complexos. Então, vamos fazer essa pergunta reformulada.
> A – Qualquer conjunto do R^2
> P – Qualquer subconjunto do R^2...

A – ...com dois elementos é l.i.?

P – Pode ser?

C – Pode.

P – Sempre?

C – Murmúrios.

O professor escreve no quadro $\{(1,1),(0,0)\}$ e $\{(1,1),(5,5)\}$ e, em seguida, apontando para cada um dos dois conjuntos , pergunta à classe.

P – este aqui é l.i? e este daqui é l.i.?

A **–** não, l.i. não

Aqui, o professor utilizou os recursos-meta do questionamento e dos contra–exemplos, tentando levar os alunos a refletirem sobre a afirmação feita pelo colega, e apresentou um contra–exemplo que poderia possibilitar aos alunos perceberem onde houve falha na proposta do colega, fazendo com que o próprio aluno modificasse sua afirmação. Esses recursos-meta podem ter se constituído em alavancas-meta para este aluno.

A seguir, o professor inclui no diálogo com os alunos a noção de base de forma informal:

P – Então você sabe a resposta. ... Olha isto aqui, tanto o C como o subconjunto L. Nós vamos dizer o quê? ... Eles são base do R^2. ... E base do R^2 é quem? ... Um subconjunto do R^2 , L.I., que gera o R^2, tudo bem?

Então, o professor introduziu a noção de dimensão :

P – Ora, e aí nós vamos dizer o seguinte: que a dimensão do R^2, que nós vamos representar assim (dim R^2) é igual à quantidade de vetores da base, de uma base do R^2. Quantos vetores têm em uma base do R^2?

C – Murmúrios.

P – **Quantos vetores têm em uma base do R^2?**

C – Dois.

O professor, então, comentou que existe um teorema que diz que todas as bases do R^2 têm dois vetores e passou a comentar sobre as bases canônicas. Após estabeleceu-se o seguinte diálogo:

P – Quem dá outra base do R^3 que não é a canônica?

A – a é 2 e b é 3.

P – Combinações lineares da base canônica, pode ser? Vamos lá, com é que fica?

A – (2,0,0) , (0,3,0), .(0,0,4).

O professor escreve na lousa:

$$B = \{(2,0,0), (0,3,0), (0,0,4)\}$$

P – É L.I.? ... É L.I. ou não?

A classe ficou dividida, uns achavam que era e outros, não. Então, o professor escreveu na lousa a combinação linear com os três vetores e igualou ao vetor nulo, enquanto falava em voz alta para a turma.

$$\alpha(2,0,0) + \beta(0,3,0) + \gamma(0,0,4) = (0,0,0)$$

P – O que é que vai acontecer aqui?

O professor monta o sistema linear com a ajuda dada pelos alunos, com todos falando em voz alta.

$$\begin{cases} 2\alpha = 0 \\ 3\beta = 0 \\ 4\gamma = 0 \end{cases}$$

P – É L.I. ou L.D?

C – L.I.

P – Se esse aqui é L.I. e eu fizer .. multiplicar cada um deles por um número, via dar sempre zero. **Ora, então este aqui é base?** Gera o R^3?

C – Gera.

P – Gera o R^3. ... Então, é base do R^3. Gera o R^3 não é? E é L.I.

Neste caso, o professor está usando o recurso-meta para fornecer informações sobre a Matemática, tentando fazer o aluno refletir que existem infinitas bases, além da base canônica.

A seguir, o professor apresentou o subconjunto {(1,1,1), (1,-1,1)} e perguntou se esse subconjunto poderia ser base do R^3, levando os alunos a sugerirem mais um vetor que completasse o conjunto transformando-o em uma base do R^3. Referência clara ao “teorema do completamento de uma base”, cujo enunciado consta da lista de exercícios proposta aos alunos.

Em seguida, um aluno questiona:

> A – Se eu tiver um conjunto L.D., eu posso chegar em uma base do R^2, a partir dele?
>
> P – Como é que a gente mostrou que isso podia ser feito? ... Dados (1,1), (1,0) e (1,2). Agora escalona.
>
> O professor resolve o escalonamento e chega em uma linha com escalares iguais a zero.
>
> P – Quem é que eu vou jogar fora?
>
> A – (1,2).
>
> P – Este aqui, jogou fora. ... **Sempre que** eu escalonar eu vou encontrar uma linha de zeros que vai me levar a quê? ... Pode jogar fora este. Outra coisa, se eu pegar (1,0) e (1,2), muda alguma coisa? ... É L.I. É uma base do R^2. Lembra que eu falei: isto aqui é um caminho ..., o escalonamento é um caminho de eu responder o quê? ... Se o conjunto é L.I. ou L.D. E no caso deles serem L.D. é uma maneira que eu tenho de **descartar** um dos elementos que está transformando o conjunto em L.D., tudo bem?

O professor, ao dar essa resposta utilizando a imagem do “descarte“ dos elementos, usou de uma analogia para dar a idéia de que estava se livrando dos elementos que tornavam o conjunto linearmente dependente e para mostrar as vantagens do método de escalonamento nesse descarte. Vale notar que, naturalmente, o professor estava se referindo àqueles conjuntos que geravam o espaço vetorial e que eram linearmente dependentes.

Mais adiante, solicitou aos alunos um exemplo de uma base do conjunto de polinômios de grau $\leq$ 2 mais o polinômio nulo, conforme o trecho abaixo, retirado da transcrição da aula:

P – Polinômios de grau 2 ou menor que 2. Vamos lá. ... Uma base desse conjunto?

A – 1+x e x^2.

P - 1+x e x^2. Pode ser? ... Vou chamar de B

O professor escreve na lousa:

B = { 1+x , x^2 }

P – Qual é a dimensão de um polinômio de grau 1 ou menor que 1?

A – 2.

P – 2. ... Se você está me dizendo que 1+x e x^2 gera $P_2(R)$, você está dizendo você está me dizendo que este conjunto **também** tem dimensão ... 2. Pode ser?

A – Pode.

A – Não.

P – Qual seria a base canônica ... Que cara tem alguém deste conjunto, antes disso?

C – $ax^2 + bx + c$

O professor escreve na lousa:

$ax^2 + bx + c$

P – Combinações lineares?

C – ....

P – Quem seria a base canônica do ...

A – x^2, ax, ...

Enquanto escreve na lousa, o professor fala para os alunos e estes agora também repetem come ele.

C = { x^2, x, 1 }

P – Se isto é verdade, qual é a dimensão ...

A – 3.

O professor escreve na lousa:

dim $P_2(R) = 3$.

A – Mas no outro a dimensão é dois.

P – Aonde que a dimensão é dois?

A – No B.

P – Aqui? (o professor aponta para o conjunto B = { 1+x , x^2 } escrito anteriormente). Mas quem falou para você que o B gera isto aqui. Gera? (o professor aponta para $ax^2 + bx + c$, escrito anteriormente).

A – Pode ser uma equação de segundo grau que...

P – Sempre vai gerar?

C – Murmúrios.

P – 1 + x, x^2. Dois vetores. L.I. … Quem pode gerar todos os polinômios de grau 2 ou menor que dois?

A – Esse aí não gera nenhum com ...

P – Ele aí não gera nenhum com?...

A – bx no caso ... aliás, com constante. Quer dizer, ele vai gerar x e x^2, mas nunca vai gerar o terceiro.

P – Esse aqui sempre vai gerar x^2 e x, né? ... Se eu coloco zero vezes isso e varro aqui os reais, eu vou ter sempre x^2. Se eu pego aqui e coloco aqui ... quer dizer, o que é que não está gerando aqui?

O professor empregou o recurso-meta do questionamento para levar os alunos a refletirem sobre o exemplo dado pelo colega, fazendo-os apresentar um vetor do espaço vetorial em questão, que não era gerado pelo conjunto dado no exemplo do aluno. Esse recurso-meta faz com que os alunos reflitam sobre o fato de que a noção de base de espaço vetorial é a de maior conjunto linearmente independente contido nesse espaço, isto é, base é um conjunto linearmente independente maximal.

Em seguida, ainda utilizando a idéia de base e dimensão, o professor solicitou uma base para as matrizes quadradas de ordem 2 e sua dimensão. Alguns alunos respondem prontamente que a dimensão é 4 e a base dada foi a base canônica.

Então, o professor pediu aos alunos para olharem na lista de exercícios "AULA 7", o teorema a respeito de duas bases quaisquer de um mesmo espaço vetorial, sempre possuir o mesmo número de vetores e, em seguida, pediu a definição de dimensão, conforme diálogo abaixo:

P – Se é base e a dimensão aqui é 3, então aqui é 3, aqui é 3. Vão ser todos 3. R^3, 3 vetores L.I., então, é base. Então, as bases têm as mesmas quantidades de vetores. Aí, definição. O que é dimensão de V, mesmo?

A – Número de vetores da base.

P – Quantidade de vetores da base. Número de elementos da base. Então, a gente vai chamar de dimensão. Aí, diz o seguinte, vamos ver agora quem mata a charada: “**Qualquer** conjunto de vetores l.i. de um espaço vetorial, de dimensão finita, ele **pode** ser **completado** de modo a formar uma base de V, tudo bem? ... O que foi que a gente acabou de fazer aqui? (o professor aponta para a base B dos polinômios de grau 2, que faltava o elemento independente) O que nós fizemos aqui?

A – Completou.

P – Nós tínhamos um conjunto l.i. de $P_2(R)$ com quantos vetores?

C – 2.

P – 2. ... O que foi que a gente fez?

C – Completou.

Confirmando a idéia dada anteriormente, sobre a possibilidade de se completar um conjunto linearmente independente com outros vetores de modo a tornar o conjunto inicial uma base.

O professor utilizando o teorema do completamento, levou os alunos por meio do diálogo a completar o conjunto $V = [(2, 1, 1, 0), (1, 0, 1, 2), (0, -1, 1, 4)] \subset \Re^4$, da atividade, para esse se constituir em uma base do R^4. Depois de verificar que tal conjunto é linearmente dependente, repetiu o método já trabalhado em classe para excluir um dos vetores e utilizando os vetores da base canônica, realizou o completamento.

Em seguida, um aluno comentou a respeito de completar uma base com um vetor do tipo (a,0,0,0):

A – Professor, para completar, no lugar de número eu posso colocar letra?

P – Você colocar letra, o que é que é isso? ... O que é que você vai falar da letra? Se eu pegar um conjunto qualquer, se eu falar. Se eu pegar isto aqui, oh: (0, 0, a). Quantos vetores eu tenho aí?

A – 3.

P – **Quantos vetores eu tenho aí?**

A – 1.

C – Infinitos.

P – Infinitos.

O professor escreve no quadro

(0, 0, a).= a (0, 0, 1).

P – Por que é que eu não posso colocar letra? ... Porque isto é a representação de infinitos vetores. E mais, isto é combinação linear deste.

O professor usou o recurso de responder ao aluno por meio de perguntas, levantando a idéia de que ao se colocar uma letra no lugar da coordenada do vetor está se fazendo uma combinação linear e que esta combinação irá gerar infinitos vetores para o conjunto, candidato à base.

Em seguida, outro aluno questionou o método do escalonamento para verificação de o conjunto $\{(2, 1, 1, 0), (1, 0, 1, 2)\}$ ser linearmente independente:

A – Nesse conjunto, tem 1 embaixo do triângulo.

P – 1 embaixo do triângulo, onde?

A – Ali, têm dois vetores no conjunto $\{(2, 1, 1, 0), (1, 0, 1, 2)\}$. O segundo vetor tem 1 na primeira posição, ele está embaixo do triângulo. Aí tem que escalonar, e ficar zero ...

P – Eu preciso de 4. Eu estou no R^4.

A – Tudo bem, mas para você provar que é l.i. ...

P – A triangularização precisa de 4, para a diagonal.

Neste diálogo, é interessante notar que o aluno percebeu que, para verificar se dois vetores são linearmente independentes no R^4, caso de um deles ter zero em uma das posições (neste caso, na segunda posição) basta verificar se o outro tem um número diferente de zero nessa posição. No entanto, como, ocorre algumas vezes, o professor não compreendeu sua questão.

Em seguida, o professor escreveu uma nova base do R^4 no quadro, provocando a seguinte discussão:

$\{(1, 0, 1, 0), (0, 1, 3, 4), (0, 0, 4, 2), (0, 0, 0, 9) \}$

P – É uma base do R^4?

C – É.

P – É l.i.?

C – É.

P- E por que é que é base?

A – Porque é l.i.

P - Só? ... Por que mais?

A – Tem 4 vetores.

P – Porque é do R^4, é l.i. e tem 4 vetores. Isso vai garantir o quê?

A – Que é base.

P – Que eles vão gerar o R^4.

Aqui, o professor está tentando levantar nos alunos, a idéia de se utilizar a noção de dimensão e de conjunto linearmente independente para verificar se um dado conjunto é uma base. Este recurso-meta está ligado às informações que constituem o conhecimento matemático que podem levar os alunos a refletirem sobre a maximalidade em relação à independência linear do conjunto base, recurso este apontado por, pelos menos dois, dos professores entrevistados por Padredi.

CAPÍTULO III

ENTREVISTAS COM ALUNOS

Introdução

Neste capítulo, apresento a elaboração do guia das entrevistas, a seleção dos alunos a serem entrevistados, a descrição e análise das entrevistas.

Preparação para as entrevistas

Para elaborar o guia de entrevista (anexo), selecionei dentre os recursos-meta apontados no capitulo anterior àqueles utilizados pelo professor, em sala de aula, que conduziam à compreensão da noção de base. Elaborei nove questões, para investigar se os recursos-meta escolhidos tornaram-se alavanca-meta para os alunos selecionados.

Depois de elaborar as questões, fiz uma análise das mesmas, observando se elas não continham elementos que induziam o aluno a dar uma resposta e antevendo as possíveis respostas que poderiam ser dadas pelos entrevistados, em função das aulas assistidas.

Optei por entrevistas individuais para verificar o efeito causado pelos recursos-meta, em cada um dos alunos selecionados.

Para Ludke e André (2001), existem três tipos de entrevistas individuais. A estruturada, que se assemelha à aplicação de um questionário, para a obtenção de dados mais uniformes e cujo fim é a comparação de dados estatísticos. A não estruturada permite uma maior liberdade no percurso do discurso do entrevistado e do entrevistador. Finalmente, a semi-estruturada deixa que o entrevistador, por meio de um guia ou roteiro, faça adaptações necessárias, no desenrolar da entrevista.

Segundo a autora, para se obter informações de sujeitos como professores, orientadores, pais e alunos, é mais conveniente se fazer uma abordagem por meio de instrumentos mais flexíveis.

> Parece-nos claro que o tipo de entrevista mais adequado para o trabalho de pesquisa que se faz atualmente em educação aproxima-se mais dos esquemas mais livres, menos estruturados. (LÜDKE e ANDRÉ, 2001, p. 34)

Sendo, assim, optei por uma entrevista do tipo semi-estruturada, para permitir que o aluno discorresse livremente sobre a noção abordada e revelar se algum recurso-meta, utilizado pelo professor, ajudou na sua compreensão sobre aquela noção.

Elaborei as questões utilizando a mesma ordem cronológica empregada pelo professor para abordar as noções elementares da Álgebra Linear, até a noção de base, visando a estabelecer como alavanca-meta, aqueles recursos-meta usados pelo professor em sala de aula, que tinham, reconhecidamente, maior possibilidade de se tornarem alavancas-meta para alguns alunos.

Fiz uma análise das questões do "guia de entrevista", destacando o objetivo de cada questão e as possíveis respostas que antevia dos alunos, baseadas nas aulas assistidas.

O Guia da entrevista

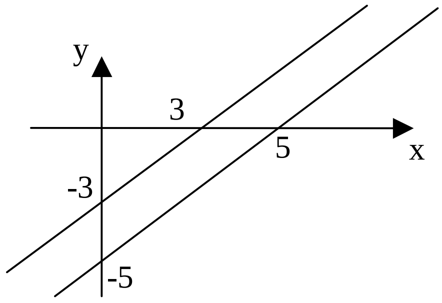
1ª Questão

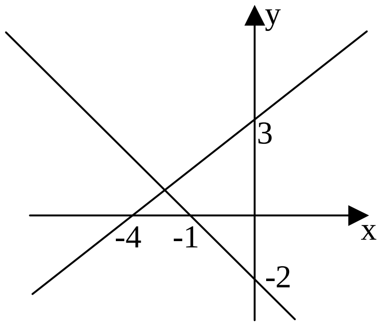
Para você, existe alguma relação entre os sistemas lineares de ordem 2 e gráficos de retas no plano, como os dados em anexo.

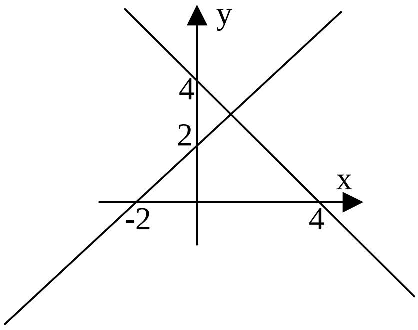
O objetivo da questão é verificar se o recurso-meta da interação do domínio algébrico e o domínio geométrico, utilizado pelo professor, facilitou a compreensão dos alunos sobre as possíveis soluções de um sistema linear de duas equações a duas incógnitas

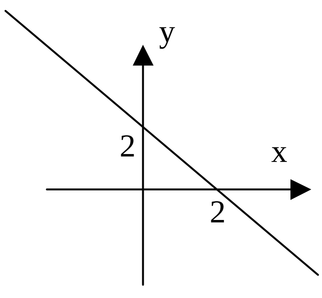
Elaborei quatro sistemas lineares parecidos com os utilizados pelo professor, em sala de aula, de forma a deixar a questão familiar para os alunos. Em seguida, elaborei quatro gráficos contendo duas retas cada. Essas retas eram as representações gráficas das equações de cada sistema, ou seja, cada gráfico era a representação gráfica de um dos sistemas lineares. Só um dos gráficos não correspondia a um dos sistemas. Coloquei esse obstáculo, para verificar se o aluno, realmente, estava fazendo a associação do gráfico com seu respectivo sistema.

A questão exigia que o aluno relacionasse o gráfico, do lado esquerdo, com sua respectiva representação, do lado direito, indicando no parêntese ao lado do sistema linear o índice do gráfico que o sistema representa.

<table>
<tr>
<td>a) 
</td>
<td>( )

$$\begin{cases} -x - y = -2 \\ x + y = 2 \end{cases}$$</td>
</tr>
<tr>
<td>b) 
</td>
<td>( )

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ x - y = 5 \end{cases}$$</td>
</tr>
<tr>
<td>c) 
</td>
<td>( )

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 2x + y = -2 \end{cases}$$</td>
</tr>
<tr>
<td>d) 
</td>
<td>( )

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = -2 \end{cases}$$</td>
</tr>
</table>

Eu queria verificar se o recurso-meta da interação de domínios, utilizado pelo professor, levou o aluno a compreender o significado da solução de um sistema linear. Assim, esperava que a reflexão do aluno pudesse fornecer respostas do tipo:

1º gráfico: o aluno deve verificar que o gráfico contém duas retas paralelas e concluir que o sistema não tem solução, pois as retas não se interceptam. O sistema procurado precisa ter equações proporcionais e termos independentes não proporcionais. Os sistemas da segunda e terceira linhas são as possíveis respostas, porém é o da segunda linha que se relaciona com esse gráfico, por ser aquele, cujas equações correspondem às retas do gráfico.

2º gráfico: o aluno deve verificar que o gráfico contém duas retas que se interceptam em um único ponto, do segundo quadrante. Assim, o aluno precisa concluir que o sistema possui uma única solução. O sistema procurado não pode ter suas equações proporcionais. O único sistema que se enquadra é o da quarta linha, porém a solução do sistema é (1, 3), um ponto no primeiro quadrante. Como este gráfico tem o ponto de interseção no segundo quadrante, então ele não se relaciona com nenhum sistema.

3º gráfico: o aluno deve verificar que o gráfico contém duas retas que se interceptam em um único ponto, do primeiro quadrante. Assim, o aluno precisa concluir que o sistema possui uma única solução. O sistema procurado não pode ter suas equações proporcionais. O único sistema que se enquadra é o da quarta linha, pois como a sua solução é (1, 3), um ponto no primeiro quadrante que está mais se aproxima do ponto de intersecção do gráfico, então, o gráfico relaciona-se com este sistema.

4º gráfico: o aluno deve verificar que o gráfico contém apenas uma reta. O sistema que se relacione com este gráfico, deve possuir infinitas soluções, isto é, as equações do sistema, inclusive, os termos independentes são proporcionais. Assim, o sistema da primeira linha é o que se enquadra na relação. Como as equações representam a reta do quarto gráfico, então eles se relacionam.

2ª Questão

O que o conjunto das matrizes quadradas de ordem 2 e o conjunto dos vetores do plano têm em comum?

O objetivo da questão é verificar se os três princípios de Harel, usados como recurso-meta pelo professor, empregando os vetores do plano e as matrizes como o concreto, para criar a necessidade de uma generalização a fim de tratar outros conjuntos, facilitou a compreensão da estrutura de espaço vetorial.

As possíveis respostas do aluno:

1ª resposta: “As operações de adição e multiplicação por escalar das matrizes e dos vetores do plano têm as mesmas propriedades” O que sugere que o aluno percebeu que nos espaços vetoriais estão definidas duas operações, adição e multiplicação por escalar que essas operações têm as mesmas propriedades para todos os espaços vetoriais.

2ª resposta: “As matrizes e os vetores do plano são espaços vetoriais”. Esta resposta pode nos mostrar duas situações: o aluno percebeu a estrutura de espaço vetorial ou o aluno está repetindo o discurso do professor, usado em sala de aula. Aqui seria interessante fazer a seguinte pergunta: para você, o que é um espaço vetorial?

3ª resposta: “As matrizes e os vetores do plano não têm nada em comum”. Esta resposta indica que o recurso-meta utilizado pelo professor não teve efeito para este aluno.

3ª Questão

O subconjunto $S = \{(x, y) \;/\; y = 1\}$ *é um subespaço vetorial do* R^2*?*

O objetivo da questão é verificar se o aluno percebeu a idéia da utilização do contra-exemplo, empregada diversas vezes pelo professor como um recurso-meta, para mostrar que um conjunto não é subespaço vetorial.

As respostas esperadas:

1ª resposta: O subconjunto não é um subespaço vetorial, pois o vetor nulo não está contido no conjunto. A resposta do aluno sugere que a idéia do contra-exemplo ajudou na compreensão da verificação de o conjunto não ser um subespaço vetorial.

2ª resposta: O subconjunto não é um subespaço vetorial. Para esta resposta seria interessante perguntar ao aluno o por quê de sua resposta.

3ª resposta: É um subespaço vetorial. Esta resposta indica que o recurso-meta utilizado pelo professor não teve efeito para este aluno.

4ª Questão

Na sua opinião, quais são as características mais importantes de um espaço vetorial?

O objetivo desta questão é verificar se o recurso-meta "(...) umas das características mais importantes (...)", que o professor usou, para tentar chamar a atenção dos alunos para a importância da noção de combinação linear teve efeito positivo para algum aluno.

As respostas esperadas são:

1ª resposta: Combinação Linear*.* A resposta dada indica que a ênfase do professor teve efeito de alavanca-meta no aluno, pois este internalizou a combinação linear, como importante em Álgebra Linear.

2ª resposta: várias, entre elas, a combinação linear*.* Esta resposta sugere que o discurso do professor não surtiu efeito no aluno, pois este considerou ainda duas outras noções também importantes para os espaços vetoriais.

3ª resposta: outras noções*.* A resposta do aluno indica que ele não deu importância à ênfase dada pelo professor para a noção de combinação linear.

5ª Questão

Para você, qual a utilidade de combinação linear ?

O objetivo da questão é verificar se o aluno compreendeu a noção de combinação linear, dada a importância atribuída pelo professor na atividade dada aos alunos em razão do seguinte recurso-meta em seu discurso, em sala de aula: “A partir de alguns vetores dados, alguns vetores que eu tenho, eu produzir outros vetores**.**”

As respostas esperadas são:

1ª resposta: É usada para gerar vetores de um espaço vetorial, baseada em alguns vetores dados. A resposta do aluno indica que o recurso-meta, usado pelo professor, teve efeito de alavanca-meta para este aluno, pois deixou no aluno a idéia de que dado um conjunto de vetores de um espaço vetorial é possível gerar outros vetores desse espaço vetorial por meio de uma combinação linear.

2ª resposta: é usada para verificar se um conjunto é l.i. ou l.d. Esta resposta indica que o recurso-meta na teve efeito para a compreensão da noção de combinação linear, pelo aluno. É possível que a idéia de combinação linear, para este aluno, tenha sido apenas um algoritmo para a verificação de um conjunto ser ou não, linearmente dependente.

3ª resposta: é útil quando, eu quero saber qual o subespaço vetorial gerado por um dado conjunto de vetores. A resposta deste aluno indica que sua idéia de combinação linear ficou sendo um algoritmo para obtenção do elemento genérico de um subespaço vetorial. Esta resposta deixa uma dúvida sobre sua concepção de combinação linear, pois pode ser que o aluno tenha memorizado que a combinação linear é utilizada apenas para esse fim.

6ª questão

Se todos os subconjuntos $A=\{2,\ 2+t,\ 3t,\ t-1\}$, $B=\{t+1, 1, 2+t\}$ *e* $C=\{5,\ t+1\}$ *geram o* P_1 *(R) - conjunto dos polinômios de grau 1 ou menor que 1 e mais o polinômios nulo, qual deles você escolheria para PRODUZIR OUTROS VETORES DE* P_1 *(R)?*

O objetivo desta questão é verificar se o recurso-meta: “(...) melhor conjunto para eu trabalhar”, utilizado pelo professor para mostrar o ganho com a economia de trabalho, ao se escolher o menor conjunto gerador de P_1 *(R),* tornou-se uma alavanca-meta para algum aluno, facilitando, assim, a compreensão desta noção. Por traz desse recurso-meta, está a idéia de "conjunto gerador minimal".

Respostas esperadas dos alunos:

1ª resposta: Escolho o conjunto C, porque é o menor deles. A resposta do aluno indica que o recurso-meta, utilizado pelo professor serviu como alavanca-meta para esse aluno, pois ele adquiriu a idéia de trabalhar com o menor conjunto.

2ª resposta: O conjunto C. Esta resposta não deixa claro se o aluno foi ajudado pelo recurso-meta na compreensão da noção abordada. É necessário fazer outra questão: Por quê?, Para verificar se a sua escolha é em razão da idéia de economia de trabalho ou se é apenas um "chute".

3ª resposta: Qualquer um deles. Esta resposta deixa claro que o recurso-meta usado pelo professor não foi uma alavanca-meta para esse aluno, pois o mesmo não viu a importância da economia de trabalho, se tivesse escolhido o menor dos conjuntos.

7ª Questão

Dados os subconjuntos $A=\{(1,2),\ (2,4),\ (3,6)\}$, $B=\{(1,1,1),\ (3,-1,2),\ (0,-4,-1)\}$, $C=\{(7,0,\ 0,1),\ (0,1,\ 1,\ 0)\}$ *e* $D=\{(0,0,0,0,0)\}$. *Quais desses conjuntos são linearmente dependentes? Por que?*

O objetivo desta questão foi verificar se o recurso-meta "(...) eu tenho alguém que está dependendo dos outros, lá dentro do meu conjunto", utilizado pelo professor, em sala de aula, ajudou a verificar se um dado conjunto é linearmente dependente.

Elaborei quatro conjuntos, de forma a apresentar diferentes níveis de dificuldade, para ver até onde este recurso-meta ajuda na verificação. O conjunto A é linearmente dependente, pois seus elementos são múltiplos entre si e, assim, fica fácil a verificação dos elementos serem combinação linear um do outro. O conjunto B também é linearmente dependente, porém a combinação linear entre os elementos não está visível. Assim, o aluno precisaria efetuar algum dos algoritmos para verificar se B é linearmente dependente. O conjunto C não é linearmente dependente e é fácil verificar que os elementos não são combinações lineares entre si. O conjunto D é linearmente dependente, pois contém o vetor nulo.

Respostas esperadas dos alunos:

1ª resposta: O conjunto A, pois um dos elementos é combinação linear dos outros dois. Esta resposta indica que o recurso-meta ajudou o aluno a verificar que o conjunto A é um conjunto linearmente dependente.

2ª resposta: O conjunto C. Esta resposta sugere que o recurso-meta não teve efeito para a compreensão de dependência linear.

3ª resposta: O conjunto D. Esta resposta indica que o recurso-meta não teve efeito para a compreensão de dependência linear, para este aluno. Para esta resposta, é interessante perguntar ao aluno o por quê.

8ª Questão

Dado o seguinte trecho de uma interação entre um professor, e os alunos de sua classe:

Aluno A – {1 + x, x^2} é uma base de $P_2(R)$?

Prof – Que cara tem alguém do $P_2(R)$?

Classe - $ax^2 + bx + c$

Prof – {1 + x, x^2}, dois vetores, linearmente independentes. Esse conjunto gera todos os elementos de $P_2(R)$?

O que você responderia ao professor?

O objetivo desta questão foi verificar como foi a reação do aluno à idéia de ter questões respondidas com outras questões. Este tipo abordagem em sala de aula é considerado recurso-meta, pois leva o aluno a refletir sobre os conhecimentos em jogo. Este recurso-meta é usado com freqüência pelo professor dessa turma.

As respostas esperadas são:

1ª resposta: Não, pois para gerar todos os elementos de $P_2(R)$, o conjunto precisa ter três vetores ou mais. A resposta dada pelo aluno está correta. Indica que o aluno fez uma reflexão das noções vistas anteriormente, como a de conjunto gerador. A resposta do aluno indica que este elemento meta pode ajudar o aluno a refletir sobre os conteúdos abordados em sala de aula.

2ª resposta: Não, não gera. Esta resposta não indica se o aluno está seguro da noção estudada e se o elemento meta colaborou na conclusão desta resposta. Aqui, é preciso uma outra questão: Por quê? Para levantar as conjecturas do aluno para esta resposta.

3ª resposta: Sim, o conjunto gera todos os elementos de $P_2(R)$. A resposta do aluno sugere que o recurso-meta utilizado pelo professor não o fez refletir para responder à questão

9ª Questão

Dentre as seguintes afirmações, dadas abaixo, para você, quais delas expressa melhor a idéia de base:

a) *Base de um espaço vetorial V finitamente gerado é um subconjunto gerador minimal de V.*
b) *Base de um espaço vetorial V finitamente gerado é um subconjunto linearmente independente maximal de V.*
c) *Base de um espaço vetorial V finitamente gerado é um subconjunto linearmente independente que gera V.*
d) *Base de um espaço vetorial V, finitamente gerado, é um subconjunto finito de vetores de V, tal que qualquer outro vetor de V seja uma combinação linear dos elementos desse conjunto, e mais, que todos os vetores desse conjunto realmente sejam necessários para gerar V.*

O objetivo da questão é verificar qual a compreensão do aluno sobre o conceito de base, visto que o professor utilizou a idéia de conjunto gerador minimal, em seu discurso, por meio do recurso-meta: “Queremos encontrar dentro de um espaço vetorial *V,* finitamente gerado, um conjunto finito de vetores, tal que qualquer outro vetor de *V* seja uma combinação linear dele, e mais, que todos os vetores desse conjunto, realmente, sejam necessários para gerar *V*.”, recurso este, apontado por Zoraide Padredi, como passível de se tornar uma alavanca-meta.

Vale lembrar que logo em seguida, na atividade 7, ele definiu a noção de base como uma justaposição entre o conjunto ser linearmente independente e precisar gerar o espaço vetorial em questão.

As respostas esperadas:

1ª resposta: A alternativa a). Esta resposta sugere que o recurso-meta utilizado pelo professor tenha surtido efeito positivo no aluno, que escolheu uma afirmação diferente da definição formal.

2ª resposta: A alternativa c). Esta resposta indica que o aluno fixou a definição formal de base de um espaço vetorial sem interpretar a noção como um todo. O recurso-meta utilizado pelo professor não teve efeito positivo para esse aluno.

3ª resposta: A alternativa d). Esta resposta sugere que o aluno acompanhou com atenção a atividade 7.

A escolha dos alunos

Para selecionar os alunos que eu iria entrevistar, com o intuito de verificar o efeito dos recursos-meta, em sua compreensão da noção de base, utilizei três etapas, que agora passo a descrever.

Na primeira etapa, observei os freqüentadores mais assíduos das aulas pois, eram esses que estariam mais expostos aos recursos-meta utilizados pelo professor. Em seguida, classifiquei estes alunos pela sua participação na aula, como uma boa participação, uma participação média ou nenhuma participação ou desinteresse. O aluno que participava muito e sempre com boas contribuições, foi classificado como bom aluno. Um que tinha uma participação média ou falava bastante, mas, algumas coisas não tão importantes ou pertinentes, eu classifiquei como aluno médio, e aquele que não falava nada e, aparentemente, estava disperso, classifiquei como aluno fraco.

Desta forma, elaborei uma lista com 16 alunos, composta de alunos que pude identificar e que se enquadravam nas três classificações declaradas acima.

Na segunda etapa, fui conversar com o professor, para saber como ele classificava os alunos que eu havia escolhido. Apresentei a lista com o nome dos 16 alunos selecionados e solicitei ao professor para classificá-los, sem apresentar minha opinião, como: bom aluno, aluno médio ou aluno fraco, de acordo com seu critério.

Para a terceira etapa, esperei até o final do primeiro semestre para levantar as notas obtidas pelos alunos de minha lista nas atividades e avaliações propostas pelo professor. Classifiquei como um aluno bom, aquele que obteve notas entre 7,1 e 10, como um aluno médio, aquele que obteve notas entre de 5 a 7 e como um aluno fraco, aquele que obteve notas entre 0 a 4,9.

A seleção final foi feita pelo cruzamento desses três pontos de vista, o aluno que considerei bom, o professor considerou bom e sua nota foi considerada boa, classifiquei como um aluno bom. O aluno médio eu classifiquei, quando dois dos três pontos de vista foram atendidos. Utilizei este mesmo critério para selecionar o aluno fraco ou com mais dificuldade. Dos 16 nomes escolhidos nove foram selecionados neste processo.

Como foram feitas as entrevistas

Após decidir pelo tipo de entrevista que eu faria, precisei escolher se as faria individualmente ou com todos os alunos de uma única vez. Optei por uma entrevista individual, pois eu queria que os alunos selecionados se sentissem à vontade para escolher o dia e a hora que melhor lhes conviesse para realizar a entrevista e ainda, verificar, individualmente, o efeito dos recursos-meta, causado em cada um deles.

Contatei, individualmente, cada um dos alunos escolhidos, explicando a minha intenção de entrevistá-los. Deixei-os à vontade, para a escolha do dia e do horário a serem entrevistados, de forma a diminuir a possibilidade de uma recusa da parte deles. Solicitei aos mesmos, permissão de gravar as entrevistas, explicando que era para enriquecer o trabalho, garantindo sigilo e anonimato.

As entrevistas foram realizadas em uma sala reservada na instituição onde os alunos estudavam. A maioria das entrevistas foram realizadas somente comigo, o entrevistador e o aluno a ser entrevistado. Em duas delas, um dos meus colegas do grupo de estudos estava presente para me auxiliar com o gravador.

Dos nove alunos selecionados, apenas sete alunos foram entrevistados. Dois deles não quiseram fazer a entrevista, alegando problemas pessoais e ou falta de tempo, apesar da liberdade para a escolha do dia e do horário que eles tiveram.

Análise das respostas dos alunos à entrevista

Para preservar o anonimato dos alunos entrevistados, criei nomes fictícios para eles, que utilizei para fazer a análise de suas respostas, cujos nomes criados são: Anderson, Bernardo, Claudia, David, Evandro, Frederico e Gisele.

Para fazer esta análise, agrupei as respostas dos alunos por questão, de modo a observar mais facilmente, quais os recursos tinham surtido efeito para eles e quando o recurso teve efeito positivo, para quantos dos entrevistados.

Ao final de cada questão, faço uma conclusão parcial das respostas dos alunos.

1ª Questão:

Para você, existe alguma relação entre os sistemas lineares de duas equações e duas variáveis e os gráficos das retas do plano.

A questão foi feita para cada um dos entrevistados e, em seguida, foi entregue uma tabela contendo os gráficos e os sistemas.

As respostas obtidas foram:

Anderson: o aluno respondeu que não existe relação entre os gráficos do plano e os sistemas lineares de duas equações. No entanto, ao refletir melhor sobre o problema, verificou que um dos gráficos apresentava duas retas paralelas, e disse:

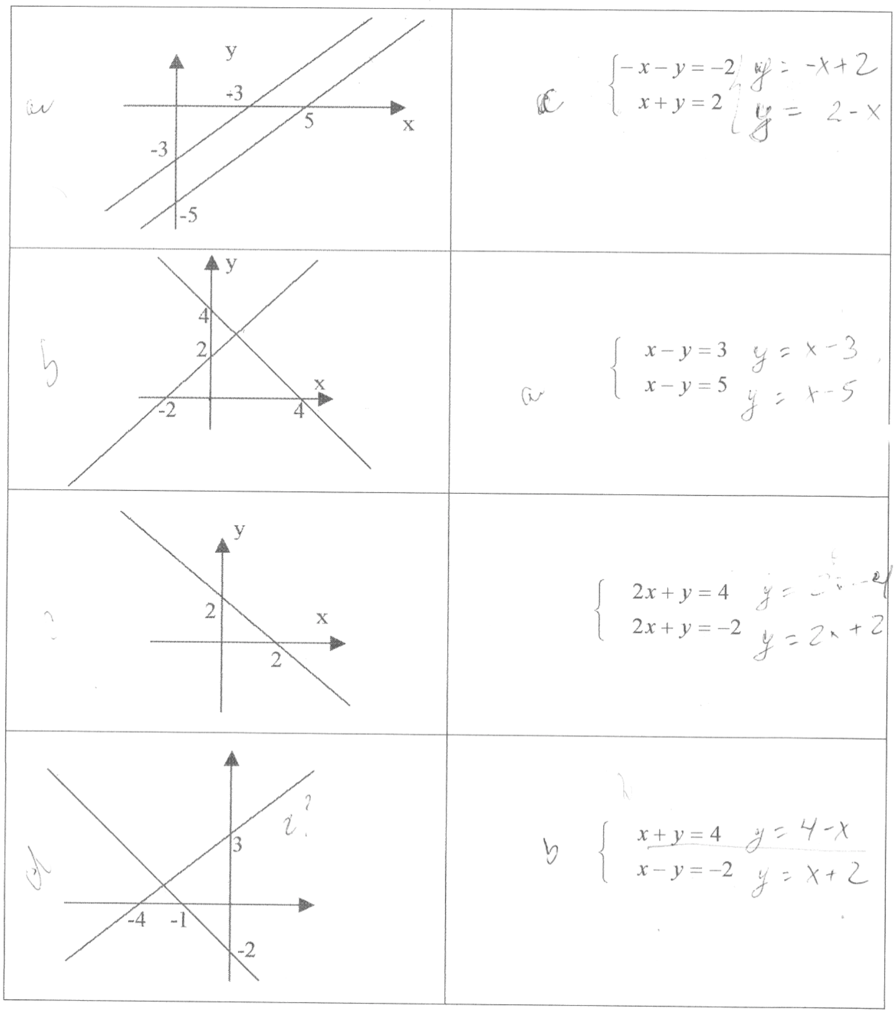
> (...) quando não tem (função, ou coisa assim), é que as retas são paralelas. (...) não lembro direito o que é.

No início, este aluno não entendeu a questão, mas os traços que fez no papel, indicam que ele fez alguma relação. Quanto ao recurso-meta, parece que a interação de domínios teve um pequeno efeito com esse aluno, ao afirmar: (...) quando não tem (função, ou coisa assim), é que as retas são paralelas".

Bernardo: respondeu que, aparentemente, eles têm relação, mas não soube dizer qual era a relação e o porquê.

Cláudia: esta aluna respondeu que não existe relação, ela confirmou a resposta duas vezes, mas não soube explicar o porquê de sua resposta.

David: Indicou que três dos quatro gráficos relacionavam-se com três dos quatro sistemas apresentados. Transformou cada equação do sistema, do tipo $ax + by = c$, para $y = \frac{c}{b} - \frac{a}{b}x$. Daí, substituiu os pontos dos gráficos nas equações para correlacionar a representação algébrica com a representação gráfica. O aluno não empregou explicitamente o recurso-meta, abordado pelo professor, em sala de aula, para relacionar o sistema linear a seu respectivo gráfico. Em vez disso, utilizou a Matemática para a resolução do problema, conforme quadro abaixo:



Evandro: o aluno transformou cada equação do sistema, do tipo $ax + by = c$, para $y = \frac{c}{b} - \frac{a}{b}x$. Daí, substituiu os pontos dos gráficos nas equações, para relacionar a representação algébrica com a representação gráfica. Este aluno correlacionou os dois primeiros sistemas com seus dois gráficos, corretamente, e os outros dois últimos sistemas relacionou de maneira errada. Ele comparou o terceiro sistema com o gráfico b e o último sistema ele respondeu por eliminação. O recurso-meta também não apareceu explicitamente na resposta desse aluno.

Frederico: este aluno localizou nos gráficos os pontos e, em seguida, verificou em qual sistema os pontos são válidos e fez a relação no sentido dos gráficos para os sistemas, diferente dos outros alunos, que fizeram no sentido contrário. O aluno relacionou três gráficos com três sistemas, corretamente, porém, o último gráfico, que não se relacionava com nenhum dos sistemas dados, foi correlacionado com o penúltimo sistema. O recurso-meta não apareceu explicitamente na resolução do problema pelo aluno. Ele utilizou a Matemática, simplesmente.

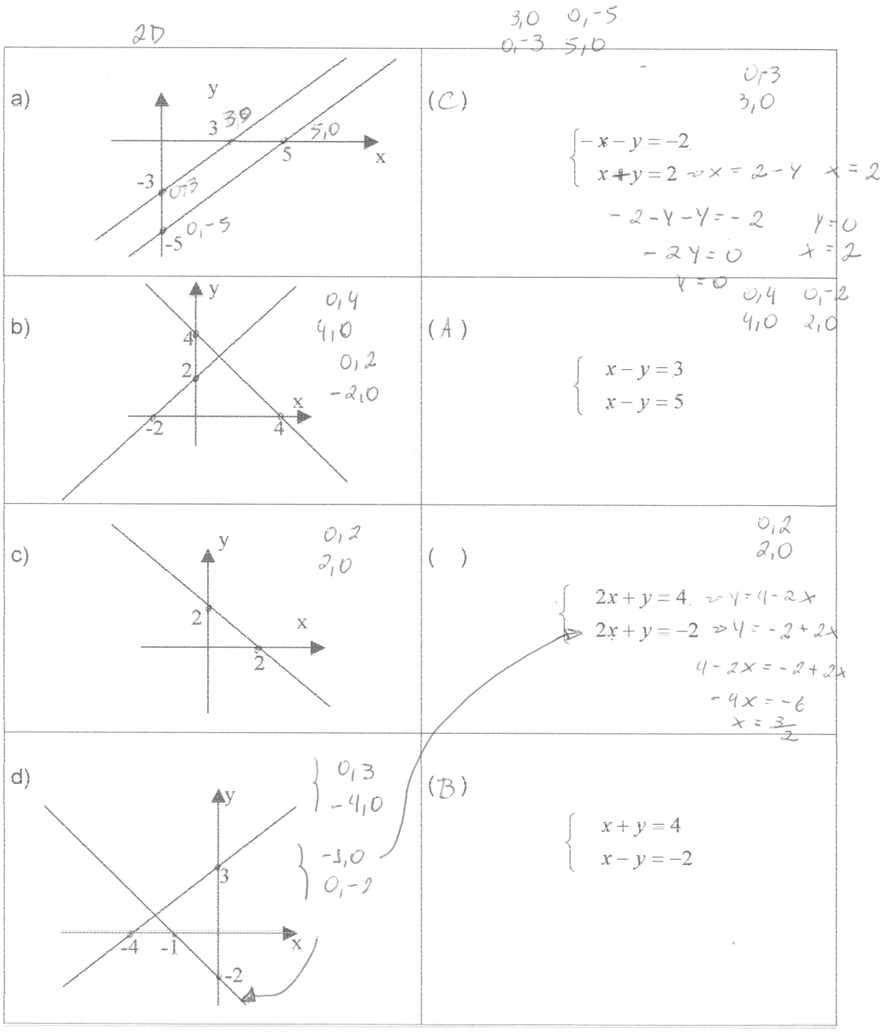
Gisele: a princípio a aluna associou os sistemas com os gráficos, dizendo:

> A - Agora, olhando é obvio. Duas equações duas retas. Creio que as equações se refiram a cada uma dessas retas.

Ela utilizou como estratégia para resolver a questão, tirar pontos dos gráficos e "encaixar" nas equações para ver qual equação validava o ponto.

Em um primeiro momento, ela não entendeu a questão e achou que fosse uma "pegadinha" e comentou: "Eu pensei que era para eu colocar verdadeiro ou falso. Não para ligar as letras". Então o entrevistador comentou que os gráficos e os sistemas estavam "trocados". Ela, então, continuou com sua estratégia e relacionou os três gráficos com seus sistemas. Um dos gráficos não foi relacionado com um dos sistemas.

A aluna também não apresentou explicitamente indícios do uso do recurso-meta em sua resposta, conforme quadro a seguir:



Conclusão parcial

Dos sete alunos entrevistados apenas um deles, Anderson insinuou explicitamente o uso do recurso-meta em sua resposta. Os alunos David, Evandro, Frederico e Gisele empregaram o recurso-meta implicitamente para solucionar a questão.

2ª Questão:

O que o conjunto das matrizes quadradas de ordem 2 e o conjunto dos vetores do plano têm em comum?

Esta questão não possuía quadro anexo. O entrevistador apenas leu a questão.

As respostas obtidas foram:

Anderson: Relacionou os vetores e as matrizes com as transformações lineares, conforme sua resposta:

> Tem. Tem relação. Se eu quero fazer uma rotação em um vetor, eu posso pegar essa rotação. Seria a fórmula que tiver lá, e posso representá-la numa matriz. Aí, aplicando as coordenadas na matriz, eu tenho um vetor onde foi feita a transformação que eu apliquei.

Bernardo: o aluno disse que tem, mas não soube explicar por que e qual a relação.

Cláudia: esta aluna disse que não tem relação nenhuma.

David: relacionou os vetores e as matrizes com as transformações lineares: "A gente fazia os cálculos das transformações lineares, e a gente representava tudo como matriz".

Evandro: o aluno não sabe o que responder e admite: "A pergunta eu entendi. ... Mas não sei responder"

Frederico: este aluno, também, respondeu que as matrizes têm em comum com os vetores, são as transformações lineares, dizendo: "eu poderia multiplicar por uma outra matriz que pudesse, que satisfizesse ao que fosse pedido, por exemplo, inverter ao eixo Y, se não me engano, era, $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Uma coisa assim".

Gisele: para esta aluna, os conjuntos possuem em comum os pares de números.

Conclusão parcial

Em sua maioria, as respostas obtidas tinham relação com as transformações lineares. Os alunos Anderson, David, Frederico, Gisele, esta última indiretamente, remeteram suas respostas às transformações lineares. Os outros três, Cláudia, Evandro não souberam responder a questão.

Imagino que houve uma interferência do conceito de transformação linear, uma das últimas noções estudadas pelos alunos, na compreensão da questão, uma vez que, a uma transformação linear de vetores do R^2 em R^2 corresponde uma matriz de ordem 2. O que impediu de verificar o efeito do recurso-meta.

Desta maneira, os três princípios de Harel, utilizados pelo professor como um recurso-meta, não tiveram efeito na compreensão do conceito da estrutura de espaço vetorial.

3ª Questão:

O subconjunto $S = \{(x, y)\ /\ y = 1\}$ *é um subespaço vetorial do* R^2*?*

Esta questão, também, tinha um quadro para ser entregue, após ser feita a questão.

As respostas obtidas foram:

Anderson: o aluno respondeu que o subconjunto não é um subespaço vetorial. Ele diz: "pois y=1 e não passa pelo ponto (0,0)". Ele acrescenta que o conjunto é uma reta paralela ao eixo OX. Esta resposta nos permite concluir que, o recurso-meta do contra-exemplo, empregado pelo professor, serviu de alavanca-meta ao aluno.

Bernardo: o aluno respondeu que é um subespaço vetorial. Sua resposta indica que o recurso-meta não teve efeito para sua compreensão a noção de subespaço vetorial.

Cláudia: esta aluna respondeu que não é subespaço vetorial, dizendo: "Não é por causa do y?" Acredito que aqui caberia uma segunda questão, a saber, Por quê? Para confirmar se o recurso-meta do professor tornou-se uma alavanca-meta para este aluno, pois ela não mostrou confiança em sua resposta.

David: o aluno respondeu que não é subespaço vetorial, pois o y é sempre 1 e, assim, o elemento nulo não está no conjunto e depois apela para as operações, a estrutura. Esta resposta nos permite concluir que o recurso-meta do contra-exemplo, utilizado pelo professor, teve efeito de alavanca-meta para esse aluno.

Evandro: o aluno não se lembra do conceito de subespaço vetorial e, mesmo com a ajuda do entrevistador, não consegue chegar a uma resposta.

Frederico: o aluno responde que sim, que é um subespaço vetorial, indicando que o recurso-meta não teve efeito positivo para a compreensão a noção de subespaço vetorial.

Gisele: a aluna responde que o subconjunto não é sub-espaço vetorial, pois ele tinha que passar pelo (0, 0) e como o y = 1, não vai passar. A aluna utilizou um contra-exemplo para responder a questão, desta forma, o recurso-meta teve efeito positivo a esta aluna.

Conclusão Parcial

Para Anderson, David e Gisele, o recurso-meta do contra-exemplo teve efeito positivo, pois todos utilizaram um contra-exemplo para mostrar que o conjunto não é um subespaço vetorial. Para estes alunos, o recurso-meta tornou-se uma alavanca-meta. Para os demais alunos, o recurso-meta não teve efeito positivo, pois é possível que eles não tenham compreendido a noção de subespaço vetorial.

4ª Questão:

Na sua opinião, quais são as características mais importantes de um espaço vetorial?

Esta questão não possuía quadro anexo. O entrevistador apenas leu a questão.

As respostas obtidas foram:

Anderson: o aluno respondeu: "Foi a coisa que me chamou mais atenção. É fechado". Para este aluno as operações de espaço vetorial são a caracteristica mais importante. Desta forma, o recurso-meta usado pelo professor, não teve efeito ao aluno.

Bernardo: o aluno respondeu: "(...) você pode gerar ...". A resposta do aluno nos leva à noção de combinação linear. Ela indica que o recurso-meta teve efeito positivo.

Cláudia: para essa aluna, nada tem importância nos espaços vetoriais, visto que sua resposta foi "não sei". Assim, o recurso meta empregado pelo professor não surtiu efeito à aluna.

David: para este aluno, o mais importante é a estrutura, tanto que ele respondeu que eram as operações de soma e multiplicação por escalar, assim, a ênfase colocada pelo professor, em combinação linear, como sendo a característica mais importante dos espaços vetoriais não surtiu efeito.

Evandro: o aluno não lembra e nem quer responder.

Frederico: este aluno respondeu que era fazer uma transformação linear ou provar que é um subespaço vetorial. Nos dois casos, ele precisa fazer operações com os elementos dos conjuntos. Assim, pode ser que ele estivesse pensando, implicitamente, na estrutura de espaço vetorial.

Gisele: a aluna respondeu que o conjunto deveria ter o elemento neutro, ela também, citou as propriedades associativa e comutativa. Sua resposta indica que a aluna está se referindo à estrutura de espaço vetorial.

Conclusão Parcial

Para Anderson, David, Frederico e Gisele, a estrutura de espaço vetorial é a característica mais importante; desta maneira, o recurso-meta de dar ênfase a um novo conceito a ser abordado não teve efeito positivo para esses alunos. Contudo, para Bernardo, a característica mais importante foi a combinação Linear, indicando que para esse aluno, o recurso-meta utilizado pelo professor teve efeito positivo.

5ª Questão:

Para você, qual a utilidade de combinação linear ?

Esta questão não possuía quadro anexo. O entrevistador apenas leu a questão.

As respostas obtidas foram:

Anderson: o aluno respondeu: "É gerar um vetor a partir de outros, que tenham as mesmas proporções", mostrando duas situações, a saber, o aluno compreendeu a noção de combinação linear ou o aluno memorizou a fala do professor. De qualquer forma, acredito que o recurso-meta, utilizado pelo professor, serviu como alavanca-meta ao aluno.

Bernardo: de acordo com a resposta do aluno, combinação linear é uma maneira de gerar outros espaços por meio da combinação de outros conjuntos. Para este aluno, parece que a noção de combinação linear não foi compreendida pelo aluno, indicando que o recurso-meta empregado pelo professor, não surtiu efeito positivo.

Cláudia: para este aluno, a combinação linear não tem utilidade. Ele não consegue enxergar uma aplicação, conforme o diálogo:

> (...)
> Eu não consigo ver, assim, o que eu posso fazer com isso. Para mim, eu não vejo utilidade nenhuma.

Desta forma, o uso do recurso meta, utilizado pelo professor, não teve efeito para a aluna.

David: para este aluno, a combinação linear não tem utilidade alguma. A resposta do aluno pode indicar que ele não compreendeu o conceito ou a questão, pois ele se refere à utilidade profissional, dizendo: "para utilizar no dia-a-dia" e "depende da área de trabalho". Assim sendo, o recurso-meta, utilizado pelo professor, não surtiu efeito ao aluno.

Evandro: o aluno respondeu:

> "Estou tentando lembrar! Porque misturou tudo e eu estou tentando lembrar mas não vai. ... Não lembro."

Indica que o recurso-meta não teve efeito positivo para a compreensão do conceito de combinação linear para este aluno.

Frederico: O aluno não estava seguro da noção e oferece a seguinte resposta:

> (...)
> Dentro da computação seria nos preparar melhor para a computação gráfica, que é uma matéria que a gente tem no terceiro ano. E, dentro da aula de Álgebra Linear, eu acredito que era ver a transformação que, por exemplo, uma coordenada teria, ao multiplicarmos o x por um fator e o y por outro e ver o resultado

Indica que o recurso-meta não teve efeito positivo para este aluno.

Gisele: a aluna não se recorda da noção de combinação linear. Ela respondeu:

> A - Puu, combinação linear. Utilidade prática. Deixa eu me lembrar primeiro o que é combinação linear. Mais importante. (...). Agora, combinação linear, sozinho, eu não consigo lembrar direito, que eu possa usar.

Mostra que o recurso-meta utilizado pelo professor não teve efeito de alavanca-meta para esta aluna.

Conclusão Parcial

De acordo com as respostas dadas pelos alunos, o recurso-meta: “A partir de alguns vetores dados, alguns vetores que eu tenho, eu produzi outros vetores”, utilizado constituiu-se alavanca-meta somente para Anderson. Para os demais alunos entrevistados, o recurso-meta não teve efeito positivo.

6ª Questão:

Se todos os subconjuntos $A = \{2,\ 2+t,\ 3t,\ t-1\}$, $B = \{t+1, 1, 2+t\}$ *e* $C = \{5,\ t+1\}$ *geram o* P_1 *(R), qual deles você escolheria para produzir outros vetores de* P_1 *(R).*

Após a leitura da questão, o entrevistador apresentou uma tabela

As respostas obtidas foram:

Anderson: a resposta do aluno foi o conjunto C, concluindo da seguinte maneira: "é o menor". O aluno pode estar querendo dizer, o mais fácil, o melhor para trabalhar, indicando que o recurso-meta, utilizado pelo professor, influenciou sua decisão. Desta forma, o recurso-meta tornou-se uma alavanca-meta para este aluno.

Bernardo: o aluno escolheu o conjunto B. Ao ser questionado do porque de sua escolha, ele não soube responder. Esta resposta indica que o recurso-meta não teve efeito na compreensão do conceito de dependência linear.

Cláudia: a aluna escolheu o conjunto C. Ao responder porque, disse: "eu acho que é o mais fácil". Esta resposta indica que o recurso-meta, utilizado pelo professor, constitui-se em alavanca-meta para este aluno.

David: para este aluno, o recurso-meta não teve efeito positivo, pois, embora utilize o termo "qual seria mais vantajoso para mim", ele respondeu que é o conjunto A.

Evandro: o aluno escolheu o conjunto A, mas ao explicar o porquê, disse: "Eu acho que é por que tem mais opções de você gerar um polinômio. Aqui é muito limitado, esses dois casos. E aqui eu posso um quarto grau, não pode? Polinômio também de grau dois."

O entrevistador intervém e diz: "Mas eu quero só de grau 1 ou menor.", e o aluno confirma: "Então. Acho que tem que ser este caso mesmo. O A." Para esse aluno, a idéia de se trabalhar com o menor conjunto não ficou clara.

Frederico: este aluno escolhe o conjunto C. Ele escreveu no anexo, embaixo do conjunto C, o par (x,y), e disse: " acredito que seja por ele possuir apenas ... por ele estar dentro do R^2. [...] E por os outros estarem no R^3. ... Um porquê mais profundo. Eu não sei te dizer ". Apesar da resposta aluno ser a esperada, ela indica que a noção de conjunto gerador não está clara e que o recurso-meta não teve efeito positivo ao aluno.

Gisele: A aluna respondeu da seguinte maneira:

> "Então, eu não lembro ao certo, como eu posso gerar os polinômios. Eu estou imaginando que talvez seja uma combinação entre os elementos do subconjunto. Estou imaginando que seja isso. E se for isso, C é o único que eu não vou gerar polinômios com grau maior que 1. Os outros, dependendo da combinação que eu fizer, eu posso gerar. Por isso."

Indicando que a noção de conjunto gerador não ficou clara para esta aluna. Como a sua resposta não apresenta indícios da idéia de economia de trabalho, então, o recurso-meta não se tornou uma alavanca-meta para esta aluna.

Conclusão Parcial

As respostas dadas pelos alunos entrevistados indicam que o recurso-meta "(...) melhor conjunto para eu trabalhar" constituiu-se em alavanca-meta para os alunos Anderson e Cláudia. É possível que a idéia da economia de trabalho, não tenha ficado clara aos demais alunos entrevistados.

7ª Questão:

Dados os subconjuntos $A=\{(1,2),\ (2,4),\ (3,6)\}$, $B=\{(1,1,1),\ (3,-1,2),\ (0,-4,-1)\}$, $C=\{(7,0,\ 0,1),\ (0,1,1,0)\}$ *e* $D=\{(0,0,0,0,0)\}$. *Quais desses conjuntos são linearmente dependentes?*

Esta questão contava com uma tabela, que foi apresentada após a leitura da pergunta.

As respostas obtidas foram:

Anderson: a resposta do aluno foi: "o conjunto A, porque são combinações lineares entre eles". A resposta indica que o recurso-meta, utilizado pelo professor, surtiu efeito para este aluno. Como o aluno não escolheu também o conjuntos B e D, que também são linearmente dependentes. É possível que o aluno não tenha compreendido a questão, pensando que era para escolher apenas um conjunto.

Bernardo: o aluno não respondeu esta questão, porque não lembrava do conceito.

Cláudia: a aluna escolheu o conjunto A, sem segurança de sua escolha, pois ao ser questionado do porquê de sua escolha, o aluno não soube responder. Sua resposta indica que, embora não saiba justificar sua escolha, o recurso-meta utilizado pelo professor pode ter influenciado na escolha do aluno.

David: o aluno escolheu apenas o conjunto A. De acordo com o aluno: "se eu somar o primeiro elemento do conjunto A com o segundo, a gente tem o terceiro". Sua resposta indica que o recurso-meta utilizado pelo professor surtiu efeito positivo para esse aluno, apesar do aluno não escolher também os conjuntos B e D, que também são linearmente dependentes. É possível que o aluno não tenha compreendido a questão, pensando que era para escolher apenas um conjunto.

Evandro: o aluno respondeu o A e o C. Ao ser perguntado, porque essa resposta, ele comenta: "O A é mais fácil. E o C, é algo que eu lembro lá e eu acho que é sim. Agora o A, é a soma do ... a soma, não. Como é que é? Sei lá, é o dobro do primeiro elemento (1,2), deu (3,4), depois esses dois gerados, eu somei. (3,6)." O entrevistador insiste no porquê do C e o aluno, diz que não lembra e acaba ficando somente com o A. Apesar de escolher também o conjunto C, a idéia de conjuntos com elementos que são combinações lineares dos demais foi marcante para este aluno.

Frederico: o aluno escolheu os conjunto A e D, e acrescentou:

> "(...) eu sei que para ser l.d. um seria uma transformação do outro. No A me chamou atenção (1,2), (2,4), (3,6), por ser mais ou menos, (x, 2x), dessa forma. E a opção D, me chamou a atenção por todos serem zero. Isso eu não sei te explicar por que, mas eu acredito que seja l.d."

Sua resposta indica que o recurso-meta utilizado pelo professor constituiu-se em alavanca-meta para este aluno.

Gisele: a aluna responde:

> "Eu acho que é só o A. Apesar de que, como eu te disse, conceito é uma coisa que não fica muito. O conceito exatamente. Definição do que é linearmente dependente, não tenho mais certeza, não. Eu acho que era quando, a partir de dois, combinando dois, dois ou mais, combinando alguns elementos dentro do conjunto. Você podia formar alguns elementos que estão dento do conjunto. A partir desse princípio, então, por exemplo, combinando esses dois eu posso formar esse. Eu acho que é só o A."

A resposta da aluna indica que, apesar de não estar segura sobre o conceito, o recurso-meta utilizado pelo professor teve efeito de alavanca-meta, pois ela declarou que "combinando esses dois, eu posso formar esse", apontando para os elementos do conjunto A.

Conclusão Parcial

Este recurso-meta tornou-se alavanca-meta para praticamente todos os alunos entrevistados. A exceção foi o aluno Bernardo que não respondeu a questão. Desta forma, acredito que este recurso-meta deva ser utilizado pelos professores de Álgebra Linear como um recurso a mais para ajudar a compreensão do aluno a respeito de um conjunto ser linearmente dependente.

8ª Questão:

O que você responderia ao professor?

O entrevistador leu a questão e em seguida apresentou um quadro, contendo um diálogo entre alunos e professor.

As respostas obtidas foram:

Anderson: a resposta do aluno foi a seguinte:

> Só com esses dois, se eu fizer 1+x e x^2, tipo um par ordenado, então se eu quiser o vetor (3,3) por exemplo, eu não consigo gerar nem a pau. Porque se eu colocar 2, aqui no x, então, aqui fica 3 e aqui fica 4. Então o par ordenado (3,3) não está aqui dentro. Não tem como você gerar o .... (3,3). Claro. Para x iguais, é? Para x iguais. É que eu não lembro.

A resposta do aluno indica que o mesmo não compreendeu que o conjunto apresentado era formado por dois polinômios. Sua resposta sugere que o recurso-meta utilizado pelo professor não teve efeito positivo para este aluno, pois o mesmo não utilizou as informações fornecidas pelo professor para refletir sobre o conjunto em questão.

Bernardo: o aluno não respondeu esta questão, porque não lembrava do conceito.

Cláudia: a aluna respondeu que não gera, mas não soube responder por que não gera. O recurso-meta empregado pelo professor não teve efeito positivo para esta aluna, pois a mesma não fez uma reflexão sobre as informações fornecidas pelo professor.

David: o aluno respondeu: "eu creio que não, por que a gente não conseguiria gerar $ax^2 + bx$, ou seja, zerar o c por que tem esse +1 no meio do caminho".

A resposta do aluno indica que o recurso-meta utilizado pelo professor teve efeito de alavanca-meta, pois o levou a refletir que alguns polinômios não eram formados utilizando o conjunto em questão.

Evandro: o aluno respondeu que sim, pois gera todos os polinômios, mas não se lembra como explicar sua resposta.

Frederico: este aluno diz que não gera, mas ao ser perguntado por que, ele responde: "Pra mim, gerar todos os elementos de $P_2(R)$, dessa forma aqui (o aluno apontou para $ax^2 + bx + c$), eu acredito, por exemplo, ... eu imaginei que ...

talvez imaginei que estivesse faltando alguma coordenada aqui. Por exemplo, um R^3 , aqui. Só que não é. Porque o R^3, ele não geraria o $P_2(R)$. Eu acredito que ... não sei explicar."

Para este aluno, o recurso-meta utilizado pelo professor não teve efeito de alavanca, pois a resposta do mesmo indica que ele não compreendeu as informações apresentadas pelo professor na questão.

Gisele: a aluna apresentou a seguinte resposta:

> (...) Vou responder que não. Você vai me perguntar por que e eu vou responder porque não gera o (0,0).

A resposta da aluna indica que ela não compreendeu as informações fornecidas na questão do professor. Para esta aluna, o recurso-meta não teve efeito de alavanca-meta.

Conclusão Parcial

Embora o professor utilize este recurso-meta de fazer perguntas para responder dúvidas levantadas pelos alunos, em praticamente todas as aulas, de uma forma bem-sucedida, as respostas dos alunos, neste caso, indicam que o recurso-meta não teve efeito positivo para praticamente todos os alunos. A exceção foi o aluno David, apesar de não conseguir identificar os polinômios, que não eram gerados pelo conjunto em questão, conseguiu refletir sobre o conjunto gerado, utilizando as informações dadas no questionamento feito pelo professor.

9ª Questão:

Dentre as seguintes afirmações, dadas abaixo, para você, quais delas expressa melhor a idéia de base:

Esta questão continha uma tabela (Quadro 6), que foi apresentada ao entrevistado, após a leitura da pergunta.

As respostas obtidas foram:

Anderson: o aluno escolheu o item c e confirma sua escolha, com a seguinte justificativa: "É a letra c. É linearmente independente e gera V. Só. Letra c". A sua resposta não indica o recurso-meta utilizado pelo professor na atividade 7. A resposta desse aluno indica que sua compreensão sobre a noção de base deu-se pela definição apresentada na mesma atividade.

Bernardo: o aluno não soube responder, conforme sua colocação: "Chuta ou fala que não sei. ... Não sei." A sua resposta indica que o recurso-meta não teve efeito positivo na compreensão da noção de base.

Cláudia: a aluna respondeu o letra d, mas não justificou sua escolha. É possível que a aluna tenha memorizado o texto apresentado na atividade 7 e sua resposta não indica que o recurso-meta teve efeito de alavanca-meta.

David: o aluno escolheu o opção d e confirma sua escolha, com a seguinte justificativa: "(...) realmente, juntou tudo e fez uma bola só e melhorou bastante. A gente fala que ele é finitamente gerado, ele é um conjunto finito de vetores, todos os outros vetores são uma combinação do que está junto e todos os vetores desse conjunto, realmente, são necessários, ou seja, eles são linearmente independentes". A resposta do aluno indica que o recurso-meta tornou-se uma alavanca-meta para a compreensão da noção de base, pois levou o aluno a refletir sobre o conjunto se gerador e linearmente independente.

Evandro: o aluno escolheu a opção d, por causa do termo combinação, conforme sua resposta: "(...) então, por isso que eu escolhi a letra d. Por causa da combinação. Só. Senão eu ficaria com a opção a". A resposta do aluno não indica se o recurso-meta teve efeito de alavanca para este aluno.

Frederico: o aluno escolheu a opção d e justifica com a seguinte colocação:

> Eu acho que é a que expressa melhor. É a que expressa melhor a idéia que eu tenho de base de um espaço vetorial. Pra mim, é a que expressa melhor. Se bem que, pra mim, todas elas não deixam de ser verdadeiras. Mas acredito que a d foi a que mais me identifiquei.

A sua resposta indica que o recurso-meta teve efeito positivo para este aluno, pois, de acordo com seu comentário, todas as alternativas são verdadeiras.

Gisele: a aluna escolheu a opção A e justificou sua resposta com o seguinte diálogo:

> A - Bom, com a D eu não concordei porque ela fala assim "todos os vetores do conjunto realmente sejam necessários para gerar V. Eu lembro de caso em que você podia gerar o V, no caso aqui, apenas com dois elemento do conjunto. Tinha um terceiro que você acabava não usando. Coisas assim. E pelo mesmo motivo, eu não concordei na C, que fala que tem que ser linearmente independente, então, sobrou ...
>
> A B, ela usa essa palavra maximal; que eu. É a única diferença da B com a C. não sei, eu acho que é o mínimo necessário. Então, eu fui no minimal.

A justificativa da aluna indica que o recurso-meta utilizado pelo professor não teve efeito positivo em sua compreensão da noção de base, pois Gisele acredita que o conjunto, para ser base, não precisa ser linearmente independente, conforme sua afirmação.

Conclusão Parcial

De acordo com as respostas dos alunos, o recurso-meta utilizado pelo professor para fazê-los refletir sobre a noção de base, só teve efeito para os alunos David e Frederico, pois fizeram uma reflexão sobre as opções apresentadas utilizando o recurso-meta empregado pelo professor. As respostas dos demais alunos não indicam que sua compreensão sobre o noção de base, deu-se por meio desse recurso-meta.

CONCLUSÃO

Esta pesquisa investigou o emprego de recursos-meta em sala de aula de Álgebra Linear, focando o ensino da noção de base de um espaço vetorial. Investigou também quais desses recursos, tornaram-se alavancas-meta para uma amostra de alunos por meio de entrevistas.

Para responder à primeira questão, foi feita uma análise dos dados levantados desde a primeira até a 13ª aula. Nesta última aula, o professor fez a abordagem da noção de base. A análise foi iniciada nas primeiras aulas do professor, por se entender que as primeiras noções de espaço vetorial estão intimamente ligadas às de base, tendo apontado que o professor empregou recursos-meta desde as primeiras aulas.

O recurso-meta da interação de domínios, utilizado para fazer o aluno refletir sobre as possíveis soluções de sistemas lineares, foi empregado pelo professor logo na segunda aula. É possível que o uso desse recurso já estivesse preparando os alunos para visualizarem os espaços vetoriais em diferentes representações.

Os três princípios da aprendizagem de Álgebra Linear de Harel foi outro recurso-meta utilizado pelo professor para fazer os alunos refletirem sobre a necessidade de se generalizar a estrutura dos espaços vetoriais, com base nos espaços mais concretos aos alunos, como o dos vetores da Geometria Analítica e as Matrizes $m \times n$. Nesta abordagem, o professor também empregou o recurso de fornecer diferentes tipos de espaços vetoriais para permitir ao aluno verificar a existência de conjuntos distintos com a mesma estrutura. Siqueira também empregou dois princípios de Harel, o da concretização e da necessidade, na abordagem de combinação linear, utilizando os vetores da geometria analítica como a situação concreta e, em seguida, a idéia das matrizes de ordem 2x2, para criar a necessidade de uma técnica para verificação das combinações lineares.

O recurso-meta de fornecer informações sobre as operações matemáticas, o dos exemplos e contra-exemplos e o dos questionamentos foram usados amplamente durante as aulas analisadas. Vale a pena destacar o emprego dos questionamentos, usados pelo professor, com grande habilidade, em praticamente, todas as suas aulas, fazendo alguns alunos refletirem sobre seus conhecimentos e dúvidas.

Os recursos-meta utilizados pelo professor Siqueira não foram transmitidos apenas oralmente. Em algumas das atividades distribuídas para seus alunos, também havia recursos-meta com possibilidade de se tornarem alavancas-meta para algum deles. A introdução apresentada na atividade denominada "Ficha 7" indica a reflexão sobre a noção de base ser um conjunto gerador minimal, recurso este já explicitado em outros trabalhos relativos a este tema, e a variedade de exercícios sugeridos aos alunos, são exemplos de recursos-meta transmitidos na forma escrita.

Convém aqui ressaltar que embora muitos estudiosos sobre o tema afirmem que os recursos-meta não são avaliados diretamente, o professor Siqueira, em uma de suas avaliações individuais, elaborou duas questões, em uma delas levou alguns alunos a utilizarem o recurso-meta da interação de domínios para verificar a veracidade de conjuntos representados por gráficos serem subespaços vetoriais e a outra utilizava exemplos e contra-exemplos de subespaços vetoriais, recursos estes usados em sala de aula. Este resultado indica ser possível avaliar os efeitos dos recursos-meta, por meio de avaliações individuais.

Depois de iluminar todos os recursos-meta utilizados pelo professor, em sala de aula, esta pesquisa também respondeu à questão sobre quais recursos-meta tornaram-se alavancas-meta para uma amostra de alunos, por meio de uma análise feita nas entrevistas realizadas com essa amostra.

A análise revelou que poucos dos recursos-meta selecionados serviram de alavanca-meta à maioria dos alunos da amostra. De acordo com a análise, o recurso-meta "(...) eu tenho alguém que está dependendo dos outros, lá dentro do meu conjunto", usado para verificar se um conjunto é linearmente dependente, tornou-se uma alavanca-meta para seis dos sete alunos entrevistados.

Outro recurso-meta utilizado nas entrevistas foi o recurso dos exemplos e contra-exemplos. Este recurso se tornou uma alavanca-meta para três dos alunos entrevistados.

Dentre os nove recursos-meta empregados nas entrevistas, só dois deles não se constituíram em alavanca-meta para essa amostra de alunos. Os recursos de interação de domínios, ao abordar a interpretação da solução de um sistema linear e o recurso dos três princípios de Harel, na abordagem da estrutura de espaço vetorial, são os recursos que não se constituíram alavanca-meta. Os demais recursos-meta constituíram-se alavancas-meta, individualmente, para um ou outro aluno.

Ao destacar os recursos-meta utilizados pelo professor de Álgebra Linear, em sala de aula, e verificar quais os recursos tornou-se alavanca-meta para algum de seus alunos, espero ter dado uma modesta contribuição aos professores que lerem este trabalho. Além disso, espero que este trabalho levante outras questões, relativas à utilização de recursos-meta no ensino de Álgebra Linear.

BIBLIOGRAFIA

ARAÚJO, C. C. V. B. **A metamatemática no livro didático de álgebra linear.** São Paulo, 2002. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Programa de Educação Matemática, PUC-SP.

CALLIOLI, C. A. et all. **Álgebra Linear e aplicações**. 6 edição revisada, São Paulo, Atual, 1990.

CELESTINO, M. R. **Ensino-Aprendizagem da Álgebra Linear: as pesquisas brasileiras na década de 90**. São Paulo, 2000. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Programa de Educação Matemática, PUC-SP.

DORIER, J. L. et al. **L'enseignement de l'algèbre linéaire en question.** França: La Pensée Sauvage Éditions, 1997, p. 291-297.

DORIER, J. L. et al. The Meta Lever in: DORIER, J.L. **On the teaching of Linear Algebra.** France: Kluwer Academic Publishers, 2000, p. 151-175.

DORIER, J. L. et al. **Teaching Linear Algebra at University.** ICM-International Congress of Mathematicians, 2002, Beijin, Anais...Vol III 1-3

FREITAS, I. M. **Resolução de Sistemas Lineares Parametrizados e seu Significado para o Aluno** São Paulo, 1999. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Programa de Educação Matemática, PUC-SP.

GREENO, G. J. Conceptual entities, in GENTNER, D. ; STEVENS, A. L. **Mental Models**. EUA: Lawrence Erlbaum, 1983, p. 227-252

HAREL, G. Three principles of learnig and teaching mathematics In: DORIER, J.L. **On the teaching of linear algebra**. França: Kluer Academic Publishers, 2000. p. 177-189

LUDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. **Pesquisa em Educação: Abordagens qualitativas. Coleção Temas Básicos de Educação e Ensino.** São Paulo: EPU Editora Pedagógica e Universitária Ltda., 2001.

MARANHÃO, M. C. S. A. Dialética-Ferramenta-Objeto In: Machado, S. D. A. et al. **Educação Matemática: uma introdução**. São Paulo: EDUC, 1999. p. 115-134.

PADREDI, Z. L. N. **As "Alavancas Meta" no discurso do professor de Álgebra Linear.** São Paulo, 2003. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Programa de Educação Matemática, PUC-SP.

ROBERT, A.; ROBINET, J. Prise Compte du Meta en Didactique des Mathematiques. **IREM**, Université Paris VII, vol.21, p.1-63, 1993.

ROGALSKI, M. Pourquoi un tel echec de l'enseignement de l'algèbre linéaire? In: Michele Artigue et al - Commission inter-IREM Universite, **Enseigner autrement les mathematiques en DEUG A première année - Principes et Realisations,** IREM de Lille Villeneuve d´Ascq, Commission Inter-IREM Universite-Inter-IREM. Brochures, 1990.

ROGALSKI, M. L'Enseignement D'Algèbre Linéaire Experiemente a Lille In: DORIER, J.L. **L'Enseignement de L'Algèbre Linéaire en Question**. França: La Pensée Sauvage, Éditions, 1997. p. 159-184

ROGALSKI, M. The teaching experimented in Lille In: DORIER, J.L. **On the teaching of linear algebra**. França: Kluer Academic Publishers, 2000. p. 133-149

SILVA, A. M. **Uma Análise da Produção de Significados para a Noção de Base em Álgebra Linear.** Rio de Janeiro, RJ, 1997. Dissertação de Mestrado. Universidade Santa Úrsula.

SILVA, A. M. ; LINS, R. An Analysis of the production for the notion of basis in linear algebra. In: **Program of the 2nd International Conference on the teaching Mathematics (at the undergraduate level),** 2002, Grécia, Anais University of Crete, p. 108.

SILVA, C. E. **A ação mediadora da Geometria Analítica no Ensino – Aprendizagem da Álgebra Linear.** Rio de Janeiro, RJ, 1998. Dissertação de Mestrado. Universidade Santa Úrsula.

ANEXO

Guia de entrevista

1ª Questão

Para você, existe alguma relação entre os sistemas lineares de duas equações e duas variáveis e os gráficos das retas do plano. (Segue anexo "QUADRO 1").

2ª Questão

O que o conjunto das matrizes quadradas de ordem 2 e o conjunto dos vetores do plano têm em comum?

3ª Questão

O subconjunto $S = \{(x, y) \ / \ y = 1\}$ *é um subespaço vetorial do* R^2*?* (Segue anexo "QUADRO 2").

4ª Questão

Na sua opinião, quais são as características mais importantes de um espaço vetorial?

5ª Questão

Para você, qual a utilidade de combinação linear ?

6ª Questão

Se todos os subconjuntos $A = \{2,\ 2+t,\ 3t,\ t-1\}$, $B = \{t+1,\ 1,\ 2+t\}$ *e* $C = \{5,\ t+1\}$ *geram o P_1 (R), qual deles você escolheria para produzir outros vetores de P_1 (R).* (Segue anexo "QUADRO 3").

7ª Questão

Dados os subconjuntos $A = \{(1,2),\ (2,4),\ (3,6)\}$, $B = \{(1,1,1),\ (3,-1,2),\ (0,-4,-1)\}$, $C = \{(7,\ 0,\ 0,1),\ (0,1,\ 1,\ 0)\}$ *e* $D = \{(0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)\}$. *Quais desses conjuntos são linearmente dependentes?* (Segue anexo "QUADRO 4").

8ª Questão

Dado o seguinte trecho de uma interação entre um professor e os alunos de sua classe:

Aluno A – $\{1+x\ ,\ x^2\}$ é uma base de P_2(R) ?

Prof – Que cara tem alguém do P_2(R)?

Classe - ax^2+bx+c

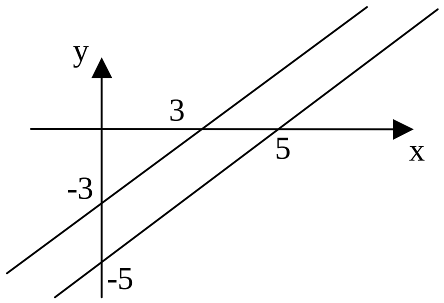
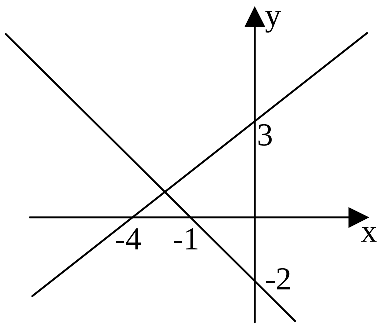
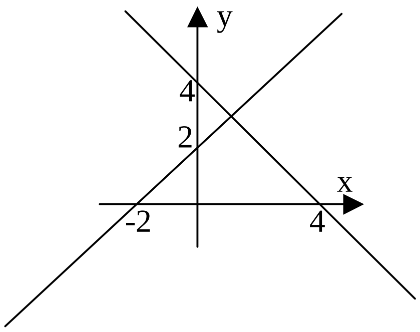
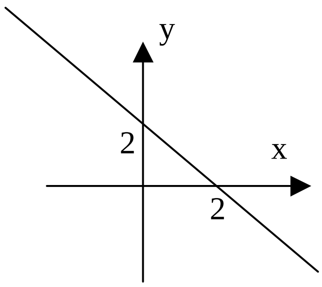
Prof – $\{1 + x,\ x^2\}$, dois vetores, linearmente independentes. Esse conjunto gera todos os elementos de P_2(R) ?

O que você responderia ao professor? (Segue anexo "QUADRO 5").

9ª Questão

Dentre as seguintes afirmações, dadas abaixo, para você, quais delas expressa melhor a idéia de base: (Segue anexo "QUADRO 6").

QUADRO 1

a) 	( ) $\begin{cases} -x - y = -2 \\ x + y = 2 \end{cases}$
b) 	( ) $\begin{cases} x - y = 3 \\ x - y = 5 \end{cases}$
c) 	( ) $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 2x + y = -2 \end{cases}$
d) 	( ) $\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = -2 \end{cases}$

QUADRO 2

O subconjunto $S = \{(x, y) \ / \ y = 1\}$ é um subespaço vetorial do R^2?

QUADRO 3

$A = \{2 \ , \ 2+t \ , \ 3t \ , t-1\}$

$B = \{ \ t+1, 1, \ 2+t \ \}$

$C = \{ \ 5 \ , \ t+1 \ \}$

QUADRO 4

$A = \{(1,2),\ (2,4),\ (3,6)\}$

$B = \{(1,1,1),\ (3,-1,2),\ (0,-4,-1)\}$

$C = \{(7,0,0,1),\ (0,1,1,0)\}$

$D = \{(0,0,0,0,0)\}$

QUADRO 5

Aluno A – {1+x , x^2} é uma base de $P_2(R)$?

Prof – Que cara tem alguém do $P_2(R)$?

Classe - ax^2+bx+c

Prof – {1 + x, x^2}, dois vetores, linearmente independentes. Esse conjunto gera todos os elementos de $P_2(R)$?

QUADRO 6

a) Base de um espaço vetorial V finitamente gerado é um subconjunto gerador minimal de V.
b) Base de um espaço vetorial V finitamente gerado é um subconjunto linearmente independente maximal de V.
c) Base de um espaço vetorial V finitamente gerado é um subconjunto linearmente independente que gera V.
d) Base de um espaço vetorial V, finitamente gerado, é um subconjunto finito de vetores de V, tal que qualquer outro vetor de V seja uma combinação linear dos elementos desse conjunto, e mais, que todos os vetores desse conjunto realmente sejam necessários para gerar V.