PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO

PUC/SP

Marcia Regiane Miranda

Pensamento proporcional:

uma metanálise qualitativa de dissertações

MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

São Paulo

2009

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO

PUC/SP

Marcia Regiane Miranda

Pensamento proporcional:

uma metanálise qualitativa de dissertações

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de ***MESTRE PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA****, sob a orientação da* ***Professora Doutora Maria Cristina Souza de Albuquerque Maranhão***

São Paulo

2009

Banca Examinadora

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta dissertação por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: ____ Local e Data: ______________

"Mestre não é aquele que tudo ensina, mas aquele que de repente, aprende".

Guimarães Rosa

Agradecimentos

À minha orientadora Profa. Dra. Maria Cristina Souza de Albuquerque Maranhão pela dedicação e paciência ao longo da elaboração desse trabalho.

À Profa. Dra. Ana Lúcia Manrique e à Profa. Dra. Rosana Giaretta Sguerra Miskulin por aceitarem fazer parte da banca examinadora e pelas valiosas contribuições no exame de qualificação.

À Secretaria da Educação do Estado de São Paulo pela concessão da bolsa ao longo do curso.

À Secretária Municipal de Educação de Mogi das Cruzes Profa. Maria Geny Borges Ávila Horle pela concessão da licença sem vencimentos para cursar o mestrado.

À Coordenadora do CAIC Profa. Cláudia Helena Romanos Pereira pela ajuda em vários momentos.

À Profa. Leni. e Profa. Bernadete do Departamento Pedagógico da Secretaria Municipal de Educação de Mogi das Cruzes.

Aos amigos do trabalho, do curso e aos de grupo Adriana Camejo, Adriana Hamazaki, Adriano, Marcos, Mercedes, Lucimar e Thaís que estiveram sempre presentes, contribuindo de diversas formas.

À minha mãe, irmão e noivo pelo apoio e compreensão.

A todos que contribuíram para a realização deste trabalho, com carinho especial à amiga profa. Marcia Rejane Rodrigues.

A Autora

Resumo

O objetivo deste trabalho é fazer uma síntese de investigações, que focalizam as expressões matemáticas, geradas na (ou reflexos da) manifestação e desenvolvimento do *pensamento proporcional*. Nosso objeto de estudo são as atividades realizadas e explicitadas em dissertações de mestrado produzidas no Estado de São Paulo que visam melhorar o ensino e aprendizagem de aspectos do pensamento proporcional. Metodologicamente nossa pesquisa se caracteriza como um estudo documental denominado metanálise qualitativa na qual se procura fazer uma revisão sistemática de um conjunto de pesquisas, visando à produção de novos resultados, ou sínteses. Na intenção de transcender os resultados obtidos pelas investigações estudadas, utilizamos nas análises elementos que julgamos essenciais dos referenciais teórico, histórico e curricular. Baseamo-nos em procedimentos de análise de conteúdo de Bardin (2008), em uma abordagem qualitativa, conduzindo a nossa pesquisa conforme as seguintes fases: 1) Elaboração do corpus documental e seleção dos modelos de fichamento. 2) Primeira análise dos documentos. 3) Segunda análise. 4) Síntese final. Como resultado de nossa pesquisa, verificamos que a realização de atividades propostas em duas dissertações do Estado de São Paulo favoreceu a expressão e o desenvolvimento do pensamento proporcional em estudantes, e os aspectos privilegiados foram os que tiveram como objetivo representar situações proporcionais por meio de gráficos, tabelas, símbolos, desenhos ou diagramas; utilizar idéias centrais associadas aos sentidos do número racional, ou de relações e operações entre eles, além de suas representações, para resolver problemas envolvendo funções ou idéias associadas às funções e suas representações e utilizar multiplicação ou divisão para resolver problemas envolvendo idéias de razão ou proporção.

Palavras-chave: metanálise qualitativa, pensamento proporcional, educação algébrica.

Abstract

The goal of this work is to make a synthesis of investigations focused on the mathematical expressions generated (or reflected) from manifestation and development of the proportional thinking. Our study object are activities set out in thesis produced in the State of São Paulo aimed at improving the teaching and learning proportional thinking aspects. Our research methodology is characterized as a documentary denominated qualitative metanalysis study which seeks to make a systematic review of a set of surveys that produce new results or synthesis. In order to transcend the results obtained by investigations, we used in analysis, elements which we believe are essentials of theoretical, historical and curricular references. We conduct our studies based on procedures of content analysis of Bardin (2008), in a qualitative approach, leading our research according to the following phases: 1) The preparation of the documentary corpus and register selection models. 2) The first analysis of documents. 3) Second analysis. 4) The final synthesis. As a result, we verified that the activities proposed in two dissertations of the State of São Paulo have fostered expression and the development of our students' proportional thinking, and privileged aspects were those that had intended to represent proportional situations through charts, tables, symbols, drawings or diagrams; using central ideas associated with directions from rational numbers, or relations and operations between them, besides their representations, to solve problems involving functions or ideas associated with the functions and their representations and using multiplication and division to solve problems involving ratio or proportional ideas.

Keywords: qualitative metanalysis, proportional thinking, algebraic education.

Sumário

Lista de Quadros

Lista de Figuras

Introdução

O pensamento proporcional é um tipo de pensamento matemático essencial para interpretar o comportamento de diversas grandezas do mundo físico, apoiando o estudo de outras áreas, além da Matemática. Por exemplo, questões das Ciências Naturais (densidade, velocidade, energia elétrica) e da Geografia (coordenadas geográficas, densidade demográfica, escalas de mapas) são estudadas com a utilização deste tipo de pensamento. No contexto da Matemática, é fundamental na aprendizagem de Álgebra, Geometria e Trigonometria, na resolução de problemas multiplicativos, de porcentagem, de semelhança de figuras geométricas, na análise de tabelas e gráficos de funções, dentre outros.

Como professora da rede pública estadual de ensino do Estado de São Paulo, observamos na Proposta Curricular do Estado de São Paulo (2008), que as idéias de proporcionalidade são consideradas "fundamentais no tratamento de todos os conteúdos disciplinares". Por este motivo, noções de proporcionalidade são tratadas em todas as séries do Ensino Fundamental e do Ensino Médio. No Ensino Fundamental, as noções de proporcionalidade aparecem no estudo das frações, de semelhanças, das grandezas diretamente e inversamente proporcionais, dentre outros. No Ensino Médio, o raciocínio proporcional é usado principalmente no estudo das funções.

Assim, interessamo-nos em ampliar nosso conhecimento sobre o assunto e decidimos fazer uma síntese de investigações, focalizando as expressões matemáticas, geradas na (ou reflexos da) manifestação e desenvolvimento do pensamento proporcional.

Buscamos neste trabalho fazer uma metanálise qualitativa, que segundo Fiorentini e Lorenzato (2006, p. 103) é “[...] uma revisão sistemática de outras pesquisas, visando realizar uma avaliação crítica das mesmas e/ou produzir novos resultados ou sínteses a partir do confronto desses estudos, transcendendo aqueles anteriormente obtidos.”

Escolhemos como objeto de estudo para nossa investigação as atividades realizadas e explicitadas em dissertações produzidas no Estado de São Paulo que focalizam a manifestação e o desenvolvimento de aspectos do pensamento proporcional em estudantes.

Como a nossa pesquisa tem por objetivo produzir novos resultados, ou sínteses, na intenção de transcender os resultados obtidos pelas investigações a serem analisadas, empregamos um referencial sobre aspectos do pensamento proporcional para auxiliar nas análises.

Desta forma, optamos por utilizar elementos que consideramos essenciais do artigo de Behr, Lesh e Post (1995), como referencial teórico. O original em inglês foi publicado no anuário de 1988 do Conselho Nacional de Professores de Matemática (NTCM[1] - Estados Unidos da América) e publicado em português em 1995, no livro **As idéias da álgebra**. Por não ser recente complementamos com outra publicação do mesmo Conselho (NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS, 2006).

Também consideramos adequado examinar uma proposta curricular nacional. Desta forma, procuramos identificar aspectos importantes do pensamento proporcional nos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática: Ensino de primeira a quarta séries (BRASIL, 1997) e Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática: Ensino de quinta a oitava séries (BRASIL, 1998).

Além disso, esta dissertação pretende contribuir com o projeto *Expressões, Equações e Inequações* do Grupo de Pesquisa em Educação Algébrica (GPEA) da PUC-SP. Portanto, consideramos adequado abordar a origem histórica do pensamento proporcional, em especial sua contribuição no desenvolvimento do pensamento algébrico.

---

[1] National Council of Teachers of Mathematics.

Após um levantamento sobre dissertações e teses sobre o assunto, delineamos a nossa primeira questão de pesquisa: *Quais questões tem sido colocadas nas dissertações e tese do Estado de São Paulo no tema?*

Exposto o referencial base do presente estudo e após a Primeira Análise as questões principais especificadas neste quadro são: *A realização de atividades propostas em dissertações do Estado de São Paulo, no tema, tem favorecido a expressão e o desenvolvimento do pensamento proporcional em estudantes? Quais aspectos do pensamento proporcional têm sido privilegiados nestas pesquisas?*

Para a elaboração deste trabalho nos inspiramos no procedimento de análise de conteúdo de Bardin (2008), e optamos por uma abordagem qualitativa. Desta forma, conduzimos a nossa pesquisa conforme as seguintes fases: elaboração do corpus documental; seleção dos modelos de fichamento para fase de análise; primeira análise dos documentos; aprofundamento da análise; síntese final.

No Capítulo I apresentamos a problemática da pesquisa esclarecendo a relevância do nosso trabalho e destacando alguns aspectos do pensamento proporcional sob diferentes pontos de vista.

No Capítulo II explicamos a fundamentação teórico-metodológica adotada e descrevemos os procedimentos da pesquisa.

O Capítulo III consta a primeira análise dos documentos, na qual comparamos os objetivos e identificamos as dissertações do Estado de São Paulo que explicitam atividades realizadas com alunos em sala de aula.

No Capítulo IV explicitamos a segunda análise dos documentos, na qual analisamos as atividades propostas e realizadas em duas dissertações do Estado de São Paulo.

Finalmente no Capítulo V apontamos as conclusões finais da nossa pesquisa.

Capítulo I

PROBLEMÁTICA

1.1 RUMO AO OBJETIVO DA PESQUISA

Em nossa trajetória como professora de Matemática, temos atuado no Ensino Fundamental e Médio em escolas particulares e públicas do Estado de São Paulo. Ao longo da carreira, mediante os desafios encontrados, nos deparamos com a necessidade de refletir sobre nosso trabalho docente, o que nos motivou a estudar e pesquisar temas relativos ao ensino e à aprendizagem da disciplina que lecionamos.

Em 2007 ingressamos no Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática (PEPGEM), da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP), que tem como um de seus objetivos a produção de trabalhos de pesquisa que contribuam para a compreensão do processo de ensino e aprendizagem da Matemática[2].

Escolhemos fazer parte do Grupo de Pesquisa em Educação Algébrica (GPEA) existente nesse programa da PUC-SP, inserindo-nos no projeto *Expressões, Equações e Inequações*.

Esse projeto aponta a necessidade da elaboração de sínteses de pesquisas e a realização de investigações sobre expressões, equações e

---

[2] Informação disponível no site do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática: <http://www.pucsp.br/pos/edmat/>. Acesso em: 18 set. 2008.

inequações. Partindo-se desta informação são traçados os seus principais objetivos de acordo com Maranhão (2007, p. 2)

> Em busca (www.capes.gov.br) sobre títulos de dissertações e teses defendidas entre 1998 e 2004, foram encontrados 1005 títulos nesses tópicos, voltados principalmente para os domínios: Engenharia, Ciências da Computação, Física, Matemática, Economia, Educação e Sociologia, sendo, destes, apenas 39 do âmbito da Educação. Não foram encontradas sínteses de trabalhos educacionais no tema.
>
> Esse resultado atesta, de um lado, a importância dos tópicos propostos para estudo e, de outro, a necessidade tanto de pesquisas nacionais como de sínteses de trabalhos em Educação Matemática, no assunto. Estão configurados, assim, os dois principais objetivos do projeto: elaborar sínteses de pesquisas e realizar investigações nacionais no tema.
>
> Para perseguir este objetivo, parte-se do pressuposto que pesquisas em pequenos recortes do tema são interessantes porque possibilitam sínteses. Essas sínteses têm a finalidade de caracterizar o ensino e a aprendizagem do tema no Brasil, para o balizamento referido e o debate internacional no assunto.

Portanto, com o intuito de contribuir com este projeto, intencionamos fazer uma síntese de investigações feitas no Estado de São Paulo, que focalizam as expressões matemáticas, geradas na (ou reflexos da) manifestação e desenvolvimento do *pensamento proporcional*, buscando suscitar reflexões para melhorar a nossa abordagem do assunto na Educação Básica.

Interessamo-nos em ampliar nosso conhecimento sobre questões relativas ao desenvolvimento do pensamento proporcional, dada sua importância, mencionada em várias publicações de orientação curricular tais como: os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática para o Ensino Fundamental (BRASIL, 1998); os Parâmetros Curriculares Nacionais mais [PCN +] (BRASIL, 2002) e a Proposta Curricular do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2008).

Não menos importante para tal escolha, mas não consciente de início, foi nossa formação em Arquitetura e Urbanismo. Afinal, ao menos a proporção é um dos pilares nessa atividade humana, tendo em vista que todo projeto arquitetônico baseia-se nas representações em maquetes e desenhos em escalas. Além disso, desde a Grécia Antiga buscava-se a beleza das construções por meio de dimensões fundamentadas em proporções matemáticas consideradas *ideais*, como a que era baseada na *razão áurea*.

Com o objetivo de situarmos a nossa pesquisa com relação às outras da nossa própria instituição, apresentamos o Quadro 1 que traz um levantamento feito por Machado e Maranhão (2006), que mostra os títulos de dissertações produzidas no Programa de Estudos Pós Graduados da PUC-SP até o ano de 2003, e que se caracterizam por serem pesquisas bibliográficas. Acrescentamos ao levantamento o nome do autor e ano de defesa.

Quadro 1: Estados da Arte produzidos no PEPGEM da PUC-SP até 2003

Título da dissertação	**Autor (Ano)**
Ensino-aprendizagem da Alg. Linear: as pesquisas brasileiras na década 90.	Celestino (2000)
Ensino-aprendizagem da Geom. Analítica: pesquisas bras. na década 90.	Pinto (2000)
Dissertações de EDUMAT sobre o Ens. Superior da PUC/SP de 1994 a 2000	Junho (2003)
Dissertações de EDUMAT sobre o Ens. Médio da PUC/SP de 1994 a 2000	Oliveira (2003)
Dissertações de EDUMAT sobre o Ens. Fund. da PUC/SP de 1994 a 1997	Pereira (2003)
Sobre o Conhecimento Matemático do Professor de Matemática	Lellis (2002)
A Geometria Escolar: análise dos estudos sobre o abandono de seu ensino.	Pereira (2001)

Como este levantamento foi feito até o ano de 2003, procuramos no site do PEPGEM da PUC-SP outras pesquisas bibliográficas produzidas entre 2004 a 2008, e encontramos duas dissertações.

A primeira intitulada **Ensino e aprendizagem do conceito de função:** pesquisas realizadas no período de 1970 a 2005 no Brasil, elabora um estudo do tipo *estado da arte* abrangendo dissertações e teses produzidas no Brasil no período de 1970 a 2005 (ARDENGHI, 2008).

A segunda, cujo título é **Uma metanálise qualitativa das dissertações sobre equações algébricas no Ensino Fundamental** faz uma síntese de pesquisas brasileiras que tratam de equações algébricas no Ensino fundamental, publicadas no período de 1998 a 2004. Trata-se da primeira metanálise qualitativa do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP, e está inserida no mesmo projeto[3] do qual fazemos parte (MARTINS, 2008).

Esse percurso mostra que a PUC-SP já tem certa tradição nesta modalidade de pesquisa. Então, buscamos com a nossa pesquisa nos diferenciar destas ao menos pelo enfoque no tema das expressões matemáticas, geradas na (ou reflexos da) manifestação e desenvolvimento do *pensamento proporcional*, que é um tipo de pensamento fundamental na formação matemática do indivíduo (BEHR, LESH e POST, 1995; BRASIL, 1998; SÃO PAULO, 2008).

Justificada a presente pesquisa, relatamos seu enquadramento teórico, isto é, o ponto de vista teórico utilizado nas análises das investigações sintetizadas.

1.2 ASPECTOS DO PENSAMENTO PROPORCIONAL

O conceito de pensamento proporcional apresenta uma complexidade que tem sido destacada por vários pesquisadores conforme explica Ponte e Silvestre (2008). Para estes autores, isto se deve ao amplo conjunto de conhecimentos necessários para compreender todo o seu significado, e do fato de cada área do conhecimento usar este tipo de pensamento, modificando-o sutilmente para responder às suas necessidades específicas.

Desta forma, não há uma uniformidade quanto à definição de pensamento proporcional, e também é comum encontrarmos o termo *raciocínio proporcional* para designar este tipo de pensamento matemático.

Mesmo no campo da psicologia não há um consenso quanto ao uso dos termos pensamento e raciocínio. Manktelow (1999) afirma que numa visão tradicional, o pensamento pode ser dedutivo ou indutivo, sendo o pensamento indutivo freqüentemente equiparado ao raciocínio. Porém, segundo o autor esta divisão não deve ser considerada como rígida.

Nesse quadro, optamos por utilizar o termo *pensamento proporcional,* dado o interesse do nosso grupo de pesquisa em investigar a relação entre

[3] Expressões, Equações e Inequações

pensamento e linguagem algébrica, que segundo Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) é dialética.

Para a definição do que é o pensamento proporcional escolhemos o parecer dos autores que oferecem subsídios para as nossas análises. De tal modo, Behr, Lesh e Post (1988, p. 93) esclarecem que o pensamento proporcional é:

> [...] uma forma de pensamento matemático que envolve um senso de covariação e de comparações múltiplas, bem como a capacidade de armazenar e processar mentalmente várias partes de informação [...] está muito relacionado com a inferência e a predição e envolve métodos de pensamento tanto qualitativos quanto quantitativos.

Dada a complexidade e amplitude do estudo do pensamento proporcional, pretendemos neste capítulo destacar alguns dos aspectos que julgamos essenciais sob alguns pontos de vista, sendo um teórico, um histórico e dois curriculares.

1.2.1 Um ponto de vista teórico

No nosso trabalho optamos por utilizar aspectos que consideramos interessantes do artigo de Behr, Lesh e Post (1995), como referencial teórico. O original em inglês foi publicado no anuário de 1988 do Conselho Nacional de Professores de Matemática (NTCM[4] - Estados Unidos da América) e publicado em português em 1995, no livro **As idéias da álgebra**.

Escolhemos este artigo principalmente pelo fato do livro **As idéias da álgebra** fazer parte da Biblioteca do professor[5]. Assim, podemos averiguar se aspectos abordados por esta obra são mencionados nos trabalhos que compõem a presente síntese.

---

[4] National Council of Teachers of Mathematics.

[5] Projeto que tem abastecido as bibliotecas das escolas da Rede Pública de Ensino do estado de São Paulo com livros destinados ao estudo e pesquisa dos professores buscando oferecer subsídios para o aprimoramento profissional.

Ao abordar aspectos do pensamento proporcional tratados por estes autores, tentamos tornar o texto mais preciso, do ponto de vista matemático, e mais claro com a utilização de exemplos.

Desta forma, algumas das idéias que mencionamos refletem a nossa interpretação sobre o que dizem os autores.

Behr, Lesh e Post (1995) consideram o pensamento proporcional como base para a Álgebra e outras áreas da Matemática. Eles prevêem o desenvolvimento do pensamento proporcional em estudantes na faixa etária entre 12 e 14 anos.

Os autores mencionam que há inúmeras situações problemas sobre taxas e taxas de variação (envolvendo velocidade, densidade, preços, porcentagem, escala e conversão de unidades) que podem ser resolvidas com a utilização do conceito de proporções consideradas como igualdade de duas razões.

Os pesquisadores afirmam que o desenvolvimento do pensamento proporcional é mais complexo do que se imagina. Ressaltam ainda, que as situações problema sobre taxas são bons veículos para se trabalhar com diferentes formas de representação.

Para estes autores, na resolução de muitas dessas situações, estudantes podem usar tabelas, gráficos, símbolos, desenhos e diagramas representando suas idéias algébricas. Essa capacidade de fazer conversões de um tipo de representação para outro, é essencial, não apenas em Álgebra, mas também em outras áreas da Matemática, como a Geometria, por exemplo.

Em resumo entendemos que o pensamento proporcional é um tipo de pensamento matemático que envolve conhecimentos que pressupõem o uso da expressão $a/b=c/d$ (em que a, b, c, d são números inteiros; b e d não nulos) e razão. Segundo Behr, Lesh e Post (1995) o pensamento proporcional envolve a distinção entre o que resulta em proporção e o que não resulta, a idéia de covariação, comparações numéricas e, também não numéricas. Tais aspectos são elucidados com exemplos no Quadro 2.

Quadro 2: Alguns aspectos que o pensamento proporcional envolve.

Idéia de covariação	Em matemática corresponde à idéia de $f:\Re \to \Re$, $x \mapsto f(x)$ tal que, f(x) = 3x, variando x, f(x) também varia.
Comparações numéricas[6] envolvendo razões	Por exemplo, dados a, b, c, d inteiros que satisfaçam a/b=c/d com b e d não nulos podemos explorar com estudantes muitas possibilidades de problemas de comparação como: Será que $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}$? Será que $\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$? Será que $\frac{1}{2}$ é maior, menor ou igual a $\frac{3}{6}$? Os autores exploram esta idéia em diferentes contextos.
Comparações não numéricas[7]	Comparações que não comportam necessidade de valores numéricos. Exemplo: "Se Nicki, ao correr, desse menos voltas na pista e gastasse mais tempo do que ontem, sua velocidade seria maior, menor, igual, ou é impossível dizer?" (BEHR; LESH; POST, 1995, p. 90)
Distinção entre o que é proporcional e o que não é	Exemplo do que é proporcional: Um supermercado cobra 14 reais pelo quilo de presunto. Quanto cobrará por 400 gramas? Exemplo do que não é proporcional: Um time de futebol marcou 2 gols nos primeiros 30 minutos de jogo. Quantos gols terá marcado até o final do jogo?

Behr, Lesh e Post (1995, p. 94) recomendam que problemas de razões e proporções sejam introduzidos utilizando-se os conhecimentos dos alunos sobre multiplicação e divisão. Por exemplo.

> Sally pagou $ 4,50 por 5 disquetes. Quanto ela pagaria por uma dúzia? A resolução, neste caso, consta de duas partes: Primeiro precisa-se fazer uma divisão (4,50 / 5) [...]. Depois se acha o múltiplo conveniente da taxa unitária [(4,50)/5 x 12 ou 0,90 x 12].

Embora seja interessante o uso deste conhecimento, o aluno pode usar outras estratégias e pode não saber dividir ou multiplicar. Compactuamos com a idéia de Camejo, Machado e Maranhão (2008) de que devemos interagir com alunos sem idealizá-los, não estabelecendo a priori o que os estudantes deveriam saber ou ter condições de fazer.

---

[6] Este tipo de comparação os autores denominam de comparações quantitativas.

[7] Este tipo de comparação os autores denominam de comparações qualitativas.

O exposto nos conduz a destacar alguns dos aspectos essenciais para a manifestação e desenvolvimento do pensamento proporcional, como a utilização da multiplicação e divisão para resolver problemas envolvendo idéias de razão, ou proporção; o uso da idéia de covariação e de comparações numéricas e não numéricas; a distinção do que é proporcional do que não é proporcional e a representação de situações proporcionais por meio de gráficos, tabelas, símbolos, desenhos ou diagramas.

1.2.2 Aspectos curriculares

Como mencionamos anteriormente o artigo de Behr, Lesh e Post (1995), que escolhemos para auxiliar nas análises e interpretações do nosso trabalho, foi publicado originalmente na década de 1980 pelo Conselho Nacional de Professores de Matemática (NTCM[8] - Estados Unidos da América). Por não ser recente, procuramos outra publicação do mesmo conselho, para verificar, se aquelas idéias do artigo foram complementadas e atualizadas.

O documento que escolhemos trata-se de uma proposta curricular[9] elaborada pelo NTCM que traz orientações curriculares para estudantes na faixa etária entre 3 e 14 anos. Foi escrito por um grupo de matemáticos, educadores matemáticos e professores que buscaram identificar a matemática que deveria ser focalizada na instrução e aprendizagem estudantil. Inclui idéias, conceitos, habilidades e procedimentos considerados pelos autores como básicos para a compreensão e a aprendizagem duradoura.

Segundo o National Council of Teachers of Mathematics (2006), para um conceito ou tópico ser considerado essencial ele deve ter as seguintes características:

- ✓ Ser matematicamente importante, tanto para favorecer os estudos da matemática quanto para ser usado em aplicações dentro e fora da escola;

---

[8] National Council of Teachers of Mathematics.

[9] Curriculum focal points for prekindergarten through grade 8 mathematics: a quest for coherence.

- ✓ Articular com o que já se sabe sobre aprendizagem matemática;
- ✓ Possibilitar um encadeamento lógico de idéias matemáticas ao longo das séries.

Analisando esta publicação, observamos que tópicos e conceitos relativos ao pensamento proporcional são enfatizados na 6ª série, na qual se recomenda a utilização do raciocínio sobre multiplicação e divisão para resolver problemas de razão e taxa, como já recomendavam Behr, Lesh e Post (1995).

Na 7ª série recomenda-se o desenvolvimento de uma compreensão mais ampla da aplicação da proporcionalidade, resolvendo uma grande variedade de problemas de conversão de unidades de medidas e porcentagem, incluindo descontos, juros e impostos. Indica-se que os alunos utilizem razões, proporções e algumas idéias relacionadas à probabilidade para fazer estimativas referentes a uma população com base em uma amostra. Orienta-se que sejam usadas porcentagens para fazer e interpretar histogramas e gráficos circulares.

Sugere-se também que os estudantes resolvam problemas de semelhança, escala e relacionem seus estudos de proporcionalidade com o cálculo de perímetros, áreas e volumes. Além disso, aconselha-se que os estudantes representem graficamente relações proporcionais e diferenciem relações diretamente proporcionais das inversamente proporcionais.

Na 8ª série instrui-se que os alunos utilizem as idéias sobre proporcionalidade no estudo de funções lineares, quadráticas e exponenciais básicas contrastando suas propriedades a partir de tabelas, gráficos, ou de equações e apliquem estas idéias para solucionar situações problemas.

Mantendo os aspectos anteriores, baseados em Behr, Lesh e Post (1995) e tendo em vista o que foi explicitado sobre a publicação norte-americana, verificamos como ampliações relevantes o relacionamento da proporcionalidade com as idéias de perímetro, área, volume e conversão de unidades de medidas; o uso ou representação de desenhos em escala; a utilização de proporções na análise de dados (de uma enquete, pesquisa) ou em probabilidade; o tratamento com porcentagem, juros, descontos, impostos, taxas; a utilização do pensamento proporcional para resolver problemas envolvendo funções; o relacionamento da proporcionalidade com a idéia de semelhança e a diferenciação de grandezas diretamente proporcionais das inversamente proporcionais.

Além desta proposta curricular americana, consideramos conveniente examinar também uma proposta curricular nacional. Assim, procuramos identificar os aspectos essenciais do pensamento proporcional citados nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de Matemática: Ensino de primeira a quarta séries (BRASIL, 1997) e Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática: Ensino de quinta a oitava séries (BRASIL, 1998).

Deste modo, observamos que os PCN (BRASIL,1997) recomendam que se trabalhem conceitos relativos ao pensamento proporcional desde o 2º ciclo com alunos entre nove e dez anos associando-o as idéias de multiplicação e divisão.

No terceiro e quarto ciclos[10], estes conceitos devem ser gradualmente aprofundados. Para isto, os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática: Ensino de quinta a oitava séries (BRASIL, 1998, p. 67) sugerem para o terceiro ciclo a exploração de problemas de proporcionalidade envolvendo aspectos qualitativos e quantitativos como: “O número encontrado deveria ser maior ou menor? Quanto maior? Essa reposta faz sentido?”. Para resolver estes problemas recomenda-se à utilização de estratégias *não convencionais* deixando para o quarto ciclo o uso de estratégias *convencionais* (regra de três).

No quarto ciclo tem-se como objetivo o desenvolvimento do pensamento proporcional por meio da exploração de situações de aprendizagem que envolvam a representação gráfica da variação de grandezas diretamente proporcionais, inversamente proporcionais e não proporcionais levando o aluno a analisar e caracterizar estas variações.

Este documento afirma que muitas situações do cotidiano funcionam conforme leis de proporcionalidade e que conteúdos referentes a grandezas e medidas proporcionam contextos ricos para analisar a interdependência, entre grandezas e expressá-las algebricamente o que é fundamental no pensamento proporcional.

---

[10] O terceiro ciclo refere-se a alunos com faixa etária entre 11 e 12 anos e o quarto ciclo a alunos entre 13 e 14 anos.

Recomenda ainda que noções de proporcionalidade sejam conduzidas mantendo-se estreitas ligações com atividades geométricas como ampliação e redução de figuras planas, relações entre medidas como: comprimento e diâmetro de uma circunferência; perímetro e área; diagonal e lado de um quadrado.

Além disso, no estudo da probabilidade é desejável que o aluno saiba representar a probabilidade de um evento por meio de uma razão.

Assim, acrescentamos também os seguintes aspectos entre os já obtidos: resolução de problemas usando regra de três, ampliação e redução de figuras planas e relacionamento de medidas como comprimento e diâmetro de uma circunferência e diagonal e lado de um quadrado.

1.2.3 Um ponto de vista histórico

Julgamos importante abordar a origem histórica do pensamento proporcional, em especial sua contribuição no desenvolvimento do pensamento algébrico, tendo em vista que esta dissertação se insere em um projeto do Grupo de Pesquisa em Educação Algébrica (GPEA) da PUC-SP.

Radford (2001, p. 13) considera que "o pensamento algébrico surgiu do pensamento proporcional, como um curto, direto e alternativo modo de resolver problemas não práticos".

O autor afirma ser interessante explorar o elo histórico existente entre o pensamento proporcional e o pensamento algébrico no ensino da Matemática, pois, razões e proporções não são usualmente apresentadas no currículo escolar como sendo vinculados ao pensamento algébrico.

Esse pesquisador esclarece que nas antigas civilizações Egípcia e Mesopotâmica duas das mais importantes correntes matemáticas, a geométrica e a numérica, apresentavam problemas freqüentemente resolvidos com estratégias baseadas no pensamento proporcional.

Um dos problemas mesopotâmicos conhecidos mais antigos em que ocorre a manifestação do pensamento proporcional é citado pelo autor: “Dado que você tem que contar com 1 gú-bar para 33 pessoas, quanto você deve contar para 260000 pessoas?” (FRIBERG, 1986 apud RADFORD, 2001, p. 14).

Para se resolver este problema o escriba não utiliza a divisão, mas sim a seguinte seqüência de cálculos: “3 gú-bar para 99 pessoas, 30 gú-bar para 990 pessoas e assim por diante” (FRIBERG, 1986 apud RADFORD, 2001, p. 15). Esta tática baseia-se no pensamento proporcional e possibilita encontrar uma resposta aproximada.

Radford (2001) assevera que a maior conquista do pensamento aritmético mesopotâmico foi um procedimento de resolução de problemas denominado de *método da falsa posição.* Este método baseava-se na idéia de assumir *valores falsos* para *valores verdadeiros* procurados para posteriormente refiná-los por meio de um *valor de ajuste proporcional* a fim de transformá-los em *valores corretos*.

Para exemplificar este método, em lugar de utilizarmos o exemplo dado pelo autor, em base sexagesimal apresentamos o seguinte problema, em base decimal, por questão de maior clareza: Achar os lados de um retângulo cuja largura é igual ao comprimento menos um quarto do comprimento, e a diagonal é 50.

Para se chegar à resposta usando o método da falsa posição um caminho possível seria adotar a comprimento do retângulo como sendo igual a 100. Assim, a altura do retângulo seria 75. Elevando ambos ao quadrado teríamos: $100^2 = 10000$ e $75^2 = 5625$. Somando-se os valores obtidos teríamos 15625, extraindo a raiz quadrada deste valor encontraríamos 125. O *valor de ajuste proporcional* era obtido multiplicando-se o *inverso do valor falso* pelo *valor verdadeiro*. O inverso multiplicativo de 125 é 1/125. Desta forma, o valor de ajuste proporcional é $(1/125) \times 50 = 2/5$. Então, os valores corretos são obtidos multiplicando-se o valor de ajuste proporcional pelos valores falsos: $(2/5) \times 100 = 40$ e $(2/5) \times 75 = 30$.

Usando os recursos algébricos atuais teríamos: seja x o comprimento do retângulo, y a sua altura e d a sua diagonal, então:

$$d = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + \left(\frac{3}{4}x\right)^2} = \frac{5}{4}x \Rightarrow x = \frac{4}{5}d$$

Radford (2001) observa que o método da falsa posição aparece na Mesopotâmia, como modo de pensar e que a Álgebra foi concebida a partir dele.

O pesquisador afirma que o pensamento proporcional permeia também a corrente matemática geométrica babilônica. Os babilônios formulavam e resolviam grande parte dos problemas usando um contexto geométrico por meio de um método denominado de *geometria do cortar e colar*[11] ou *geometria ingênua*[12].

Para compreender este método, mostramos a seguir um exemplo dado por Radford e Guérette (2000):

Quais as dimensões de um retângulo cujo semiperímetro tem 20 unidades e cuja área tem 96 unidades?

Para resolver o problema é sugerido que se considere um quadrado cujo lado mede 10 unidades, então sua área será 100 unidades (figura 1):

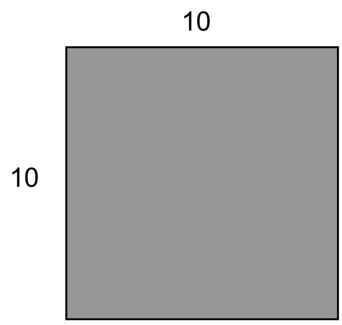


Figura 1: Quadrado com 100 unidades de área.

Se forem retiradas 4 unidades de área do quadrado da figura 1, obtém-se uma figura cuja área tem 96 unidades de área (figura 2):

---

[11] Cut-and-paste geometry.

[12] Naïve geometry.

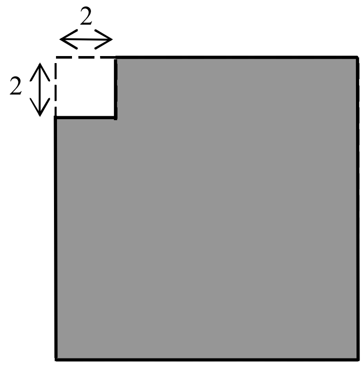


Figura 2: Quadrado com 96 unidades de área.

Para se obter um retângulo com área igual a 96 unidades deve-se cortar um retângulo de lado 2 unidades da figura 2 e colocá-lo como segue na figura 3:

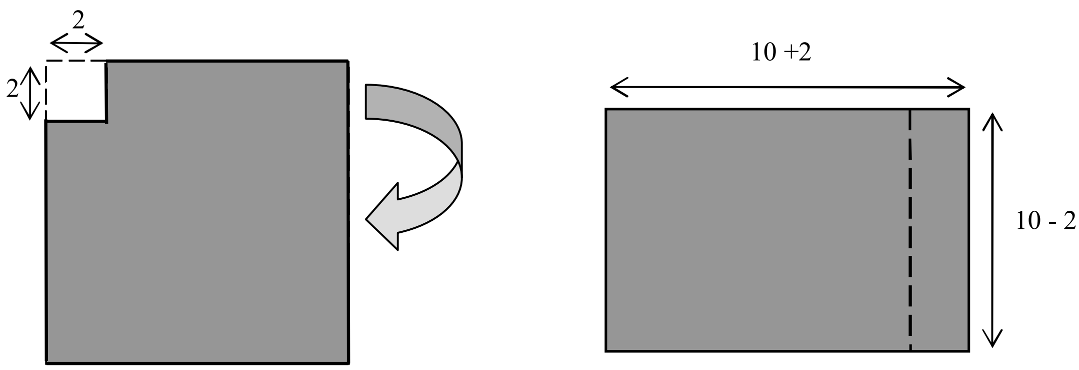


Figura 3: Obtenção do retângulo com 96 unidades de área.

Conclui-se, portanto que os lados procurados tem 12 unidades e 8 unidades.

Radford (2001) esclarece que nem todos os problemas deste tipo podem ser resolvidos pelo método da *geometria do cortar e colar* isoladamente. Em alguns casos, usava-se a idéia de *mudar a escala* da figura para posteriormente se usar este método.

Em resumo, a partir dessa síntese histórica acerca do pensamento proporcional considerado como origem do pensamento algébrico, acrescentamos os seguintes aspectos entre os já obtidos: usar o método da falsa posição, ou algo similar a ele; utilizar reconfigurações geométricas (designação atual para o método da *geometria do cortar e colar)*; usar reconfigurações precedidas de alteração de escala, que podem se revelar nas dissertações examinadas neste trabalho.

Capítulo II

METODOLOGIA

2.1 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICO-METODOLÓGICA

Pretendemos neste trabalho fazer uma pesquisa bibliográfica denominada metanálise qualitativa. Segundo Fiorentini e Lorenzato (2006, p.103), metanálise é "[...] uma revisão sistemática de outras pesquisas, visando realizar uma avaliação crítica das mesmas e/ou produzir novos resultados ou sínteses a partir do confronto desses estudos, transcendendo aqueles anteriormente obtidos."

A metanálise é diferenciada por estes autores dos estudos denominados *estado da arte*, que buscam ser mais históricos, inventariando, sistematizando e avaliando a produção científica num tema. Desta forma, os autores elucidam que:

> Os estudos metanalíticos diferem dos estudos do "estado da arte", pois não pretendem descrever aspectos ou tendências gerais da pesquisa num determinado campo de conhecimento, mas, tão somente, realizar uma análise crítica de um conjunto de estudos já realizados, tentando extrair deles informações adicionais que permitam produzir novos resultados, transcendendo aqueles anteriormente obtidos. (FIORENTINI; LORENZATO, 2006, p. 71).

Assim sendo, a nossa pesquisa objetiva produzir novos resultados, ou sínteses. Na intenção de transcender os resultados obtidos pelas investigações a serem analisadas, empregamos um referencial teórico sobre aspectos do pensamento proporcional. Por causa dessa característica este estudo empregou uma abordagem qualitativa, pois está relacionada a uma compreensão mais profunda de certos aspectos dos objetos de investigação. A pesquisadora Mirian

Goldenberg (2007, p. 50) afirma que “[...] os métodos qualitativos enfatizam as particularidades de um fenômeno em termos de seu significado para o grupo pesquisado. É como um mergulho em profundidade dentro de um grupo” bom para pensar” questões relevantes para o tema estudado.”

O método de análise de conteúdo de Laurence Bardin (2008) nos inspirou em certas fases do presente estudo.

Empregamos, especificamente, a *pré-análise* que corresponde à fase de organização, na qual o pesquisador deverá sistematizar suas idéias iniciais desenvolvendo um plano de análise; nessa etapa constituímos o *corpus documental* (seleção de documentos a serem analisados) e elaboramos os indicadores – que designamos aqui de descritores – aqui considerados aspectos essenciais para a manifestação e desenvolvimento do pensamento proporcional.

Na fase de *exploração do material* analisamos as investigações do *corpus*, em função das regras previamente formuladas e aplicamos sistematicamente as decisões tomadas na pré-análise. No presente estudo, fazemos o que designamos de *Primeira Análise*, com a finalidade de apresentar as características principais das obras selecionadas no *corpus*. Esta caracterização das investigações funcionaria, no nosso entender, como um contexto geral, exigido na pesquisa qualitativa. Depois, na fase que designamos de *Segunda Análise* nos atemos ao emprego dos descritores.

2.2 PROCEDIMENTOS DA PESQUISA

A primeira etapa do presente trabalho constituiu em um levantamento de dissertações e teses em Educação Matemática no Brasil, cujos títulos continham o termo *raciocínio proporcional*, ou o termo *proporcionalidade*, ou ainda, *proporções* ou *proporção*, nas listagens do Banco de teses Edumat da Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas (FE-UNICAMP), publicadas na revista **Zetetiké**[13].

[13] A revista **Zetetiké** é uma publicação semestral do Centro de Estudos, Memória e Pesquisa em Educação Matemática (CEMPEM) da FE-UNICAMP. Trata-se de uma revista teórico-científica e de reflexão especializada em Educação Matemática.

O resultado deste levantamento referente ao período de 1971 a 2007, que explicitamos de forma completa no Quadro 13 (Anexo 1), nos possibilitou a constatação de 22 pesquisas produzidas no Brasil sobre o tema.

Explicitamos a seguir, no Quadro 3, a distribuição destas pesquisas conforme região, universidade, programa e nível de ensino.

Quadro 3: Distribuição das dissertações e teses sobre pensamento proporcional conforme região, universidade e programa.

Região	Instituição	Programa de Pós-Graduação	Mestrado	Doutorado	Total
Sudeste	PUC-SP	Educação Matemática	03	-	03
	PUC-RJ	Educação	02	-	02
	UFES	Educação	01	-	01
	UNESP-Rio Claro	Educação Matemática	02	-	02
	UNICAMP	Educação	-	01	01
	Un. Sta. Úrsula	Educação Matemática	01	-	01
	USP	Educação	01	-	01
Sul	PUC-RS	Educação	01	-	01
	UFPR	Educação	-	01	01
	UFSC	Educação Científica e Tecnológica	01	-	01
	UNIVALI	Educação	01	-	01
Nordeste	UFPE	Psicologia Cognitiva	06	-	06
	UFPE	Educação	01	-	01
Norte	-	-	-	-	-
Centro-oeste	-	-	-	-	-

Observamos que a maior parte das pesquisas foram de mestrado havendo somente duas pesquisas de doutorado.

Quanto à distribuição em regiões, as dissertações e teses estão distribuídas predominantemente na região sudeste, conforme gráfico da Figura 4, e não constatamos neste levantamento pesquisas deste tipo nas regiões norte e centro-oeste.

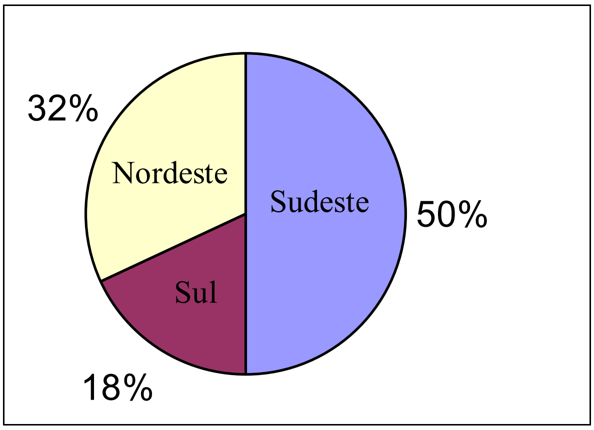


Figura 4: Gráfico da distribuição de dissertações e teses conforme região brasileira.
Fonte: Dados da pesquisa

Verificamos também que entre 1971 e 1979 não foi produzida nenhuma dissertação ou tese focalizando o pensamento proporcional, e que houve um crescimento na produção entre 1980 a 2007, conforme se observa no gráfico a seguir:

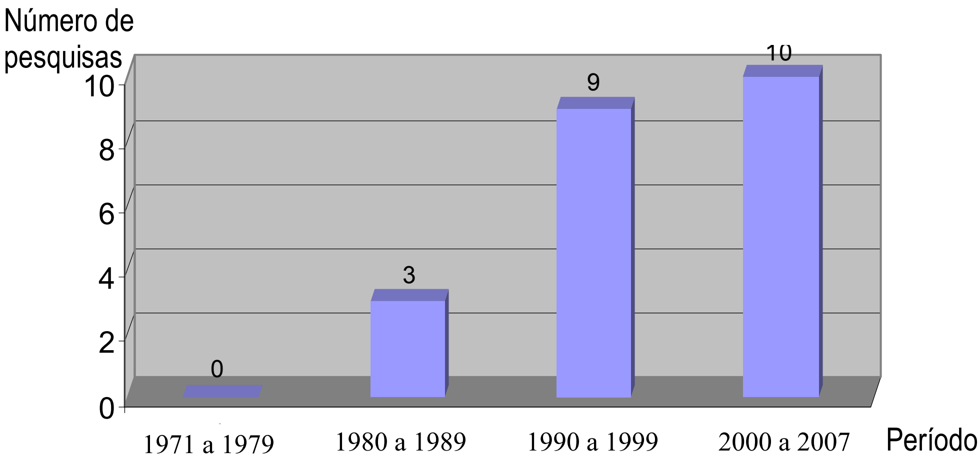


Figura 5: Gráfico da distribuição de dissertações e teses sobre o tema conforme período de publicação.
Fonte: Dados da pesquisa

Pretendendo atingir uma compreensão aprofundada de certos aspectos do objeto de investigação, selecionamos dentre estas dissertações e teses as que foram produzidas em universidades do Estado de São Paulo, unidade federativa em que trabalhamos. Desta forma, elaboramos uma seleção com seis dissertações e uma tese para constituição do corpus documental para a primeira análise conforme Quadro 14 (Anexo 1).

Destacamos que 7 das 22 pesquisas encontradas no período, focalizando o tema no Brasil (quase um terço), foram produzidas no Estado de São Paulo. Além disso, este número (7) representa mais da metade do número de dissertações e teses produzidas na região Sudeste (11).

Para esta primeira análise utilizamos um roteiro, adaptado de outro proposto pelo grupo GPEA às características do presente trabalho, que denominamos de modelo de fichamento e explicitamos no Quadro 15 (anexo 2).

Os fichamentos destas pesquisas selecionadas são apresentados no Anexo 2 e a primeira análise é detalhada no Capítulo III. Nesta fase pretendemos responder à pergunta: *Quais questões têm sido colocadas nas dissertações e tese do Estado de São Paulo sobre o tema?* Desta forma intencionamos identificar quais trabalhos deveriam constituir nosso corpus documental para a segunda análise.

A próxima etapa deste trabalho foi focalizar as dissertações que propõem atividades para a expressão e o desenvolvimento do pensamento proporcional e analisam a realização de tais atividades[14] em sala de aula, tendo em vista as nossas questões principais de pesquisa: *A realização de atividades propostas em dissertações e tese do Estado de São Paulo tem favorecido a expressão e o desenvolvimento do pensamento proporcional em estudantes? Quais aspectos do pensamento proporcional têm sido privilegiados nestas pesquisas?*

Assim, procedemos à segunda análise, baseada no corpus documental obtido a partir da primeira análise, usando descritores elaborados com embasamento nos elementos considerados essenciais pelos autores das publicações que tomamos para análise. Esta segunda análise apresentamos no Capítulo IV.

[14] Moysés (2007, p. 50), baseada em Leontiev (1978), explica que *atividade e consciência devem andar juntas*, ou seja, as atividades de aprendizagem não devem girar em torno de ações mecânicas. Por isso, neste trabalho, optamos por usar o termo atividade nesta perspectiva.

Capítulo III

PRIMEIRA ANÁLISE DOS DOCUMENTOS

Nessa etapa, realizamos comparações dos resultados obtidos dos fichamentos, buscando respostas às questões de pesquisa. Criamos quadros em que fizemos comparações entre os objetivos com a intenção de verificar quais similaridades de objetivos foram obtidas sobre o assunto.

3.1 COMPARAÇÃO DE OBJETIVOS

Comparando os objetivos tentaremos responder à pergunta: "Quais questões têm sido colocadas nas dissertações e tese do Estado de São Paulo sobre o tema?".

Para isto buscaremos similaridades entre os objetivos de pesquisa.

Conforme a necessidade foram negritadas algumas expressões relevantes para efeito de comparação. Evidenciamos assim, o tratamento dos dados.

Quadro 4: Comparação de objetivos

Barreto (2001)	[...] investigar **como se comporta uma população de alunos** frente a situações interpretáveis por meio de relações quartenárias envolvendo quantidades de naturezas diferentes e que podem ser tomadas como termos de uma **relação de proporcionalidade**. (BARRETO, 2001, p. 13).

Botta (1997)	"O objetivo de meu trabalho é **resgatar nos professores o conceito de proporcionalidade** [...]". (BOTTA, 1997, p. 49).
Costa (2005)	"**Analisar os conteúdos 'Razões e Proporções'** qualitativamente visando o ensino fundamental [...]" (COSTA, 2005, p. 13)
Gatass (1994)	1) mostrar a **importância da evolução histórica** do conceito de proporcionalidade, através do contexto sócio-cultural, no processo de ensino –aprendizagem; 2) favorecer o inter-relacionamento do **conceito de proporcionalidade com outros conceitos algébricos e geométricos**; 3) evidenciar a importância do conceito de **proporcionalidade como conteúdo interdisciplinar**; 4) mostrar a importância do conceito de **proporcionalidade no dia-a-dia** do aluno e na aprendizagem matemática, como conteúdo estrutural; 5) propiciar uma metodologia que reúna esses objetivos visando a uma **aprendizagem significativa**; 6) elaborar uma proposta de ensino para o primeiro grau, de tal maneira que esse conceito, ao ser ensinado, tenha uma fundamentação teórica, que possa ser continuamente aprofundada, **oferecendo aos professores condições de torná-la acessível**, também, a nível de 2º e 3º graus. (GATASS FILHO, 1994, p. 14)
Perotti (1999)	[...] o objetivo do nosso trabalho é a construção de uma **seqüência didática** que possibilite aos alunos a aprendizagem da equação da reta com ênfase no conceito de **coeficiente angular, calculado pela taxa de variação**. (PEROTTI, 1999, p. 1).
Pontes (1996)	[...] pretendemos poder ajudar na compreensão da relação entre a **matemática escolar e do cotidiano**, caso ela exista. Na hipótese de inexistência dessa relação, pretendemos **sugerir caminhos possíveis** que tornem a matemática escolar mais próxima da matemática da vida. (PONTES, 1996, p. 11).
Ruiz (1985)	[...] desenvolvemos o presente experimento, visando explorar **atividades que favorecessem o desenvolvimento do raciocínio proporcional** e, a partir daí, os **alunos** pudessem estabelecer algoritmos e leis gerais. (RUIZ, 1985, p. 118).

Numa síntese parcial entre os focos de pesquisa, verificou-se que uma dissertação e uma tese buscam relacionar matemática escolar e questões do cotidiano.

No que se refere aos objetivos, duas dissertações e a tese se preocupam em sugerir caminhos para o professor trabalhar em sala de aula, duas dissertações propõem e realizam atividades (apresentam uma seqüência didática), uma dissertação avalia a aprendizagem do tema e outra faz análise de como o conteúdo é apresentado em livros didáticos. Estes resultados são apresentados no Quadro 5 a seguir:

Quadro 5: Síntese de objetivos

	Barreto (2001)	**Botta (1997)**	**Costa (2005)**	**Gatass (1994)**	**Perotti (1999)**	**Pontes (1996)**	**Ruiz (1985)**
Propor e realizar atividades					**x**		**x**
Sugerir caminhos para os professores		**x**		**x**		**x**	
Avaliar aprendizagem	**x**						
Analisar conteúdo de livro didático			**x**				

Desta forma, conforme nossas questões principais, ao se definir as atividades para a expressão e o desenvolvimento do pensamento proporcional e a realização delas em sala de aula como objeto de estudo da presente investigação, identificamos as dissertações adequadas a compor o corpus documental para a segunda análise conforme Quadro 6:

Quadro 6: Seleção para constituição do corpus documental da segunda análise

1	PEROTTI, A. R. **O Estudo da reta a partir das grandezas diretamente proporcionais**: Uma proposta alternativa de ensino. 1999. 134f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1999.
2	RUIZ, A. R. **Ensino do Conceito de proporcionalidade**. 1985. 171f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1985.

Capítulo IV

ANÁLISE DE ATIVIDADES – SEGUNDA ANÁLISE

Com o objetivo de aprofundamento na segunda análise, elaboramos descritores selecionando elementos considerados essenciais pelos autores das publicações que tomamos como base para análise.

Assim, apresentamos os descritores utilizados no aprofundamento da análise no quadro 7, reescritos de tal maneira que auxilie nesta fase de análise e seguindo a ordem em que foram citados anteriormente.

Quadro 7: Descritores utilizados no aprofundamento da análise.

1	Utilizar multiplicação e divisão para resolver problemas envolvendo idéias de razão, ou proporção.
2	Fazer comparações numéricas e não-numéricas.
3	Distinguir situações proporcionais de não-proporcionais.
4	Utilizar a idéia de covariação.
5	Representar situações proporcionais por meio de gráficos, tabelas, símbolos, desenhos ou diagramas.
6	Relacionar proporcionalidade com as idéias de perímetro, área, volume, diagonal de um polígono ou conversão de unidades de medidas.
7	Desenhar em escala, ou representar em escala.
8	Utilizar proporções na análise de dados (de uma enquete, pesquisa) ou em probabilidade.
9	Tratar de porcentagem, juros, descontos, impostos ou taxas.
10	Utilizar o pensamento proporcional para resolver problemas envolvendo funções.
11	Relacionar proporcionalidade com a idéia de semelhança ou ampliação e redução de figuras planas.
12	Diferenciar grandezas diretamente proporcionais das inversamente proporcionais.

13	Resolver problemas usando a regra de três.
14	Usar o método da falsa posição, ou algo similar a ele.
15	Usar reconfigurações geométricas precedidas de alteração de escala.

Tendo em vista a questão principal deste estudo _ *A realização de atividades propostas em dissertações e tese do Estado de São Paulo tem favorecido a expressão e o desenvolvimento do pensamento proporcional em estudantes? Quais aspectos do pensamento proporcional têm sido privilegiados nestas pesquisas?* _ passamos a analisar as dissertações que investigam a realização de atividades em sala de aula sobre a expressão e desenvolvimento do pensamento proporcional. Começamos pela dissertação de Ruiz (1985) por ter sido produzida primeiro, seguida pelo exame das atividades apresentadas por Perotti (1999).

Para este aprofundamento, utilizamos os descritores elencados no Quadro 7 analisando as atividades propostas e os comentários/conclusões do pesquisador sobre resoluções[15] de alunos, ou sobre intervenções do professor.

Apresentamos, no decorrer dessas análises algumas reflexões sobre elas.

Na análise de cada uma destas partes, colorimos as palavras, termos, frases e/ou trechos de frases relacionados aos descritores, pois cada descritor tem uma cor diferente conforme consta no Quadro 7.

Esclarecemos que a lista de descritores não tem um caráter prescritivo. Trata-se de uma relação de elementos considerados importantes pelos autores que utilizamos como base para análise. Para se afirmar quais dentre estes descritores poderiam ser trabalhados pelo professor, seria necessária outra pesquisa com um estudo criterioso sobre quais seriam mais convenientes e exeqüíveis para se desenvolver em sala de aula.

Convém elucidar também que alguns descritores podem surgir das reflexões feitas durante a análise ou então serem modificados[16].

[15] Brito (2006) afirma que Proulx (1999) apontou que o termo solução estaria mais voltado ao resultado, a resposta final dada a um problema. Por isso, neste trabalho, preferimos usar solução para a resposta final e o termo resolução para o processo utilizado para se chegar à solução. Como o termo resolução pode ser confundido com resolver novamente, quando quisermos nos referir a isso, deixaremos claro.

[16] Após os Anexos deste trabalho consta um encarte com todos os descritores utilizados no aprofundamento da análise, incluindo modificações e inclusões detalhadas nas páginas 44 em diante.

4.1 ANÁLISES DAS ATIVIDADES APRESENTADAS NA DISSERTAÇÃO DE RUIZ (1985)

Em sua dissertação, Ruiz (1985) propõe nove atividades com o objetivo de introduzir o conceito de proporcionalidade para os estudantes da 7ª série do Ensino Fundamental.

As atividades foram aplicadas por uma professora que recebeu orientações do pesquisador e relatou o que aconteceu em cada aula.

4.1.1 Análise da Atividade Nº 1

Observamos no Quadro 21 (Anexo 3) que a atividade Nº 1 proposta por CAPES/FUNBEC (1980 apud Ruiz, 1985) traz como objetivo: "Explorar o conceito de equivalência de frações, utilizando a noção: quantas vezes a parte cabe no todo" CAPES/FUNBEC (1980 apud RUIZ, 1985, p. 125). Neste parágrafo, ressaltamos que o autor tratou de frações equivalentes e relacionou a idéia de parte-todo e/ou divisão/quociente.

Tendo em vista o objetivo mencionado, como *1ª tarefa*, solicita-se aos estudantes que separem 25 palitos (Figura 6 – Anexo 3) em grupos, que o autor denomina de *famílias,* considerando-se a relação comprimento do palito e comprimento da parte pintada. Assim, obtém-se, por exemplo, a família dos 1/2, a família dos 1/3, etc. Os alunos devem fazer esta separação em *famílias* justificando o critério adotado e sem recorrer ao uso de régua para medi-los, o que busca ampliar um tratamento aritmético ao problema. Assim, ressaltamos neste trecho que o autor trabalhou proporcionalidade a partir de idéias de medidas de comprimentos e tratou de frações equivalentes.

Nesta primeira tarefa, o pesquisador relata que a princípio os alunos fizeram classificações considerando apenas uma característica como, por exemplo, o comprimento do palito ou então o comprimento da parte pintada. Foi necessária a intervenção da professora que aplicou a atividade para que os estudantes observassem a relação entre o comprimento do palito e o comprimento da parte pintada.

Segundo Ruiz (1985, p. 54), é importante que

> [...] os alunos usem a medição, contudo, recorrendo a uma unidade natural, neste caso, o comprimento da parte pintada (ou comprimento da parte não pintada) [...] Neste caso, ao identificar palitos de uma mesma família, por exemplo, a família dos 1/3, a criança usa a parte pintada como uma unidade natural para medir e verifica que essa unidade cabe três vezes no comprimento do palito.

Nestes dizeres do autor constatamos mais uma vez que a proporcionalidade foi trabalhada a partir de idéias de medidas de comprimento e de frações equivalentes. Considerando que um trecho ou um termo, como o que aparece sublinhado na citação anterior, pode corresponder a mais de um sentido do número racional e de relações entre eles, podemos considerar que o trecho pode revelar mais um descritor, pois a professora pode ter destacado relações entre as idéias de divisão/quociente e de medida de comprimento, por exemplo.

Observamos que o número racional tem esta designação porque é uma razão de dois números inteiros a/b com $b \neq 0$. Tendo isto em mente e, também que as idéias tais como parte/todo, razão, divisão/quociente, probabilidade, operador, semelhança e homotetia nas representações fracionária e decimal são essenciais para a conceituação do número racional, este na base do pensamento proporcional acrescentamos o descritor 16 e alteramos também os descritores 2, 6, 9,10 e 11 conforme segue no Quadro 8. Quanto aos demais descritores, não estabelecemos relações com a presente atividade e, portanto não fizemos alterações.

Quadro 8: Descritores encontrados no aprofundamento da análise.

1	Utilizar multiplicação ou divisão para resolver problemas envolvendo idéias de razão ou proporção.
2	Fazer comparações numéricas ou não-numéricas; trabalhar com classe de equivalência de frações.
3	Distinguir situações proporcionais de não-proporcionais.
4	Utilizar a idéia de covariação.
5	Representar situações proporcionais por meio de gráficos, tabelas, símbolos, desenhos ou diagramas.

6	Relacionar proporcionalidade com idéias de medidas de comprimento, superfície, volume, massa, ou capacidade etc.; efetuar conversão de unidades de medidas.
7	Desenhar ou representar em escala.
8	Utilizar proporções na análise de dados (de uma enquete, pesquisa) ou em probabilidade.
9	Resolver problemas (tais como os que requeiram cálculos relativos a impostos) envolvendo taxas, porcentagem, juros, descontos. Efetuar corretamente cálculos envolvendo esses tópicos;
10	Utilizar idéias centrais associadas aos sentidos do número racional, ou de relações e operações entre eles, além de suas representações, para resolver problemas envolvendo funções ou idéias associadas às funções e suas representações.
11	Relacionar proporcionalidade com as idéias de semelhança, homotetia, ampliação ou redução de figuras planas.
12	Diferenciar grandezas diretamente proporcionais das inversamente proporcionais.
13	Resolver problemas usando a regra de três.
14	Usar o método da falsa posição ou algo similar a ele.
15	Usar reconfigurações geométricas precedidas de alteração de escala.
16	Relacionar ao menos duas das idéias centrais associadas ao número racional: parte-todo, razão, divisão/quociente, taxas, porcentagem, probabilidade; operador, semelhança e homotetia.

Dependendo do tratamento que o professor der à situação poderá ser atingido um ou outro desses descritores, além de poderem ser amplamente ou parcialmente atingidos.

Como 2ª tarefa, é proposto que os estudantes também separem em *famílias* os dominós (Figura 7 - Anexo 3), que segundo o autor, os alunos realizaram sem dificuldades.

4.1.2 Análise da Atividade Nº 2

Observamos no Quadro 24 (Anexo 3) que a atividade Nº 2 proposta por MEC/PREMEN/ UFRGS/DEF (1976 apud RUIZ, 1985) traz como objetivo: “Verificar que num conjunto de figuras semelhantes, como no caso de retângulos, a razão entre o comprimento e a respectiva largura é constante” MEC/PREMEN/UFRGS/DEF (1976 apud RUIZ, 1985, p. 129). Este trecho nos reporta ao descritor que relaciona proporcionalidade com a idéia de semelhança.

Esta atividade se desdobra numa tarefa de preenchimento de uma tabela. Nela, constam espaços a serem preenchidos com as medidas das larguras e dos comprimentos de retângulos, além do valor do quociente entre a medida da largura e do comprimento. Estes retângulos devem ser fornecidos pelo professor em cartolina e devem ser medidos com régua pelos alunos.

É solicitado aos alunos que após o preenchimento da tabela, reunidos em grupos, respondam se ao dividir a medida do comprimento pela medida da largura das figuras dadas, obtém-se sempre o mesmo quociente e o porquê da resposta dada.

Ressaltamos que o pesquisador propõe relacionar também situações proporcionais com a representação por meio de tabelas e com medidas de comprimento. Além disso, recomenda a utilização da divisão para resolver problemas de razões e proporções.

Tais idéias são reforçadas quando o autor afirma que é fundamental constatar que:

> [...] o quociente entre os pares de medidas (comprimento e largura) de retângulos semelhantes é constante (visto que nosso objetivo é oferecer oportunidade para os alunos identificarem a proporção como uma relação de razão constante) e que operassem sobre esse resultado. (RUIZ, 1986, p. 87)

Como avaliação o autor propõe o seguinte: “O professor desenha um par de retângulos semelhantes; os alunos devem desenhar novos pares onde haja a mesma relação que no par dado” MEC/PREMEN/UFRGS/DEF (1976 apud RUIZ, 1985, p. 130). Neste parágrafo observamos o relacionamento da proporcionalidade com a idéia de semelhança e com o desenho em escala.

No que se refere às constatações obtidas com a realização da atividade, Ruiz (1986) afirma que a maior dificuldade dos estudantes consistiu em explicar porque os quocientes entre os pares de medidas eram constantes e que as respostas corretas surgiram somente após muita discussão em cada grupo.

Na avaliação proposta pelo pesquisador, este afirma ter constatado que os alunos ainda tiveram dificuldades e no princípio suas resoluções eram incorretas e aditivas. Por exemplo: para responder ao pedido de fornecer retângulos semelhantes ao de "dimensões" 3 cm x 1 cm, houve estudantes que apresentaram um retângulo de dimensões 5 cm x 3 cm. Além do retângulo de dimensões 5 cm X 3 cm não ser semelhante ao de dimensões 3 cm X 1 cm, interpretamos que o autor se refere a resoluções aditivas porque a adição de 2 cm à medida dos lados do retângulo de dimensões 3 cm x 1 cm resulta no de dimensões 5 cm x 3 cm. Diante desta situação, o pesquisador observou que houve a necessidade de intervenção da professora responsável pela aplicação da atividade – que solicitou aos estudantes que verificassem a validade de suas soluções dividindo as medidas dos comprimentos dos retângulos pelas suas respectivas medidas de largura. Isto resultou na busca de novas resoluções, desta vez com o uso de estratégias multiplicativas, ou seja, obtendo figuras cujas medidas eram o dobro ou triplo dos retângulos dados. Desta forma podemos nos reportar ao descritor que inclui utilizar multiplicação para resolver problemas de razões e proporções.

Consideramos interessante observar finalmente sobre essa atividade a utilização de material de manipulação e o trabalho em grupo, dois aspectos destacados pelo autor.

Apesar de considerarmos que o uso de material possa corresponder a algum descritor voltado para a visualização, ou à representação de proporcionalidade, consideramos que nesta atividade está mais ligado às dinâmicas previstas/realizadas.

4.1.3 Análise da Atividade Nº 3

Observamos no Quadro 25 (Anexo 3) que a atividade Nº 3 proposta por MEC/PREMEN/ UFRGS/DEF (1976 apud RUIZ, 1985) traz como objetivo:

> Construir a representação reduzida de uma determinada superfície, usando escala; explorando, para isto, a constatação da atividade anterior: a razão entre medidas correspondentes de figuras semelhantes. MEC/PREMEN/UFRGS/DEF (1976 apud RUIZ, 1985, p. 131).

Este objetivo nos reporta ao descritor que trata sobre desenhar em escala e o descritor que relaciona proporcionalidade com a idéia de semelhança.

Nesta atividade, propõe-se aos estudantes que façam uma planta da sala de aula localizando um ponto no seu interior que representa o lugar onde se esconde um tesouro. As medidas são dadas em número de passos.

Como avaliação o autor propõe o seguinte:

> [...] identificar em um conjunto de cinco plantas da sala de aula confeccionadas pelo professor, as que são feitas corretamente (apenas duas estão feitas corretamente) e entre as feitas corretamente, determinar a escala utilizada. Para resolver esta questão, eles dispõem de uma trena para determinar as dimensões reais da sala de aula.
>
> Nesta tarefa, só alcançam êxito os alunos que buscam verificar se a razão entre as medidas da planta e as correspondentes medidas reais da sala é constante. No caso desse quociente ser constante, ele recebe o nome de escala ou coeficiente de proporcionalidade. (RUIZ, 1985, p. 55).

Neste trecho podemos observar novamente o descritor que trata sobre desenhar em escala e o descritor que inclui utilizar a divisão para resolver problemas de razões e proporções.

Quanto às constatações obtidas com a realização da atividade, segundo o pesquisador, para fazer uma planta da sala de aula os estudantes “recorreram à escala cm/passo (onde eram dados dois passos, eles fizeram 2 cm...)” (RUIZ, 1985, p. 89) e a atividade foi considerada fácil.

Porém, quanto à tarefa de avaliação, Ruiz (1985) observou que apesar de resolvê-la satisfatoriamente, os alunos encontraram algumas dificuldades.

O autor relata que a sala de aula tinha dimensões 9 m por 6 m e uma das plantas apresentava medidas 30 cm por 20 cm. Neste caso, as justificativas mais freqüentes entre os estudantes foram: “multiplicando por 30 o comprimento e a largura da planta, obteremos as medidas da sala *ou* a largura da sala é 2/3 do seu comprimento e no desenho também a largura é 2/3 do comprimento” (RUIZ, 1985, p. 89). Assim, podemos mencionar também o descritor que inclui relacionar proporcionalidade com a idéia de conversão de unidades de medida e o descritor que inclui utilizar multiplicação para resolver problemas de razões e proporções.

4.1.4 Análise das Atividades Nº 4 e Nº 5

Observamos no Quadro 26 (Anexo 3) que o objetivo da atividade Nº 4 proposta por MEC/PREMEN/ UFRGS/DEF (1976 apud RUIZ, 1985) é: “Localizar pontos num quadrante de um sistema cartesiano ortogonal de coordenadas, realizar transformações e estabelecer relações entre as coordenadas de pontos“. MEC/PREMEN/UFRGS/DEF (1976 apud RUIZ, 1985, p. 133).

Já a atividade Nº 5 (Quadro 32 - Anexo 3) tem como objetivo: “Complementar e reforçar os aspectos abordados na atividade anterior”. MEC/PREMEN/UFRGS/DEF (1976 apud RUIZ, 1985, p. 140)

Assim, tais objetivos aludem ao descritor que inclui representar situações proporcionais por meio de gráficos.

O autor afirma que as atividades Nº 4 e Nº 5 são bastante significativas para:

> [...] a familiarização do aluno com esses gráficos. Essa ênfase é devida ao fato de usarmos a função linear como suporte para esta introdução de proporcionalidade, sendo indispensável que os alunos identifiquem-na pela sua representação gráfica e, também, que saibam construir essa representação. (RUIZ, 1985, p. 56).

Portanto, podemos relacionar ao trecho acima os descritores que tratam da representação de situações proporcionais por meio de gráficos e da utilização do pensamento proporcional para resolver problemas envolvendo funções.

No que se refere à realização da atividade, conforme o autor, os estudantes realizaram a primeira tarefa da Atividade Nº 4 (localizar pontos no plano cartesiano) com rapidez, interesse e facilidade.

Quanto à segunda tarefa da Atividade Nº 4 que consistia em dizer o que aconteceu em cada figura das fichas 3, 4 e 5 (Quadros 29, 30 e 31 - Anexo 3), conforme o pesquisador:

> [...] os alunos conseguiram descobrir que: na ficha nº 3, o chapéu continuou do mesmo tamanho, sua posição ficou invertida; na ficha nº 4, houve o deslocamento do rato. Ele desceu quatro unidades, contudo seu tamanho permaneceu o mesmo; na ficha número 5, o barco mudou de posição e “cresceu”, contudo, sua forma não se alterou. (RUIZ, 1985, p. 90).

Nestes dizeres do autor constatamos que a proporcionalidade foi trabalhada a partir de idéias de semelhança, homotetia e ampliação de figuras planas e também lembra o descritor que trata da representação de situações proporcionais por meio de desenhos.

A professora questionou os estudantes sobre qual era a relação da atividade 4 com as anteriores. Entre as respostas obtidas, o autor cita: “na ficha número 5, as medidas do barco foram multiplicadas por 3, é o mesmo caso dos retângulos da atividade nº 2 ou na ficha 5, o barco foi feito usando duas escalas diferentes”. (RUIZ, 1985 p. 91). Verificamos aqui menção ao descritor que inclui utilizar multiplicação para resolver problemas de razões e proporções e o descritor que trata sobre desenhar em escala.

O pesquisador relata que na Atividade Nº 5 os estudantes receberam 3 fichas, contendo em cada uma delas um desenho e sua transformação. Foi solicitado aos alunos que descrevessem qual a transformação feita em cada caso. As respostas obtidas foram:

> - na ficha nº 1, o primeiro elemento do par foi colocado no lugar do segundo e o segundo no lugar do primeiro;
> - na ficha nº 2, foi somado 3 a cada primeiro elemento do par e oito ao segundo elemento do par;
> - na ficha nº 3, cada elemento do par foi multiplicado por 4. Além disso, constataram que nos dois primeiros casos os tamanhos se mantiveram constantes e no último houve aumento do tamanho da figura, sem, contudo, haver alteração da forma. (RUIZ, 1985, p. 91).

Mais uma vez constatamos o descritor que inclui representar situações proporcionais por meio de desenhos, o descritor que relaciona proporcionalidade com a idéia de semelhança e o descritor que inclui utilizar a multiplicação para resolver problemas de razões e proporções.

4.1.5 Análise da Atividade Nº 6

Constatamos no Quadro 33 (Anexo 3) que o objetivo da atividade Nº 6 proposta por MEC/PREMEN/ UFRGS/DEF (1976 apud RUIZ, 1985) é:

> a) Através do fenômeno: objeto vertical-sombra, deixar bem clara a noção de razão constante entre o comprimento de um bastão e a respectiva sombra, em um dado instante.
>
> b) Verificar que o conjunto de pares ordenados onde o primeiro elemento do par é o comprimento de um bastão e o segundo elemento é a respectiva sombra, constitui uma função linear. MEC/PREMEN/UFRGS/DEF (1976 apud RUIZ, 1985, p. 144).

Destacamos neste trecho o descritor que trata da utilização do pensamento proporcional para resolver problemas envolvendo funções e o descritor que relaciona proporcionalidade com idéias de comprimento.

Nesta atividade os alunos trabalham com um conjunto de seis bastões de comprimentos diferentes fixados verticalmente no chão. A atividade se desdobra numa tarefa de preenchimento de uma tabela. Nela constam espaços a serem preenchidos com as medidas dos comprimentos dos bastões e suas sombras, além do quociente entre a medida do comprimento de cada bastão e sua respectiva sombra. A seguir é solicitado aos estudantes que relatem suas observações e construam o gráfico da situação. Ressaltamos aqui o descritor que inclui representar situações proporcionais por meio de tabelas e gráficos e o descritor que inclui utilizar e divisão para resolver problemas de razões e proporções.

Ruiz (1985) destaca nesta atividade dois aspectos considerados por ele muito importantes na compreensão do conceito de proporcionalidade:

> 1. a identificação da proporcionalidade como uma relação de razão constante, isto os alunos constatam ao dividir o comprimento do bastão pela respectiva sombra, encontrando quociente constante (coeficiente de proporcionalidade)
>
> 2. a constatação da inclusão dos pares ordenados, no caso: (comprimento do bastão; comprimento da respectiva sombra) nos conjuntos de partida e chegada (domínio e imagem) da função linear. Isto ocorre através da exploração do gráfico cartesiano, quando os alunos localizam os pares ordenados no plano cartesiano e verificam que esses pontos pertencem a uma mesma reta e que esta reta passa pela origem do sistema cartesiano. (RUIZ, 1985, p. 57).

Novamente notamos o descritor que inclui utilizar e divisão para resolver problemas de razões e proporções, o descritor que inclui representar situações proporcionais por meio de gráficos e aquele que utiliza o pensamento proporcional para resolver problemas envolvendo funções.

No que diz respeito à realização da atividade, Ruiz (1985) explica que os estudantes apresentaram erros de medição e de cálculo ao preencher a tabela. Desta forma, foi necessário à professora solicitar aos alunos que refizessem as medições e divisões, até que todos os grupos chegassem à constatação que os quocientes eram iguais, o que mostra o uso do descritor que inclui utilizar a divisão para resolver problemas de razões e proporções.

Para a construção do gráfico cada grupo recebeu uma folha de papel quadriculado. No eixo das abscissas os estudantes deveriam representar os comprimentos dos bastões e no eixo das ordenadas deveriam representar as medidas das sombras correspondentes. A seguir deveriam unir os pontos e verificar se os pontos estavam ou não alinhados. Mais uma vez verificamos o descritor que inclui representar situações proporcionais por meio de gráficos.

Segundo o pesquisador, nesta fase da atividade os estudantes se defrontaram com a seguinte dificuldade: as medidas dos bastões não cabiam na folha. Alguns grupos logo constataram que poderiam fazer uso da escala. Outros grupos precisaram do auxílio da professora que sugeriu que retomassem a atividades Nº 3, o que fez com que a dificuldade fosse superada. Verificamos então, o aparecimento do descritor que trata sobre desenhar em escala.

Este descritor aparece novamente quando ao serem questionados quanto à relação entre esta atividade e as anteriores, os estudantes respondem:

> [...] “a sombra é um modelo reduzido do bastão, como vimos na atividade nº 3” ou “o bastão de 1m faz sombra de 45 cm e o de 2m faz sombra de 90 cm, a reta que passa por esses dois pontos passa também pelo ponto (0; 0), como no caso da bandeira e do barco”. (RUIZ, 1985, p. 93)

Nesta fase a professora discute com os alunos a idéia: “quanto maior é o bastão, maior é a sombra projetada” (RUIZ, 1985, p. 94), o que alude ao descritor que inclui diferenciar relações diretamente proporcionais.

4.1.6 Análise da Atividade Nº 7

Constatamos no Quadro 34 (Anexo 3) que o objetivo da atividade Nº 7 proposta por MEC/PREMEN/ UFRGS/DEF (1976 apud RUIZ, 1985) é:

> **a)** Coletando dados, através da medição de objetos com faces circulares, constatar que:
> - a relação entre o comprimento da circunferência e a medida do respectivo diâmetro constitui uma relação de razão constante;
> - o conjunto dos pares ordenados, onde o primeiro elemento do par é a medida da circunferência e o segundo elemento é a medida do diâmetro, constitui uma função linear.
>
> **b)** Verificar que na função linear, para dois pares quaisquer: $(x_1;y_1)$ e $(x_2;y_2)$, vale a relação: $x_1.y_2 = x_2.y_1$. MEC/PREMEN/UFRGS/DEF (1976 apud RUIZ, 1985, p. 146).

Neste trecho ressaltamos o descritor que inclui relacionar proporcionalidade com as idéias de medidas de comprimento e o que utiliza o pensamento proporcional para resolver problemas envolvendo funções.

Nesta atividade os alunos trabalham com objetos de faces circulares e diâmetros diferentes como pilhas e latas. A atividade se desdobra numa tarefa de preenchimento de uma tabela. Nela constam espaços a serem preenchidos com as medidas dos comprimentos das circunferências e seus diâmetros, além do quociente entre a medida do comprimento de cada circunferência e seu respectivo diâmetro. Isto nos reporta ao descritor que inclui representar situações proporcionais por meio de tabelas e o que inclui utilizar a divisão para resolver problemas de razões e proporções.

A seguir é solicitado aos estudantes que construam o gráfico da situação, associando o eixo horizontal às medidas dos comprimentos das circunferências e o eixo vertical às medidas dos diâmetros, o que nos lembra o descritor que inclui representar situações proporcionais por meio de gráficos.

Além disso, o autor esclarece que:

> Nesta atividade, além de explorar as noções de relação de razão constante e a inclusão dos pares da forma (comprimento da circunferência; diâmetro) nos conjuntos domínio e imagem da função linear, é proposto aos alunos verificar que, se A e B são dois pontos de uma reta que passa pela origem do sistema cartesiano, vale a relação $x_A.y_B = x_B.y_A$. Esta constatação poderá possibilitar ao aluno a

> formulação do algoritmo da igualdade dos produtos cruzados[17]. (RUIZ, 1985, p. 58).

Observamos outra vez os descritores que tratam sobre relacionar proporcionalidade com idéias de medidas de comprimento, utilizar o pensamento proporcional para resolver problemas envolvendo funções e representar situações proporcionais por meio de gráficos. Além disso, notamos o aparecimento do descritor que tem como objetivo resolver problemas usando a regra de três.

Como avaliação o autor propõe dois problemas:

> 1) Dois alunos estavam fazendo medidas das circunferências e diâmetros de alguns objetos. Um deles encontrou um copo que a circunferência media 6,28 cm e o diâmetro 2 cm. Depois mediu uma lata na qual a medida do comprimento da circunferência era 7,85 cm. Ele esqueceu de anotar a medida do diâmetro. É possível descobrir essa medida, levando em conta as outras três?
>
> 2) Um automóvel fez 400 Km em 5 horas. Quanto tempo necessitará, mantendo a mesma velocidade média, para fazer mais 320 km? MEC/PREMEN/UFRGS/DEF (1976 apud RUIZ, 1985, p. 147)

Nestes problemas constatamos o descritor que inclui relacionar proporcionalidade com idéias de medidas de comprimento e também lembramos que a velocidade média se refere a duas unidades medida que são comprimento e tempo.

No que se refere à realização da atividade, Ruiz (1985) afirma que os alunos tiveram dificuldades para verificar as medidas dos comprimentos das circunferências e por este motivo a professora mostrou que estas medidas poderiam ser obtidas utilizando barbante e régua. Mais uma vez podemos fazer alusão ao descritor que inclui relacionar proporcionalidade com idéias de medidas de comprimento.

O autor diz também que houve muita discordância na comparação dos quocientes obtidos. Foi necessário, portanto, que a professora alertasse os estudantes quanto à precisão das medidas. A partir de então, os quocientes obtidos ficaram em torno de 3, 14, o que nos reporta ao descritor que inclui utilizar a divisão para resolver problemas de razões e proporções.

A seguir a dificuldade consistiu na construção do gráfico, tendo em vista que os valores a serem representados eram números “não inteiros”. Apesar disso, o pesquisador afirma que todos os grupos conseguiram verificar que os pontos

[17] Entendemos que o autor se refere à propriedade fundamental das proporções.

representados estavam alinhados e, que a reta que passava por estes pontos também passava pelo ponto (0; 0).

Ruiz (1985) constatou que para resolver os problemas da avaliação, o caminho mais utilizado foi construir um gráfico que representasse a situação, para posteriormente utilizar a igualdade dos produtos cruzados, ou seja, "se A e B são dois pontos de uma reta que passa pela origem do sistema cartesiano, vale a relação $x_A.y_B = x_B.y_A$" (RUIZ, 1985, p. 58). Podemos dizer que estas estratégias fazem menção ao descritor que inclui representar situações proporcionais por meio de gráficos e o descritor que trata sobre resolver problemas usando a regra de três.

4.1.7 Análise da Atividade Nº 8

Constatamos no Quadro 35 (Anexo 3) que o objetivo da atividade Nº 8 proposta por MEC/PREMEN/ UFRGS/DEF (1976 apud RUIZ, 1985) é:

> Representar funções, definidas por sentenças matemáticas, num sistema cartesiano, e verificar a relação entre as coordenadas de pontos de uma reta que passa pela origem e apresentar contra-exemplos. MEC/PREMEN/UFRGS/DEF (1976 apud RUIZ, 1985, p. 146).

Neste objetivo destacamos o descritor que inclui resolver problemas envolvendo idéias associadas às funções e suas representações. Este descritor aparece também em outro trecho, quando o autor explica que:

> Nesta atividade, os alunos fazem a representação gráfica de seis funções definidas por sentenças matemáticas, entre as quais existem funções lineares e funções não lineares e verificam em quais que, tomando dois pontos quaisquer, ocorre a igualdade $x_1/y_1 = x_2/y_2$. (RUIZ, 1985, p. 58).

Quanto à realização da atividade, Ruiz (1985) afirma que os alunos não apresentaram dificuldades para fazer a representação gráfica das funções definidas por sentenças matemáticas. Todavia demonstraram alguma insegurança ao esboçar os gráficos nos quais os pontos não ficavam alinhados.

Segundo o autor, a tarefa mais demorada foi a verificação da validade da relação $x_1.y_2 = x_2.y_1$ para as funções dadas. Após muitas discussões os grupos concluíram que esta relação somente era válida para as funções cujas sentenças matemáticas eram x = y e y = -3x e, um dos grupos constatou que a relação somente era válida quando o gráfico da função era uma reta que passava pelo ponto (0; 0).

A seguir a professora deu as seguintes informações para os alunos:

> 1. As funções cujos gráficos são retas que passam pelo ponto (0;0) são chamadas de funções lineares.
> 2. Quando se verifica a relação $x_1.y_2 = x_2.y_1$, costuma-se dizer que: x_1 está para y_1 assim como x_2 está para y_2. (RUIZ, 1985, p. 99).

Este trecho nos reporta ao descritor que versa sobre o uso da regra de três.

4.1.8 Análise da Atividade Nº 9

Constatamos no Quadro 36 (Anexo 3) que o objetivo da atividade Nº 9 proposta por MEC/PREMEN/ UFRGS/DEF (1976 apud RUIZ, 1985) é: “Explorando o conceito de função linear, determinar a propriedade aditiva das proporções, expressa por: $\frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2} = \frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$” MEC/PREMEN/UFRGS/DEF (1976 apud RUIZ, 1985, p. 151)

Destacamos no objetivo citado o descritor que abrange utilizar idéias associadas às funções e suas representações, porém observamos também um descritor que se refere à utilização da propriedade aditiva das proporções, não mencionado anteriormente no Quadro 8.

Além disso, no trecho a seguir, notamos mais um novo descritor que trata da resolução de problemas envolvendo a divisão em partes proporcionais, e também o descritor já mencionado em atividades anteriores que inclui representar situações proporcionais por meio de gráficos:

> Esta atividade implica na exploração das relações entre as coordenadas de dois pontos de uma mesma reta, que passa pela origem do sistema cartesiano. Essa forma de introduzir a propriedade aditiva, explorando as relações entre as coordenadas de dois pontos, é muito útil, servindo de suporte para a resolução de problemas que impliquem na divisão em partes proporcionais. (RUIZ, 1985, p. 59).

Desta forma, acrescentamos dois descritores, conforme o Quadro 9:

Quadro 9: Descritores ampliados no aprofundamento da análise.

1	Utilizar multiplicação ou divisão para resolver problemas envolvendo ideias de razão ou proporção.
2	Fazer comparações numéricas ou não numéricas; trabalhar com classe de equivalência de frações.
3	Distinguir situações proporcionais de não proporcionais.
4	Utilizar a idéia de covariação.
5	Representar situações proporcionais por meio de gráficos, tabelas, símbolos, desenhos ou diagramas.
6	Relacionar proporcionalidade com idéias de medidas de comprimento, superfície, volume, massa, ou capacidade etc.; efetuar conversão de unidades de medidas.
7	Desenhar ou representar em escala.
8	Utilizar proporções na análise de dados (de uma enquete, pesquisa) ou em probabilidade.
9	Resolver problemas (tais como os que requeiram cálculos relativos a impostos) envolvendo taxas, porcentagem, juros, descontos. Efetuar corretamente cálculos envolvendo esses tópicos;
10	Utilizar idéias centrais associadas aos sentidos do número racional, ou de relações e operações entre eles, além de suas representações, para resolver problemas envolvendo funções ou idéias associadas às funções e suas representações.
11	Relacionar proporcionalidade com as idéias de semelhança, homotetia, ampliação ou redução de figuras planas.
12	Diferenciar grandezas diretamente proporcionais das inversamente proporcionais.
13	Resolver problemas usando a regra de três.
14	Usar o método da falsa posição ou algo similar a ele.
15	Usar reconfigurações geométricas precedidas de alteração de escala.
16	Relacionar ao menos duas das idéias centrais associadas ao número racional: parte/todo, razão, divisão/quociente, taxas, porcentagem, probabilidade; operador, semelhança e homotetia.
17	Utilizar a propriedade aditiva das proporções.
18	Resolver problemas envolvendo a divisão em partes proporcionais.

Esta atividade se desdobra numa tarefa de determinação das coordenadas de 10 pontos pertencentes a cada uma das três funções dadas, representadas por expressões algébricas.

Como avaliação o autor propõe o seguinte: “Como dividir Cr$ 180 entre os netos do Sr. Álvaro, proporcionalmente às suas idades? Um dos netos tem 5 anos, o outro 4 e o outro 6” MEC/PREMEN/UFRGS/DEF (1976 apud Ruiz, 1985, p. 152).

No que diz respeito à realização da atividade, segundo o pesquisador, a maior dificuldade dos estudantes consistiu em entender que: “[...] cada uma das funções era constituída de infinitos pares ordenados, não apenas pelos 10 pares que eles haviam determinado” (RUIZ, 1985, p. 100). Somente após a intervenção da professora, é que os alunos entenderam e resolveram as questões.

Na avaliação, Ruiz (1985) diz que a resposta mais comum foi:

> Fizemos uma tabela assim:
>
> | x | y |
> |---|---|
> | 4 | y_1 |
> | 5 | y_2 |
> | 6 | y_3 |
> | 15 | 180 |
>
> Colocamos na coluna dos “x” as idades; como as quantias de dinheiro não eram conhecidas, chamamos de y_1, y_2 e y_3. Então, a soma dos elementos da coluna x vai corresponder à soma dos elementos da coluna y. Daí, resolvemos assim: $\frac{6}{y_3} = \frac{15}{180}$ então: $y_3 = 72$,... (RUIZ, 1985, p. 102).

Nestes dizeres podemos identificar o descritor que inclui representar situações proporcionais por meio de tabelas.

4.1.9 Síntese das análises das atividades de Ruiz (1985)

Com o intuito de tentar responder às questões principais deste estudo - A realização *de atividades propostas em dissertações e tese do Estado de São Paulo tem favorecido a expressão e o desenvolvimento do pensamento proporcional em estudantes? Quais aspectos do pensamento proporcional têm sido privilegiados nestas pesquisas?* _ analisamos as atividades realizadas da dissertação de Ruiz (1985) colorindo as palavras, termos, frases e/ou trechos de frases relacionados aos descritores. Este tratamento dos dados nos auxiliou a perceber quais descritores são evidenciados em cada atividade analisada.

Assim, elaboramos o Quadro 10 que mostra os descritores observados em cada uma das atividades de Ruiz (1985).

Quadro 10: Descritores observados na dissertação de Ruiz (1985).

	Atividade Nº 1	Atividade Nº 2	Atividade Nº 3	Atividade Nº 4	Atividade Nº 5	Atividade Nº 6	Atividade Nº 7	Atividade Nº 8	Atividade Nº 9
Descritor 1		x	x	x	x	x	x		
Descritor 2	x								
Descritor 3						x			
Descritor 4									
Descritor 5		x		x	x	x	x		x
Descritor 6	x	x	x			x	x		
Descritor 7		x	x	x	x	x			
Descritor 8									
Descritor 9									
Descritor 10				x	x	x	x	x	x
Descritor 11		x	x	x	x				
Descritor 12									
Descritor 13							x	x	
Descritor 14									
Descritor 15									
Descritor 16	x								
Descritor 17									x
Descritor 18									x

Observamos que os descritores 1, 5 e 10 são os que mais aparecem, sendo identificados em seis atividades, ou seja, em mais da metade (aproximadamente 66,67%). Desta forma, os aspectos do pensamento proporcional que surgem com mais freqüência na dissertação de Ruiz (1985) são: utilizar multiplicação ou divisão para resolver problemas envolvendo idéias de razão ou proporção; representar situações proporcionais por meio de gráficos, tabelas, símbolos, desenhos ou diagramas e utilizar idéias centrais associadas aos sentidos do número racional, ou de relações e operações entre eles, além de suas representações, para resolver problemas envolvendo funções ou idéias associadas às funções e suas representações.

Outros descritores que aparecem em várias atividades são os 6 e 7, que são percebidos em cinco atividades, ou seja, em aproximadamente 55,56%. Lembramos que estes descritores tratam dos seguintes aspectos do pensamento proporcional: desenhar ou representar em escala e relacionar proporcionalidade com idéias de medidas de comprimento, superfície, volume, massa, capacidade etc.; efetuar conversão de unidades de medida. No caso das atividades de Ruiz (1985) elas se referiram somente às medidas de comprimento, tempo e conversão de unidades desta natureza.

Ressaltamos também que o descritor 11, que se refere a relacionar proporcionalidade com as idéias de semelhança, homotetia, ampliação ou redução de figuras planas, aparece em quatro atividades, ou seja, em 44,44%. Já o descritor 13 que aborda resolver problemas usando a regra de três é notado em duas atividades o que equivale a 22,22%.

Observamos ainda, que os descritores 2, 3, 16, 17 e 18 aparecem somente em uma atividade. Recordamos que nesta dissertação analisada estes descritores aludem aos seguintes aspectos do pensamento proporcional: trabalhar com classe de equivalência de frações; distinguir situações proporcionais de não-proporcionais; resolver problemas envolvendo taxas; relacionar ao menos duas das idéias centrais associadas ao número racional; utilizar a propriedade aditiva das proporções; resolver problemas envolvendo a divisão em partes proporcionais.

Nas análises das atividades da dissertação de Ruiz (1985) não notamos os descritores 4, 8, 9, 12, 14 e 15, ou seja, não observamos os seguintes aspectos do pensamento proporcional: utilizar a idéia de covariação; utilizar proporções na análise de dados (de uma enquete, pesquisa) ou em probabilidade; resolver problemas envolvendo taxas, porcentagem, juros, descontos; diferenciar grandezas diretamente proporcionais das inversamente proporcionais; usar o método da falsa posição ou algo similar a ele; usar reconfigurações geométricas precedidas de alteração de escala e nas razões efetuar tratamento na representação fracionária e conversões entre representações fracionárias e decimais.

4.2 ANÁLISE DAS ATIVIDADES APRESENTADAS NA DISSERTAÇÃO DE PEROTTI (1999)

Em sua dissertação, Perotti (1999) propõe seis atividades com o objetivo de possibilitar aos estudantes "[...] a aprendizagem da equação da reta com ênfase no conceito de coeficiente angular, calculado pela taxa de variação" (PEROTTI, 1999, p. 1).

As atividades foram desenvolvidas com 14 alunos do Ensino Médio[18], que segundo o autor, "[...] tinham a noção de função, mas não haviam feito um estudo sistemático da equação da reta" (PEROTTI, 1999, p. 50).

O autor esclarece que:

> As cinco primeiras atividades foram desenvolvidas em sala de aula, com as duplas trabalhando isoladamente, sob a observação do pesquisador e de um dos professores da sala. Estes anotaram algumas estratégias, procedimentos e justificativas adotadas pelos estudantes no decorrer do trabalho. A 6ª atividade, composta somente de exercícios, foi resolvida pelas mesmas duplas, mas fora do ambiente de sala de aula. (PEROTTI, 1999, p. 50).

O pesquisador expõe ainda que a concepção da seqüência didática aplicada baseou-se na teoria das situações didáticas Brosseau (1986 apud Perotti, 1999) e obedeceram as seguintes etapas:

> [...] na primeira fase, ação, os alunos atuando em duplas discutiam suas escolhas e decisões sobre as ações; na segunda fase, formulação, os alunos trocavam as informações entre os pares. Aqui os alunos redigiam explicitando as ferramentas utilizadas; na terceira fase, validação, os alunos tratavam de validar seus resultados, mostrar porque a solução encontrada era verdadeira, um debate coletivo se estabelecia; na quarta fase, institucionalização, o professor fazia um fechamento do que havia sido estudado e apresentava o conteúdo com estatuto de saber matemático. (PEROTTI, 1999, P. 50).

Em cada uma das atividades o autor faz uma análise a priori e analisa os resultados obtidos após a aplicação.

---

[18] Abrangendo a faixa etária entre 14 e 16 anos.

4.2.1 Análise da Atividade Nº 1

Segundo Perotti (1999) esta atividade apresenta duas partes.

A primeira, composta pelas dez primeiras questões busca mostrar características qualitativas das grandezas diretamente proporcionais e inversamente proporcionais, bem como contrapor com grandezas que não variam de forma proporcional. Notamos, portanto, que o autor trabalha com os descritores que tratam de diferenciar grandezas diretamente proporcionais das inversamente proporcionais e distinguir situações proporcionais de não proporcionais.

Observamos ainda, que estas dez questões (Quadro 37 – Anexo 4) relacionam proporcionalidade com idéias de medidas de comprimento, superfície, volume, capacidade, tempo etc.

Quanto à realização desta parte da atividade, o pesquisador relatou que os quase todos os estudantes responderam corretamente às questões. Além disso, expôs que: “Duas das sete duplas, calcularam mentalmente os resultados e acertaram todas as questões. As outras cinco usaram *regra de três* e duas erraram os cálculos” (PEROTTI, 1999, p. 64).

Na segunda parte, o pesquisador busca fazer um estudo quantitativo de grandezas diretamente e inversamente proporcionais. Para isto, propõe aos estudantes oito questões (Quadro 38 – Anexo 4), na qual eles precisam preencher tabelas, representar algebricamente e graficamente a variação de grandezas diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não proporcionais a partir de valores dados. Nesta parte, além dos descritores já mencionados na parte anterior, observamos também o descritor que inclui representar situações proporcionais por meio de gráficos, tabelas e símbolos.

Também constatamos no Quadro 38 (Anexo 4) que para determinar a taxa de variação o autor sugere que os alunos comparem razões:

> Nos quadros da parte de baixo da tabela aparecem as taxas de variação. Para dois valores x_1 e x_2 da primeira variável e os respectivos valores da segunda, a taxa de variação K é calculada do seguinte modo:
>
> $$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$
>
> No exemplo acima tem-se:
>
> $$k = \frac{4-2}{40-20} = \frac{6-4}{60-40} = \frac{8-6}{80-60} = \frac{10-8}{100-80} = \frac{12-10}{120-100} = \frac{1}{10}$$
>
> (PEROTTI, 1999, p. 58)

Assim, verificamos a utilização do descritor que inclui fazer comparações numéricas e trabalhar com classe de equivalência de frações e o descritor que inclui utilizar a idéia de covariação.

No que se refere à realização desta segunda parte da atividade, a maior dificuldade encontrada foi determinar corretamente as taxas de variação negativas.

4.2.2 Análise da Atividade Nº 2

O autor explica que para esta atividade criou problemas nos quais uma fábrica de chocolates vende produtos que variam de tamanho e conseqüentemente variam de preço, o que nos reporta ao descritor que trata da utilização da idéia de covariação.

Assim, Perotti (1999) elaborou doze questões "envolvendo a função receita que pode ser representada pela equação y = ax onde x representa o número de chocolates fabricados e y a quantidade de dinheiro arrecadado" (PEROTTI, 1999, p. 67). Observamos neste trecho o descritor que inclui resolver problemas envolvendo idéias associadas às funções e suas representações e utilizar a idéia de covariação, uma vez que variando x, y varia também.

No Quadro 39 (Anexo 4) notamos que na Atividade 2 o autor propõe aos alunos questões na qual eles precisam preencher tabelas, representar algebricamente e graficamente funções, o que lembra o descritor que inclui representar situações proporcionais por meio de gráficos, tabelas e símbolos.

Além disso, podemos constatar o descritor que contem utilizar multiplicação para resolver problemas envolvendo idéias de razão ou proporção, quando o pesquisador cita como possível estratégia para o preenchimento das tabelas o seguinte: "O aluno pode completar a tabela usando o raciocínio 150 chocolates custam 150 vezes o preço de um chocolate, ou seja, 150 . 2 = 300."

Na questão 5 (Quadro 39 – Anexo 4) o pesquisador indaga o seguinte:

> a) Sendo **x** o número de chocolates vendidos, **y** a receita obtida e **a** o preço de cada chocolate, escreva a equação que representa esta situação [...].
>
> c) Se $a_1 > a_2$, como ficam os gráficos relativos a esses preços? Faça um esquema ao lado. (PEROTTI, 1999, p. 71).

Neste trecho observamos o descritor que inclui fazer comparações numéricas ou não numéricas. Este descritor aparece também na questão 10:

> a) Na figura ao lado destaque todos os triângulos semelhantes ao ∆OAM.
>
> b) Cada um dos triângulos permite calcular o Coeficiente Angular do mesmo modo que no ∆OAM. Faça esta determinação.
>
> c) Compare o Coeficiente Angular com a Taxa de variação da Atividade 1. (PEROTTI, 1999, p. 73).

Nesta questão 10 notamos também o descritor que relaciona proporcionalidade com as idéias de semelhança.

Quanto à realização desta atividade, o autor menciona apenas que os estudantes apresentaram poucos erros. Nesta etapa não observamos outros descritores além dos já mencionados.

4.2.3 Análise da Atividade Nº 3

O autor explica que esta atividade é constituída por nove questões, dentre as quais sete são problemas que envolvem a

> [...] função Custo Total que é a soma do Custo Variável com o Custo Fixo. O Custo variável normalmente depende da quantidade de objetos que serão comprados e do preço unitário desses objetos. O custo fixo representa as despesas que a empresa tem, mesmo sem efetuar compras. (PEROTTI, 1999, p. 81).

Neste trecho verificamos a presença do descritor que inclui resolver problemas envolvendo funções e o descritor que objetiva utilizar a ideia de covariação, já que o custo variável é um valor que depende de outros. Além disso, a palavra custo nos lembra o descritor que trata de resolver problemas envolvendo taxas, porcentagem, juros, descontos. Apesar da palavra custo não ter sido colocada inicialmente neste descritor, consideramos apropriada esta inclusão, tendo em vista que este descritor trata de tópicos de Matemática Financeira. Assim, modificamos o descritor 9 como segue: *Resolver problemas (tais como os que requeiram cálculos relativos a impostos) envolvendo custos, taxas, porcentagem, juros, descontos. Efetuar corretamente cálculos envolvendo esses tópicos.*

Em todas as questões que compõem esta atividade (Quadro 40 – Anexo 4) notamos que o autor representa ou pede aos estudantes que represente graficamente situações proporcionais. Nas questões 1, 2, 4 e 5 é solicitado aos alunos o preenchimento de tabelas e nas questões 1, 2, 3, 6 e 8 a representação por meio de uma equação das situações. Estas observações aludem ao descritor que abrange representar situações proporcionais por meio de gráficos, tabelas e símbolos.

Nas questões 1 e 2, Perotti (1999, p. 84-85) propõe o seguinte: "Comente as diferenças e semelhanças dos dois gráficos." E na questão 7, o autor escreve: "Se $a_1 > a_2$ (mantendo b fixo) como ficam os gráficos relativos a estes custos? [...] Se $b_1 > b_2$ (mantendo a fixo) como ficam os gráficos relativos a estes custos?" (PEROTTI, 1999, p. 87). Além dos descritores já mencionados, estes trechos nos reportam ao descritor que inclui fazer comparações numéricas ou não-numéricas.

Ressaltamos também o descritor que inclui utilizar multiplicação para resolver problemas envolvendo idéias de razão ou proporção nas questões 4 e 5, conforme observamos no seguinte fragmento: "Na 2ª coluna o custo variável que é o produto do custo de cada pacote pelo número de pacotes comprados" (PEROTTI, 1999, p. 86).

4.2.4 Análise da Atividade Nº 4

Perotti (1999, p. 93) explica que o objetivo desta atividade "primeiro é estudar a reta na sua forma geral ax + by + c = 0 e o segundo é trabalhar os coeficientes angulares negativos que nesta forma aparecem de maneira natural." Este parágrafo alude ao descritor que utiliza idéias associadas às funções e suas representações.

Nesta atividade o pesquisador propõe questões semelhantes a das atividades anteriores, ou seja, os alunos precisam preencher tabelas, representar algebricamente e graficamente funções, o que lembra o descritor que inclui representar situações proporcionais por meio de gráficos, tabelas e símbolos.

Porém, além disso, o autor solicita no último item da questão 1 (Quadro 41 – Anexo 4) que os alunos "[...] assinalem no gráfico os pontos em que $4x + 2y \leq 1000$". (PEROTTI, 1999, p. 98). Estes dizeres nos reportam a um novo descritor que trata de inequações, que acrescentamos conforme o Quadro 11:

Quadro 11: Descritores expandidos no aprofundamento da análise.

1	Utilizar multiplicação ou divisão para resolver problemas envolvendo idéias de razão ou proporção.
2	Fazer comparações numéricas ou não numéricas; trabalhar com classe de equivalência de frações.
3	Distinguir situações proporcionais de não proporcionais.
4	Utilizar a idéia de covariação.
5	Representar situações proporcionais por meio de gráficos, tabelas, símbolos, desenhos ou diagramas.
6	Relacionar proporcionalidade com idéias de medidas de comprimento, superfície, volume, massa, ou capacidade etc.; efetuar conversão de unidades de medidas.
7	Desenhar ou representar em escala.
8	Utilizar proporções na análise de dados (de uma enquete, pesquisa) ou em probabilidade.
9	Resolver problemas (tais como os que requeiram cálculos relativos a impostos) envolvendo custos, taxas, porcentagem, juros, descontos. Efetuar corretamente cálculos envolvendo esses tópicos;
10	Utilizar idéias centrais associadas aos sentidos do número racional, ou de relações e operações entre eles, além de suas representações, para resolver problemas envolvendo funções ou idéias associadas às funções e suas representações.

11	Relacionar proporcionalidade com as idéias de semelhança, homotetia, ampliação ou redução de figuras planas.
12	Diferenciar grandezas diretamente proporcionais das inversamente proporcionais.
13	Resolver problemas usando a regra de três.
14	Usar o método da falsa posição ou algo similar a ele.
15	Usar reconfigurações geométricas precedidas de alteração de escala.
16	Relacionar ao menos duas das idéias centrais associadas ao número racional: parte/todo, razão, divisão/quociente, taxas, porcentagem, probabilidade; operador, semelhança e homotetia.
17	Utilizar a propriedade aditiva das proporções.
18	Resolver problemas envolvendo a divisão em partes proporcionais.
19	Resolver problemas envolvendo inequações ou idéias associadas às inequações e suas representações.

4.2.5 Análise da Atividade Nº 5

Perotti (1999) expõe que esta atividade é continuação da anterior e trata da representação de uma situação proporcional por meio da equação segmentária, o que lembra o descritor que inclui representar situações proporcionais por meio de símbolos.

Este mesmo descritor, que abrange também representar situações proporcionais por meio de gráficos, aparece quando o autor afirma que:

> Na situação proposta é razoável pensar na fabricação de p barras e nenhum bombom, ou então zero barras e q bombons. Isto leva de forma natural aos pontos P=(p, 0) e Q=(0,q) chamados interceptos da reta. Atribuímos bastante importância à equação segmentária, pela preferência que os alunos demonstram em utilizá-la quando têm que passar do gráfico para a equação e reciprocamente quando precisam construir o gráfico a partir da equação. (PEROTTI, 1999, p. 101-102).

Quanto à realização desta atividade, na questão 3 o pesquisador pediu uma justificativa para a denominação *equação segmentária* e citou as seguintes respostas dos estudantes:

> A reta corta os dois eixos, passando pelo ponto que podemos identificar através do denominador da fração. Ou então: Porque a reta passa pelos denominadores, unindo então eles. Ou ainda: Segmentária → Segmento = Fração. (PEROTTI, 1999, p. 107).

Podemos relacionar os dizeres acima ao descritor que menciona utilizar idéias centrais associadas aos sentidos do número racional, ou de relações e operações entre eles, além de suas representações, para resolver problemas envolvendo idéias associadas às funções e suas representações.

4.2.6 Análise da Atividade Nº 6

Segundo o autor esta atividade foi elaborada com dez exercícios com o objetivo de avaliar sua seqüência didática.

Na 1ª questão é solicitado aos estudantes que façam a representação gráfica a partir da equação de uma reta na sua forma reduzida. Na 2ª e 6ª questões são dadas as representações gráficas de algumas retas e pede-se para representar a equação segmentária, a equação reduzida e a equação geral. Já na 3ª questão os alunos devem associar cada situação ao seu respectivo gráfico. Nestes exercícios, bem como nas questões 7, 8, 9 e 10 que tratam de transformações algébricas de equações de retas, observamos o descritor que inclui representar situações proporcionais por meio de gráficos e símbolos.

A 4ª questão explora a determinação do coeficiente angular por meio do quociente $\frac{\Delta x}{\Delta y}$, o que alude ao descritor que objetiva utilizar a divisão para resolver problemas envolvendo idéias de razão ou proporção.

Na 5ª questão são dadas três equações que correspondem a retas paralelas. O autor explica que pretendia verificar se os alunos percebiam que estas retas têm o mesmo coeficiente angular e coeficientes lineares diferentes. Notamos que o exercício requer comparações o que nos lembra o descritor que inclui fazer comparações numéricas ou não numéricas.

No que se refere à aplicação da atividade, o pesquisador afirma que os estudantes apresentaram bom desempenho nesta tarefa de avaliação.

4.2.7 Síntese das análises das atividades de Perotti (1999)

Para auxiliar a responder às questões principais deste estudo _ A realização *de atividades propostas em dissertações e tese do Estado de São Paulo tem favorecido a expressão e o desenvolvimento do pensamento proporcional em estudantes? Quais aspectos do pensamento proporcional têm sido privilegiados nestas pesquisas?* _ elaboramos o Quadro 12 que mostra os descritores observados em cada uma das atividades de Perotti (1999).

Quadro 12: Descritores observados na dissertação de Perotti (1999).

	Atividade Nº 1	Atividade Nº 2	Atividade Nº 3	Atividade Nº 4	Atividade Nº 5	Atividade Nº 6
Descritor 1		x	x			x
Descritor 2	x	x	x			x
Descritor 3	x					
Descritor 4	x	x	x			
Descritor 5	x	x	x	x	x	x
Descritor 6	x					
Descritor 7						
Descritor 8						
Descritor 9			x			
Descritor 10		x	x	x	x	
Descritor 11		x				
Descritor 12	x					
Descritor 13	x					
Descritor 14						
Descritor 15						
Descritor 16						
Descritor 17						
Descritor 18						
Descritor 19				x		

Assim sendo, observamos que o descritor 5 aparece em todas as atividades, ou seja, notamos em 100% delas o aspecto do pensamento proporcional que inclui representar situações proporcionais por meio de gráficos, tabelas, símbolos.

Outros descritores que aparecem em várias atividades são os 2 e 10, que são percebidos em quatro atividades, ou seja, em aproximadamente 66,67%. Recordamos que estes descritores objetivam respectivamente fazer comparações numéricas ou não numéricas; utilizar idéias centrais associadas aos sentidos do número racional, ou de relações e operações entre eles, além de suas representações, para resolver problemas envolvendo funções ou idéias associadas às funções e suas representações.

Já os descritores 1 e 4, que abrangem respectivamente utilizar multiplicação ou divisão para resolver problemas envolvendo idéias de razão ou proporção e utilizar a idéia de covariação são notados em três atividades, ou seja, em metade delas.

Observamos ainda, que os descritores 3, 6, 9, 11, 12 e 13 aparecem somente em uma atividade. Lembramos que nesta dissertação estes descritores aludem os seguintes aspectos do pensamento proporcional: distinguir situações proporcionais de não proporcionais; relacionar proporcionalidade com idéias de medidas de comprimento, superfície, volume, massa, capacidade etc.; resolver problemas envolvendo custos; relacionar proporcionalidade com as idéias de semelhança; diferenciar grandezas diretamente proporcionais das inversamente proporcionais; resolver problemas usando a regra de três.

Além disso, o descritor que se refere a resolver problemas envolvendo inequações ou idéias associadas às inequações e suas representações foi incluído e apareceu em apenas uma atividade.

Ressaltamos ainda que os descritores 7, 8, 14, 15, 16, 17 e 18 não são mencionados nas atividades da dissertação de Perotti (1999). Portanto, não notamos nestas atividades os seguintes aspectos do pensamento proporcional: desenhar ou representar em escala; utilizar proporções na análise de dados (de uma enquete, pesquisa) ou em probabilidade; usar o método da falsa posição ou algo similar a ele; usar reconfigurações geométricas precedidas de alteração de escala; relacionar ao menos duas das idéias centrais associadas ao número racional; resolver problemas envolvendo a divisão em partes proporcionais e resolver problemas envolvendo inequações ou idéias associadas às inequações e suas representações.

Capítulo V

CONCLUSÕES

Na presente investigação estudamos numa primeira análise sete pesquisas produzidas no Estado de São Paulo, sendo seis dissertações e uma tese sobre pensamento proporcional. Nesta etapa buscamos responder à pergunta: *Quais questões têm sido colocadas nas dissertações e tese do Estado de São Paulo sobre o tema?*

Realizamos comparações dos resultados da 1ª análise, e verificamos que duas dissertações e a tese se preocupam em sugerir caminhos para o professor trabalhar em sala de aula, uma dissertação avalia a aprendizagem do tema e outra faz análise de como o conteúdo é apresentado em livros didáticos.

Além disso, constatamos que duas dissertações propõem atividades para a expressão e o desenvolvimento do pensamento proporcional e analisam a realização de tais atividades em sala de aula. Tendo em vista nossas questões principais – *A realização de atividades propostas em dissertações e tese do Estado de São Paulo tem favorecido a expressão e o desenvolvimento do pensamento proporcional em estudantes? Quais aspectos do pensamento proporcional têm sido privilegiados nestas pesquisas?* – estas duas pesquisas constituíram o corpus documental para a nossa segunda análise.

Assim sendo, fizemos nossa segunda análise com base em quinze atividades, sendo nove da dissertação de Ruiz (1985) e seis da dissertação de Perotti (1999).

Concluímos que a realização de atividades propostas nestas duas dissertações do Estado de São Paulo favoreceu a expressão e o desenvolvimento do pensamento proporcional em estudantes.

Além disso, os aspectos privilegiados foram os que objetivaram representar situações proporcionais por meio de gráficos, tabelas, símbolos, desenhos ou diagramas (doze atividades); utilizar idéias centrais associadas aos sentidos do número racional, ou de relações e operações entre eles, além de suas representações, para resolver problemas envolvendo funções ou idéias associadas às funções e suas representações (dez atividades) e utilizar multiplicação ou divisão para resolver problemas envolvendo idéias de razão ou proporção (nove atividades).

Destacamos também que variados aspectos do pensamento proporcional foram observados nas dissertações, e que a maioria dos descritores criados foram notados. Esclarecendo melhor, dos quinze descritores que foram criados a partir dos referenciais teórico, curricular e histórico que utilizamos para embasar nossas análises, doze deles foram notados nas atividades. Os não notados foram: utilizar proporções na análise de dados (de uma enquete, pesquisa) ou em probabilidade; usar o método da falsa posição ou algo similar a ele e usar reconfigurações geométricas precedidas de alteração de escala. Em contrapartida, transcendendo aos aspectos essenciais observados no referencial usado como base para análise, foram acrescentados quatro descritores que emergiram das próprias atividades investigadas.

Ressalvamos que alguns aspectos do pensamento proporcional, embora contemplados, foram observados em apenas uma atividade, ou seja, em uma das dissertações. Foram eles: resolver problemas (tais como os que requeiram cálculos relativos a impostos) envolvendo custos, taxas, porcentagem, juros, descontos e/ou efetuar corretamente cálculos envolvendo esses tópicos; diferenciar grandezas diretamente proporcionais das inversamente proporcionais; relacionar ao menos duas das idéias centrais associadas ao número racional: parte-todo, razão, divisão/quociente, taxas, porcentagem, probabilidade, operador, semelhança e homotetia; utilizar a propriedade aditiva das proporções; resolver problemas envolvendo a divisão em partes proporcionais; resolver problemas envolvendo inequações ou ideias associadas às inequações e suas representações.

Levantamos a hipótese que talvez o descritor que abrange utilizar proporções na análise de dados (de uma enquete, pesquisa) ou em probabilidade não tenha sido mencionado devido à época em que estas dissertações analisadas foram produzidas. Estes tópicos fazem parte do bloco de conteúdos denominado *Tratamento da Informação* e passou a ser ressaltado nos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997). A dissertação de Ruiz foi produzida em 1985, ou seja, antes da publicação dos Parâmetros Curriculares Nacionais e a dissertação de Perotti foi defendida em 1999, quer dizer, apenas dois anos depois.

Uma questão que levantamos para futuras pesquisas seria investigar se a realização de atividades propostas em dissertações e teses que tratam do pensamento proporcional produzidas em São Paulo após 2007 (data limite do nosso levantamento), ou então, nos demais estados brasileiros, inclui o objetivo de utilizar proporções na análise de dados (de uma enquete, pesquisa) ou em probabilidade.

Quanto aos descritores que incluem usar o método da falsa posição ou algo similar a ele e usar reconfigurações geométricas precedidas de alteração de escala surgiram do referencial histórico adotado como base para análise. Consideramos que estes aspectos do pensamento proporcional sejam pouco conhecidos e, por isso, não foram utilizados em propostas de atividades. Parece-nos notável nenhuma das dissertações ter mencionado o uso desse método, ou similar, em procedimentos de resoluções criados pelos estudantes.

Tendo em vista o exposto, julgamos importante proporcionar a estudantes da Educação Básica a oportunidade de aprendizagem por meio de atividades que abordem vários aspectos do pensamento proporcional. Lembramos que a lista dos aspectos mencionados na nossa investigação não tem um caráter prescritivo, apenas apresenta uma relação de elementos considerados importantes dentre os que emergiram em nosso processo de estudo e em nossas análises. Resulta desse mesmo processo considerarmos desejável trabalhar com diferentes aspectos do pensamento proporcional.

Esperamos que a lista aqui construída possa ser tomada como parâmetro em futuras pesquisas, visto que se baseou em estudo histórico (epistemológico), curricular, didático e deste trabalho documental. Assim, sugerimos também para futuras investigações verificar quais dentre os descritores mencionados deveriam ser trabalhados pelo professor, ou seja, quais seriam mais convenientes e exeqüíveis para se desenvolver em sala de aula.

Referências Bibliográficas

ARDENGUI, M. J. **Ensino e aprendizagem do conceito de função:** pesquisas realizadas no período de 1970 a 2005 no Brasil. 2008. 182f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008.

BARDIN, L. **Análise de conteúdo**. Lisboa: Edições 70, 2008. 281 p.

BARRETO, I. M. A**. Problemas verbais multiplicativos de quarta-proporcional***: a* diversidade de procedimentos de resolução*.* 2001. 123f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2001.

BEHR, M.; LESH, R.; POST, T. R. A proporcionalidade e o desenvolvimento de noções pré-álgebra. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. (Org.). **As idéias da álgebra***.* Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1995. p. 89-103.

______.Proportional Reasoning. In: HIEBERT, J. & BEHR, M. **Number Concepts and Operations in the Middle Grades.** Reston, VA: Lawrence Erlbaum & National Council of Teachers of Mathematics, 1988. p. 93-118.

BOTTA, L. S. **Números racionais e raciocínio proporcional**: considerações sobre o ensino aprendizagem. 1997. 185f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro, 1997.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais.** Matemática: Ensino de primeira a quarta séries/ Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/ SEF, 1997. 142p.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais.** Matemática: Ensino de quinta a oitava séries/ Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/ SEF, 1998. 148p.

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais mais (PCNs +).** Secretaria de Educação Média e Tecnológica - Brasília: MEC, 2002. 144p.

BRITO, M. R. F. Alguns Aspectos Teóricos e Conceituais da Solução de Problemas Matemáticos. In BRITO, M. R. F. (Org.). **Solução de Problemas e a Matemática Escolar***.* Campinas: Alínea Editora, 2006. 280p.

CAMEJO, A; MACHADO, S.; MARANHÃO, M. C. de A. Relatos em torno do cálculo de um aluno do 2º ano do Ensino Fundamental. **Zetetiké***,* Campinas, v. 16, n. 29, p. 156-169. Jan/jun. 2008.

CELESTINO, M. R. **Ensino-aprendizagem da álgebra linear**: as pesquisas brasileiras na década de 90*.* 2000. 114f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2000.

COSTA, C. R. **Panorama de um estudo sobre razões e proporções em três livros didáticos***.* 2005. 146 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

FIORENTINI, D. Banco de teses EDUMAT – CEMPEM/DEME – FE/UNICAMP. **Zetetiké,** Campinas, v. 1, n. 1, p. 77-94, mar. 1993.

______. Banco de teses EDUMAT – CEMPEM/DEME – FE/UNICAMP. Relação de teses e dissertações de mestrado/doutorado em Educação Matemática, produzidas no Brasil nos anos de 1996 e 1997. **Zetetiké,** Campinas, v. 5, n. 8, p. 131-146, jul/dez. 1997.

______. Relação de teses e dissertações de mestrado e doutorado em Educação Matemática, produzidas no Brasil nos anos de 1998 a 2001. **Zetetiké***,* Campinas, v. 9, n. 15/16, p. 179-203, jan/dez. 2001.

FIORENTINI, D.; COMUCCI, L. L. Teses e dissertações de mestrado ou doutorado, relativas à Educação Matemática, produzidas/defendidas no Brasil no período de 1991 a 1995. **Zetetiké***,* Campinas, v. 3, n. 4, p. 103-120, nov. 1995.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em Educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos**. Campinas: Autores Associados, 2006. 226p. (Coleção formação de professores).

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A.; MIGUEL, A. **Contribuição para um repensar... a educação algébrica elementar**. **Pro-Posições**: Revista quadrimestral da Faculdade de Educação da UNICAMP, Campinas, v. 4, n. 1, p. 78-91, mar.1993.

GATASS FILHO, J. **Ensino e aprendizagem do conceito de proporcionalidade em educação matemática**. 1994. 107f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro, 1994.

GOLDENBERG, M. **A arte de pesquisar**: como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais. 10. ed. Rio de Janeiro: Record, 2007. 107 p.

JUNHO, B. A. P. **Panorama das dissertações de Educação Matemática sobre o ensino superior da PUC-SP de 1994 a 2000**. 2003. 156f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Centro de Ciências Exatas e Tecnologia. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2003.

LELLIS, M. C. T. **Sobre o conhecimento matemático do professor de matemática.** 2002. 116f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2002.

MANKTELOW, K.I. **Reasoning and thinking**. U K: Psychology Press, 1999. 256p.

MACHADO, S. D. A.; MARANHÃO, M. C. S. A. Relação entre a composição do corpo docente e a produção discente na primeira década do Programa de Educação Matemática da PUC-SP. **Educação Matemática em Revista**, São Paulo, v. 13, n. 20-21, p. 3-9, 2006.

MARANHÃO, M. C. S. A. Projeto de Pesquisa: Expressões, Equações e Inequações. **In: Conferencia Interamericana de Educación Matemática**, 12ª, 2007, Querétaro-México. Anais. Santiago de Querétaro, México: Comité Interamericano de Educación Matemática, 2007. CD-ROM.

MARTINS, A. de M. **Uma metanálise qualitativa das dissertações sobre equações algébricas no Ensino Fundamental**. 2008. 141f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008.

MELO, M. V. Relação de teses e dissertações de mestrado e doutorado em Educação Matemática, produzidas no Brasil. **Zetetiké**, Campinas, v. 12, n. 21, p. 83-127, jan/jun. 2004.

_______. Relação de teses e dissertações de mestrado e doutorado em Educação Matemática, produzidas no Brasil no ano de 2004. **Zetetiké**, Campinas, v. 13, n. 24, p. 143-175, jul/dez. 2005.

______. Relação de teses e dissertações de mestrado e doutorado em Educação Matemática, produzidas no Brasil no ano de 2006. **Zetetiké**, Campinas, v. 15, n. 27, p. 89-107, jan/jun. 2007.

______. Relação de teses e dissertações de mestrado e doutorado em Educação Matemática, produzidas no Brasil no ano de 2005. **Zetetiké**, Campinas, v. 15, n. 27, p. 109-126, jan/jun. 2007.

______. Relação de teses e dissertações de mestrado e doutorado em Educação Matemática, produzidas no Brasil anteriores ao ano de 2005. **Zetetiké**, Campinas, v. 15, n. 27, p. 127-134, jan/jun. 2007.

______. Relação de teses e dissertações de mestrado e doutorado em Educação Matemática, produzidas no Brasil anteriores a 2007. **Zetetiké**, Campinas, v. 16, n. 29, p. 210-233, jan/jun. 2008.

______. Relação de teses e dissertações de mestrado e doutorado em Educação Matemática, produzidas no Brasil no ano de 2007. **Zetetiké**, Campinas, v. 16, n. 29, p. 234-270, jan/jun. 2008.

MOYSÉS, L. **Aplicações de Vygotsky à educação matemática.** 8. ed. Campinas: Papirus, 2007. 176 p. (Coleção Magistério: formação e trabalho pedagógico).

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. **Curriculum focal points for prekindergarten through grade 8 mathematics**: a quest for coherence. United Estates of America, 2006. Disponível em: <http://www.nctm.org/standards/content.aspx?id=270>. Acesso em: 23 ago. 2008.

OLIVEIRA, E. A. **A Educação Matemática & Ensino Médio:** um panorama das pesquisas produzidas na PUC/SP. 2003. 160f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2003.

PEREIRA, L. M. X. de O. **A educação Matemática e Ensino Fundamental**: um panorama das pesquisas produzidas na PUC-SP nos anos 1994 a 1997. 2003. 135f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2003.

PEREIRA, R. O. P. **A geometria escolar**: uma análise dos estudos sobre o abandono do seu ensino. 2001. 84f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2001.

PEROTTI, A. R. **O Estudo da reta a partir das grandezas diretamente proporcionais**: Uma proposta alternativa de ensino. 1999. 134f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1999.

PINTO, M. A. D. **Ensino e aprendizagem da Geometria Analítica:** as pesquisas brasileiras na década de 90. 2000. 77f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2000.

PONTES, M. G. O. **Medidas e proporcionalidade no cotidiano escolar e extra-escolar**. 1996. 220f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1996.

PONTE, J. P.; SILVESTRE A. I. **Uma experiência de ensino da proporcionalidade no 2º ciclo do ensino básico.** Disponível em: <http://www.spce.org.pt/sem/19as.pdf>. Acesso em: 2 jun. 2008.

RADFORD, L. G. The historical origins of algebraic thinking. In: Sutherland et al. (Org. **Perspectives on school algebra.** Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2001. p. 13-36. (Mathematics Education Library).

RADFORD, L. G.; GUÉRETTE, G. Second degree equations in the classroom: a Babylonian approach. In: Katz, V. J. (Org.). **Using history to teach mathematics: an international perspective.** Cambridge: Cambridge University Press, 2000. p. 69-76.

RUIZ, A. R. **Ensino do Conceito de proporcionalidade**. 1986. 171f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1985.

SÃO PAULO (Estado) Secretaria da Educação. **Proposta Curricular do Estado de São Paulo para o ensino de Matemática para o ensino fundamental Ciclo II e ensino médio.** São Paulo: SE, 2008.

Anexo 1

TABELAS DE DISTRIBUIÇÃO DE PESQUISAS

Quadro 13: Relação de dissertações e teses sobre pensamento proporcional produzidas no Brasil de 1971 a 2007.

1	AGUIAR, M.C.A. **Formação dos conceitos de fração e de proporcionalidade e as operações concretas e formais**. 1980 91f. Dissertação (Mestrado em Psicologia. Cognitiva) – Departamento de Psicologia, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 1980.
2	ALMEIDA, R. C. M**. Abordagens do conceito de proporcionalidade em livros didáticos de matemática no Brasil do século XX.** 2004. 146f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Departamento de Educação, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2004.
3	BARRETO, I. M. A. **Problemas verbais multiplicativos de quarta - proporcional**: a diversidade de procedimentos de resolução. 2001. 123f Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2001.
4	BERNAL, Márcia Maria. **Estudo do objeto proporção:** elementos de sua organização matemática como objeto a ensinar e como objeto ensinado. 2004. 169 f. Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica) – Centro de Ciências Físicas e Matemática/Centro de Ciências da Educação, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2004.
5	BOTTA, L. S. **Números racionais e raciocínio proporcional:** considerações sobre o ensino aprendizagem. 1997. 185f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro, 1997.

6	COSTA, C. R. **Panorama de um estudo sobre razões e proporções em três livros didáticos**. 2005. 146f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.
7	CUELLO, R. M. B. Razão e proporção: o processo evolutivo da compreensão dos conceitos. 1995. 140f. Dissertação (Mestrado em Psicologia. Cognitiva) – Departamento de Psicologia, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 1995.
8	FLORIANI, E. F. **Conceito de Proporcionalidade em Questão.** 2004. 104f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade do Vale do Itajaí, Univali, Itajaí, 2004.
9	FREITAS, F. N. **Influência do nível de representações no desenvolvimento de habilidades multiplicativas de proporção simples.** 1996. Dissertação (Mestrado em Psicologia. Cognitiva) - Departamento de Psicologia, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 1996.
10	GATASS FILHO, J. **Ensino e aprendizagem do conceito de proporcionalidade em educação matemática**. 1994. 107f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro, 1994.
11	HAAG, E. **A proporcionalidade na adolescência e início da idade adulta.** 1991. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 1991.
12	LEÃO, M. de L. M. C. **Proporção**: escolarização e formas de raciocínio em diferentes contextos. 1986. Dissertação (Mestrado em Psicologia Cognitiva) – Departamento de Psicologia, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 1986.
13	MAGALHÃES, V**.** P. de. **A resolução de problemas de proporção e sua transferência entre diferentes conteúdos.** 1990. Dissertação (Mestrado em Psicologia Cognitiva) - Departamento de Psicologia, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 1990.
14	MANSO, R. **O conceito de proporcionalidade nos livros didáticos**. 2004. 146f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Departamento de Educação, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2004.
15	OLIVEIRA, I. A. F. G. **Um estudo sobre a proporcionalidade**: a resolução de problemas no ensino fundamental. 2000. 134f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Centro de Educação, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2000.

16	PEREIRA MELO, L. L. **Exploração do potencial didático de um conjunto de atividades auxiliares para o ensino da proporcionalidade.** 1998. 147. Dissertação (Mestrado em Psicologia Cognitiva) – Departamento de Psicologia, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 1998.
17	PEROTTI, A. R. **O Estudo da reta a partir das grandezas diretamente proporcionais**: Uma proposta alternativa de ensino. 1999. 134f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1999.
18	PONTES, M. G. O**. Medidas e proporcionalidade no cotidiano escolar e extra escolar**. 1996. 220f. Tese (Doutorado em Educação)- Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1996.
19	RUIZ, A. R. **Ensino do Conceito de proporcionalidade**. 1986. 171f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1986.
20	SANTOS, H. **Proporcionalidade como ferramenta para a aplicação em diferentes tópicos da Matemática e outras disciplinas**. 2000. 221f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Educação Matemática, Universidade Santa Úrsula, Rio de Janeiro, 2000.
21	SERAFIM, R. M. R. **Razão e Proporção:** uma abordagem histórica e epistemológica em livros-texto. 2004. 131f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Centro Pedagógico, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2004
22	VIZOLLI, I. **Registros de professores e alunos de educação de jovens e adultos na solução de problemas de proporção-porcentagem**. 2006. 229f. Tese (Doutorado em Educação) – Setor de Educação, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2006.

Quadro 14: Seleção para constituição do corpus documental da primeira análise

1	BARRETO, I. M. A. **Problemas verbais multiplicativos de quarta - proporcional**: a diversidade de procedimentos de resolução. 2001. 123f Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)- Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2001.
2	BOTTA, L. S. **Números racionais e raciocínio proporcional**: considerações sobre o ensino aprendizagem. 1997. 185f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro, 1997.
3	COSTA, C. R. **Panorama de um Estudo sobre Razões e Proporções em três Livros Didáticos**. 2005. 146f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

4	GATASS FILHO, J. **Ensino e aprendizagem do conceito de proporcionalidade em educação matemática**. 1994. 107f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro, 1994.
5	PEROTTI, A. R. **O Estudo da reta a partir das grandezas diretamente proporcionais**: Uma proposta alternativa de ensino. 1999. 134f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1999.
6	PONTES, M. G. O**. Medidas e proporcionalidade no cotidiano escolar e extra-escolar**. 1996. 220f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1996.
7	RUIZ, A. R. **Ensino do Conceito de proporcionalidade**. 1986. 171f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1985.

Anexo 2

FICHAMENTOS

Quadro 15: Modelo de fichamento

1	Título da Dissertação:
2	Autor (a):
3	Ano de defesa:
4	Número de páginas:
5	Orientador (a):
6	Instituição de Ensino Superior:
7	Resumo:
8	Objetivo:
9	Metodologia:
10	Fundamentação teórica:
11	Palavras-chaves:
12	Existência de atividades realizadas em sala de aula sobre o pensamento proporcional:
13	Conclusão:
14	Sugestões de ensino e/ou sugestões de pesquisa:
15	Referências Bibliográficas mencionadas no fichamento:

Quadro 16: Fichamento da dissertação de Barreto (2001)

1	Título da Dissertação: **Problemas verbais multiplicativos de quarta - proporcional**: a diversidade de procedimentos de resolução.
2	Autora: BARRETO, Isva Maria Almeida.
3	Ano de defesa: 2001
4	Número de páginas: 123
5	Orientadora: Profa. Dra. Anna Franchi.
6	Instituição de Ensino Superior: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
7	Resumo: Este trabalho tem por objetivo analisar os procedimentos de resolução de problemas verbais multiplicativos elementares mobilizados por uma população de alunos de 5ª série, de uma Escola Estadual da cidade de São Paulo. Nessa análise, buscamos ressaltar o modo como esses procedimentos se expressam, bem como as características das situações-problema sob as quais eles emergem. Em particular, focalizamos a reflexão sobre os procedimentos não canônicos em problemas de “quarta - proporcional” com números naturais, tomando como referência a proposta de Gerard Vergnaud sobre Campo Conceitual. Para essa pesquisa, fizemos um período de observação nas referidas classes; em seguida, aplicamos um instrumento diagnóstico seguido da realização de entrevistas. Constatamos um elevado grau de dificuldade na resolução desses problemas, bem como a mobilização de procedimentos não canônicos diversificados expressando operações cognitivas de diferentes naturezas. Os fenômenos observados revelaram aspectos específicos na evolução de concepções pré-multiplicativas para multiplicativas, com forte incidência de procedimentos aditivos nas situações consideradas. Essas constatações mostram a importância de se considerar, no ensino, a riqueza das produções individuais possíveis de serem estabelecidas pelos alunos em uma situação multiplicativa, divergindo de uma institucionalização precoce de procedimentos uniformes valorizados no âmbito escolar. (BARRETO, 2001, p. 6).
8	Objetivo: [...] investigar como se comporta uma população de alunos frente a situações interpretáveis por meio de relações quartenárias envolvendo quantidades de naturezas diferentes e que podem ser tomadas como termos de uma relação de proporcionalidade. (BARRETO, 2001, p. 13).
9	Metodologia: “Esse estudo foi realizado mediante um período de observação no lócus da pesquisa, aplicação de um instrumento diagnóstico e entrevistas”. (BARRETO, 2001, p. 30)
10	Fundamentação teórica: O campo conceitual das estruturas multiplicativas por Gerard Vergnaud.
11	Palavras-chaves: Quarta - proporcional; problemas verbais; procedimentos pré-multiplicativos.

12	Existência de atividades realizadas em sala de aula sobre o pensamento proporcional: A autora da dissertação não investigou tais atividades.
13	Conclusão: Os resultados desta investigação mostram uma heterogeneidade de procedimentos mobilizados para a resolução desses problemas, o que evidencia a complexidade desse conceito e a necessidade de uma diversidade de situações em longo processo. Dentre os procedimentos utilizados pelos alunos, foram observados um grande número de procedimentos não canônicos, como a adição repetida, “multiplicação com termo desconhecido”, multiplicações sucessivas [...].(BARRETO, 2001, p.84).
14	Sugestões de ensino e/ou sugestões de pesquisa: Com referência a esta pesquisa, é importante apontar para algumas de suas limitações, especialmente quanto à seleção das variáveis numéricas. Na seleção dessas variáveis, deve-se atentar para que o número, que representa o fator escalar ou o coeficiente de proporcionalidade, não coincida com a resposta do problema [...]. Considero oportuno estender essa problemática para outras investigações, propondo problemas com números maiores, com o fator escalar, por exemplo, na ordem das dezenas, dificultando o cálculo mental. A expressão escrita desse cálculo pode garantir a efetiva clareza quanto a função dos termos envolvidos, descartando, assim, o risco de o aluno determinar intuitivamente esse fator, sem a continuidade do cálculo devido ao não entendimento de todas as relações envolvidas no problema. (BARRETO, 2001, p. 86).
15	Referências Bibliográficas mencionadas no fichamento: não constam.

Quadro 17: Fichamento da dissertação de Botta (1997).

1	Título da Dissertação: **Números racionais e raciocínio proporcional**: considerações sobre o ensino aprendizagem.
2	Autora: BOTTA, Luciene Souto.
3	Ano de defesa: 1997
4	Número de páginas: 185
5	Orientadora: Profa. Dra. Lourdes de La Rosa Onuchic
6	Instituição de Ensino Superior: Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
7	Resumo: Neste trabalho é feito um estudo sobre números racionais e proporcionalidade, apoiado em literatura recente de diversos pesquisadores, tais como Ohlsson, Kieren, Lesh, Harel, Post, Behr, Schwartz, Vergnaud, entre outros. Um fato importante, que é destacado nesse estudo, é que o número racional expressa ideias conceitualmente distintas, segundo o contexto em que ele está inserido. Ohlsson afirma que a dificuldade da construção do conhecimento de número racional é de natureza semântica. Este trabalho mostra que a idéia de proporcionalidade, uma idéia unificadora, está ligada à idéia de razão, uma das personalidades do número racional e que reflete uma comparação multiplicativa entre duas grandezas. O conceito de relações proporcionais é uma idéia unificadora que representa um papel chave numa ampla variedade de tópicos importantes, como razões, proporções, figuras semelhantes, porcentagens, conversão de medidas, probabilidades. Este trabalho enfatiza a necessidade de se trabalhar os conceitos de número racional e proporcionalidade através da resolução de problemas, visando uma melhor compreensão dos estudantes. (BOTTA, 1997, p. iii).
8	Objetivos: "O objetivo de meu trabalho é resgatar nos professores o conceito de proporcionalidade [...] ". (BOTTA, 1997, p. 49).
9	Metodologia "Adotou-se a metodologia de *Ensino de Matemática através da Resolução de Problemas.*" (BOTTA, 1997, p. viii).
10	Fundamentação teórica: Neste trabalho é feito um estudo sobre números racionais e proporcionalidade, apoiado em literatura recente de diversos pesquisadores, tais como Ohlsson, Kieren, Lesh, Harel, Post, Behr, Schwartz, Vergnaud, entre outros. (BOTTA, 1997, p. iii).
11	Palavras-chaves: não constam.
12	Existência de atividades realizadas em sala de aula sobre o pensamento proporcional. A autora não investigou tais atividades.

13	Conclusão: Na busca de justificativa para compreender o fracasso do ensino das frações, razões, proporções e dos demais conceitos relacionados, o que percebo é que uma das grandes dificuldades está situada na diferenciação dos significados de fração e razão. Como parte dos professores não sabe distinguir esses conceitos, pois não percebe a fração como uma relação parte-todo e a razão como uma relação comparativa entre duas grandezas, o problema aumenta. O espírito multiplicativo das razões, não sendo cultivado no seu íntimo, leva os estudantes a empregarem a técnica operatória da regra de três apenas mecanicamente, sem que o espírito da proporcionalidade se evidencie. (BOTTA, 1997, p. 175) Como todo conceito, o conceito de proporcionalidade, para ser assimilado, precisa ser trabalhado em muitas e variadas situações-problema que, quando exploradas e compreendidas, deixam os alunos confiantes com relação ao caminho que devem percorrer para resolvê-las. (BOTTA, 1997, p. 176).
14	Sugestões de ensino e/ou sugestões de pesquisa: É preciso que se trabalhe na linha de transposição da pesquisa para a sala de aula. A universidade deveria promover um trabalho que auxiliasse nessa transposição, onde teses, artigos de pesquisa, traduções de artigos em língua estrangeira, pudessem ser levados até os professores em sala de aula. (BOTTA, 1997, p. 178).
15	Referências Bibliográficas mencionadas no fichamento: não constam.

Quadro 18: Fichamento da dissertação de Costa (2005)

1	Título da Dissertação: **Panorama de um estudo sobre razões e proporções em três livros didáticos.**
2	Autor: COSTA, Carlos Rogério.
3	Ano de defesa: 2005
4	Número de páginas: 146
5	Orientadora: Profa. Dra. Bárbara Lutaif Bianchini.
6	Instituição de Ensino Superior: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
7	Resumo: Essa dissertação analisou e comparou os conteúdos Razões e Proporções entre três livros didáticos, os livros e a proposta curricular correspondente à década de sua publicação, classificou e comparou os exercícios propostos utilizando os níveis de conhecimento esperado dos alunos segundo Aline Robert. Inicialmente, dedicou-se a descrever os tópicos e classificar os exercícios propostos referentes aos conteúdos Razões e Proporções nos três livros didáticos, para além da descrição destes conteúdos nos documentos oficiais dos órgãos governamentais, visto que os mesmos estão presentes no cotidiano dos alunos e o livro didático é uma das principais fontes de pesquisa do professor. Logo após foi feita a análise e comparação dessas descrições e análises com objetivo de responder às seguintes questões: 1) A disponibilização dos conteúdos Razões e Proporções nos livros didáticos está de acordo com o que é sugerido nos documentos dos órgãos governamentais? 2) Houve modificações quanto ao modo de disponibilizar estes conteúdos nos livros didáticos? 3) Os exercícios favorecem o trabalho do professor quanto aos níveis de conhecimento esperado dos alunos segundo Aline Robert? O trabalho encerrou-se sugerindo novas pesquisas com esses conteúdos e/ou outros conteúdos em outros tipos de documentos, depois de um panorama dos conteúdos Razões e Proporções nos livros didáticos quanto aos assuntos abordados nos tópicos supracitados com as seguintes conclusões: os livros didáticos estão parcialmente agregados às sugestões dos documentos oficiais dos órgãos governamentais da época foram publicados, houve modificações nos modos de disponibilizar estes conteúdos, isto é, a parte teórica foi reduzida, somente o livro dos anos 60/70 disponibiliza demonstrações e preocupação com a relação entre geometria e álgebra, as listas de exercícios com os três níveis de conhecimento (técnico, mobilizável e disponível). (COSTA, 2005, p. 6).
8	Objetivo: “Analisar os conteúdos ‘Razões e Proporções’ qualitativamente visando o ensino fundamental [...]” (COSTA, 2005, p. 13)

9	Metodologia: A primeira etapa compreende a seleção de três livros didáticos para serem analisados, a procura dos documentos curriculares que norteavam o plano de matemática de cada livro e a formulação das hipóteses. Em seguida, na 2ª etapa faço a seleção de variáveis por meio da construção de uma grade que servirá para a investigação quanto aos níveis de conhecimentos exigidos do aluno (técnico, mobilizável e disponível) segundo Aline Robert. Também apresento um esquema para comparar os conteúdos "Razões e Proporções" entre os livros didáticos e as respectivas propostas curriculares. Na terceira etapa, apresento uma síntese analítica da classificação dos exercícios propostos e a comparação entre os livros didáticos, bem como a comparação dos mesmos com as respectivas propostas curriculares da época de edição. (COSTA, 2005, p. 16).
10	Fundamentação teórica: [...] este trabalho fundamentou-se no critério de Aline Robert quanto aos níveis de conhecimento esperado dos alunos nos exercícios propostos escolhidos dos três livros didáticos, analisando o enunciado e as prováveis noções utilizadas pelo aluno na resolução destes. (COSTA, 2005, p. 141).
11	Palavras-chaves: Razões e Proporções, livros didáticos, níveis de conhecimento, comparação de conteúdos.
12	Existência de atividades realizadas em sala de aula sobre o pensamento proporcional: O autor da dissertação não investigou tais atividades.
13	Conclusão: Portanto, respondendo nossas questões iniciais, o livro dos anos 60/70, visto como ferramenta de trabalho para o professor traz demonstrações de forma a auxiliá-lo nas aulas, enquanto que os outros dois não têm esta função. O livro dos anos 2000, seguindo as orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais, utilizou-se de situações-problema para introduzir os assuntos dos conteúdos Razões e Proporções, colocando o aluno como sujeito da ação. Com o exposto anteriormente, verifica-se que os três livros didáticos dão subsídio parcial aos professores, pois não estão plenamente elaborados com os documentos oficiais dos órgãos governamentais, sendo estes documentos apenas ponto de apoio, isto é, nestes documentos, tanto os livros quanto as propostas, os autores deixam claro a responsabilidade do professor. Os livros didáticos são apresentados em uma seqüência lógica, para o autor, cabe ao professor efetuar análises finais como a proposta desse trabalho, quando desejarem fazer mudanças ou desconsiderar uma noção ou outra. Na verdade, seria interessante que o professor constituísse seu próprio curso e que os livros didáticos servissem apenas como apoio para o aluno. (COSTA, 2005, p. 142). Há, no entanto, uma convergência entre os três livros, isto é, nas listas dos exercícios propostos, os três níveis de conhecimento figuram, mas não de modo necessário e suficiente em minha opinião. Portanto, os livros didáticos não devem ser a única fonte de pesquisa para os professores de Matemática. Cabe aos professores que ensinam matemática buscar subsídios que levem ao desenvolvimento dos alunos, principalmente no campo de conhecimento, utilizando teorias e/ou critérios, como o critério da Aline Robert explorado por este trabalho, na análise dos exercícios propostos escolhidos de cada um dos três livros, objetos deste trabalho, pois os alunos não passam pelas etapas de planejamento e controle que em geral não são trabalhados e explicitados no contrato didático. Cabe ao aluno encontrar seus próprios planejamento e controle. (COSTA, 2005, p. 143-144).

14	Sugestões de ensino e/ou sugestões de pesquisa: Portanto, para melhorar a qualidade de ensino, pesquisas com estes conteúdos ou com outros conteúdos podem ser realizadas, não somente em livros didáticos, mas também em outros referentes bibliográficos, como Internet, revistas, disquetes, CD Rom, etc. (COSTA, 2005, p. 143-144).
15	Referências Bibliográficas mencionadas no fichamento: não constam.

Quadro 19: Fichamento da dissertação de Gatass (1994)

1	Título da Dissertação**: Ensino e aprendizagem do conceito de proporcionalidade em Educação Matemática**
2	Autor: GATASS FILHO, José.
3	Ano de defesa: 1994
4	Número de páginas: 107
5	Orientadora: Profa. Dra. Celi Vasques Crepaldi
6	Instituição de Ensino Superior: Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
7	Resumo: Esta pesquisa apresenta uma proposta para o ensino-aprendizagem do conceito de proporcionalidade, a nível de primeiro grau, tendo como base os aspectos didático-pedagógicos e histórico-culturais, objetivando: 1) mostrar a importância da evolução histórica do conceito de proporcionalidade, através do contexto sócio-cultural, no processo de ensino –aprendizagem; 2) favorecer o inter-relacionamento do conceito de proporcionalidade com outros conceitos algébricos e geométricos; 3) evidenciar a importância do conceito de proporcionalidade como conteúdo interdisciplinar; 4) mostrar a importância do conceito de proporcionalidade no dia-a-dia do aluno e na aprendizagem matemática, como conteúdo estrutural; 5) propiciar uma metodologia que reúna esses objetivos visando a uma aprendizagem significativa; 6) elaborar uma proposta de ensino para o primeiro grau, de tal maneira que esse conceito, ao ser ensinado, tenha uma fundamentação teórica, que possa ser continuamente aprofundada, oferecendo aos professores condições de torná-la acessível, também, a nível de 2º e 3º graus. Com estas estratégias, acreditamos ser possível diminuir as limitações para o ensino e aprendizagem dessa idéia matemática unificadora, propiciando respostas, em todos os níveis de ensino, aos questionamentos do tipo: Para que serve isto? Onde vou utilizar isto? (GATASS FILHO, 1994, p.v).
8	Objetivo: 1) mostrar a importância da evolução histórica do conceito de proporcionalidade, através do contexto sócio-cultural, no processo de ensino-aprendizagem; 2) favorecer o inter-relacionamento do conceito de proporcionalidade com outros conceitos algébricos e geométricos; 3) evidenciar a importância do conceito de proporcionalidade como conteúdo interdisciplinar; 4) mostrar a importância do conceito de proporcionalidade no dia-a-dia do aluno e na aprendizagem matemática, como conteúdo estrutural; 5) propiciar uma metodologia que reúna esses objetivos visando a uma aprendizagem significativa; 6) elaborar uma proposta de ensino para o primeiro grau, de tal maneira que esse conceito, ao ser ensinado, tenha uma fundamentação teórica, que possa ser continuamente aprofundada, oferecendo aos professores condições de torná-la acessível, também, a nível de 2º e 3º graus. (GATASS FILHO, 1994, p. 14)
9	Metodologia: O autor não explicitou a metodologia adotada.

10	Fundamentação teórica: 1) Teorias de aprendizagem e ensino: Ausubel (1968), Bruner (1960), D'Ambrosio (1990), Dewey (1959), Dienes (1966), Dienes (1973), Dienes (1975), Piaget (1976). 2) Formação e desenvolvimento histórico do conceito de proporcionalidade: Boyer (1968). 3) Conceito de proporcionalidade: Carraher (1986), Karplus e Karplus (1972), Karplus e Peterson (1970), Karplus, Pulos e Stage (1980), Karplus, Pulos e Stage (1981), Kurtz e Karplus (1969), Lunzer e Punfrey (1966), Piaget (1964), Piaget (1980), Inhelder e Piaget (1955), Wollman e Karplus (1974).
11	Palavras-chaves: não constam.
12	Existência de atividades realizadas em sala de aula sobre o pensamento proporcional: O autor não investigou tais atividades.
13	Conclusão: Diante disso, acreditamos que esta proposta tem condições de ser desenvolvida, em todos os níveis de ensino, desde que se proceda aos aprofundamentos teóricos necessários e se crie atividades para levá-la a atingir às nossas metas iniciais. (GATASS FILHO, 1994, p.99).
14	Sugestões de ensino e/ou sugestões de pesquisa: não constam.
15	Referências Bibliográficas mencionadas no fichamento. AUSUBEL, D. P. **Psicologia Educacional.** Tradução da edição americana de 1968. 2. ed. Rio de Janeiro: Editora Interamericana Ltda. 1980. BOYER, C. B. **História da Matemática.** Tradução de E. F. Gomide da edição inglesa de 1968. São Paulo: Editora Edgar Blucher Ltda., 1974. BRUNER, J. **O Processo de Educação.** Tradução de L. L. de Oliveira do original inglês de 1960. São Paulo: Ed. Nacional, 1987. CARRAHER, T. N. **Proporcionalidade na Educação Científica e Matemática: Desenvolvimento Cognitivo e Aprendizagem.** Ver. Brás. Est. Pedag., Brasília 67 (157); 586-602, set/dez, 1986 – b. D'AMBROSIO, U. **Etnomatemática.** São Paulo: Editora Ática,1990. 88p. DEWEY, J. **Vida e Educação.** São Paulo: Melhoramentos, 1959. 112p. DIENES, Z. P. **Lógica e Jogos Lógicos.** 2.ed.Tradução de E. J. Dotto do original francês de 1966. São Paulo: EPU, 1974. DIENES, Z. P. **O Poder da Matemática.** São Paulo: EPU, 1973. DIENES, Z. P. **As Seis Etapas do Processo Ensino-Aprendizagem.** São Paulo: EPU, 1975.

INHELDER, B; PIAGET, J. **Da Lógica da Criança à Lógica do Adolescente.** Tradução de Dante Moreira Leite. São Paulo: Livraria Pioneira Editora, 1976. 259p.

KARPLUS, R. and PETERSON, R. W. – Intellectual development beyond elementary school II: Ratio, a survey. **School Science and Mathematics**, Vol. 70, p. 813-820, 1970.

KARPLUS, R. and KARPLUS, E. F. – Intellectual development beyond elementary school III: Ratio, a longitudinal study. **School Science and Mathematics**, Vol. 72, p.735-742, 1972.

KARPLUS, R.; PULOS, S. and STAGE, E. K. Proportional Reasoning School of early adolescents. For presentation at the **MERGA Conference**, Hobart, Austrália, 1980.

KARPLUS, R.; PULOS, S. and STAGE, E. K. Proportional Reasoning of early adolescents: comparison and missing value problems in the school. For presentation at the **Third Annual conference for the Psychology of Mathematics Education,** Minneapolis, Minnesota, 1981.

KURTZ, B. and KARPLUS, R. Intellectual development beyond elementary school VII: Teaching for Proportional Reasoning. **School Science and Mathematics**, Vol. 79, nº 5, p. 387-397, 1979.

LUNZER, E. A. and PUMFREY, P. D. Understanding Proportionality. **Mathematics Teaching**, Vol. 34, p. 7-12, NTCM, Reston, V.a.: The Council, 1966.

PIAGET, J. **Seis Estudos de Psicologia.** Tradução de M. A. M. D'Amorim e P. S. L. Silva. Rio de Janeiro: Editora Forense Universitária Ltda, 1990.

PIAGET, J. **Ensaio de Lógica Operatória.** São Paulo: Editora Globo/EDUSP, 1976. 394p.

PIAGET, J. **Psicologia e Pedagogia.** Rio de Janeiro: Editora Forense Universitária, 1980.

WOLLMAN, W. and KARPLUS, R. Intellectual development elementary school V: using ratio in differing tasks. **School Science and Mathematics**, vol. 74, p. 593-613, 1974.

Quadro 20: Fichamento da dissertação de Perotti (1999)

1	Título da Dissertação: **O estudo da reta a partir das grandezas diretamente proporcionais**: Uma proposta alternativa de ensino.
2	Autor: PEROTTI, Alberto Ramos.
3	Ano de defesa: 1999
4	Número de páginas: 134
5	Orientadora: Tânia Maria Mendonça Campos
6	Instituição de Ensino Superior: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
7	Resumo: O objetivo desta pesquisa é apresentar uma seqüência didática que possibilite aos alunos a aprendizagem da equação da reta com ênfase no conceito de coeficiente angular, calculado pela taxa de variação. Para atingir o objetivo proposto consideramos três hipóteses. Em primeiro lugar, a seqüência deve ser iniciada por questões contextualizadas, isto é, a partir de situações-problema. Em segundo lugar, a seqüência deve partir do conceito de grandezas diretamente proporcionais, por ser esta uma idéia simples e provavelmente do domínio dos alunos. Em terceiro lugar, o coeficiente angular deve ser trabalhado por meio da taxa de variação $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, o que facilita a sua determinação. O desenvolvimento do trabalho foi baseado na Teoria das Situações de Guy Brousseau. Sua aplicação se deu no Núcleo de Educação e Cultura de Mogi das Cruzes contando com a participação de 14 alunos, sendo 8 do 1º Colegial e 6 do 2º Colegial. Os alunos participaram com entusiasmo de todas as atividades e ao final responderam o questionário de avaliação com alto índice de acertos. Consideramos então que os resultados obtidos foram satisfatórios e nos levam a indicar o estudo da reta a partir das grandezas diretamente proporcionais com ênfase na taxa de variação para determinar o coeficiente angular, como uma proposta alternativa de ensino para este conteúdo. (PEROTTI, 1999, resumo).
8	Objetivo: [...] o objetivo do nosso trabalho é a construção de uma seqüência didática que possibilite aos alunos a aprendizagem da equação da reta com ênfase no conceito de coeficiente angular, calculado pela taxa de variação. (PEROTTI, 1999, p.1).
9	Metodologia: Depois do estudo da Teoria das Situações Didáticas, partimos para uma análise do problema. Buscando conhecer como a equação da reta é ensinada pelos professores, em sala de aula e qual a concepção dos alunos a respeito do assunto, fizemos um breve estudo da Transposição Didática que constou: primeiro, de uma análise de três livros didáticos de bastante penetração no ensino médio e segundo, da aplicação de um teste a alunos que já haviam aprendido a equação da reta para avaliar a concepção que tinham deste conteúdo. (PEROTTI, 1999, p.1-2).

10	Fundamentação teórica: “O quadro teórico escolhido é a teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau”. (PEROTTI, 1999, p. 1).
11	Palavras-chaves: Equação da reta, coeficiente angular, taxa de variação.
12	Existência de atividades realizadas em sala de aula sobre o pensamento proporcional: Tais atividades são analisadas no capítulo III.
13	Conclusão: O que podemos seguramente garantir é que houve uma preferência efetiva pelo método de ensino que foi utilizado, em detrimento do modelo tradicional de aulas expositivas. Os alunos participavam ativamente, das atividades. Percebemos que à medida que o trabalho caminhava, mais engajado se tornava o grupo. (PEROTTI, 1999, p. 120-121). Um comportamento adotado pelos alunos, que apóia nossa afirmativa aconteceu na fase das questões descontextualizadas, quando o desempenho foi bastante favorável e pudemos notar que alguns já não percebiam que as questões estavam integramente no contexto da Matemática formal. (PEROTTI, 1999, p. 121).
14	Sugestões de ensino e/ou sugestões de pesquisa: Propomos, como caminhos possíveis para trabalhar tal deficiência, introduzir as grandezas proporcionais, não apenas pela regra de três, mas também através da sua representação gráfica. Ao construir os gráficos que representem a variação de grandezas direta e inversamente proporcionais e também de algumas que não variem proporcionalmente, eles provavelmente perceberão que somente as diretamente proporcionais têm a reta como sua representante gráfica. Ou seja, o caráter da linearidade, que aparece intimamente ligado às grandezas diretamente proporcionais poderá fortalecer a construção da idéia de variação uniforme que, a nosso ver, parece faltar à maioria dos alunos que participaram do nosso grupo de pesquisa. (PEROTTI, 1999, p. 122).
15	Referências Bibliográficas mencionadas no fichamento: não constam.

Quadro 21: Fichamento da tese de Pontes (1996)

1	Título da Tese**: Medidas e proporcionalidade na escola e no mundo do trabalho.**
2	Autora: PONTES, Maria Gilvanise de Oliveira.
3	Ano de defesa: 1996
4	Número de páginas: 220
5	Orientador: Prof. Dr. Sérgio Lorenzato
6	Instituição de Ensino Superior: Universidade Estadual de Campinas
7	Resumo: Nosso estudo teve como objetivo central analisar a relação existente entre a matemática escolar e a que permeia as atividades cotidianas dos trabalhadores de diferentes profissões que não dependem de escolarização formal. Para tanto foram selecionados os conteúdos de Medidas e Proporcionalidade por se tratarem dos que normalmente mais usamos no nosso dia-a-dia. Gravamos todas as aulas de uma 5ª série em que foi ministrado o conteúdo de Medidas e as da 6ª série em que foram ensinados Razão e Proporção. Paralelamente, observamos por uma jornada de trabalho uma Costureira, uma Comerciante, uma Cozinheira, um Marceneiro, um Mestre de Obras e um Oleiro, na sua labuta diária, procurando captar que itens eram abordados e como o eram trabalhados por estes profissionais. Realizamos também entrevistas com: os dois professores, vinte por cento de seus alunos e os seis outros trabalhadores, procurando captar suas representações sobre a escola e o ensino de Matemática. A seguir confrontamos as duas abordagens, constatando que os itens e as estratégias mais usados pelos trabalhadores não são contempladas nas aulas de Matemática, caracterizando-se um grande divórcio entre "o quê" e "como" se usa essa disciplina na prática cotidiana do trabalhador comum. Sugerimos que o ensino de Matemática se aproxime das abordagens do cotidiano, devendo para tanto fazer uso de metodologias alternativas que se inserem na Etnomatemática como a Modelagem, a Resolução de Problemas, a Problematização que possibilitam um envolvimento do aluno, tornando-o sujeito de sua Educação. (PONTES, 1996).
8	Objetivo: [...] pretendemos poder ajudar na compreensão da relação entre a matemática escolar e do cotidiano, caso ela exista. Na hipótese de inexistência dessa relação, pretendemos sugerir caminhos possíveis que tornem a matemática escolar mais próxima da matemática da vida. (PONTES, 1996, p. 11).
9	Metodologia: "[...] elegemos o estudo de caso qualitativo que acumula as características gerais da pesquisa qualitativa [...]" (PONTES, 1996, p. 11).
10	Fundamentação teórica: Os objetivos do presente trabalho não comportam uma revisão das posições teóricas existentes sobre esse tema, mas requerem referenciais básicos como os oferecidos por BORDIEU & PASSERON (1975), PONCE (1981), SNYDERS (1977) e GRAMSCI (1979), pela sistematização rigorosa que fizeram das idéias sobre a educação e pelo impacto que suas críticas causaram no âmbito do pensamento acadêmico. (PONTES, 1996, p. 43).

11	Palavras-chaves: não constam.
12	Existência de atividades realizadas em sala de aula sobre o pensamento proporcional: A autora da tese não investigou tais atividades.
13	Conclusão: Os aspectos identificados na condução da matemática na sala de aula, pelos dois professores, apontam para uma desvinculação entre o modo como a matemática é tratada na escola e o modo como ela é utilizada no dia-a-dia dos trabalhadores. Uma aproximação entre essas duas abordagens levaria certamente a um trabalho interdisciplinar, ou transdisciplinar, ou mesmo multidisciplinar. (PONTES, 1996, p. 189).
14	Sugestões de ensino e/ou sugestões de pesquisa: Vemos, neste estudo, a possibilidade de contribuir para subsidiar o trabalho de professores e alunos de cursos de formação de professores, tais como Habilitação para o Magistério e Licenciatura em Ciências e Matemática. Vislumbramos ainda a chance de colaborar com equipes de currículo das Secretarias de Educação Estaduais, Órgãos Municipais de Educação – OMEs, pertencentes às secretarias municipais de educação e com os professores anônimos do Ensino Fundamental que atuam nas salas de aula. Esta contribuição pode ser viabilizada através da leitura e discussão do estudo pelos interessados, que poderão se organizar em grupos de estudo para reflexão sobre os aspectos aqui levantados, e, a partir deles, refletir a respeito de suas limitações e dificuldades. Apresentamos esta pesquisa, não como algo acabado, mas como uma pista para novas investidas e novos desafios, na sala de aula, tendo em vista uma melhor performance do ensino. (PONTES, 1996, p. 194).
15	Referências Bibliográficas mencionadas no fichamento: BOURDIEU, P.; PASSERON, Jean C. **A reprodução**. Tradução de Reynaldo Bairão. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1975. 238 p. GRAMSCI, Antonio. **Os intelectuais e a organização da cultura**. Tradução de Carlos Nelson Coutinho. 3. Ed. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 1979. 220 p. PONCE, Aníbal. **Educação e luta de classes**. Tradução de José Severo de C. Pereira. 4. Ed. São Paulo: Cortez; Autores Associados. 1981. 192 p. SNYDERS, Georges. **Escola, classe e luta de classes**. Tradução de Maria Helena Albarran. 2. Ed. Lisboa: Moraes. 1981. 406 p.

Quadro 22: Fichamento da dissertação de Ruiz (1985)

1	Título da Dissertação: **Ensino do conceito de proporcionalidade**.
2	Autor: RUIZ, Adriano Rodrigues.
3	Ano de defesa: 1985
4	Número de páginas: 171
5	Orientadora: Profa. Dra. Anna Maria Pessoa de Carvalho
6	Instituição de Ensino Superior: Universidade de São Paulo
7	Resumo: Neste trabalho testamos uma metodologia para o ensino de proporções, com ênfase na formação do conceito de proporcionalidade, levando em consideração o fato de que o raciocínio proporcional envolve uma estrutura de pensamento bastante complexa. Com essa preocupação, desenvolvemos as atividades de ensino, explorando situações manipulativas e utilizando conceitos que apresentam parentesco próximo com proporções. Isso possibilitou aos alunos compreender a inclusão dos dois pares de termos que constituem uma proporção nos conjuntos domínio e imagem da função linear, que é modelo de invariância das proporções. Utilizamos, neste experimento, o modelo experimental que Campbell e Stanley (1979) denominam: Delineamento com Grupo de Controle Não-Equivalente e, através da comparação dos resultados obtidos pelos grupos de controle e experimental, em situações de pré e pós-testes, verificamos ganho estatisticamente significante (ao nível 0,05) do grupo experimental. Em relação à retenção de aprendizagem, comparando os resultados do pós-teste e do teste de retenção, aplicados ao grupo experimental, encontramos resultados satisfatórios. (RUIZ, 1985, p. ii).
8	Objetivo: [...] *desenvolvemos o presente experimento, visando explorar atividades que favorecessem o desenvolvimento do raciocínio proporcional e, a partir daí, os alunos pudessem estabelecer algoritmos e leis gerais.* (RUIZ, 1985, p. 118).
9	Metodologia: Para testarmos a metodologia a que nos referimos anteriormente, utilizamos um plano experimental com a estrutura que Campbell e Stanley (1979) chamam de Delineamento com Grupo de Controle Não-Equivalente. Esse modelo experimental envolve um grupo de controle e um grupo experimental. (RUIZ, 1985, p. 62).
10	Fundamentação teórica: Dolle (1978), Inhelder e Piaget (1972), Karplus e Peterson (1970), Karplus e Karplus (1972), Karplus, Pulos e Stage (1980), Karplus, Pulos e Stage (1981), Noelting (1980-a e 1980-b) Piaget (1976), Wollman e Karplus (1974).
11	Palavras-chaves: não constam.
12	Existência de atividades realizadas em sala de aula sobre o pensamento proporcional: Tais atividades são analisadas no capítulo III.

13	Conclusão: Em virtude dos resultados alcançados pelos alunos do grupo experimental, tanto no pós-teste como no teste de retenção, podemos afirmar que o material instrucional e os procedimentos que adotamos revelaram-se eficientes, constituindo-se numa opção muito válida para o ensino de proporções. (RUIZ, 1985, p. 120).
14	Sugestões de ensino e/ou sugestões de pesquisa: não constam.
15	Referências Bibliográficas mencionadas no fichamento: CAMPBELL, D. T. STANLEY, J. C. **Delineamentos Experimentais e Quase-Experimentais de Pesquisa**. Tradução de Renato Alberto Teodoro de Dio. São Paulo: E.P.U/EDUSP, 1979. 138p. DOLLE, J. M. **Para Compreender Piaget**. Zahar Editores, 1978. 202p. INHELDER, B.; PIAGET, J. ***De la Lógica del Nino a la Lógica del Adolescente***. Buenos Aires: Ediciones Paidós, 1972. KARPLUS, R.; and PETERSON, R.W. Intellectual development beyond elementary school II: Ratio, a survey, **School Science and Mathematics**, 1970, vol. 70, p. 813-820. KARPLUS, R.; and KARPLUS, E. F. Intellectual development beyond elementary school III: Ratio, a longitudinal study, **School Science and Mathematics**, 1972, vol. 72, p. 735-742. KARPLUS, R.; PULOS, S. STAGE, E. K. Proportional Reasoning School of early adolescents. For presentation at the **MERGA Conference**, Hobart, Australia, 1980. KARPLUS, R.; PULOS, S. STAGE, E. K. Proportional Reasoning of early adolescents: comparison and missing value problems in three school. For presentation at the **third annual conference for the Psychology of Mathematics Education**, Minneapolis, Minnesota, 1981. NOELTING, G. The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part I: Differentiation of stages. **Educational Studies in Mathematics**, 1980-a, vol. 11, Nº 2, p. 217-253 NOELTING, G. *The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part II: Problem-Structure and successive stages; Problem-Solving Strategies and the mechanism of adaptive restructuring,* **Educational Studies in Mathematics**, 1980-b, vol. 11, Nº 3, p. 331-363. PIAGET, J. **Ensaio de Lógica Operatória** Editora Globo/EDUSP, 1976. PIAGET, J. **A equilibração das Estruturas Cognitivas** Zahar Editores, RJ, 1976.

Anexo 3

ATIVIDADES DA DISSERTAÇÃO DE RUIZ (1985)

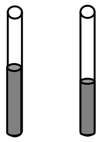
Quadro 23: Atividade Nº 1 apresentada na dissertação de Ruiz (1985)[19]

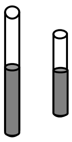
Objetivo: Explorar o conceito de equivalência de frações, utilizando a noção de: quantas vezes a parte cabe no todo.

Material: Jogos com 25 palitos de vários tamanhos, onde uma parte do palito é pintada e a outra não (modelo 1). Dominós com 12 peças (modelo 2).

1ª tarefa: Dar a cada grupo de alunos um conjunto de palitos:

- jogo livre para conhecimento do material;
- solicitar aos alunos que dividam os palitos em famílias (é fundamental insistir até que formem famílias observando a relação entre os dois atributos: comprimento do palito e comprimento da parte pintada).
- solicita-se que expliquem porque:


São de famílias diferentes.


São da mesma família.

2ª tarefa: Utilizando os dominós (modelo 2), classificá-los em famílias (justificando o critério adotado).

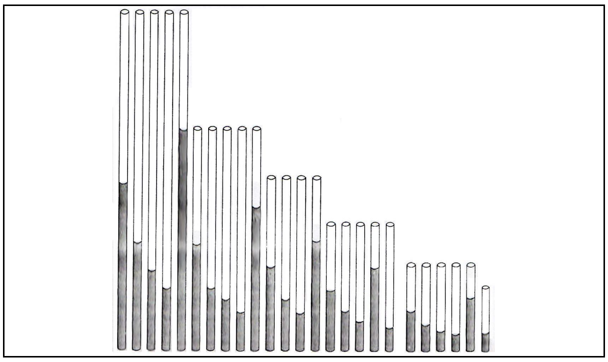


Figura 6: Modelo 1 da Atividade Nº 1 apresentada na dissertação de Ruiz (1985)

[19] Retirado de CAPES/FUNBEC (1980 apud RUIZ, 1985, p. 125-128).

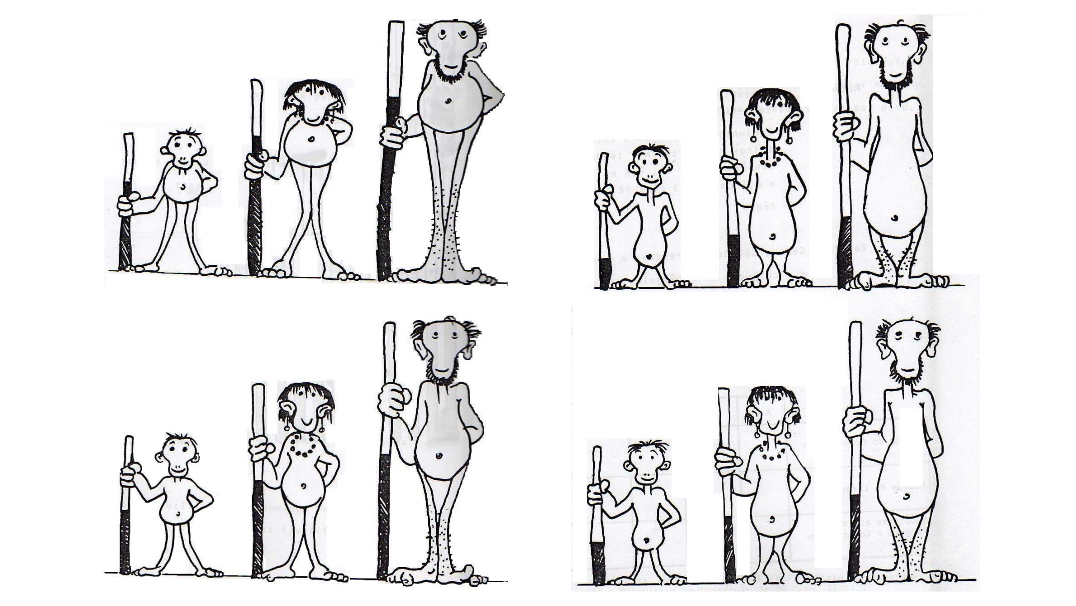


Figura 7: Modelo 2 da Atividade Nº 1 apresentada na dissertação de Ruiz (1985)

Quadro 24: Atividade Nº 2 apresentada na dissertação de Ruiz (1985)[20]

Objetivo: Verificar que num conjunto de figuras semelhantes, como no caso de retângulos, a razão entre o comprimento e a respectiva largura é constante.

Material: Conjunto de 6 quadrados, com medidas diferentes, feitos com cartolina; conjunto formado. . com 6 retângulos semelhantes, feitos com cartolina, tendo as seguintes dimensões: 3 x 1 cm; . 4,5 x 1,5 cm; 6 x 2 cm; 7,5 x 2,5 cm; 9 x 3 cm e 10,5 x 3,5 cm; régua.

Tarefa: Cada grupo deverá receber o conjunto de quadrados e o conjunto de retângulos, citados anteriormente. Solicitar que os alunos façam medições das figuras, anotando num quadro como o seguinte as medidas dos retângulos.

	A	B	C	D	E	F
Medida do Comprimento						
Medida da Largura						
Quociente entre Largura e Comprimento						

- Será que dividindo-se a medida do comprimento pela medida da largura, de cada figura, obter-se-á sempre o mesmo quociente?
- Por quê?

Avaliação: O professor desenha um par de retângulos semelhantes; os alunos devem desenhar novos pares onde haja a mesma relação que no par dado.

[20] Retirado de MEC/PREMEN/UFRGS/DEF (1976 apud RUIZ, 1985, p. 129-130).

Quadro 25: Atividade Nº 3 apresentada na dissertação de Ruiz (1985)[21]

Objetivo: Construir representação reduzida de uma determinada superfície, usando escala; explorando, para isto, a constatação da atividade anterior: a razão entre medidas correspondentes de figuras semelhantes é constante.

Material: Lápis, papel, régua, um mapa com indicação de escala e plantas da sala de aula, da turma, construídas pelo professor.

Tarefa: Conversar com os alunos sobre o que é um mapa, como é feito, ou uma planta, ou qualquer modelo reduzido.

Realizar uma gincana: A caça dos tesouros na sala de aula, escondendo um objeto para cada grupo de 3 alunos, entregando-lhes as pistas num código. Exemplo: partindo da porta, dê três passos na direção porta-janela; vire à esquerda e procure uma cadeira com um bilhete embaixo do assento, num raio de dois passos. No bilhete estaria escrito: "O tesouro desta equipe se encontra a partir do ponto central da sala, 2 passos na direção fundo da sala-quadro negro e 4 passos na direção parede-janela." A equipe só ganha a prova se fizer o mapa da sala de aula, em seu tamanho reduzido, guardando as devidas proporções, indicando o mais precisamente possível todas as pistas para chegar ao tesouro e, finalmente, onde ele estava. Cada equipe receberá um conjunto de pistas próprio, elaborado pelo professor.

Avaliação: Solicita-se aos alunos que classifiquem as boas plantas da sala de aula entre várias que o professor lhes terá confeccionado, sendo somente algumas delas adequadas, e que descubram em que escalas forma construídas as plantas certas.

Quadro 26: Atividade Nº 4 apresentada na dissertação de Ruiz (1985)[22]

Objetivo: Localizar pontos num quadrante de um sistema cartesiano ortogonal de coordenadas, realizar transformações e estabelecer relações entre as coordenadas de pontos.

Material: Lápis e Fichas de Trabalho.

1ª Tarefa: O professor entregará aos alunos um conjunto de fichas para que façam o que é solicitado:

- uma ficha para decifrar uma mensagem – Ficha nº1
- uma ficha num sistema circular – Ficha nº 2
- uma ficha de simetria – Ficha nº 3
- uma ficha de translação – Ficha nº 4
- uma ficha de homotetia – Ficha nº 5

2ª Tarefa: Pedir para os alunos que observem bem as fichas (3), (4) e (5). A seguir, perguntar:

- O que aconteceu com cada figura?
- Qual delas deslizou, sempre, somente em linha reta?
- Este desenho aumentou, diminuiu ou ficou do mesmo tamanho?
- Em qual delas poder-se-ia olhar como num espelho a figura transformada?
- O que aconteceu com a figura da Ficha nº 5?
- Ela é do mesmo tamanho daquela que foi apresentada?

3ª Tarefa: Pedir aos alunos que tomem as fichas (3), (4) e (5), colocando, então, os seguintes problemas:

- Ligue cada ponto ao seu transformado e prolongue até as extremidades do papel estes segmentos de reta.
- Observe como estão estes segmentos de reta.
- Quais deles passam pelo ponto (0; 0)?

[21] Retirado de MEC/PREMEN/UFRGS/DEF (1976 apud RUIZ, 1985, p. 131-132).

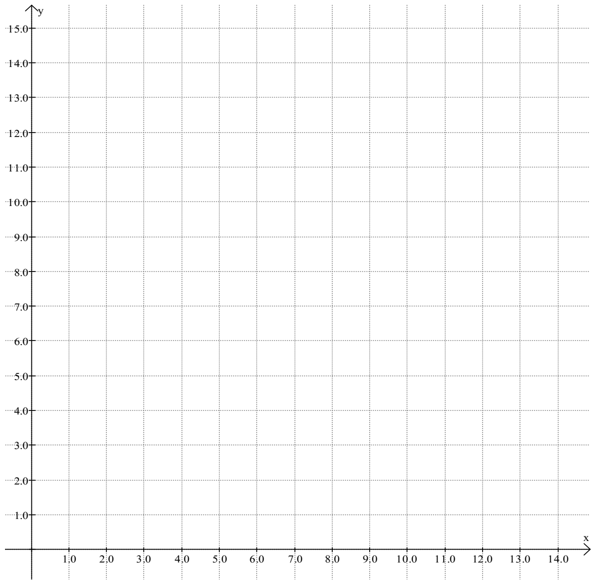
[22] Retirado de MEC/PREMEN/UFRGS/DE (1976 apud RUIZ, 1985, p. 133-134).

Quadro 27: Ficha Nº1[23] mencionada na Atividade Nº4 da dissertação de Ruiz (1985)

O diretor do Jardim Zoológico recebe uma mensagem secreta, anunciando a chegada de um novo animal. Encontre os pontos correspondentes aos pares escritos na mensagem. Ligue-os na ordem em que estão escritos e obterás a resposta.
Mensagem Secreta:

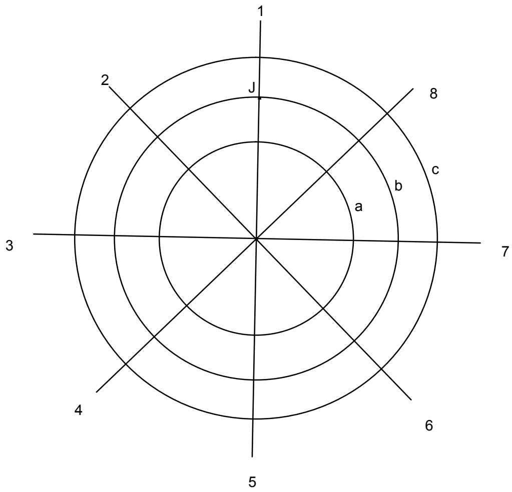
(4,7) – (5,5) – (6,7) – (6,8) – (4,9) – (3,8) – (3,6) – (2,4) – (0,4) – (1,3) – (3,4) - (4,6) – (3,2) – (4,5)

(5,4) – (5,1) – (6,1) – (7,4) – (8,4) – (9,1) – (10,1) – (10,4) – (12,2) – (10,5) – (9,7) – (6,7).



Quadro 28: Ficha Nº 2[24] mencionada na Atividade Nº4 da dissertação de Ruiz (1985)

Olivério e Marcos prepararam no seu jardim uma apresentação de circo. Eles dão a cada um dos convidados uma entrada, que lhes permitirá encontrar um lugar. Na entrada de João (J), está escrito (b, 1).



Complete: Mariane terá a entrada (M):

Natália terá a entrada (N):

Valéria terá a entrada (V):

Lourenço terá a entrada (L):

Patrício terá a entrada (P):

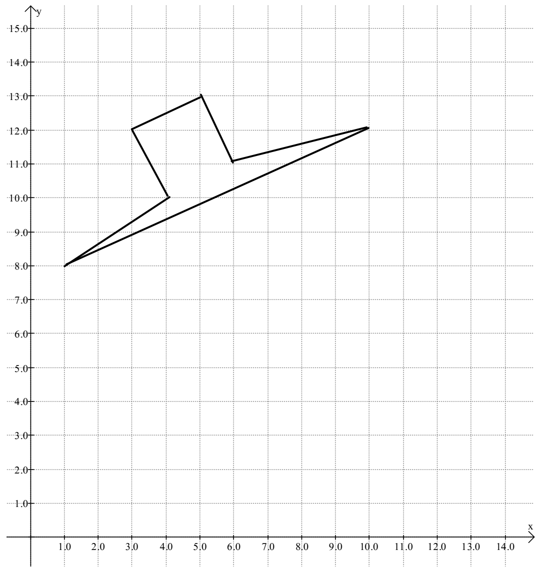
Rolando terá a entrada (R):

[23] Retirado de Bray et Clausard (1969 apud RUIZ, 1985, p. 135 -139).
[24] Retirado de Bray et Clausard (1969 apud RUIZ, 1985, p. 135 -139).

Quadro 29: Ficha Nº 3[25] mencionada na Atividade Nº4 da dissertação de Ruiz (1985)

Estão escritos, logo abaixo, os pares que correspondem aos pontos que permitiram desenhar o chapéu do Zorro, no quadriculado: (0,8) – (9,12) – (5,11) – (4,13) – (2,12) – (3,10).

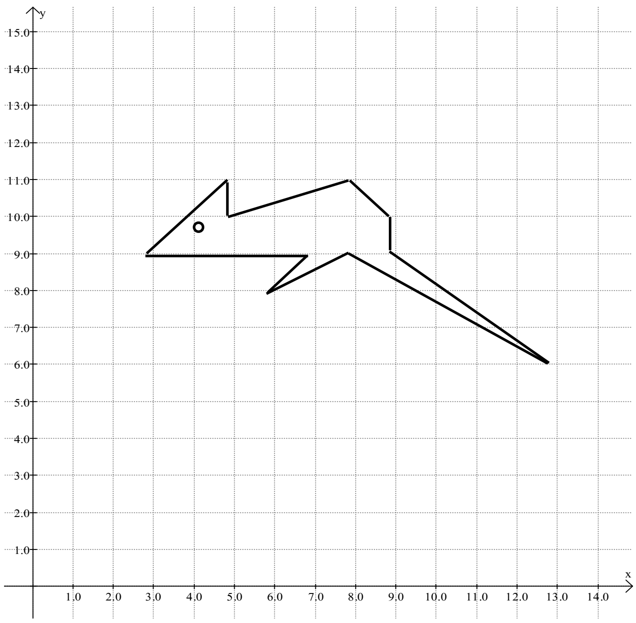
Escreva embaixo de cada par um novo par obtido da seguinte maneira: põe o 1º número no lugar do 2º e o 2º no lugar do 1º. Procure sua posição no quadriculado e ligue-os n ordem em que estão escritos. Ligue, por fim, o último ponto ao 1º.



Quadro 30: Ficha Nº4[26] mencionadas na Atividade Nº4 da dissertação de Ruiz (1985)

Eis os pares que correspondem aos pontos que permitiram desenhar este rato: (2,9) – (4,11) – (7,11) – (8,9) – (12,6) – (7,9) – (5,8) – (6,9)

Escreva sob cada um dos pares um novo par, obtido da seguinte maneira: não troque o primeiro número do par. Subtraia 4 do segundo número e cada par; ligue, em seguida, os novos pares obtidos na ordem que estão escritos os pares; depois, una o último ao primeiro.

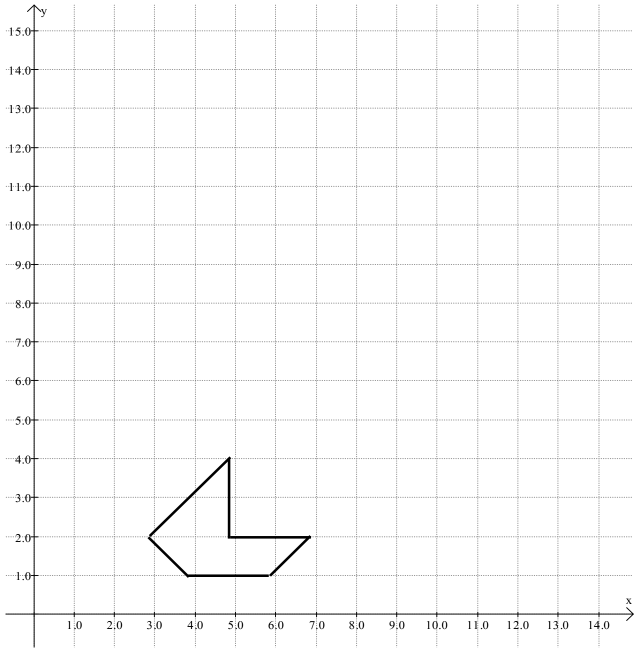


[25] Retirado de Bray et Clausard (1969 apud RUIZ, 1985, p. 135 -139).
[26] Retirado de Bray et Clausard (1969 apud RUIZ, 1985, p. 135 -139).

Quadro 31: Ficha Nº 5[27] mencionada na Atividade Nº4 da dissertação de Ruiz (1985)

Eis os pares que correspondem aos pontos que permitiram desenhar o barquinho no quadriculado: (3,1) – (4,1) – (5,1) – (6,2) – (4,2) – (4,4) – (2,2)

Escreva embaixo de cada par um novo par, da seguinte maneira: multiplica-se tanto o primeiro como segundo número do par por 3. Encontre os pontos correspondentes no quadriculado, e ligue-os, como foi feito nas atividades anteriores.



Quadro 32: Atividade Nº 5 apresentada na dissertação de Ruiz (1985)[28]

Objetivo: Completar e reforçar os aspectos abordados na atividade anterior.

Material: Lápis e Fichas de Trabalho.

Tarefa: O professor entregará aos alunos o conjunto de fichas e proporá as seguintes questões:

1-Pegue as três fichas e observe bem os desenhos que estão nelas: há sempre dois desenhos que estão na mesma ficha. Responda as seguintes perguntas, olhando para eles: em todas as 3 fichas os desenhos são do mesmo tamanho? Em alguma das fichas as duas figuras podem ser consideradas como se olhando num espelho?

2-Aqui estão os pares que codificam os pontos de uma das flores, na Ficha Nº1: (2,6) – (3,7) – (3,8) (5,9) – (4,9) – (3,3) – (3,9) – (3,10) – (4,11) – (5,10) – (6,11) – (5,12) – (4,12) – (3,12) – (3,11).
Procure os pontos correspondentes na outra flor e escreva os seus códigos abaixo dos que já estão escritos. Que modificações se realizam entre os pares de números dos pontos da primeira e da segunda flor?
Faça o mesmo para a ficha do caminhão e da bandeira.
Ligue os pontos correspondentes das figuras em cada ficha e prolongue os segmentos de reta até as bordas da folha de papel.
Em alguma das fichas todos os segmentos de reta unindo pontos correspondentes das duas figuras passam pelo ponto (0,0)?

[27] Retirado de Bray et Clausard (1969 apud RUIZ, 1985, p. 135 -139).
[28] Retirado de MEC/PREMEN/UFRGS/DEF (1976 apud RUIZ, 1985, p. 140).

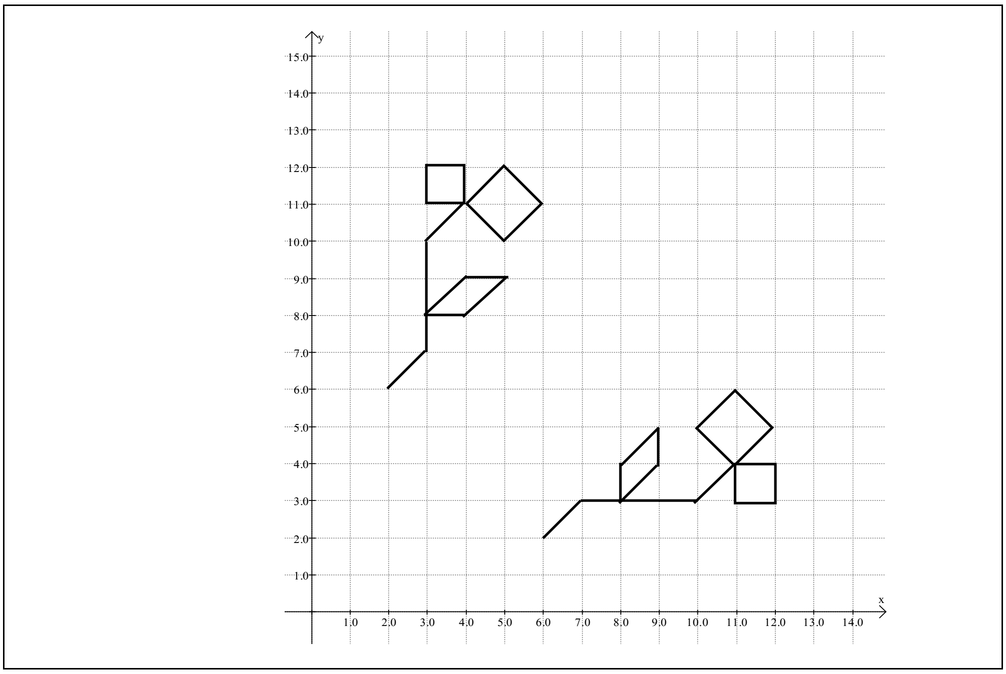


Figura 8: Ficha Nº 1 mencionada na Atividade Nº5 da dissertação de Ruiz (1985)

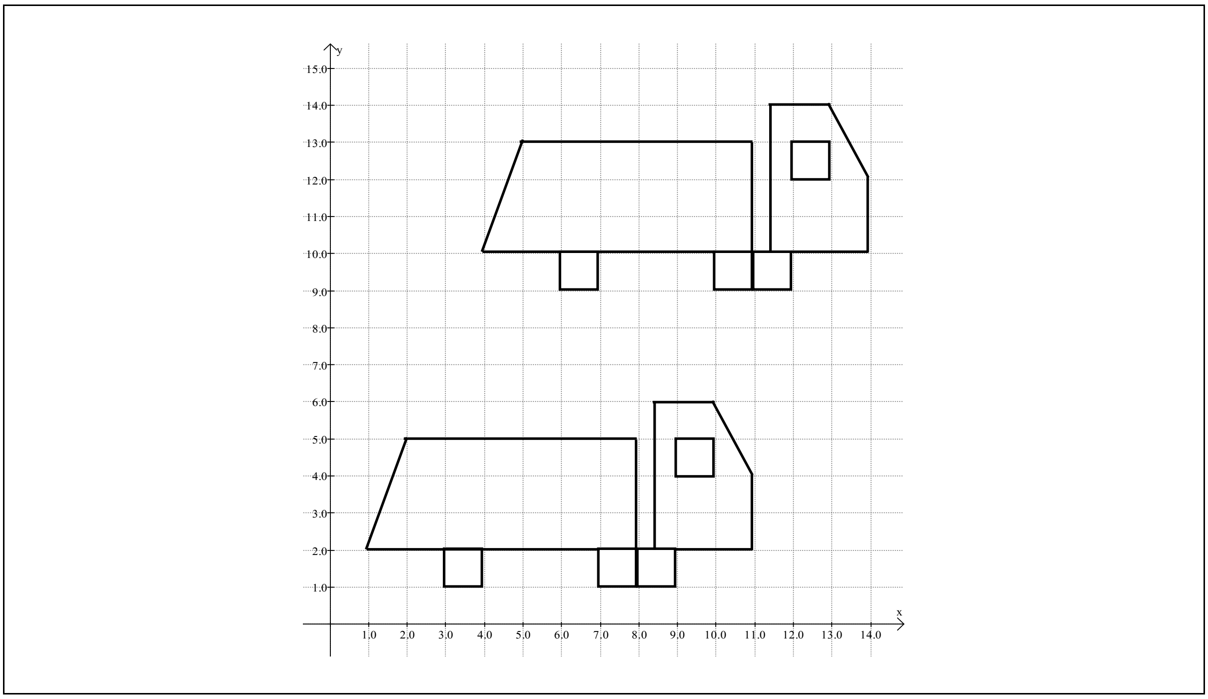


Figura 9: Ficha Nº 2 mencionada na Atividade Nº 5 da dissertação de Ruiz (1985)

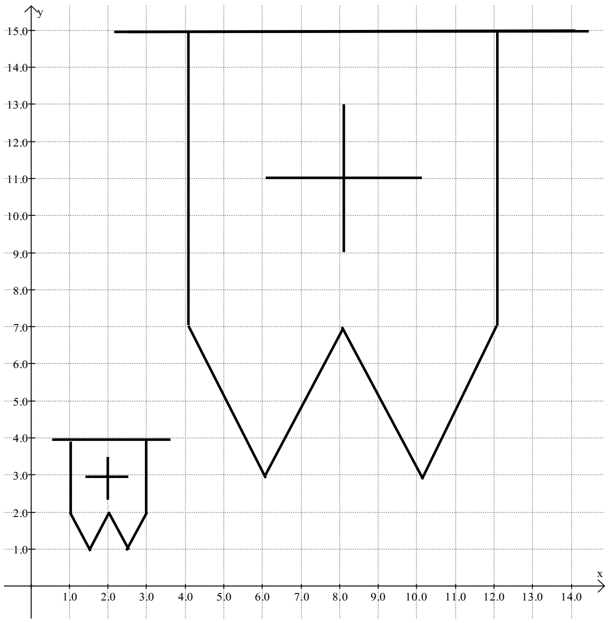


Figura 10: Ficha Nº 3 mencionada na Atividade Nº 5 da dissertação de Ruiz (1985)

Quadro 33: Atividade Nº 6 apresentada na dissertação de Ruiz (1985)[29]

Objetivos:

c) Através do fenômeno: objeto vertical-sombra, deixar bem clara a noção de razão constante entre o comprimento de um bastão e a respectiva sombra, em um dado instante.

d) Verificar que o conjunto de pares ordenados onde o primeiro elemento do par é o comprimento de um bastão e o segundo elemento é a respectiva sombra, constitui uma função linear.

Material: Bastões dos seguintes tamanhos: 2m; 1,80m; 1,50m; 1,20m; 1m e 0,50m, confeccionados com cabo de vassoura.

1ª Tarefa: Cada grupo deve medir a sombra de cada bastão, colocado verticalmente no chão, anotando no seguinte quadro os dados pedidos:

	A	B	C	D	E	F
Comprimento do Bastão						
Comprimento da sombra correspondente						
Quociente entre bastão e sua sombra						

2ª Tarefa: Solicita-se aos alunos que observem bem o quadro e relatem as descobertas que fizeram.

- Os quocientes entre o comprimento de cada bastão e a sombra correspondente são iguais?

3ª Tarefa: Pede-se aos alunos que coloquem os dados do quadro acima num sistema de coordenadas, de modo que os comprimentos dos bastões sejam representados no eixo dos “x” e as sombras no eixo dos “y”. Unam os pontos.

- É verdade que unindo os pontos obtém-se uma reta que passa pela origem?
- Há alguma relação entre esta atividade e as que fizemos anteriormente, nesta unidade?

[29] Retirado de MEC/PREMEN/UFRGS/DEF (1976 apud RUIZ, 1985, p. 144-145).

Quadro 34: Atividade Nº 7 apresentada na dissertação de Ruiz (1985)[30]

Objetivos:

a) Coletando dados, através da medição de objetos com faces circulares, constatar que:
- a relação entre o comprimento da circunferência e a medida do respectivo diâmetro constitui uma relação de razão constante;
- o conjunto dos pares ordenados, onde o primeiro elemento do par é a medida da circunferência e o segundo elemento é a medida do diâmetro, constitui uma função linear .

b) Verificar que na função linear, para dois pares quaisquer: $(x_1; y_1)$ e $(x_2; y_2)$, vale a relação: $x_1.y_2 = x_2.y_1$.

Material: Latas vazias, pilhas, cabos de vassoura, etc., pedaços de barbante, papel quadriculado e régua.

1ª Tarefa: Meçam em todos os objetos o diâmetro e o comprimento da circunferência das faces circulares. Anotem as medidas encontradas no quadro abaixo:

Objetos	M	N	O	P	Q
C = medida da circunferência					
D = diâmetro					
Quociente entre C e D					

Comparem os resultados das divisões.

2ª Tarefa: Representem, utilizando papel quadriculado, num sistema cartesiano, os pontos relativos às medidas feitas, associando a medida da circunferência ao eixo horizontal e a medida do diâmetro ao eixo vertical. Tentem ligar os pontos e verifiquem se ficaram em linha reta.

- Há alguma relação desta atividade com outra que você já fez?

3ª Tarefa: Verifique se é verdade que: $\frac{M_c}{M_d} = \frac{N_c}{N_d}$, onde:

M_c = medida do comprimento da circunferência do objeto M

M_d = medida do diâmetro do objeto M

N_c = medida do comprimento da circunferência do objeto N

N_d = medida do diâmetro do objeto N.

Verifiquem mais dois casos.

Avaliação:

1. Dois alunos estavam fazendo medidas das circunferências e diâmetros de alguns objetos. Um deles encontrou um copo que a circunferência media 6,28 cm e o diâmetro 2 cm. Depois mediu uma lata na qual a medida do comprimento da circunferência era 7,85 cm. Ele esqueceu de anotar a medida do diâmetro. É possível descobrir essa medida, levando em conta as outras três?
2. Um automóvel fez 400 Km em 5 horas. Quanto tempo necessitará, mantendo a mesma velocidade média, para fazer mais 320 km?

[30] Retirado de MEC/PREMEN/UFRGS/DEF (1976 apud RUIZ, 1985, p. 144-145).

Quadro 35: Atividade Nº 8 apresentada na dissertação de Ruiz (1985)[31]

Objetivo: Representar funções, definidas por sentenças matemáticas, num sistema cartesiano, e verificar a relação entre as coordenadas de pontos de uma reta que passa pela origem e apresentar contra-exemplos.

Material: Lápis, régua e papel quadriculado.

1ª Tarefa: Solicita-se aos alunos que tracem dois eixos de referência de um sistema cartesiano ortogonal. Logo após, pede-se que procurem pontos dessa folha para os quais é verdade que y = x. Pede-se que escrevam na folha quadriculada a lista abaixo:

x	y
-2	
-1,5	
-1	
0	
1	
1,5	
2	
3	
5	

2ª Tarefa: Pede-se que tomem um nova folha quadriculada e que assinalem o eixo dos "x" e o eixo dos "y". Do mesmo modo, pede-se que marquem em verde todos os pontos da folha para os quais x + y = 6. Dá-se, como exemplo, que o ponto A corresponde ao par (4; 2) é um ponto verde porque 4 + 2 = 6; sugere-se uma lista como segue, a qual eles devem escrever num canto da folha quadriculada.

x	y
4	
1,5	
1	
0	
-1	
-2	
-2,5	

3ª Tarefa: Pede-se que tomem uma nova folha quadriculada, e que tracem os eixos de um sistema de coordenadas, como antes, e que representem pontos para os quais é verdade que x.y = 18

x	y
1	
2	
3	
4,5	
6	
9	

[31] Retirado de MEC/PREMEN/UFRGS/DEF (1976 apud RUIZ, 1985, p. 148-150).

4ª Tarefa: Os alunos tomam uma nova folha de papel quadriculado e pede-se a eles que representem a função: 2.x = y, isto é, que marquem os pontos para os quais é verdadeira esta relação:

x	y
4	
1,5	
1	
0	
-1	
-2	
-2,5	
-3	

5ª Tarefa: Solicita-se que os alunos representem a função x.x = y, utilizando uma folha de papel quadriculado.

6ª Tarefa: Solicita-se que os alunos representem a função: y = -3x em outra folha de papel quadriculado.

7ª Tarefa: Pede-se aos alunos que espalhem sobre a carteira todos os gráficos que fizeram e respondam as seguintes perguntas:

- Dos conjuntos de pontos que você determinou, quais estão em linha reta?
- Como estão os demais?
- Quais deles passam pelo ponto (0;0)?
- Considere os conjuntos de pares dos números correspondentes a cada ponto nos gráficos; para quais deles é verdade que:

$$x_1.y_2 = x_2.y_1 \quad \text{(R)}$$

Diremos aos alunos que quando se verifica a relação (R), costuma-se dizer que x_1 está para y_1 assim como x_2 está para y_2 e que se escreve assim:

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$$

Quadro 36: Atividade Nº 9 apresentada na dissertação de Ruiz (1985)[32]

Objetivo: Explorando o conceito de função linear, determinar a propriedade aditiva das proporções, expressa por:

$$\frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2} = \frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$$

1ª Tarefa: Encontre 10 valores para y, determinando valores à sua escolha para x, em cada uma das seguintes funções lineares:

y = 1,5x

x	y
1	1,5
1,2	
1,5	
2	
3	
3,5	
4	
4,2	
4,5	
5	

y = 0,2x

x	y
$x_1 =$	$y_1 =$
$x_2 =$	$y_2 =$
$x_3 =$	$y_3 =$
$x_4 =$	$y_4 =$
$x_5 =$	$y_5 =$
$x_6 =$	$y_6 =$
$x_7 =$	$y_7 =$
$x_8 =$	$y_8 =$
$x_9 =$	$y_9 =$
$x_{10} =$	$y_{10} =$

y= -2x

x	y

2ª Tarefa: Observe atentamente as três listas de pares de números e responda, após fazer as operações necessárias:

- É verdade que a soma de quaisquer dois elementos da coluna x pode ser também um elemento desta coluna?
- A soma de dois elementos da coluna dos x corresponde à soma dos dois elementos correspondentes na coluna dos y?

Por exemplo: na função y = 1,5x

1 $\longrightarrow$ 1,5
3 $\longrightarrow$ 4,5
(1+3) $\longrightarrow$ (1,5 + 4,5)

- É verdade que se x é 4, y é 6? Verifique se isto é verdade para mais 5 casos em y = 1,5x.
- Considere a função y = 0,2x e verifique se é verdade que:

$(x_1 + x_2)$. 0,2 = $y_1 + y_2$

$(x_3 + x_4)$.0,2 = $y_3 + y_4$

$(x_2 + x_{10})$.0,2 = $y_2 + y_{10}$

3ª Tarefa: Descobrir o que se pede: numa das 3 funções lineares acima, a soma de 2 elementos na coluna dos "y" é -10,8 e ela corresponde à soma de 2,25 e 3,15 na coluna dos "x". Quais são os "y" para 2,25 e 3,15, considerando a sua soma -10,8?

Avaliação: Como dividir Cr$ 180 entre os netos do Sr. Álvaro, proporcionalmente às suas idades? Um dos netos tem 5 anos, o outro 4 e o outro 6.

[32] Retirado de MEC/PREMEN/UFRGS/DEF (1976 apud RUIZ, 1985, p. 144-145).

Anexo 4

ATIVIDADES DA DISSERTAÇÃO DE PEROTTI (1999)

Quadro 37: 1ª parte da Atividade 1 apresentada na dissertação de Perotti (1999)

Duas grandezas são diretamente proporcionais quando variando uma delas a outra também varia, na mesma razão.

Duas grandezas são inversamente proporcionais quando variando uma delas a outra também varia, na razão inversa.

Nas questões de 1 a 10 você encontrará grandezas direta e inversamente proporcionais e outras que variam mas não são proporcionais.

1) Um automóvel consome 1 litro de gasolina por 8 quilômetros rodados. Quantos litros consome quando roda 160 quilômetros?

Consumo de gasolina e quilômetros rodados são grandezas:

- ☐ Diretamente proporcionais
- ☐ Inversamente proporcionais
- ☐ Não proporcionais

2) Para fazer uma dúzia de quindins uma doceira gasta 8 ovos. Quantos ovos deve gastar para fazer 10 dúzias?

Dúzias de quindins e número de ovos são grandezas:

- ☐ Diretamente proporcionais
- ☐ Inversamente proporcionais
- ☐ Não proporcionais

3) Um pintor leva 40 dias para pintar um prédio. Em quantos dias o prédio poderá ser pintado por 5 pintores que tenham a mesma capacidade de trabalho que o primeiro?

Número de pintores e dias de trabalho são grandezas:

- ☐ Diretamente proporcionais
- ☐ Inversamente proporcionais
- ☐ Não proporcionais

4) Uma criança aos 2 anos tem 80 cm de altura. Quanto mede esta mesma criança aos 8 anos?

Altura e idade são grandezas:

- ☐ Diretamente proporcionais
- ☐ Inversamente proporcionais
- ☐ Não proporcionais

5) Para produzir 120 peças, uma máquina funciona continuamente, durante 60 minutos. Quanto tempo dever funcionar para produzir 600 peças?

Número de peças e tempo de funcionamento são grandezas:

- □ Diretamente proporcionais
- □ Inversamente proporcionais
- □ Não proporcionais

6) O prêmio da Mega Sena está acumulado em R$ 3.000.000,00. Quanto vai receber cada acertador se o número de acertadores é 6?
E se forem 10 acertadores?

Quantia que recebe cada acertador e número de acertadores são grandezas:

- □ Diretamente proporcionais
- □ Inversamente proporcionais
- □ Não proporcionais

7) Um navio faz uma viagem de Santos a Nova Yorque em 8 dias. Em quantos dias 10 navios farão a mesma viagem?

Número de navios e dias de viagem são grandezas:

- □ Diretamente proporcionais
- □ Inversamente proporcionais
- □ Não proporcionais

8) Um navio dispõe de suprimentos para alimentar 40 pessoas durante 10 dias. Com os mesmos suprimentos quantas pessoas poderão fazer uma viagem de 16 dias?

Número de pessoas e número de dias (neste caso) são grandezas:

- □ Diretamente proporcionais
- □ Inversamente proporcionais
- □ Não proporcionais

9) O lado de um quadrado mede 4m. Sua área é $16m^2$. Quanto mede a área de um quadrado cujo lado é 8m?

Lado e área de um quadrado são grandezas:

- □ Diretamente proporcionais
- □ Inversamente proporcionais
- □ Não proporcionais

10) A aresta de um cubo mede 2cm. Seu volume é $3cm^3$. Qual o volume de um cubo que tem aresta medindo 4cm

Aresta e volume de um cubo são grandezas:

- □ Diretamente proporcionais
- □ Inversamente proporcionais
- □ Não proporcionais

Quadro 38: 2ª parte da Atividade 1 apresentada na dissertação de Perotti (1999)

Nas questões de 11 a 18 você encontrará novamente as grandezas direta e inversamente proporcionais das questões anteriores.

Em todas elas aparece uma tabela como a do exemplo abaixo.

20 galinhas consomem diariamente 2kg de ração.

x	Nº de galinhas	20	40	60	80	100	120
y	Kg de ração	2	4	6	8	10	12

1/10 1/10 1/10 1/10 1/10

Nos quadros da parte de baixo da tabela aparecem as taxas de variação. Para dois valores x_1 e x_2 da primeira variável e os respectivos valores da segunda, a taxa de variação K é calculada do seguinte modo:

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

No exemplo acima tem-se:

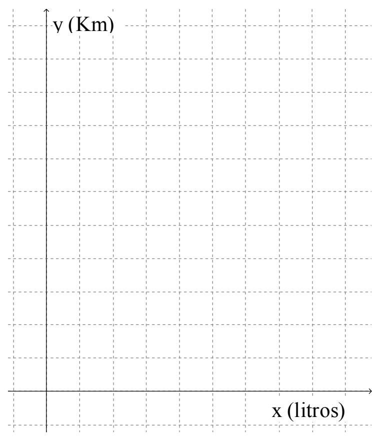
$$k = \frac{4-2}{40-20} = \frac{6-4}{60-40} = \frac{8-6}{80-60} = \frac{10-8}{100-80} = \frac{12-10}{120-100} = \frac{1}{10}$$

Nem sempre as taxas de variação são iguais, como ocorreu neste exemplo.

11) Um automóvel consome 1 litro de gasolina por 8 quilômetros rodados.

a) Complete as lacunas da tabela, incluindo as taxas de variação, que devem ser calculadas para os valores seqüenciais;

x	Litros	1		3	4		6
y	Km	8	16			40	



b) Escreva a equação que você usou para completar a tabela, considerando *litros de gasolina* igual a x e *km rodados* igual a y;

c) Represente graficamente os dados da tabela;

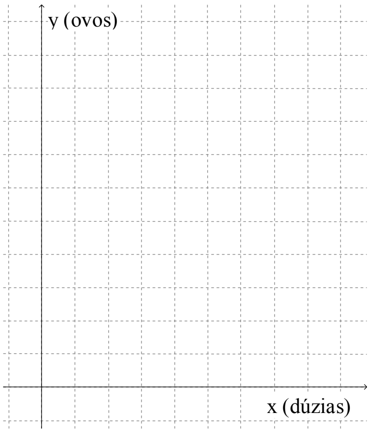
d) No mesmo gráfico trace a reta que passa pelos pontos (0,0) e (6,48);

e) Qual a localização dos pontos representados em relação à reta traçada?

12) Para fazer uma dúzia de quindins uma doceira gasta 10 ovos.

a) Complete as lacunas da tabela, incluindo as taxas de variação, que devem ser calculadas para os valores seqüenciais;

x	Dúzia de doces	1		3		5	6
y	Nº de ovos	10	20		40		



b) Escreva a equação que você usou para completar a tabela, considerando *dúzias de doces* igual a x e *número de ovos* igual a y;

c) Represente graficamente os dados da tabela;

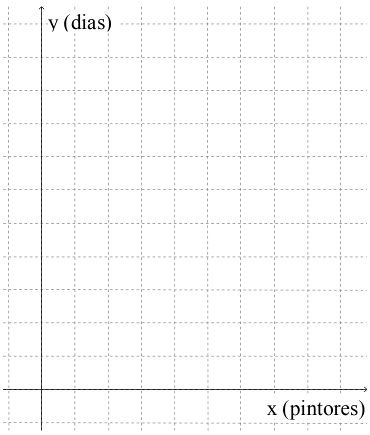
d) No mesmo gráfico trace a reta que passa pelos pontos (0,0) e (6,60);

e) Qual a localização dos pontos representados em relação à reta traçada?

13) Um pintor leva 40 dias para pintar uma casa.

a) Complete as lacunas da tabela, incluindo as taxas de variação, que devem ser calculadas para os valores seqüenciais;

x	Nº de pintores	1	2		8	10	
y	Dias	40		10			2



b) Escreva a equação que você usou para completar a tabela, considerando *número de pintores* igual a x e *dias para pintar* igual a y;

c) Represente graficamente os dados da tabela;

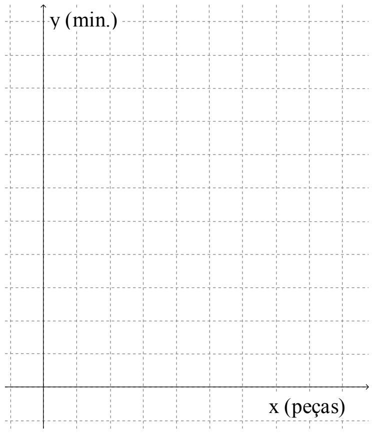
d) No mesmo gráfico trace a reta que passa pelos pontos (1,40) e (20,2);

e) Qual a localização dos pontos representados em relação à reta traçada?

14) Para produzir 120 peças, uma máquina funciona continuamente durante 60 minutos.

a) Complete as lacunas da tabela, incluindo as taxas de variação, que devem ser calculadas para os valores seqüenciais;

x	Nº de peças	40		120	8	240	
y	Tempo (min.)		40	60	100		150



b) Escreva a equação que você usou para completar a tabela, considerando *número de peças* igual a x e *tempo para produzi-las* igual a y;

c) Represente graficamente os dados da tabela;

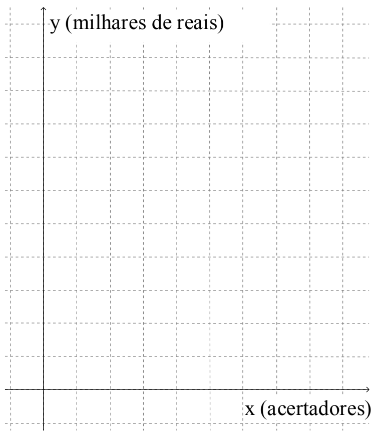
d) No mesmo gráfico trace a reta que passa pelos pontos (0,0) e (300,150);

e) Qual a localização dos pontos representados em relação à reta traçada?

15) O prêmio da Mega Sena está acumulado em R$ 3.000.000,00. Quanto vai receber cada acertador se o número de acertadores é 6?

a) Complete as lacunas da tabela, incluindo as taxas de variação, que devem ser calculadas para os valores seqüenciais;

x	Nº de acertadores	1	2		4		6
y	Valor do prêmio (em milhares)	3000		1000		600	



b) Escreva a equação que você usou para completar a tabela, considerando *número de acertadores* igual a x e *valor do prêmio* igual a y;

c) Represente graficamente os dados da tabela;

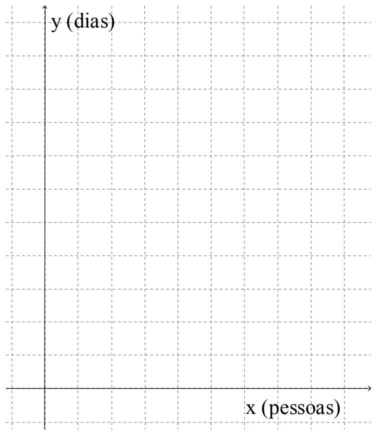
d) No mesmo gráfico trace a reta que passa pelos pontos (6,500) e (1,3000);

e) Qual a localização dos pontos representados em relação à reta traçada?

16) Um navio dispõe de suprimentos para alimentar 40 pessoas durante 10 dias.

a) Complete as lacunas da tabela, incluindo as taxas de variação, que devem ser calculadas para os valores seqüenciais;

x	Nº de pessoas	10		40		80	100
y	Dias de viagem		20	10	8		



b) Escreva a equação que você usou para completar a tabela, considerando *número de pessoas* igual a x e *dias de viagem* igual a y;

c) Represente graficamente os dados da tabela;

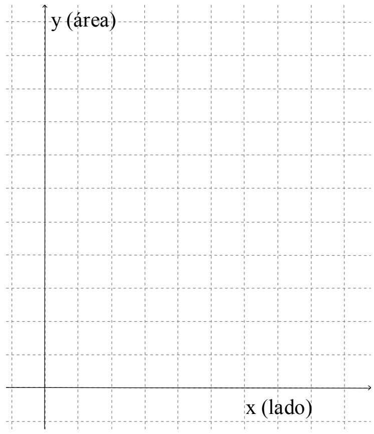
d) No mesmo gráfico trace a reta que passa pelos pontos (10,40) e (100,4);

e) Qual a localização dos pontos representados em relação à reta traçada?

17) O lado de um quadrado mede 4m. Sua área é 16 m².

a) Complete as lacunas da tabela, incluindo as taxas de variação, que devem ser calculadas para os valores seqüenciais;

x	Lado		4		6		8
y	Área	4	16	25		49	



b) Escreva a equação que você usou para completar a tabela, considerando *o lado do quadrado* igual a x e *a sua área* igual a y;

c) Represente graficamente os dados da tabela;

d) No mesmo gráfico trace a reta que passa pelos pontos (0,0) e (8,64);

e) Qual a localização dos pontos representados em relação à reta traçada?

18) A aresta de um cubo mede 2cm. Seu volume é igual a 8cm³.

a) Complete as lacunas da tabela, incluindo as taxas de variação, que devem ser calculadas para os valores seqüenciais;

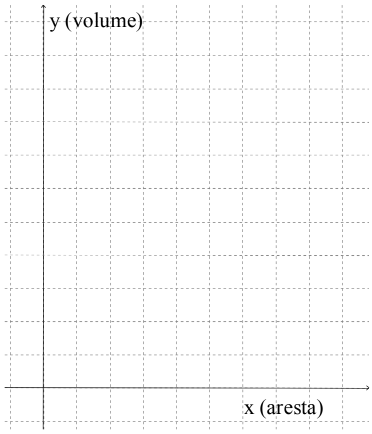
x	Aresta		2		3		4
y	Volume	1		15,6		42,9	

b) Escreva a equação que você usou para completar a tabela, considerando *a aresta do cubo* igual a x e *o seu volume* igual a y;

c) Represente graficamente os dados da tabela;

d) No mesmo gráfico trace a reta que passa pelos pontos (0,0) e (4,64);

e) Qual a localização dos pontos representados em relação à reta traçada?



Faça um relatório comentando esta Atividade. Escreva um texto corrido mas procure abordar os seguintes itens:

- Diga se você teve dificuldades;
- Se a resposta foi positiva, aponte estas dificuldades e relate como conseguiu superá-las;
- Dê exemplo de duas grandezas diretamente proporcionais;
- Dê exemplo de duas grandezas inversamente proporcionais;
- Em que tipos de grandezas o gráfico é uma reta;
- Cite algumas características dos gráficos que você traçou.

Quadro 39: Atividade 2 apresentada na dissertação de Perotti (1999)

Uma pequena fábrica de chocolates obtém a sua receita exclusivamente da venda dos chocolates que fabrica.

Os chocolates são todos do mesmo tipo variando apenas o tamanho das barras e conseqüentemente o preço.

As questões que aparecem nas atividades 2 e 3, dizem respeito ao planejamento financeiro desta fábrica.

1) a) Na tabela abaixo x representa o número de chocolates vendidos e y a receita obtida com a venda. Complete a tabela sabendo que cada chocolate é vendido a R$ 2,00;

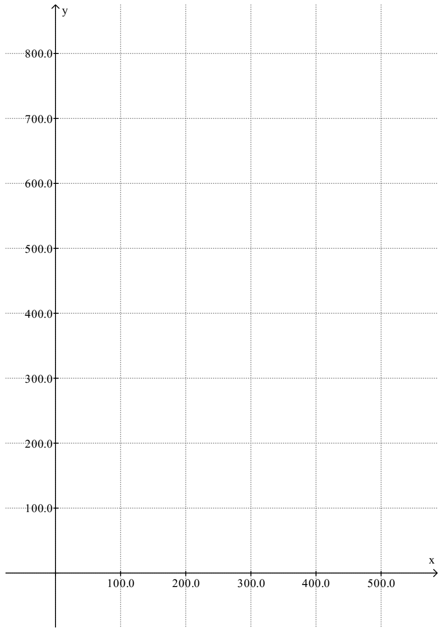
x	100	150	200	250	300
y	200				

b) Escreva a equação que você usou para completar a tabela, considerando o número de chocolates igual a x e a receita igual a y;

c) Represente os dados da tabela no gráfico ao lado;

d) No mesmo gráfico trace a reta r_1 que passa pelos pontos (0,0) e (300,600);

e) Qual a localização dos pontos representados em relação à reta traçada?



2) a) Na tabela abaixo x representa o número de chocolates vendidos e y a receita obtida com a venda. Complete a tabela sabendo que cada chocolate é vendido a R$ 1,00;

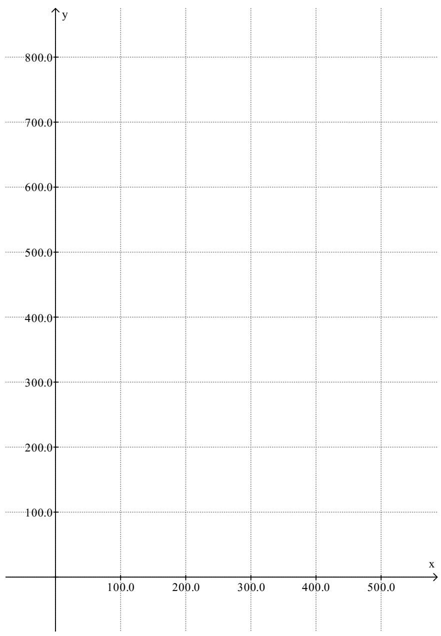
x	100	150	200	250	300
y	100				

b) Escreva a equação que você usou para completar a tabela, considerando o número de chocolates igual a x e a receita igual a y;

c) Represente os dados da tabela no gráfico ao lado;

d) No mesmo gráfico trace a reta r_2 que passa pelos pontos (0,0) e (300,300);

e) Qual a localização dos pontos representados em relação à reta traçada?



3) a) Na tabela abaixo x representa o número de chocolates vendidos e y a receita obtida com a venda. Complete a tabela sabendo que cada chocolate é vendido a R$ 2,50;

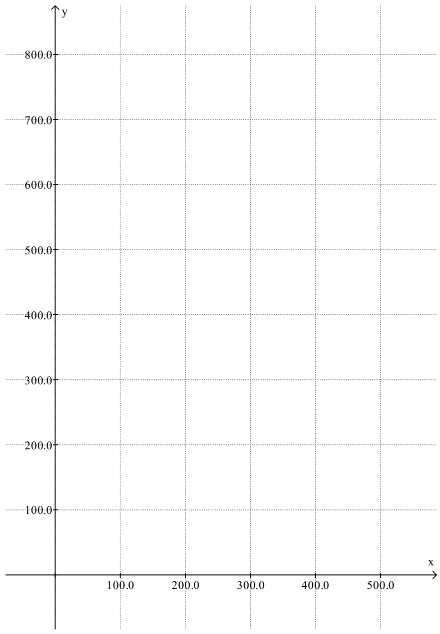
x	100	150	200	250	300
y	250				

b) Escreva a equação que você usou para completar a tabela, considerando o número de chocolates igual a x e a receita igual a y;

c) Represente os dados da tabela no gráfico ao lado;

d) No mesmo gráfico trace a reta r_3 que passa pelos pontos (0,0) e (300,750);

e) Qual a localização dos pontos representados em relação à reta traçada?



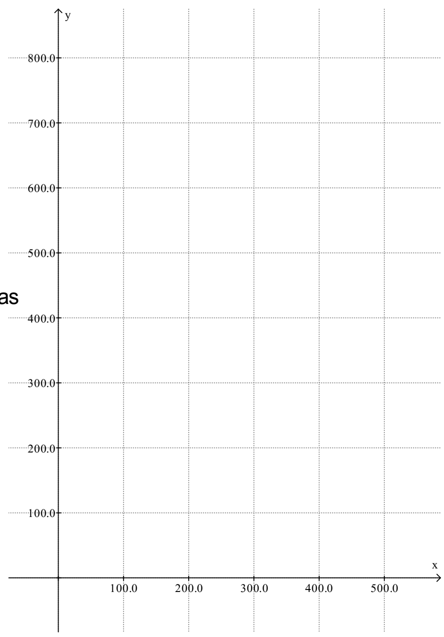
4) a) No gráfico ao lado represente as retas r_1 , r_2 e r_3

b) Escreva as equações das três retas:

r_1:　　　　r_2:　　　　r_3:

c) Imagine uma reta r_0 para o preço R$ 0,50 e outra r_4 para o preço R$ 3,00. Esboce os gráficos destas duas retas.

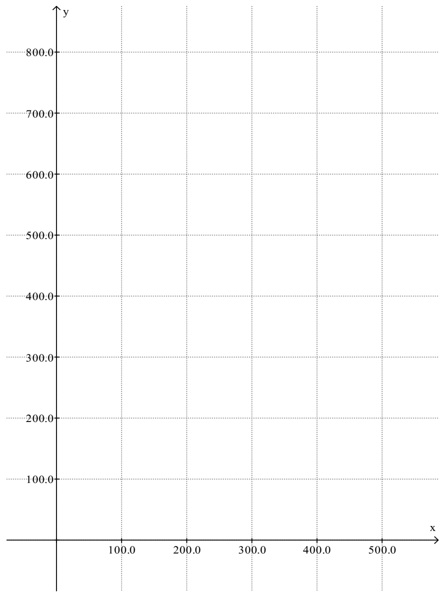
d) Quando o preço aumenta, qual a variação no gráfico?



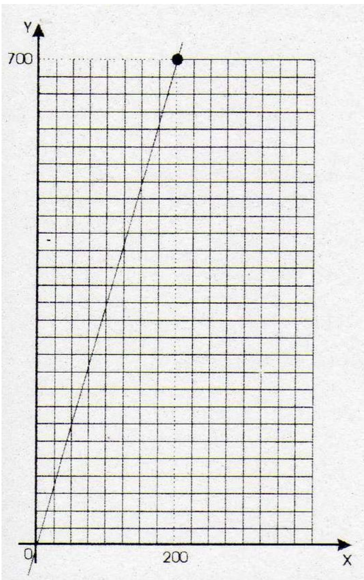
5) a) Sendo **x** o número de chocolates vendidos, **y** a receita obtida e **a** o preço de cada chocolate, escreva a equação que representa esta situação.

b) Como varia o gráfico da equação acima, quando os preços mudam (variações no valor de a);

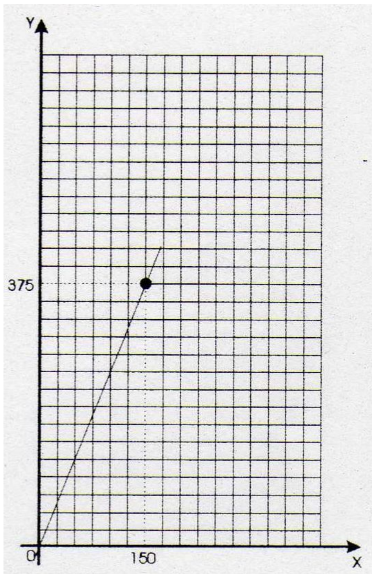
c) Se $a_1 > a_2$, como ficam os gráficos relativos a esses preços? Faça um esquema ao lado.



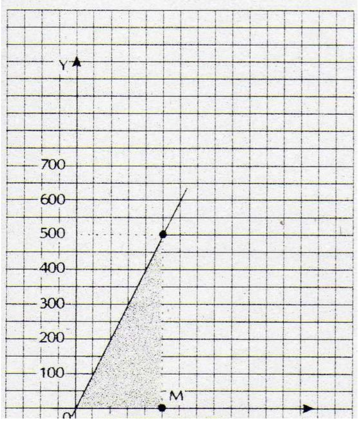
6) No gráfico abaixo, no eixo horizontal aparecem os números de chocolates vendidos e no eixo vertical a receita correspondente. Determine o preço de cada chocolate.



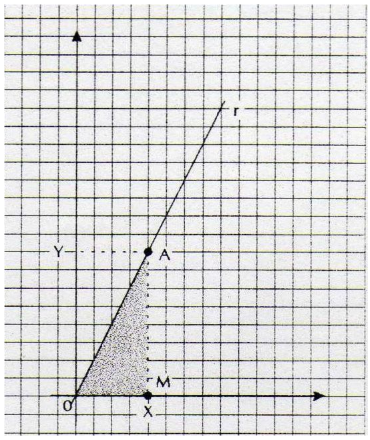
7) No gráfico abaixo, no eixo horizontal aparecem os números de chocolates vendidos e no eixo vertical a receita correspondente. Chame de a este preço.



8) No gráfico abaixo, no eixo horizontal aparecem os números de chocolates vendidos e no eixo vertical a receita correspondente. Determine o preço de cada chocolate.



9) No gráfico abaixo, no eixo horizontal aparecem os números de chocolates vendidos e no eixo vertical a receita correspondente. Chame de a este preço.

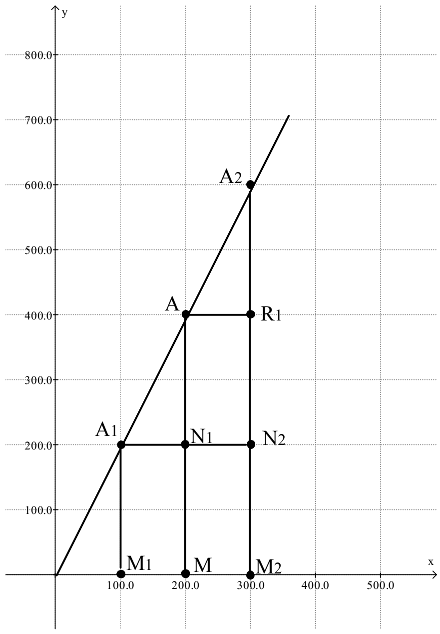


10) A constante **a** que você determinou na questão anterior, chama-se "Coeficiente Angular" ou "Inclinação" da reta r. Existem muitas maneiras diferentes de determinar o Coeficiente Angular.

a. Na figura ao lado destaque todos os triângulos Semelhantes ao $\triangle OAM$.

b. Cada um dos triângulos permite calcular o Coeficiente Angular do mesmo modo que no $\triangle OAM$. Faça esta determinação.

c. Compare o Coeficiente Angular com a Taxa de Variação da Atividade 1



Quadro 40: Atividade 3 apresentada na dissertação de Perotti (1999)

A fábrica de chocolate a que nos referimos na Atividade 2, é na realidade uma micro empresa criada por uma dona de casa (Dona Maroca) com o objetivo de complementar o seu orçamento doméstico.

Para fazer as barras de chocolate, Dona Maroca compra pacotes de chocolate em pó e também tem alguns gastos fixos.

A atividade 3 pretende estudar os custos da micro empresa de Dona Maroca.

1

a) Na tabela abaixo x representa o número de pacotes de chocolate em pó e y o custo total da empresa.

Complete a tabela sabendo que cada pacote custa R$ 1,00 e existe um custo fixo de R$ 200,00.

x	100	125	150	175	200
y	300				

b) Escreva a equação que você usou para completar a tabela.

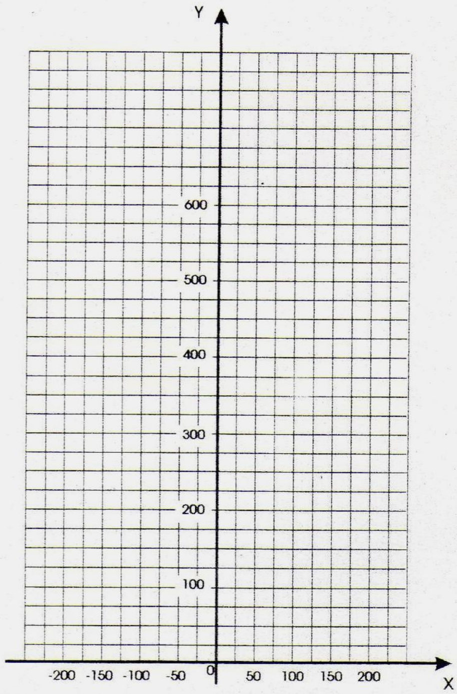
c) Represente os dados da tabela no gráfico ao lado.

d) A partir do eixo 0x construa, no mesmo gráfico, uma reta que passe pelos pontos (0, 200) e (200, 400).

e) Qual a localização dos pontos representados em relação à reta traçada?

f) Esboce o gráfico da situação descrita nesta questão mas com custo fixo igual a zero. Se achar necessário faça nova tabela.

g) Comente as diferenças e semelhanças dos dois gráficos.



2

a) Na tabela abaixo x, representa o número de pacotes de chocolate em pó e y o custo total da empresa.

Complete a tabela sabendo que cada pacote custa R$ 1,50 e existe um custo fixo de R$ 250,00.

x	100	150	200
y	400		

b) Escreva a equação que você usou para completar a tabela.

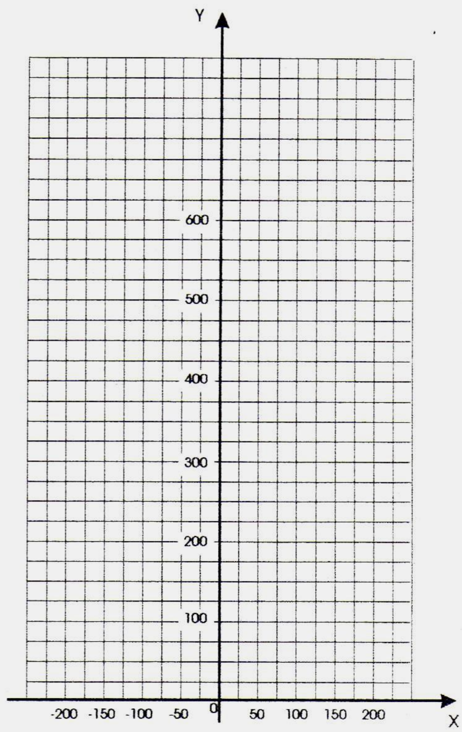
c) Represente os dados da tabela no gráfico ao lado.

d) A partir do eixo 0x construa, no mesmo gráfico, uma reta que passe pelos pontos (0, 250) e (200, 550).

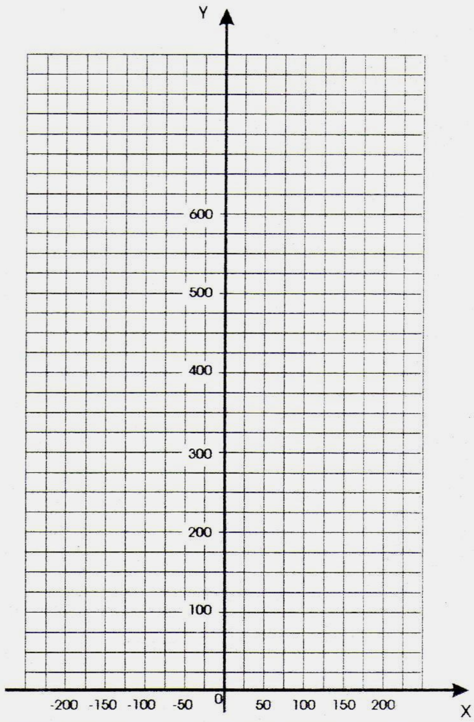
e) Qual a localização dos pontos representados em relação à reta traçada?

f) Esboce o gráfico da situação descrita nesta questão mas com custo fixo igual a zero. Se achar necessário faça nova tabela.

g) Comente as diferenças e semelhanças dos dois gráficos.



3



a) No gráfico ao lado represente as retas obtidas nas questões 1 e 2. É conveniente indicá-las por r_1, r_2, r_3, e r_4.

b) Ao lado de cada reta escreva a equação que a representa.

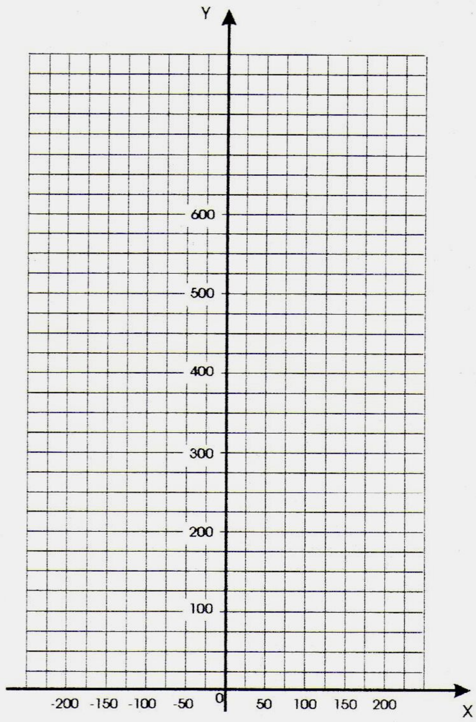
c) O que muda na reta quando varia o custo do pacote de chocolate?

d) O que muda na reta quando varia o custo fixo da empresa?

e) Quais são os coeficientes angulares destas 4 retas?

f) Comente as semelhanças e diferenças desses coeficientes angulares.

4



a) Na tabela abaixo aparecem na 1ª coluna o número de pacotes comprados.

Na 2ª coluna o custo variável que é o produto do custo de cada pacote pelo número de pacotes comprados.

Na 3ª coluna aparece o custo fixo (que é o mesmo, qualquer que seja o número de pacotes comprados) e na 4ª coluna aparecem os custos totais.

Complete a tabela sabendo que o custo unitário do pacote é R$ 1,00 e o custo fixo da empresa é de R$ 200,00.

Nº DE PACOTES x	CUSTO VARIÁVEL y_1	CUSTO FIXO y_2	CUSTO TOTAL y_3
100			
150			
200			

b) No gráfico ao lado represente as retas que contém os pontos referentes:
- ao custo variável
- ao custo fixo
- ao custo total

c) Faça comentários sobre as posições das três retas

5

a) Na tabela abaixo aparecem na 1ª coluna o número de pacotes comprados.

Na 2ª coluna o custo variável que é o produto do custo de cada pacote pelo número de pacotes comprados.

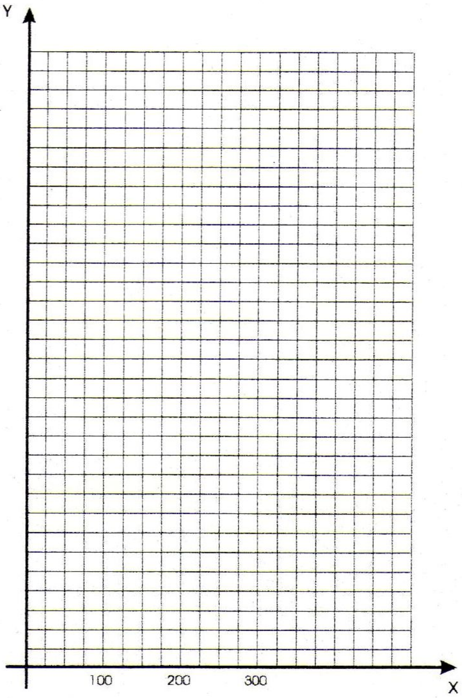
Na 3ª coluna aparece o custo fixo (que é o mesmo, qualquer que seja o número de pacotes comprados) e na 4ª coluna aparecem os custos totais.

Complete a tabela sabendo que o custo unitário do pacote é R$ 1,50 e o custo fixo da empresa é de R$ 250,00.

Nº DE PACOTES x	CUSTO VARIÁVEL y_1	CUSTO FIXO y_2	CUSTO TOTAL y_3
100			
150			
200			

b) No gráfico ao lado represente as retas que contém os pontos referentes:
- ao custo variável
- ao custo fixo
- ao custo total

c) Faça comentários sobre as posições das três retas

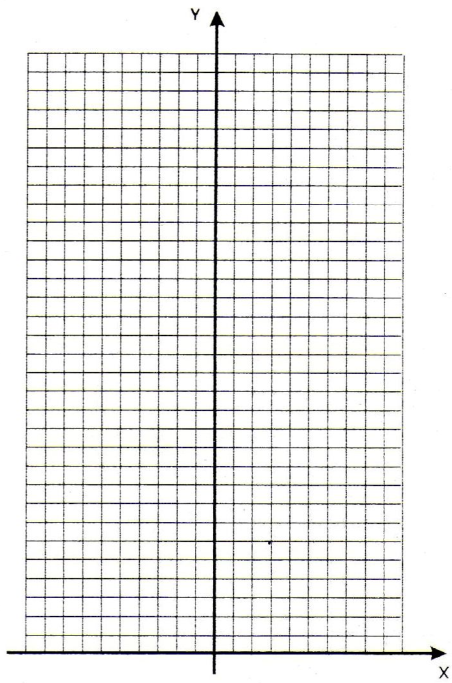


6

a) Represente no gráfico ao lado os custos totais para os casos analisados nas questões 4 e 5.
- custo unitário R$ 1,00 e custo fixo R$ 200,00
- custo unitário R$ 1,50 e custo fixo R$ 250,00

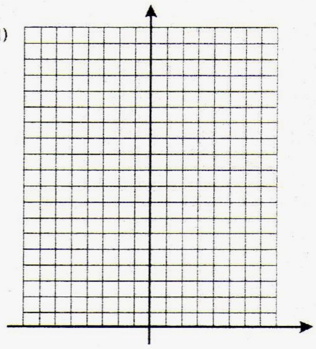
b) Ao lado de cada um dos gráficos escreva a equação que o representa.

c) Escreva a equação do custo total na sua forma geral. Use:
- y para custo total
- x para o nº de chocolates
- a para o custo unitário do chocolate
- b para o custo fixo da empresa



7

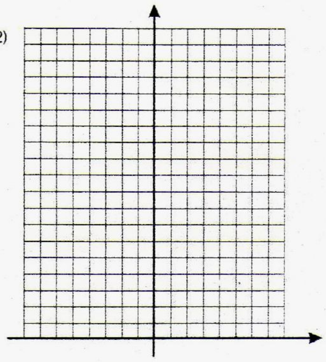
(fig. 1)



a) Às variações no custo unitário (mudanças no valor de a) que tipos de variações determinam no gráfico da equação?

b) Às variações no custo fixo (mudanças no valor de b) que tipos de variações determinam no gráfico da equação?

(fig. 2)

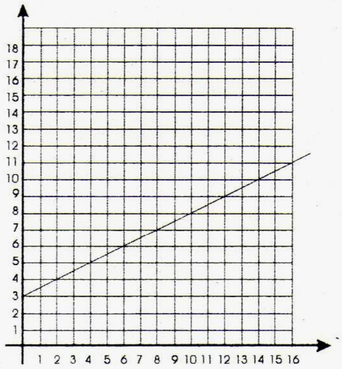


c) Se $a_1 > a_2$ (mantendo b fixo) como ficam os gráficos relativos a estes custos. Faça um esquema e depois comente. (fig. 1)

d) Se $b_1 > b_2$ (mantendo a fixo) como ficam os gráficos relativos a estes custos. Faça um esquema e depois comente. (fig. 2)

8

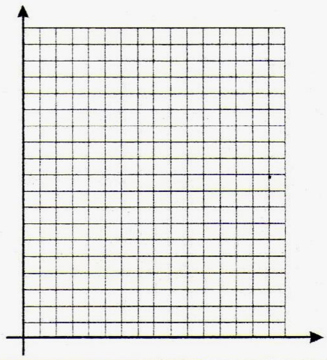
(fig. 1)



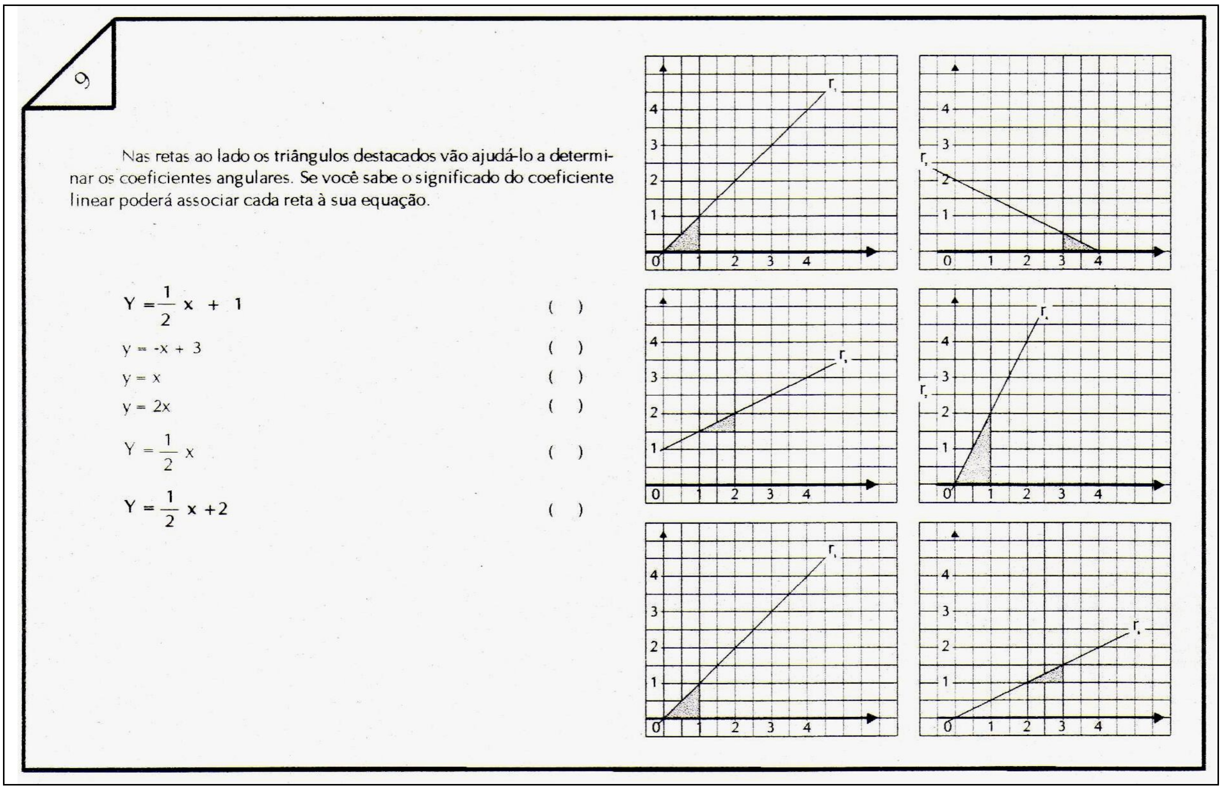
a) A constante b na equação que você determinou na questão 6, chama-se (coeficiente linear da reta), justifique este nome.

b) Escreva a equação da reta do gráfico ao lado. (fig. 1)

(fig. 2)



c) Faça um esboço do gráfico da reta $y = 2x + 3$ (fig. 2)



9

Nas retas ao lado os triângulos destacados vão ajudá-lo a determinar os coeficientes angulares. Se você sabe o significado do coeficiente linear poderá associar cada reta à sua equação.

$Y = \frac{1}{2}x + 1$ ( )

$y = -x + 3$ ( )

$y = x$ ( )

$y = 2x$ ( )

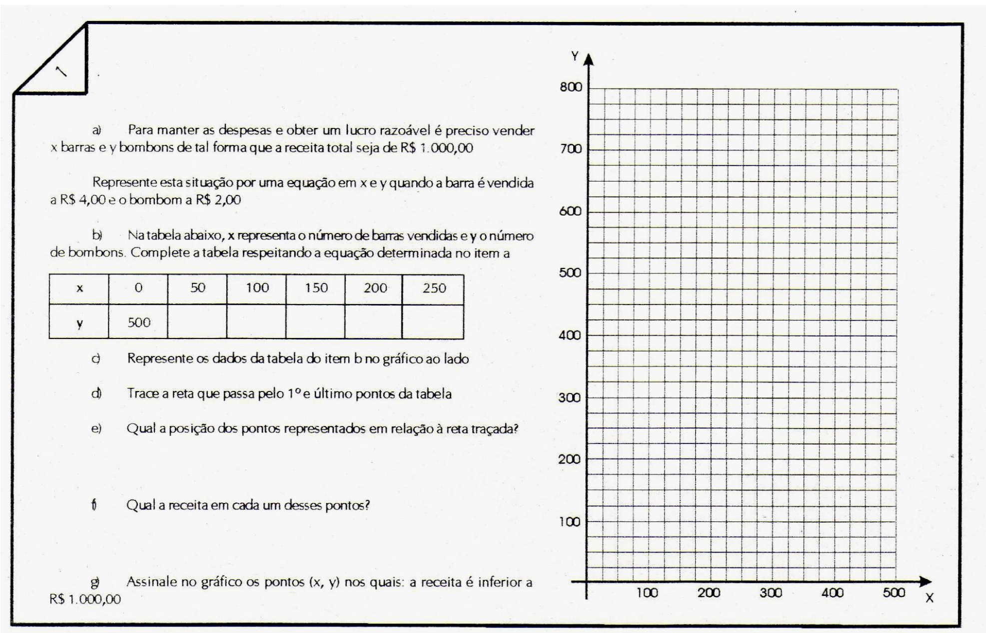
$Y = \frac{1}{2}x$ ( )

$Y = \frac{1}{2}x + 2$ ( )

Quadro 41: Atividade 4 apresentada na dissertação de Perotti (1999)

Num determinado momento a proprietária da fábrica percebeu que diversificando e sofisticando a sua produção poderia vender mais. Passou então a produzir, além da barra tradicional de chocolate, um delicioso bombom recheado com licor de cereja.

Foi preciso então fazer os cálculos que permitissem determinar os números convenientes de barras e bombons que deveriam ser fabricados.



1

a) Para manter as despesas e obter um lucro razoável é preciso vender x barras e y bombons de tal forma que a receita total seja de R$ 1.000,00

Represente esta situação por uma equação em x e y quando a barra é vendida a R$ 4,00 e o bombom a R$ 2,00

b) Na tabela abaixo, x representa o número de barras vendidas e y o número de bombons. Complete a tabela respeitando a equação determinada no item a

x	0	50	100	150	200	250
y	500					

c) Represente os dados da tabela do item b no gráfico ao lado

d) Trace a reta que passa pelo 1º e último pontos da tabela

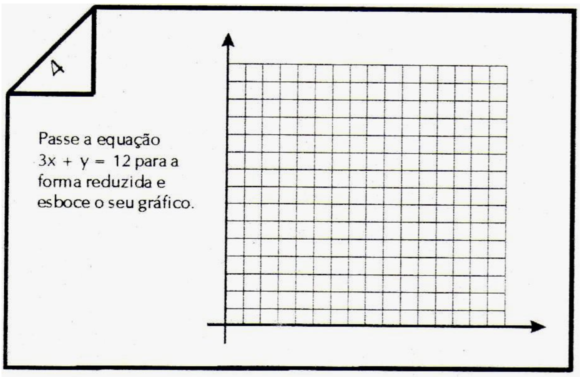
e) Qual a posição dos pontos representados em relação à reta traçada?

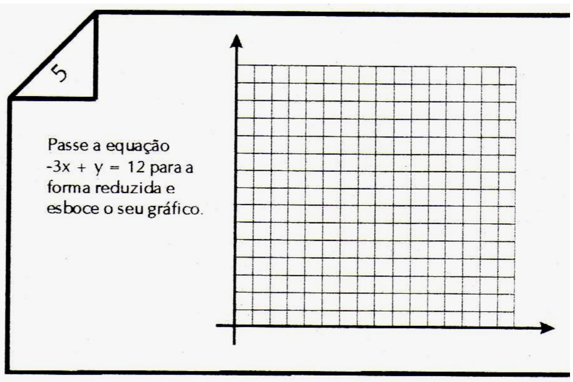
f) Qual a receita em cada um desses pontos?

g) Assinale no gráfico os pontos (x, y) nos quais: a receita é inferior a R$ 1.000,00

2)
a) Qual a principal diferença entre o gráfico da questão anterior os que você viu nas outras atividades?
b) Passe a equação para a forma y = mx + n e dê os valores do coeficiente angular e do coeficiente linear.

3) Qual a novidade em relação ao coeficiente angular? A que você associa isto?





6) Generalize a equação que você encontrou na questão 1. Imagine que são vendidas **x** barras, cada uma por **a** reais e **y** bombons, cada um por **b** reais e que a fábrica precisa de **t** reais para sobreviver.
7) A equação que você encontrou pode ainda ser modificada de modo que o 2º membro fique igual a 0. Fazendo esta modificação e considerando – t = c você vai encontrar uma outra equação que representa a reta. É a chamada i equação geral j. Escreva a equação geral.
8) É sempre possível passar da equação geral para a equação reduzida e vice-versa. Escreva a equação da questão 7 na forma reduzida. Veja se é necessária alguma restrição. Se for comente.
9) Passe agora a equação y = mx +n para a forma geral.
10) Escreva a equação y = 3x + 4 na forma geral.
11) Faça o mesmo com a equação y = -2x + 3
12) Idem para $y = \frac{1}{2}x + \frac{2}{3}$.
13) Idem para y = 2x – 3.

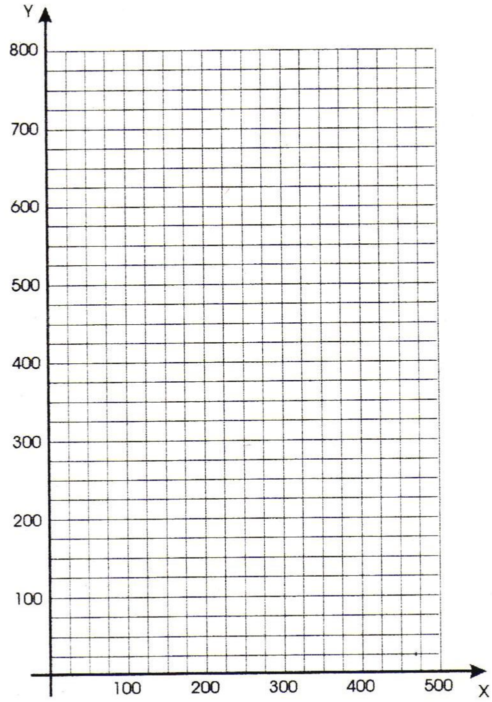
Quadro 42: Atividade 5 apresentada na dissertação de Perotti (1999)

1

a) Escreva e represente graficamente uma nova equação para o caso em que a barra é vendida a R$ 4,00, o bombom a R$ 2,00 e a receita total é igual a R$ 1.200,00. Como se trata de uma reta, dois pontos são suficientes para a representação.

b) Na equação acima divida ambos os membros por 1.200

c) Identifique os denominadores da expressão acima com o gráfico do item a.

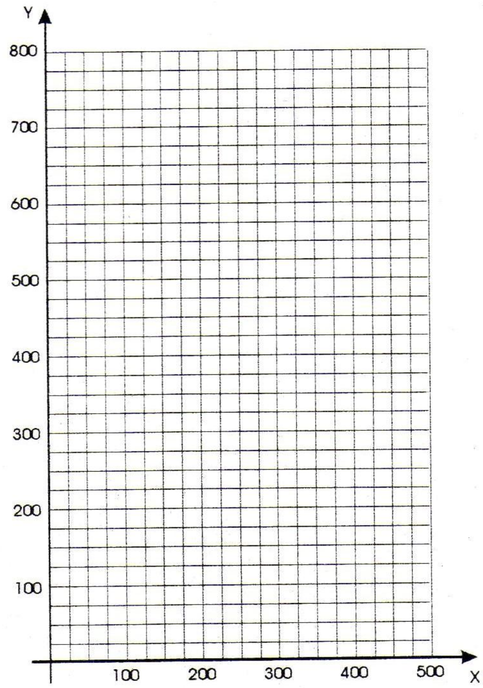


2

a) Escreva e represente graficamente uma nova equação para o caso em que a barra é vendida a R$ 3,00, o bombom também a R$ 3,00 e a receita total continua sendo R$ 1.200,00.

b) Na equação acima divida ambos os membros por 1.200

c) Identifique os denominadores da expressão acima com o gráfico do item a.

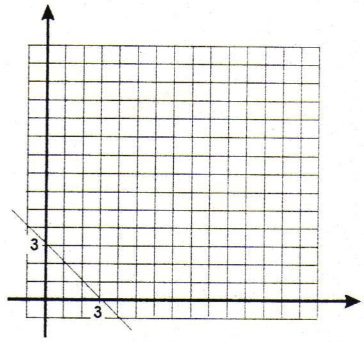


3

A equação que você escreveu, para a reta, nas questões 2 e 3 chama-se i Equação Segmentáriaj. Justifique este nome.

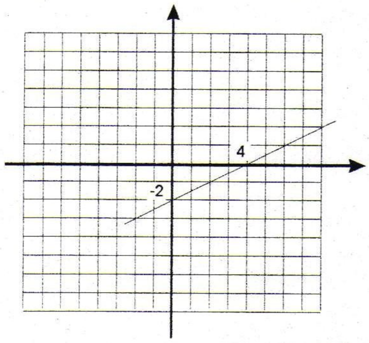
4

Escreva a equação segmentária da reta do gráfico ao lado



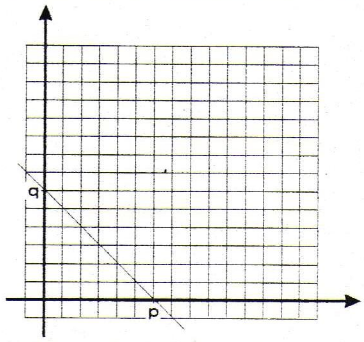
5

Escreva a equação segmentária da reta do gráfico ao lado



6

Generalize a equação para a situação apresentada no gráfico ao lado



7

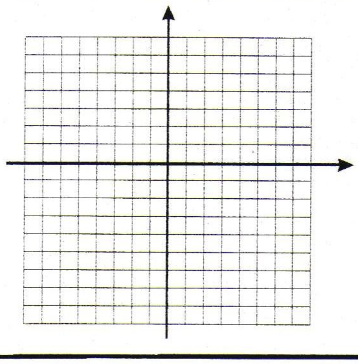
Determine a equação segmentária da reta $3x + 4y - 12 = 0$

8

Determine a equação segmentária da reta $5x - 4y + 20 = 0$

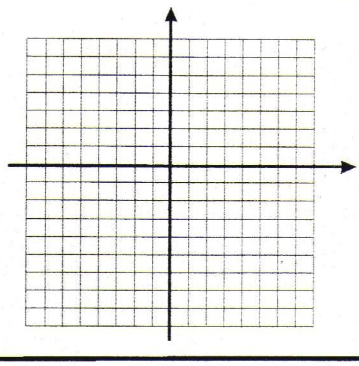
9

Use a forma segmentária para representar graficamente a equação $3x + 4y - 12 = 0$



10

Use a forma segmentária para representar graficamente a equação $x - y - 4 = 0$



Quadro 43: Atividade 6 apresentada na dissertação de Perotti (1999)

1

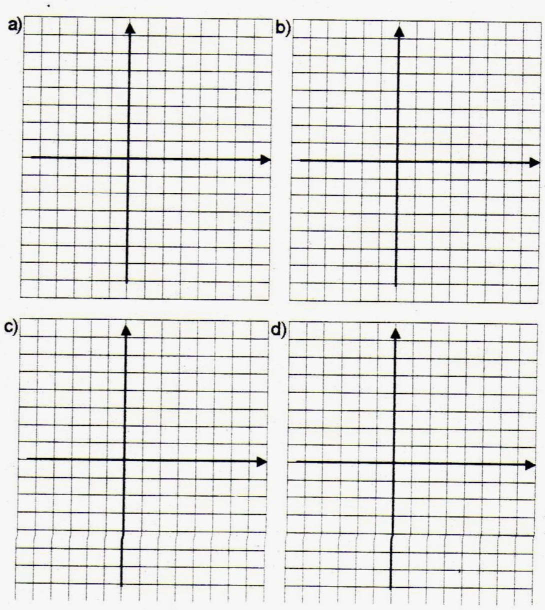
No gráfico ao lado represente as retas:

a) $y = 2x + 5$

b) $y = \frac{1}{2}x + 4$

c) $y = -2x + 5$

d) $y = -x - 4$



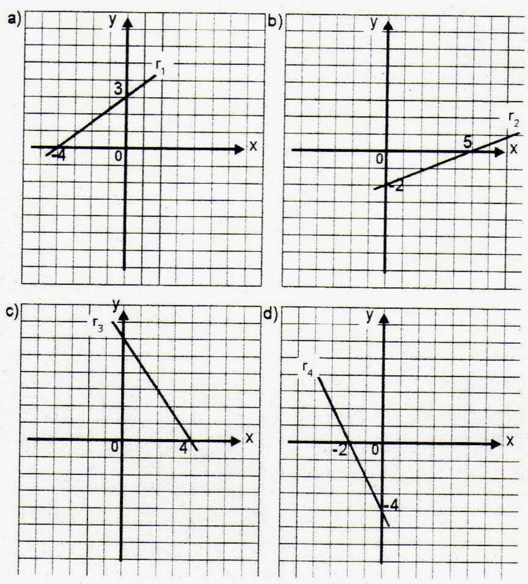
2

a) Escreva inicialmente a equação segmentária da reta r_1 do gráfico ao lado, em seguida passe para a forma geral

b) Faça o mesmo para a reta r_2

c) Idem para r_3

d) Idem para r_4



3

A cada uma das situações relacionadas abaixo corresponde uma reta no gráfico ao lado.

Estabeleça a correspondência

a) Equação do tipo $y = ax$ com $a > 0$ ( )

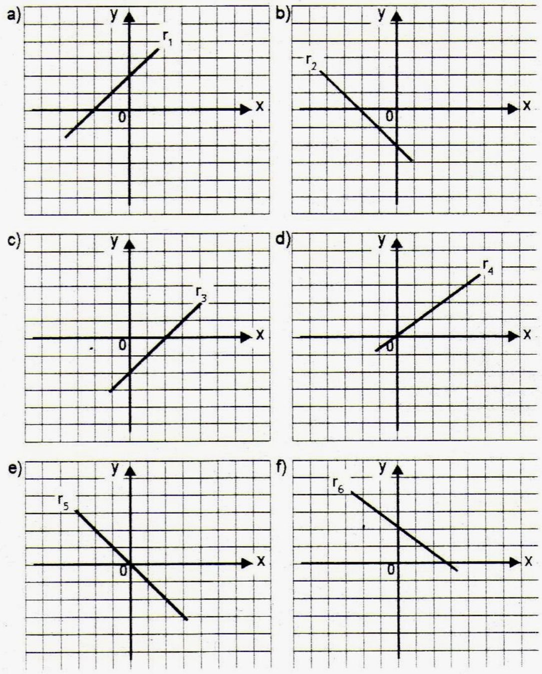
b) Equação do tipo $y = ax$ com $a < 0$ ( )

c) Equação do tipo $y = ax + b$ com $a > 0$ e $b > 0$ ( )

d) Equação do tipo $y = ax + b$ com $a > 0$ e $b < 0$ ( )

e) Equação do tipo $y = ax + b$ com $a < 0$ e $b > 0$ ( )

f) Equação do tipo $y = ax + b$ com $a < 0$ e $b < 0$ ( )



4

a) Quais as coordenadas dos pontos?

A = (,) ; B = (,) ; 0 = (,)

C = (,) ; D = (,) ; E = (,)

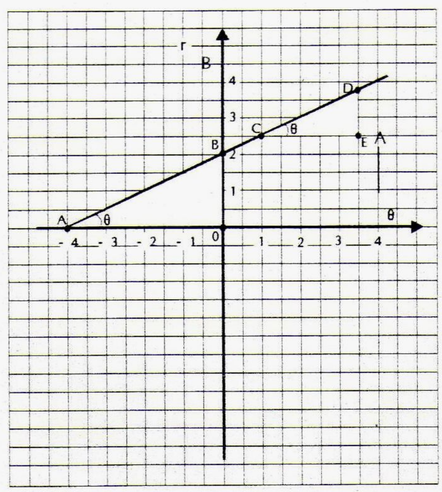
b) Adotando que ambos os eixos estão graduados em centímetros, dê as medidas dos seguintes segmentos:

$\overline{0A}$ = ; $\overline{B0}$ = $\overline{EC}$ = $\overline{DE}$ =

c) Calcule o quociente $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ em ambos os triângulos

Δ 0AB	Δ ECD
$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} =$	$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} =$

d) Qual o coeficiente angular da reta r?

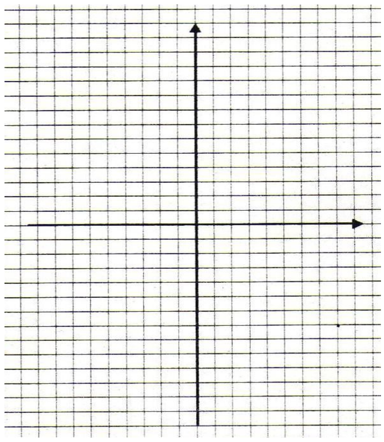


5) Represente agora as retas y = 3x + 2; y = 3x e y = 3x – 3

a) O que elas têm em comum? A que se deve isto?

b) O que elas têm de diferente? A que se deve isto?

c) Generalize a situação para as retas y = ax +b e y = cx +d

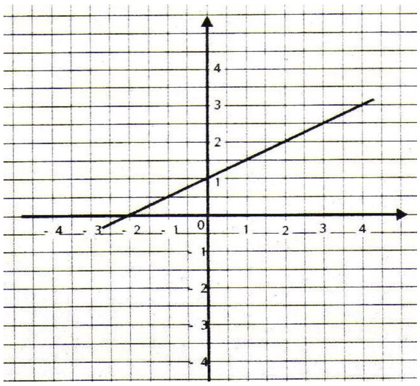


6)

a) Determine o coeficiente angular da reta representada no gráfico ao lado.

b) Determine o coeficiente linear desta mesma reta

c) Escreva a equação reduzida da reta em questão.



7) Escrever a reta y = 3x + 2 na forma ax + by + c = 0

8) escrever a reta $\frac{x}{4}+\frac{y}{2}=1$ na forma y = ax + b

9) Escrever a reta 2x + 3y + 4 = 0 na forma $\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1$

10) Escrever a reta $\frac{x}{-2}+\frac{y}{3}=1$ na forma ax + by + c = 0