

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO

PUC/SP

Melanie Lerner Grinkraut

Formação de professores envolvendo a Prova Matemática:

Um olhar sobre o Desenvolvimento Profissional

DOUTORADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

São Paulo

2009

**PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC/SP**

Melanie Lerner Grinkraut

**Formação de professores envolvendo a Prova Matemática:
Um olhar sobre o Desenvolvimento Profissional**

*Tese apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia
Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial
para a obtenção do título de **DOUTOR EM EDUCAÇÃO
MATEMÁTICA**, sob a orientação do **Prof. Dr. Saddo Ag
Almouloud**.*

São Paulo

2009

Banca Examinadora

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Tese por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: _____ **Local e Data:** _____

*Aos meus pais Abrão Lerner e
Adélia Schick Lerner (in memoriam)*

AGRADECIMENTOS

À Fonte inesgotável do Universo, de Amor, Luz, Sabedoria e Vida, que a todos e a tudo criou.

Ao professor Dr. Saddo Ag Almouloud, meu orientador, pela sua paciência, dedicação e disposição; pelo incentivo e confiança nos momentos difíceis, ajudando-me a concluir esta etapa tão importante de minha jornada, enfim por ter acreditado em mim.

Às professoras Dr^{as}. Sônia Pitta Coelho, Celina Aparecida Almeida Pereira Abar, Adair Mendes Nacarato e Maria Raquel Miotto Morelatti, por aceitarem participar de minha banca examinadora, bem como pelos comentários, críticas e sugestões inestimáveis que muito contribuíram para o meu aprendizado e fizeram que este trabalho pudesse ganhar um nível maior de qualidade.

Ao professor Dr. Ubiratan D`Ambrósio, exemplo de pesquisador e pessoa admirável, pelo muito que me ensinou no decorrer do curso de Doutorado e que possibilitou modificar a minha postura perante à Matemática, à Educação, aos professores, aos alunos e à vida.

A todos os professores do Doutorado, com os quais convivi no decorrer das disciplinas, e em especial às professoras Dr^{as}. Lulu Healy e Sônia Pitta Coelho, cujas orientações foram fundamentais durante o período em que participei da pesquisa desenvolvida no contexto do projeto AProvaME.

Aos professores que participaram de minha pesquisa, a “Flávia”, o “Vagner”, o “Eric”, o “Adriano” e o “Pedro”, que foram por mim acompanhados durante um período de dois anos, pelos momentos que concederam tanto no decorrer das entrevistas como pelas explicações que se fizeram necessárias, pelos materiais por eles desenvolvidos e que a mim foram cedidos, enfim agradeço imensamente por todo o apoio e consideração recebidos.

Aos meus colegas do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, com os quais convivi durante os quatro anos de curso, amigos e parceiros de tantos momentos.

Ao professor Dr. Samuel Pfromm Netto, meu orientador do Mestrado e amigo querido, que com muita disponibilidade, competência e dedicação, compartilhou comigo o seu inesgotável saber e sempre me incentivou a ir ao encontro de meus objetivos.

Ao Artur, meu marido, a Ananda, a Nalini e ao Ian, nossos filhos, por terem possibilitado o meu constante renovar do amor pela vida e pelo grande milagre da criação,

além da compreensão, apoio, incentivo e carinho; e que aguardaram pacientemente o término deste trabalho, compartilhando comigo todos os momentos de seu desenvolvimento.

Ao meu irmão Sálvio e aos meus sogros, Chaim e Hêla, por todo o carinho, interesse, apoio e “torcida” no decorrer não só deste trabalho, mas praticamente durante toda a minha vida.

À Raquel Cymrot, amiga de muitas jornadas, que sempre esteve ao meu lado, me incentivando, acreditando em mim, e não me deixando esmorecer.

À Irani Dias da Silva, que com toda a sua disponibilidade me ajudou em meu crescimento como ser humano e prosseguiu com o dos meus filhos.

À Maria Regina Pontes Trugilho, amiga de tantos anos e bibliotecária do Setorial de Engenharia, Computação e Informática da Universidade Presbiteriana Mackenzie, que sempre me auxiliou com muita disponibilidade, prontidão e eficiência na localização de todo o material necessário para a realização de meu Doutorado.

A todas as pessoas, que direta ou indiretamente, colaboraram para que este trabalho fosse realizado, expresso a elas neste momento o meu mais profundo agradecimento.

A AUTORA

RESUMO

Este trabalho investigou o desenvolvimento profissional de dois professores de Matemática, como decorrência de sua participação em um projeto de pesquisa, o AProvaME (Argumentação e Prova na Matemática Escolar), conduzido pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC). Além de participarem como pesquisadores no projeto, eram alunos do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática e lecionavam no Ensino Médio em escolas públicas estaduais. A presente pesquisa acompanhou-os no decorrer de dois anos durante o processo em que elaboraram, aplicaram e analisaram situações de aprendizagem em conteúdos pertencentes à Geometria, que buscavam a construção da prova por parte de seus alunos, por meio da integração do *software* Cabri-Géomètre nas atividades. De acordo com a proposta do AProvaME, durante a participação neste projeto, eles estiveram inseridos em um contexto, no qual foram desenvolvidas práticas coletivas de reflexão, colaboração e investigação, além de outras relacionadas à experiência docente, como reflexões sobre a própria prática. Este estudo objetivou averiguar em que medida a participação destes professores no projeto promoveu transformações em concepções e práticas, e influenciou o seu desenvolvimento profissional. Para atingir tal objetivo, o referencial teórico articulou as teorias sobre o desenvolvimento profissional, a prova e o uso de recursos da informática em um contexto educacional. A metodologia de pesquisa localizou-se no âmbito da investigação qualitativa, usando o estudo de caso que, pôde ser caracterizado como analítico, considerando-se como “casos múltiplos”, os dois professores. Estes passaram por processos diferentes no decorrer de seus respectivos percursos inseridos no AProvaME, que ocorreram em parte devido às características pessoais, às experiências discente e docente anteriores e ao que cada um vivenciou no projeto, proporcionando indícios de desenvolvimento profissional diferenciados. Enquanto para um deles, a participação em uma prática de grupo reflexiva, colaborativa e investigativa mostrou-se catalisadora na promoção de mudanças em concepções e práticas, refletindo em seu desenvolvimento profissional, o outro não submetido a estas práticas de forma tão intensa, aliado a fatores pessoais, não conseguiu romper com concepções e práticas anteriores. Apesar disto, os resultados ainda sugerem que para ambos participar do projeto possibilitou a ampliação de seu conhecimento matemático em relação aos temas tratados; a

sensibilização quanto às possibilidades de utilização dos computadores em atividades de ensino; e as dificuldades relacionadas com esta integração. Constatou-se ao final do AProvaME, a importância que atribuíram ao processo vivenciado, na medida em que passaram a valorizar as produções dos alunos, o raciocínio desenvolvido na elaboração da prova, ainda que, muitas vezes, estes não conseguissem atingir a formalização matemática esperada. Este estudo apresenta indícios de que a forma como projetos de pesquisa são conduzidos, inseridos em processos de formação continuada, nos quais ocorram práticas de grupo, como as de reflexão, colaboração e investigação, podem consistir em excelentes oportunidades de desenvolvimento profissional para os professores participantes. Contudo, fatores individuais e pessoais também podem interferir, pois nem sempre o grupo consegue beneficiar a todos os envolvidos. Este estudo procurou revelar caminhos para repensar-se processos de formação que possam resultar em desenvolvimento profissional.

PALAVRAS-CHAVE: Desenvolvimento Profissional. Projeto AProvaME. Argumentação e Prova. Situação de Aprendizagem em Geometria. Cabri-Géomètre.

ABSTRACT

This present study looked into the professional development of two Mathematics teachers, as a result of their participation in a research project called “AProvaME” (Argumentation and Proof in Mathematics Education), carried out by “Pontifícia Universidade Católica (PUC)” of São Paulo. Besides participating as researchers in the project, these teachers were studying for their Professional Mathematics Education Master’s degree and teaching in public high schools. The present research monitored their processes during two years, while they were developing, implementing and evaluating learning situations in Geometry, which searched for the proof construction from the students, by the integration of *Cabri-Géomètre software* in the activities. According to the “AProvaME” proposal, during their participation in the project, these teachers were involved in a context, where group practices, as reflection, collaboration and investigation, besides others related to teaching experience, as the reflection on their own practice, were developed. This study aimed to check to what extent the teacher’s participation in this project, propitiated a change in their conceptions and practices, influencing their professional development. In order to reach this goal, the theoretical references articulated the theories about professional development, the proof and the use of technological resources in the educational environment. The research’s methodology was focused in the qualitative investigation, using the case study, considered as analytic, investigating both teachers as “multiple cases”. These two teachers passed through different processes in their courses, while participating in the AProvaME, which occurred partly because their own personal characteristics, their experience as students and teachers and what they had lived in the project, leading to different evidences of professional development. To one of them, the participation in a group, where practices as reflection, collaboration and investigation were developed, turned to be catalyst to promote changing in conceptions and practices, reflecting in his professional development. The other one, who was not submitted to these practices in such a strong way, could not break with previous conceptions and practices. In spite of this, the results already suggest that to both teachers the participation in the project lead them to broaden their mathematical knowledge. They also became aware of the possibilities of computers use in the learning activities and the difficulties which involves this integration. In the end of the AProvaME, it was verified the importance given by the

teachers to the experienced process, in a way that they started to take into account the students development mathematical skills, the reasoning involved in the proof process, even if many times the students were not able to reach the required mathematical formalization. This study presents indications that the way how researches' projects are conducted, included in processes of continuity teacher's education programs, where occur group practices, such as reflection, collaboration and investigation, could establish excellent opportunities of professional development for the teachers that attended the project. However, individual and personal factors can also interfere, because the group does not always benefit to all the people involved. This study tried to reveal ways to rethink formative processes, which can result in professional development.

KEYWORDS: Professional Development. AProvaME Project. Argumentation and Proof. Learning Situation in Geometry. Cabri-Géomètre.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Desenho 1	Terceira etapa do Esboço 1, desenvolvido por Flávia com a equipe do AProvaME	112
Desenho 2	Atividade 05 do Esboço 2, desenvolvido pela Flávia, com a equipe do AProvaME	115
Desenho 3	Atividade 6 introduzida na terceira etapa da Versão V3, desenvolvida pela Flávia	123
Desenho 4	Atividade 7 da terceira etapa da Versão V3, desenvolvida pela Flávia	131
Desenho 5	Atividade 6 da terceira etapa da Versão V3, desenvolvida pela Flávia	133
Desenho 6	Questão 5 da versão F12, da situação de aprendizagem desenvolvida por Vagner	170
Desenho 7	Arquivo “Estudando Congruências”, presente na versão F21, na ATMP 2 na Versão Final da situação de aprendizagem, desenvolvida por Vagner ...	173
Desenho 8	Atividade 11 das versões F31 e F32 da situação de aprendizagem desenvolvida por Vagner.....	177
Desenho 9	Tabuleiro do jogo de cartas reduzido, onde estão representados os cinco campos	183
Desenho 10	Ideia de outra atividade surgida a partir do teste-piloto e que não foi implementada na Versão Final da situação de aprendizagem de Vagner ...	184

LISTA DE QUADROS

Quadro 1	Dados dos sujeitos da pesquisa, na ocasião da realização da primeira entrevista	79
Quadro 2	Categorias da 1ª entrevista	83
Quadro 3	Categorias da 2ª entrevista	84
Quadro 4	Categorias da 3ª entrevista	84
Quadro 5	Momentos significativos da trajetória de Flávia	95
Quadro 6	Momentos significativos da trajetória de Vagner	156
Quadro 7	Temas delineados para a Fase 2	252

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	15
2	O DESENVOLVIMENTO PROFISSIONAL DO PROFESSOR.....	26
2.1	FORMAÇÃO DE PROFESSORES, PRÁTICAS POTENCIALIZADORAS E O DESENVOLVIMENTO PROFISSIONAL.....	26
2.2	O USO DE RECURSOS TECNOLÓGICOS E O DESENVOLVIMENTO PROFISSIONAL	38
2.3	CONCEPÇÕES DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA E O DESENVOLVIMENTO PROFISSIONAL	43
3	A PROVA.....	46
3.1	DEMONSTRAÇÕES E PROVAS.....	47
3.2	A PROVA, A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E O CONTEXTO ESCOLAR.....	48
3.3	TIPOS DE PROVAS	52
3.4	AS FUNÇÕES DA PROVA.....	55
3.5	OS AMBIENTES COMPUTACIONAIS E A PROVA	57
4	A METODOLOGIA DO ESTUDO	65
4.1	A PESQUISA QUALITATIVA	65
4.2	O PERCURSO DA PRESENTE PESQUISA	69
4.2.1	PROCEDIMENTO UTILIZADO: O ESTUDO DE CASO.....	69
4.2.2	ALGUMAS INFORMAÇÕES DO PROJETO APROVAME	73
4.2.3	PROCEDIMENTO DA PESQUISA	76
4.2.4	OS SUJEITOS DA PESQUISA.....	79
4.2.5	ENTREVISTAS E OUTROS REGISTROS.....	79
4.2.5.1	A PRIMEIRA ENTREVISTA	80
4.2.5.2	A SEGUNDA ENTREVISTA	81
4.2.5.3	A TERCEIRA ENTREVISTA.....	82
4.2.6	PROCEDIMENTOS PARA ANÁLISE DOS DADOS	83

5 ANÁLISES DO ESTUDO REALIZADO	85
5.1 TRAJETÓRIA DE FLÁVIA	92
5.1.1 MOMENTO 1	95
5.1.1.1 ENTREVISTA 1	96
5.1.1.2 ESBOÇO 1 (E1)	110
5.1.1.3 SÍNTESE DO MOMENTO 1	111
5.1.2 MOMENTO 2	113
5.1.2.1 ESBOÇO 2 (E2)	114
5.1.2.2 ESBOÇO 3 (E3)	116
5.1.2.3 ESBOÇO 4 (E4)	118
5.1.2.4 VERSÕES V1, V2 E V3.....	119
5.1.2.5 ENTREVISTA 2	123
5.1.2.6 SÍNTESE DO MOMENTO 2	130
5.1.3 MOMENTO 3	135
5.1.3.1 ENTREVISTA 3	136
5.1.3.2 SÍNTESE DO MOMENTO 3	147
5.2 TRAJETÓRIA DE VAGNER	151
5.2.1 MOMENTO 1	156
5.2.1.1 ENTREVISTA 1	157
5.2.1.2 ESBOÇO (E)	164
5.2.1.3 SÍNTESE DO MOMENTO 1	166
5.2.2 MOMENTO 2	169
5.2.2.1 DIVERSAS VERSÕES DA SITUAÇÃO DE APRENDIZAGEM	169
5.2.2.2 ENTREVISTA 2	184
5.2.2.3 SÍNTESE DO MOMENTO 2	193
5.2.3 MOMENTO 3	196
5.2.3.1 ENTREVISTA 3	198
5.2.3.2 SÍNTESE DO MOMENTO 3	215
6 CONCLUSÕES	222
REFERÊNCIAS	243
APÊNDICES	250
ANEXOS	262

1 INTRODUÇÃO

A elaboração desta pesquisa foi motivada pela minha trajetória acadêmica e profissional, bem como pelas experiências e vivências adquiridas como professora, em meu contato com alunos dos diversos níveis de ensino e professores de Matemática.

Possuo formação inicial em Engenharia Eletrônica e licenciatura em Matemática, e como professora já lecionei nos ensinos fundamental e médio e, nos últimos anos, tenho trabalhado tanto no nível superior, como em cursos de especialização e extensão.

Em meu percurso profissional iniciei a minha carreira docente como professora, lecionando Matemática, Geometria e Desenho Geométrico para os ensinos fundamental e médio. A partir desta época, passei a me deparar com diversas dificuldades dos alunos nestas disciplinas, muitas delas relacionadas à interpretação e à resolução de situações-problema; ao estabelecimento de conexões entre os diversos conteúdos estudados; a não conseguirem se expressar em linguagem matemática; tampouco produzirem conjecturas ou argumentos matematicamente válidos, não chegando a construir um raciocínio matemático.

Na maioria das vezes em que este tipo de raciocínio era exigido, os alunos apenas repetiam regras e procedimentos já aprendidos, sem que realmente pensassem no que estavam fazendo. Em particular, quando lecionava Geometria, verificava que para os alunos era muito difícil produzir argumentações e pensar em termos de demonstração e prova. A partir daquele momento comecei a refletir sobre algumas das dificuldades dos alunos e como poderia melhorar a minha prática docente, tornando a Matemática mais acessível, interessante e contextualizada, de forma que os alunos vissem sentido naqueles conteúdos que estavam sendo ensinados.

Após algum tempo na educação básica, passei a lecionar no ensino superior, nos cursos de Matemática, Física e Engenharia. E como professora universitária, há mais de vinte anos, tenho ministrado na graduação disciplinas pertencentes às Ciências Exatas como Matemática Básica, Cálculo Numérico, Estatística, Desenho Geométrico, Linguagens de Programação, Informática Aplicada ao ensino e Ciências da Computação.

Em especial, lecionei durante muitos anos algumas disciplinas para os últimos semestres do curso de licenciatura em Matemática, as quais tinham por objetivo fazer que os alunos, ainda em um processo de formação inicial, não apenas aprendessem o conteúdo específico que estava sendo ensinado naquele momento, mas que também refletissem como poderiam integrá-lo à sua futura prática docente. Os alunos deveriam planejar,

desenvolver e ministrar alguma aula, que apresentasse uma sequência didática, integrando conteúdos matemáticos e atividades. Com isso procurava fazer com que estes pensassem os processos de ensino, de forma que pudessem contribuir com a aprendizagem de seus futuros alunos.

Ainda em relação às disciplinas da licenciatura em Matemática, uma delas denominada “Informática no Ensino da Matemática”, chamou-me a atenção em relação a dois aspectos importantes, a saber: o potencial dos recursos da informática no ensino-aprendizagem da matemática e a importância da formação do professor. Esta disciplina possuía entre os seus objetivos tratar das possibilidades da integração entre os conteúdos da Matemática e os recursos computacionais. Visava ao aprendizado e à utilização de ferramentas oferecidas pela informática, bem como fazer que os alunos percebessem novas formas de ensinar e aprender matemática.

Durante dois anos, também, ministrei aulas para professores de Matemática dos ensinos fundamental e médio de escolas públicas do Estado de São Paulo pelo programa de extensão “Teia do Saber”. As propostas deste curso no tocante a estes professores eram o ensino, a discussão e a apresentação das possibilidades de uso de alguns *softwares*, matemáticos ou de uso geral, como a planilha eletrônica, integrados a conteúdos de matemática, procurando levar estes professores a perceberem o potencial da utilização destas ferramentas em contextos escolares, bem como propiciar a estes momentos de reflexão sobre a sua prática, visando a uma construção colaborativa do conhecimento. A partir deste momento passei a refletir sobre a importância de envolver professores em exercício em situações de discussão, reflexão e aprofundamento, que poderiam ser proporcionados por momentos de formação continuada, os quais deveriam ocorrer em alguns períodos no decorrer de suas trajetórias profissionais.

Enquanto pesquisadora, as experiências que vivenciei, também, me chamaram a atenção em relação a algumas questões que me levaram à presente pesquisa. Orientei nos últimos anos alguns alunos do curso de Matemática na elaboração de seus trabalhos finais de curso e de Iniciação Científica, sendo que alguns deles envolviam o estudo do potencial da informática como um importante recurso para a construção e a incorporação de conceitos matemáticos, subsidiando propostas de uso desta no dia a dia da sala de aula.

Realizei o Mestrado na área de Psicologia Escolar, em razão de meu interesse em conhecer mais profundamente as teorias da aprendizagem e do desenvolvimento, bem como a influência do uso educacional das tecnologias de informação e de comunicação. Em minha dissertação tratei da formação de professores dos ensinos fundamental e médio em informática educacional. Durante este período, levantei o histórico da evolução da informática no Brasil e em diversos países do mundo, desde a chegada dos computadores às escolas, as propostas de formação de professores e como o processo de formação foi

efetivado em países da Europa, Japão, Israel, Austrália e Estados Unidos, até a situação atual no Brasil. Para realizar a pesquisa de campo, mantive contato com alguns professores de todas as áreas do conhecimento, dos ensinamentos fundamental e médio de quatro escolas públicas estaduais do município de São Paulo.

Por meio de todas estas experiências adquiridas nos diferentes níveis de ensino, na posição de professora ou de pesquisadora, tomei contato com as inúmeras dificuldades que envolvem o ensino de Matemática, o potencial oferecido pelas tecnologias no processo de aprendizagem, bem como a importância da formação do professor, seja ela inicial ou continuada.

Verificamos, hoje, que a função docente tem enfrentado grandes desafios, muitos deles relacionados às transformações profundas que vêm ocorrendo na sociedade como um todo. Este novo cenário no ambiente escolar exige do professor uma postura profissional diferente da prática adotada em anos recentes. Valente (1997, p. 20) afirma que “o mundo atualmente exige um profissional crítico, criativo, com capacidade de pensar, de aprender a aprender, de trabalhar em grupo e de conhecer seu potencial intelectual, com capacidade constante de aprimoramento e depuração de ideias e ações”. Este novo modelo de sociedade demanda da escola que os professores trabalhem outras competências junto aos alunos, e uma delas leva em conta a tecnologia, aliada ao resgate da argumentação e da prova.

Para que as escolas possam responder adequadamente a estas novas responsabilidades, Adler et al. (2004) constataram que a formação inicial do professor tornou-se insuficiente para o exercício da docência.

Assim, dentre as diversas ações a serem tomadas, para que se consiga realmente efetivar uma mudança significativa neste panorama, uma delas, que se mostrou muito importante direcionou-se para a necessidade de repensar a formação inicial de professores, além de propiciar condições para que, os que já se encontram em exercício, possam participar em alguns momentos de suas trajetórias profissionais de algum tipo de formação continuada. Esta poderia se concretizar na forma de cursos de curta ou longa duração; reuniões; grupos de estudo; palestras; conferências; projetos de pesquisa; e outros, possibilitando a estes professores momentos de estudo, discussão, reflexão e incorporação de novos conhecimentos e práticas, fazendo parte de um processo maior, que consistiria no seu desenvolvimento profissional.

No decorrer de toda a minha trajetória profissional, como professora ou pesquisadora, sempre considerei a importância da formação do professor, tanto a inicial como a continuada.

Durante meu percurso, muitas dúvidas surgiam, especialmente quando me deparava com cursos de formação continuada. Diversos questionamentos me ocorriam, como se

estes, realmente, pudessem levar a modificações na prática docente dos professores envolvidos, quais seriam e como se refletiriam em sala de aula. Porém, sempre ponderava que qualquer que fosse a formação recebida, seria importante levar os professores a experienciá-la na prática. A falta desta vivência, por parte dos professores, dificultava a apropriação e a reflexão sobre a aplicabilidade do que foi ensinado, bem como o não entendimento das dificuldades dos alunos.

Concomitantemente, nos últimos anos temos observado que o professor inserido neste novo contexto educacional passou a ser considerado pela sociedade e por ele mesmo, como um profissional que possui uma história de vida, experiências, pensamentos, ideias e saberes próprios. Dessa forma, ele deverá tornar-se responsável pelo seu crescimento, visto como um processo que se estende durante toda a sua trajetória profissional, a partir de sua formação inicial e seguindo no decorrer de seu percurso docente, caracterizando o seu desenvolvimento profissional (FERREIRA, 2003).

Em se tratando de professores de Matemática, Ponte (2006b) observou que estes têm se deparado atualmente com grandes desafios, em parte ocasionados, como já mencionado anteriormente, pela intensa e rápida evolução da sociedade, bem como pelos novos conhecimentos sobre educação, pelas múltiplas funções da escola, pelo ensino-aprendizagem desta própria disciplina e pela emergência e uso de outros recursos, as novas tecnologias de comunicação e informação, determinando novas formas de trabalho. Para que o professor possa enfrentar estes novos desafios, ele precisa se desenvolver no decorrer de toda a sua carreira profissional, sendo ele o sujeito fundamental de seu próprio desenvolvimento pessoal e profissional.

Ponte (1996) enfatizou também que a formação do professor deve passar a ser considerada da perspectiva de seu desenvolvimento profissional. Na medida em que este desenvolvimento é levado adiante, os professores passam a ser vistos como profissionais autônomos, responsáveis e com potencialidades próprias.

As ponderações apresentadas, aliadas a outras questões, como: que habilidades e competências precisariam ser desenvolvidas no decorrer de um processo de formação continuada, em especial, cursos voltados a professores de Matemática, visando à ampliação e à incorporação de outros conhecimentos, à apropriação e ao uso de recursos da informática; bem como as dificuldades que estes enfrentariam e as novas relações que seriam estabelecidas entre eles e seus alunos, resultando em mudanças em concepções e práticas, motivaram-me na realização de minha pesquisa de Doutorado.

No curso de Doutorado do programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC, São Paulo, passei a fazer parte do grupo de pesquisa denominado TecMEM (Tecnologias e Meios de Expressão Matemática). Este grupo tem pesquisado nos últimos anos o significado de diversos objetos matemáticos e as ferramentas

disponibilizadas para estudá-las, como elas são inicialmente apropriadas, como são transformadas pelos seus usuários na prática e como estas ferramentas e significados podem causar impacto sobre a forma como a Matemática é pensada.

Nesta ocasião, o projeto AProvaME (Argumentação e Prova na Matemática Escolar) estava se iniciando no contexto do TecMEM. O meu trabalho de Doutorado foi se desenvolvendo no ambiente do AProvaME, na medida em que investigava o percurso percorrido por dois professores participantes do projeto.

A motivação deste grupo de pesquisa em relação ao projeto AProvaME decorreu em parte, devido a um cenário educacional atual, no qual algumas pesquisas indicavam as dificuldades que os alunos tinham em se expressar e apresentar argumentos matemáticos, e que, muitas vezes, estes tratavam justificativas empíricas como provas válidas (HEALY; HOYLES, 2000; BALACHEFF, 1988).

O papel da prova na educação matemática é muito importante, não se restringindo apenas a uma prática matemática. A prova, entendida em sua concepção mais ampla, tem um papel central e pode tornar-se uma ferramenta essencial na compreensão do conhecimento matemático.

A preocupação com a argumentação e a produção de uma prova pode ser encontrada nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (BRASIL, 1998), que recomenda que o currículo de Matemática deva contemplar experiências e atividades que possibilitem aos alunos o desenvolvimento de conjecturas e a formulação e a comunicação de argumentos matematicamente válidos.

No que se refere ao ensino de provas, esta importância se justifica tanto pelas competências que busca desenvolver nos alunos e nos professores, que são intrínsecas ao conhecimento matemático, como também pela necessidade cotidiana de encadeamento de ideias e formulação de argumentações. Para a produção de uma prova em um contexto escolar, torna-se importante proporcionar ao aluno a oportunidade de entrar em contato com as dificuldades inerentes a ela, inserindo-o em situações nas quais ele possa realizar conjecturas, para em seguida poder buscar argumentos para validar ou refutar estas conjecturas (PEREIRA, 2007).

O processo de construção de uma prova em um contexto escolar tem sido considerado muito complexo. Existe um consenso tanto nacional como internacional quanto às dificuldades associadas ao ensino e à aprendizagem da prova, verificadas em professores e em alunos, de forma que, muitas vezes, a prova foi deixada de lado no ensino de Matemática, principalmente na educação básica.

Embora este fato tenha ocorrido também no Brasil, durante muito tempo, nos últimos anos tem-se verificado um resgate do ensino da prova, especialmente a partir da década de 1990 (NASSER; TINOCO, 2001; ANDRADE; NACARATO, 2005; PEREIRA, 2007).

Nasser e Tinoco (2001) relataram que após muitos séculos de um ensino tradicional e estático, em parte devido ao modelo estabelecido pela geometria euclidiana, a partir da década de 1960 foi verificada uma mudança na abordagem no ensino da matemática. No decorrer deste período alguns fatos ocorreram como o movimento da Matemática Moderna, que valorizava um enfoque estruturalista, que não era natural aos alunos da educação básica. Em seguida a este movimento, ocorreu o abandono total do raciocínio dedutivo e das demonstrações. Naquele momento, nas escolas, as atividades que os alunos deveriam realizar não visavam mais desenvolver o raciocínio lógico, tampouco os preparavam para dominar o processo dedutivo.

Nos últimos anos, uma abordagem experimental tem substituído a ênfase na teoria, ou a uma concepção axiomática vigente anteriormente no ensino da geometria, que era inacessível aos alunos. Estas autoras verificaram que apesar de todos estes movimentos, atualmente a maioria dos alunos, ao estudar os diversos conteúdos matemáticos não está mais aprendendo a raciocinar e a pensar. Na maioria das escolas o aluno deve resolver listas enormes de exercícios, que nada significam para ele. Em nenhum momento o aluno é levado a pensar por que respondeu a questão de uma determinada forma, ou se a resposta que forneceu é coerente com a pergunta do problema. Assim, a maioria dos alunos apenas repete os procedimentos, de forma a reproduzir o que foi passado pelos seus professores, sem que entendam o que estão fazendo (NASSER; TINOCO, 2001).

Devido a estes fatos, para Nasser e Tinoco (2001), a investigação sobre “argumentação e provas no ensino da matemática” vem atraindo a atenção de pesquisadores, constituindo uma nova linha de pesquisa na área de Educação Matemática. Estas autoras constataram que, a partir da década de 1990, as atividades presentes em livros didáticos, envolvendo processos de análise, argumentação, inferência, tomada de decisões, críticas e validação de resultados, bem como as produções nacionais de educadores matemáticos, passaram a ser valorizadas.

A retomada da investigação sobre argumentação e prova, também foi verificada em uma pesquisa de abordagem histórico-bibliográfica, realizada por Andrade e Nacarato (2005), cujo objetivo foi identificar e analisar as tendências didático-pedagógicas para o ensino da Geometria no Brasil. Esta pesquisa teve por objeto de estudo os *Anais* dos sete primeiros Encontros Nacionais de Educação Matemática (ENEMs), realizados no período de 1987 a 2001. Dentre as sete categorias identificadas nos 363 trabalhos analisados, duas delas, a Geometria Experimental e a Geometria em Ambientes Computacionais, foram consideradas como tendências didático-pedagógicas emergentes.

Estes autores acreditam que dentre estes sete encontros, o V ENEM, realizado em 1995, se constituiu em um marco no ensino da Geometria, devido ao grande número de trabalhos que apresentaram novas abordagens didático-pedagógicas, gerando novas tendências e outros enfoques. Neste ENEM constatou-se uma emergência de trabalhos, como os que buscaram resgatar os processos de provas, argumentações, em uma perspectiva mais dialógica e de negociações de significados na sala de aula. Esta busca da produção de significados, nesta nova dinâmica, se configura em um processo de negociação, envolvendo professores e alunos em um contexto de argumentação, em que todos podem aprender simultaneamente, por meio da partilha destes significados. Andrade e Nacarato (2005), também, identificaram em alguns trabalhos um movimento de resgate dos processos dedutivos para o ensino da Geometria, simultaneamente àqueles que buscaram um processo de negociação de significados.

No que se referia às duas categorias emergentes, a Geometria Experimental e a Geometria em Ambientes Computacionais, observou-se que a partir de trabalhos inicialmente dotados de características somente ativistas, estes caminharam na direção de outras perspectivas, como a sociocultural, a das provas e argumentações/refutações, bem como na busca de novos referenciais teóricos (ANDRADE; NACARATO, 2005).

Pietro Paolo (2005) localizou uma grande variedade de produções em relação às pesquisas existentes sobre o tema “provas na educação básica”. Entretanto, verificou que esta temática não tem sido muito debatida quer por professores, quer por formadores de professores, resultando em um número bem reduzido de pesquisas na comunidade de educadores matemáticos no Brasil. Este mesmo autor assinalou que atualmente este tema se apresenta como “um universo bastante inexplorado de pesquisas e práticas” (p. 226). Em especial, apontou que dentre algumas investigações que deveriam ser desenvolvidas sobre este tema, uma delas, a que se refere a concepções de professores sobre prova, se mostra muito importante. Este fato se justifica devido à existência de ideias, de que este assunto seria inacessível para a maioria dos alunos, bem como a sua abordagem só poderia ser realizada por meio de um rigor formalista.

Apesar da existência de dificuldades observadas no ensino e na aprendizagem da prova e, ainda, da reduzida quantidade de pesquisas no Brasil, Pietro Paolo (2005) verificou que no cenário internacional tem-se tornado cada vez mais presente uma abordagem para a prova envolvendo o uso de recursos tecnológicos. Algumas pesquisas têm sido realizadas sobre o uso do computador que, conjuntamente com tarefas adequadas, poderiam permitir aos alunos uma melhor apreciação da natureza e dos propósitos das provas. As tecnologias digitais têm trazido elementos novos para a verificação da validade dos teoremas matemáticos, na medida em que permitem explorar a Matemática.

A presença de recursos da informática nas escolas tem chamado a atenção de professores e alunos para o potencial didático de sua utilização no processo de ensino-aprendizagem. Dessa forma, hoje em dia é reconhecida a necessidade de pesquisas que se preocupem com o uso adequado de recursos tecnológicos em sala de aula, o que implica reflexões e discussões sobre a formação inicial e continuada do professor, de forma a buscar uma prática docente mais adequada às novas necessidades e desafios.

Healy (2006) observou que até recentemente no Brasil, as investigações sobre o papel das tecnologias digitais no ensino-aprendizagem de Matemática limitaram-se a tratar as ferramentas tecnológicas como uma ajuda pedagógica no ensino de determinado conteúdo. Essa abordagem deixou diversos aspectos de fora das discussões, entre os quais a interação que estes ambientes poderiam fornecer ao serem utilizados, os aspectos cognitivos que permeiam as atividades entre professores e os alunos na sala de aula e a devida preparação do professor.

Dessa forma, justifica-se a importância do projeto AProvaME, que buscou um entendimento do processo de ensino-aprendizagem da prova usando recursos tecnológicos. Este projeto envolveu professores em um processo de formação continuada, que se encontravam concomitantemente em pleno exercício profissional.

Os objetivos do AProvaME consistiram na investigação de como a experiência dos alunos com o computador poderia influenciar a compreensão destes em relação à prova; se possibilitaria que eles passassem a distinguir argumentos dedutivos de evidências empíricas; e se os auxiliaria no desenvolvimento de habilidades para lidar com argumentos matemáticos expressos de diferentes formas. Outra questão estudada consistiu na identificação das condições e suportes que poderiam favorecer uma verdadeira apropriação pelo professor (HEALY, 2005).

Passos et al. (2006), ao investigarem práticas que poderiam promover o desenvolvimento profissional em professores que ensinam Matemática, realizaram uma pesquisa que analisou onze estudos brasileiros, entre dissertações e teses, produzidas no período de 1998 a 2003. Estes autores buscaram em sua pesquisa identificar indícios de práticas, a partir dos estudos analisados, que conseguiram promover o desenvolvimento profissional. Uma meta-análise foi desenvolvida em torno de duas modalidades de práticas, a saber, práticas coletivas, pontuadas por momentos de reflexão, colaboração, e investigação, e outras práticas contributivas deste desenvolvimento, como aquelas decorrentes da investigação e da reflexão sobre a própria prática, a participação em projetos de formação inicial e continuada, que tenham como foco a problematização e a reflexão da sistemática da prática pedagógica e outras.

Dentre as práticas identificadas que potencializam o desenvolvimento profissional, uma delas se refere a uma prática de grupo, de discussão, de reflexão e de colaboração

entre os professores envolvidos. Contudo, Passos et al. (2006) observaram que não é qualquer prática que seria capaz de propiciar o desenvolvimento profissional.

Ponte (2006b) complementa citando algumas condições que têm se revelado essenciais para que o professor possa se assumir como protagonista de seu desenvolvimento profissional, envolvendo a sua formação, seguida de sua atividade profissional, além de participar de processos de inovação curricular. Entre elas, destacam-se as capacidades e as atitudes reflexivas e investigativas, acrescida da colaboração entre professores e/ou educadores matemáticos. Enquanto a reflexão do professor pode ser encarada como um processo de investigação sobre a sua própria prática profissional, a colaboração entre professores tem-se revelado como um elemento de grande importância em muitos processos de formação e inovação, na medida em que proporciona muitas oportunidades de uns aprenderem com os outros, e em conjunto conseguirem resolver os problemas e as dificuldades, que sozinhos, talvez, não conseguissem enfrentar com sucesso.

No caso da presente pesquisa, existiu um contexto que poderia promover o desenvolvimento profissional. Este contexto se caracterizou por uma abordagem que visou ao trabalho com provas, que costuma trazer muitos elementos importantes para que o professor possa repensar a sua prática. A abordagem da prova pode modificar tanto o professor, como os alunos, pois ela exige que o professor questione a si mesmo e aos alunos, proporcionando a eles a possibilidade de argumentar, conjecturar, justificar e validar os resultados. Acreditamos que um contexto em que se busque a prova, aliado a um trabalho de grupo, onde são desenvolvidas práticas reflexivas, investigativas e colaborativas, seja suficientemente forte para propiciar transformações.

Assim no contexto do AProvaME, as práticas reflexivas, investigativas e colaborativas que estes professores estavam envolvidos, enquanto desenvolviam situações de aprendizagem que buscavam a prova matemática, integrando recursos da informática, poderiam promover o seu desenvolvimento profissional.

A presente pesquisa se propôs a buscar indícios ou elementos nas falas dos professores obtidas pelas entrevistas, bem como nas diversas versões das situações de aprendizagem por eles desenvolvidas, durante o período que eles estavam participando do projeto, que pudessem indicar que eles estavam se transformando, ou seja, que estava ocorrendo o desenvolvimento profissional.

Dessa forma, tentaremos responder à seguinte questão de pesquisa:

Em que medida a inserção de professores de Matemática em um contexto de formação, mediado pela tecnologia envolvendo a prova matemática, pode contribuir para o desenvolvimento profissional destes?

As necessidades atuais da sociedade interferindo diretamente no contexto educacional apontam para uma preparação adequada do professor, na direção de seu desenvolvimento profissional, para que este novo cenário possa se concretizar na sala de aula. Embora o ensino da prova tenha sido deixado de lado por muito tempo, atualmente ele volta a se fazer presente e necessário, devido às competências que desenvolve tanto em professores, como alunos, no desenvolvimento do raciocínio matemático. Os recursos tecnológicos já presentes em contextos educacionais geram algumas implicações quanto a uma adequada inserção em atividades de ensino, com vistas à produção de uma prova.

Na Introdução, procuramos apresentar o contexto desta pesquisa de Doutorado, as justificativas do presente estudo, seguidos da indicação de seus objetivos e da questão a ser investigada. Diante disso este trabalho se organiza em cinco capítulos, a saber:

No capítulo 2 – O DESENVOLVIMENTO PROFISSIONAL DO PROFESSOR - tratamos do desenvolvimento profissional do professor de Matemática, de uma perspectiva mais ampla do que a formação continuada, além de indicarmos algumas práticas, como a investigação, a reflexão e a cooperação, que podem propiciar este desenvolvimento. Em seguida, abordamos o desenvolvimento profissional na perspectiva da implementação de ações de formação que possibilitem aos professores a inserção e o uso de recursos tecnológicos em sua prática docente. Finalizamos este capítulo com a indicação da importância de uma mudança de concepções, que podem influenciar na prática docente dos professores de Matemática, podendo resultar em seus desenvolvimentos profissionais.

No capítulo 3 - A PROVA - introduzimos a prova na educação matemática. Inicialmente apresentamos a distinção entre os termos demonstração e prova, bem como a posição que adotamos no presente estudo em relação a estas duas denominações. Em seguida, indicamos a importância da prova em um contexto escolar tanto para professores, como para alunos; enunciamos os tipos e as funções de uma prova, e explanamos sobre as possibilidades de utilização de recursos da informática com vistas à produção de uma prova.

No capítulo 4 - METODOLOGIA DO ESTUDO - apresentamos a metodologia do presente estudo. Esta pesquisa foi classificada como sendo qualitativa e o procedimento utilizado foi o estudo de caso, com uma posterior análise. Algumas informações sobre o AProvaME, necessárias para o entendimento desta investigação, foram apresentadas neste capítulo (as demais encontram-se descritas no Apêndice A). A seguir indicamos os procedimentos da pesquisa, a caracterização dos sujeitos e os instrumentos de coleta de dados utilizados (entrevistas e outros registros documentais), bem como a explicação de como seria realizada a análise dos dados.

No capítulo 5 - ANÁLISES DO ESTUDO REALIZADO - descrevemos, analisamos e sintetizamos as trajetórias dos dois professores, que foram os sujeitos desta pesquisa, com base nos dados coletados nas entrevistas e nos registros documentais. Organizamos estas

informações em alguns momentos que consideramos significativos para cada um dos sujeitos. Em seguida procuramos relacionar o processo por eles vivenciado com a questão de pesquisa, procurando verificar se esta foi ou não respondida com a realização do presente estudo. Organizamos um caso para cada um dos sujeitos da pesquisa, com a sua apresentação, descrição, análise e síntese.

Finalmente, apresentamos as considerações finais, que se constituíram nas CONCLUSÕES do presente estudo.

2 O DESENVOLVIMENTO PROFISSIONAL DO PROFESSOR

Neste capítulo, inicialmente, trataremos do desenvolvimento profissional do professor de Matemática, de uma forma geral, visto de um enfoque mais amplo do que a formação continuada, sendo apresentadas algumas práticas que podem promover este desenvolvimento. Em seguida, abordaremos esta temática da perspectiva do desenvolvimento de ações de formação que possibilitem aos professores a apropriação, uma adequada inserção e uso de recursos tecnológicos em sua prática docente, refletindo em seu desenvolvimento profissional. Para finalizar apontaremos para a importância das concepções de professores de Matemática, pois estas podem influenciar tanto o desenvolvimento profissional do professor e a sua prática docente, quanto à aprendizagem de seus alunos.

2.1 FORMAÇÃO DE PROFESSORES, PRÁTICAS POTENCIALIZADORAS E O DESENVOLVIMENTO PROFISSIONAL

Diversos pesquisadores e educadores, tanto em âmbito nacional como internacional, têm se deparado nos últimos anos com a temática relacionada com a formação de professores em serviço, bem como à trajetória que estes profissionais percorrem no decorrer de suas vidas docentes, a partir de suas formações iniciais, por um olhar do desenvolvimento profissional. Estes estudos e pesquisas se mostram importantes e relevantes, especialmente na época atual, em que as transformações tecnológicas que estão ocorrendo afetam tanto as pessoas em geral, como a todos os setores da sociedade, como a economia, a política, a educação e a escola.

Assim para elaboração deste tópico consultamos alguns trabalhos, como os de Day (1999); Ferreira (2006); Fiorentini (2003); Fiorentini e Nacarato (2005); Garcia (1995); Guimarães (2006); Lopes (2003); Machado Costa e Fiorentini (2007); Passos et al. (2006); Perez (1999); Poletini (1999); Ponte (1998) e Saraiva e Ponte (2003).

Dentre os diversos grupos profissionais, Fiorentini (2003) constatou que os educadores matemáticos talvez se constituam naqueles que mais procuram se aventurar

por novos caminhos. Estes educadores passaram a assumir outros olhares em relação à formação do professor, aos seus saberes e à sua prática docente.

Fiorentini e Nacarato (2005) destacaram que, na literatura educacional, podem ser encontradas várias denominações que se referem ao processo de formação de professores em serviço, como capacitação, aperfeiçoamento, treinamento, reciclagem, formação permanente e formação continuada, sendo que nos últimos anos, outros nomes também passaram a ser utilizados, como educação contínua, desenvolvimento profissional ou profissionalização. Contudo, estas diferentes denominações, também, refletem concepções diversas de formação continuada de professores.

Estes autores relataram que o processo de formação continuada, em seus diferentes modelos, tem variado e evoluído no decorrer das últimas décadas. Nas décadas de 1960 e 1970, a formação continuada de professores de Matemática consistia no oferecimento de cursos de reciclagem, atualização em conteúdos específicos, treinamento ou capacitação em novas metodologias ou técnicas de ensino para esta disciplina. Este modelo de formação partia do pressuposto de que os professores no decorrer dos anos se defasavam em conteúdos e metodologias. Acreditava-se que os professores não seriam capazes de produzir novos conhecimentos e de se atualizar a partir da prática, necessitando entrar em contato com os novos saberes curriculares produzidos por especialistas. Porém, estes cursos de formação funcionavam como ações pontuais, tendo as datas de início e de término pré-estabelecidas. Pesquisas indicaram que estes tipos de cursos se mostraram pouco eficientes, em se tratando de mudanças de saberes, práticas e concepções de professores (FIORENTINI; NACARATO, 2005).

A partir da década de 1990, Fiorentini e Nacarato (2005) assinalaram que ocorreu uma modificação nesta concepção de formação continuada, motivada por diversos estudos internacionais que pesquisaram o pensamento do professor. Estes estudos identificaram que o professor poderia produzir saberes relevantes e fundamentais a partir dos desafios da prática. A partir deste momento, novas propostas surgiram, as quais passaram a considerar fundamental tomar a prática docente cotidiana dos professores como ponto de partida e de chegada, transformando-a em objeto e problema principal de estudo e buscando de forma colaborativa as soluções necessárias e possíveis. Neste processo de educação contínua, mediado pela reflexão e pela investigação sobre a prática, os conteúdos e conhecimentos não seriam mais oferecidos arbitrariamente aos professores. Estes seriam buscados na medida em que se fizessem necessários, bem como poderiam contribuir para a compreensão e para a construção de alternativas dos problemas da prática docente nas escolas. O professor passou a assumir, nesta perspectiva de educação contínua, o papel de um agente reflexivo de sua prática pedagógica, buscando de forma colaborativa ou

autônoma, subsídios teóricos e práticos que poderiam ajudá-lo a compreender os problemas e a enfrentar os desafios do trabalho docente.

Olhando desta perspectiva, Fiorentini e Nacarato (2005) apontaram na direção do desenvolvimento profissional, e como a educação contínua poderia ajudar os professores a se tornarem os principais protagonistas de seus processos educacionais, na medida em que participariam da construção tanto dos conhecimentos relacionados à sua prática docente, como do patrimônio de seu grupo cultural.

Muitos outros autores, também, compartilham desta mesma visão sobre o desenvolvimento profissional de professores. Entre eles, Saraiva e Ponte (2003) destacaram que o estudo deste desenvolvimento e dos fatores que o influenciam se tornaram muito importantes para os pesquisadores cujo interesse está voltado na direção da formação do professor de Matemática. Devido a este fato, muitos educadores matemáticos nos últimos anos têm se interessado em estudar o desenvolvimento profissional de professores.

Imbernón (1994, apud PEREZ, 1999) apresenta o desenvolvimento profissional, como sendo a formação do professor, tanto a inicial como a permanente, constituindo-se em um processo dinâmico e evolutivo da profissão docente. Para este autor esta seria uma atitude de constante aprendizagem assumida pelos professores, envolvendo os processos que poderiam melhorar tanto o conhecimento profissional, como as habilidades e as atitudes dos profissionais da comunidade escolar, afetando a todos, o pessoal não docente, a equipe de gestão e os professores.

Perez (1999) aponta para a importância do papel a ser assumido pelos professores, pois ele acredita que estes profissionais deverão participar ativamente das transformações a serem produzidas tanto na escola, como na sociedade. Este autor considera o professor de Matemática, em especial, como sendo o principal mediador entre os conhecimentos matemáticos historicamente produzidos e os alunos. Ele também pondera que a formação clássica do professor, tanto a inicial como a continuada, deva ser concebida na perspectiva de seu desenvolvimento, possibilitando a instalação de uma nova cultura profissional.

Para Perez (1999) a formação inicial é muito importante para a aquisição das características essenciais do professor de Matemática, bem como para a incorporação de uma cultura profissional, pois este é um período em que diversos comportamentos e posturas adquiridos poderão incidir no futuro exercício da função docente. A formação inicial também deverá gerar no aluno uma atitude de perceber e valorizar a necessidade de uma atualização permanente, além de desenvolver a colaboração, a análise, a reflexão, a construção de estratégias e de um estilo investigativo. Ao tratar da perspectiva do desenvolvimento profissional, este autor considerou três eixos de investigação fundamentais para a formação do professor de Matemática, com o objetivo da instauração de uma nova

cultura profissional, a saber: o ensino reflexivo, o trabalho colaborativo e os momentos marcantes.

Este autor entende o processo de desenvolver-se profissionalmente de forma bastante ampla, e indica a existência de uma literatura diversificada que aborda este assunto, abrangendo aspectos como os ciclos de carreira, as dimensões do desenvolvimento profissional e os diversos fatores que influenciam este processo (PEREZ, 1999).

Para Ferreira (2006), o significado de desenvolver-se profissionalmente consiste no processo de aprender e caminhar para a mudança, ou seja, aprofundar, alterar, ampliar, rever, avançar e reconstruir os próprios saberes, a forma de aprender, bem como a própria prática pedagógica, desenvolvendo novas maneiras de pensar e atuar coerentes. A ideia do aprender demanda que o aprendiz se torne o sujeito de sua própria aprendizagem. Assim, para esta autora, o desenvolvimento profissional do professor envolve três dimensões fundamentais, que se articulam e se influenciam mutuamente, que são: o *saber*, o *saber fazer* e o *saber ser/saber tornar-se*. O *saber* está relacionado com a aquisição e a organização de conhecimentos específicos de conteúdos e de sua didática. O *saber fazer* aponta para o desenvolvimento de atividades e estratégias de ensino, ao desempenho profissional e as atitudes diante do papel de professor e do ato de ensinar em face do aluno. O *saber ser/saber tornar-se* envolve uma dimensão afetiva, relações interpessoais, percepções sobre o próprio professor, suas experiências e motivações, pois, para esta autora, as mudanças no campo profissional não se encontram dissociadas das transformações que ocorrem no nível pessoal, pois elas se integram e se sustentam.

Ainda, para Ferreira (2006, p. 123):

Além disso, tal processo envolve também questões mais específicas tais como: a) o domínio de conhecimentos sobre o ensino, b) as crenças e atitudes em relação aos papéis de professor e aluno, ao ensino-aprendizagem de Matemática, às interações com os alunos e seus pares, c) as competências envolvidas no processo pedagógico, e d) o processo reflexivo sobre as próprias práticas pedagógicas.

Para todos estes autores, no desenvolvimento profissional se encontra sempre presente a perspectiva de mudança, evolução e continuidade. Ponte (1998), inclusive considera que muitos dos trabalhos que se realizam, atualmente, sobre a formação do professor trazem consigo a ideia do desenvolvimento profissional, entendido como um processo que envolve múltiplas etapas e que está sempre incompleto e inacabado.

Garcia (1995) entende que o desenvolvimento profissional de um professor, visto como um profissional do ensino, vai muito além da concepção de que este seria o resultado

de uma justaposição entre a formação inicial e a continuada (aperfeiçoamento, reciclagem, formação em serviço ou formação permanente).

Machado Costa e Fiorentini (2007) concebem o desenvolvimento profissional do professor como um processo contínuo, cujo início se dá mesmo antes de seu ingresso na graduação, adquirindo um tratamento intencional e especial durante a licenciatura, estendendo-se no decorrer de toda a sua vida profissional. Porém, estes autores enfatizam que para que ocorra este desenvolvimento é necessário que o professor reflita constantemente sobre o seu trabalho docente nas escolas, participe em grupos de estudo, seminários e congressos da área educacional, desenvolva projetos de inovação curricular, leia muito e/ou realize cursos de atualização e pós-graduação.

Polettini (1999) defende também que o desenvolvimento profissional do professor não se inicia somente quando este ingressa na profissão docente. Dessa forma, devem ser consideradas neste processo de formação do professor, as experiências anteriores à formação pré-serviço, as experiências durante a formação pré-serviço e as experiências depois da formação pré-serviço.

Esta autora considera que este desenvolvimento não seja apenas um fenômeno de mudança, mas uma aprendizagem que ocorre durante toda a vida. Ela também alerta para o fato de que o desenvolvimento profissional de um professor não ocorrer de forma linear e independentemente do desenvolvimento pessoal. Polletini (1999) acredita que o desenvolvimento profissional do professor seja ainda um tema complexo, em aberto, que não deve seguir a um modelo rígido, além de ocorrer de uma forma mais cíclica. Ela aponta para a importância de se considerar a história de vida das pessoas, pois a análise de alguns fatos poderá indicar a ocorrência de pontos críticos e incidentes. Estes podem justificar razões para modificações na vida profissional, que, conjuntamente aos interesses pessoais, influenciam muitas das decisões de mudança nas trajetórias das carreiras profissionais. Desafios e experiências, também, podem influenciar na ocorrência de mudanças na prática e no pensamento de professores. A análise de uma experiência, acrescida à realização de reflexões sobre experiências passadas e presentes desempenha um papel fundamental para o desenvolvimento profissional do professor. Dessa forma, um importante fator determinante de mudança e desenvolvimento se constitui na reflexão sobre os tipos de experiências vivenciados tanto na vida pessoal, como no decorrer da trajetória profissional (POLLETINI, 1999).

Saraiva e Ponte (2003) destacaram a necessidade em se identificar como o professor poderá assumir integralmente o seu desenvolvimento profissional, de forma a aprofundar e tornar mais consistente o seu conhecimento e as suas práticas de ensino. Esta nova postura do professor se constitui em condição essencial para a criação tanto de estruturas mais adequadas de trabalho nas escolas, como de dispositivos de formação mais

aperfeiçoados e de maior alcance. O professor passará a ser enxergado de uma nova maneira, o que poderá se constituir em um passo importante para a melhoria do ensino de Matemática. Assim, o professor a partir da visão de um profissional incompleto, que depende das intenções de quem faz os currículos, poderá aparecer como alguém que pensa e age com intencionalidade, com conhecimento próprio e com capacidade para decidir e agir de acordo com as necessidades da sua situação concreta. Visto deste enfoque, inserido em um ambiente escolar, o desenvolvimento profissional do professor pode ser considerado como um processo complexo, em que o professor intervém como um todo, com a sua problemática interna, porém conectado com a realidade externa (SARAIVA; PONTE, 2003).

Day (1999), também, aborda o desenvolvimento profissional do professor de uma perspectiva mais ampla, como um processo que engloba todas as experiências de aprendizagem deste, quer sejam elas naturais ou planejadas e conscientes, e que tragam a ele benefício direto ou indireto, contribuindo para a melhoria da qualidade de seu desempenho com os alunos.

Guimarães (2006) observa que, atualmente, se reconhece a importância do percurso escolar do professor, das suas experiências passadas em suas crenças sobre o ensino-aprendizagem, na relação em que estabelece com o saber, com a sua transmissão e com a profissão docente.

Devido a todas as demandas da sociedade atual, Poletini (1999) constatou que a imagem do professor tem se modificado muito nos últimos anos, pois a partir de uma figura passiva tem surgido uma ativa, que escolhe ações e constrói perspectivas. O professor passou a ser visto como um profissional, que expressa diferentes habilidades, conhecimentos, visões, modos de agir, preocupações e interesses durante toda a carreira docente. Por sua vez, o ensino deixou de ser considerado apenas como um processo de transmissão de conhecimento, conduzido de forma isolada, assumindo um novo enfoque, como uma atividade não rotineira, conduzida de forma colaborativa.

Lopes (2003) alerta para o fato de o desenvolvimento profissional do professor ocorrer a partir de uma opção pessoal, levando este profissional a se envolver em projetos de formação intencionais, que deverão refletir em sua prática, quer seja individual ou coletivamente. Em sua tese de doutorado, defende um processo de formação que valorize o saber dos educadores envolvidos, provoque reflexão sistemática sobre as questões em curso, crie condições para que estes sejam pesquisadores de suas próprias práticas e lhes dê condições de investirem em uma produção coletiva do conhecimento.

Embora muitos autores não diferenciem os conceitos “formação” e “desenvolvimento profissional”, outros, como Ponte (1998) e Passos et al. (2006), os distinguem claramente.

Para Ponte (1998), a formação está associada à ideia de frequentar cursos, enquanto o desenvolvimento profissional além de incluir cursos, também abrange outras

atividades, como projetos, trocas de experiências, leituras e reflexões. Este autor ainda considera que, na formação, o movimento se dá de fora para dentro, pois o professor deve assimilar as informações e conhecimentos a ele transmitidos. No desenvolvimento profissional o movimento se dá de dentro para fora, pois cabe ao professor decidir quais são as questões que ele quer considerar, quais são os projetos que deseja executar, além da forma como estes serão conduzidos. Na formação procura-se atender mais as questões, nas quais o professor é considerado carente, enquanto no desenvolvimento profissional é dada uma maior atenção às potencialidades deste profissional. A formação tende a ser vista de forma compartimentalizada, pois os conteúdos são separados por assuntos e disciplinas. O desenvolvimento profissional enxerga o professor em sua totalidade, levando em consideração os seus aspectos afetivos, cognitivos e relacionais. A formação parte da teoria e na maior parte das situações não chega a sair da teoria, enquanto o desenvolvimento profissional considera a teoria e a prática de uma forma interligada.

Passos et al. (2006), também, compartilham com a visão de Ponte (1998) quanto às significações distintas destes conceitos. Estes autores entendem a palavra formação em seu sentido comum, ou seja, como “dar forma”, ou modelar algo ou alguém de acordo com um modelo, que se acredita como sendo o ideal. Este significado da palavra formação pressupõe a ação de alguém, que seria o formador, sobre o objeto de formação, que poderia ser o futuro professor ou o professor em serviço. Assim a palavra formação traz consigo uma concepção de que é o formador que assume o papel de protagonista na ação de formar, e não o formando.

Guimarães (2004, apud PASSOS et al., 2006, p.194 - 195) complementou assinalando que a palavra “formação” sempre esteve associada à tradição acadêmica de uma formação podendo ser ela a inicial, como a continuada. Na formação inicial é enfatizado o domínio dos saberes disciplinares, bem como das técnicas para transmiti-los. Já a formação continuada é entendida como uma forma de atualizar as informações e conceitos recebidos na formação inicial, preocupando-se com o oferecimento de cursos de reciclagem ou de atualização docente. Nestes cursos são transmitidos conhecimentos, técnicas e informações sobre os assuntos considerados importantes para que o professor possa adquirir o domínio do conteúdo de alguma disciplina.

Cochran-Smith e Lyle (1999, apud PASSOS et al. 2006, p.195) destacaram que esta concepção de formação incide sobre “a aprendizagem de conhecimentos *para* a prática e não de conhecimentos *na* ou *da* prática”.

Passos et al. (2006) consideraram a formação docente da perspectiva do desenvolvimento profissional e da “formação contínua”, entendidos como um processo permanente, contínuo, pessoal e nunca concluído, que abrange inúmeras etapas e instâncias formativas. Para estes autores, a formação contínua:

além do crescimento pessoal ao longo da vida, compreende também a formação profissional (teórico-prática) da formação inicial – voltada para a docência e que envolve aspectos conceituais, didático-pedagógicos e curriculares – e o desenvolvimento e a atualização da atividade profissional em processos de formação continuada após a conclusão da licenciatura. A *formação contínua*, portanto, é um fenômeno que ocorre ao longo de toda a vida e que acontece de modo integrado às práticas sociais e às cotidianas escolares de cada um, ganhando intensidade e relevância em algumas delas (p.195).

No presente estudo concebemos a pesquisa, da perspectiva do desenvolvimento profissional, entendido de uma forma mais ampla e abrangente, como citado por todos estes autores. Consideramos o desenvolvimento profissional do professor como um processo longo, contínuo, que se inicia em uma fase anterior à da formação inicial e que se estende por toda a sua vida profissional.

Em nossa pesquisa, levamos em consideração a história de vida de cada um dos professores investigados, as experiências destes no decorrer de suas vidas discente e docente, em relação às questões que pretendíamos estudar, bem como os desafios que fizeram estes professores refletir e, muitas vezes, alterar concepções, atitudes e percursos. Pelo fato de nos encontrarmos inseridos no contexto de um projeto, no âmbito de um curso de pós-graduação, a pesquisa levou em conta o fato de os professores participantes estarem passando por processo de formação continuada e de terem se envolvido no projeto a partir de uma opção pessoal. Inicialmente, todos os professores do Mestrado Profissional foram convidados a participar do AProvaME, mas nem todos aderiram. Os professores que manifestaram interesse em participar, também, se encontravam naquele momento em pleno exercício docente. No decorrer do projeto foram propiciados muitos momentos de encontros presenciais e virtuais, além das reuniões onde ocorreu uma construção colaborativa das atividades, propiciando inúmeras situações de reflexão e investigação sobre a própria prática.

Quanto à diferenciação que Ponte (1998) efetuou entre os conceitos formação continuada e desenvolvimento profissional, consideramos, neste estudo, a colocação deste autor de uma forma um pouco mais restrita.

Os professores participantes do projeto AProvaME, por exemplo, não decidiram que questões queriam estudar e desenvolver, que projetos desejariam executar, tampouco a forma como estes seriam conduzidos. As decisões principais vieram de fora para dentro, pois estas foram determinadas pelos pesquisadores do projeto, desde a forma como este seria implementado até os temas matemáticos selecionados, nos quais a prova deveria estar inserida. Assim, a diferenciação que Ponte (1998) efetua entre formação e

desenvolvimento profissional não pôde ser efetivamente implementada no cenário da pesquisa conduzida pelo AProvaME.

Contudo na medida em que o projeto foi se desenvolvendo, seguindo as orientações iniciais, ele foi se readaptando de acordo com o que estava ocorrendo com os professores, com as necessidades que eles manifestavam em termos de outros conhecimentos, gerando novas reflexões, discussões, investigações e aprendizagens. Muitas vezes o projeto caminhou de uma forma diferente, daquela que havia sido prevista inicialmente.

Quanto aos fatores que podem interferir no desenvolvimento profissional de professores de Matemática, Passos et al. (2006) apontaram inúmeros, como os pessoais, sociais, culturais, históricos, institucionais, cognitivos e afetivos.

Ferreira (2006) citou três fatores, a saber: a existência de um sentimento de insatisfação entre os professores com o seu modo de pensar e de atuar, em termos de metas, crenças e conhecimentos, fatos que poderiam levá-los a considerar uma mudança em seus pontos de vista; a curiosidade em relação a novas formas de ensinar e pensar; e a existência de um contexto favorável. Este contexto consistiria de um espaço rico em oportunidades, aberto às demandas do professor, atento a seus saberes e experiências, organizado em termos de espaço e tempo, de forma a garantir que a aprendizagem possa acontecer.

A fim de responder a muitas indagações sobre fatores que influenciam o desenvolvimento profissional e contextos favoráveis, Passos et al. (2006) realizaram uma meta-análise em pesquisas brasileiras que investigaram processos de formação e desenvolvimento profissional de professores de Matemática. A pesquisa conduzida por estes autores teve como objetivo identificar e analisar as práticas que se evidenciaram como sendo catalizadoras do desenvolvimento do professor, revelando indícios deste desenvolvimento. As pesquisas investigadas foram realizadas em contextos variados de formação contínua, em práticas coletivas ou não, envolvendo futuros professores, professores em exercício e formadores/pesquisadores.

Nos onze trabalhos analisados, entre dissertações e teses, no período considerado, de 1998 a 2003, cujo foco de investigação foi o estudo do desenvolvimento profissional do professor que ensina Matemática, buscaram-se indícios deste desenvolvimento, em diferentes contextos formativos. Nestes trabalhos foram identificadas duas modalidades de práticas, em que foram adotadas algumas estratégias que visaram mobilizar saberes e pensamentos de professores, para promover o seu desenvolvimento profissional, a saber: (1) práticas coletivas de reflexão, colaboração e investigação e; (2) outras práticas contributivas do desenvolvimento profissional (PASSOS et al., 2006).

Estes pesquisadores acreditam que as análises e interpretações produzidas por estes estudos forneceram indícios que lhes permitiram concluir que:

as práticas reflexivas, investigativas e colaborativas em ambientes coletivos de aprendizagem docente constituem uma poderosa tríade catalisadora do desenvolvimento profissional dos professores de Matemática (2006, p. 213).

No que se refere à primeira modalidade, ou seja, as práticas reflexivas, colaborativas e investigativas, embora elas não sejam mutuamente exclusivas, estes pesquisadores as consideraram individualmente, para efeito da realização de uma análise mais aprofundada.

Nestes estudos puderam ser identificados alguns resultados das práticas reflexivas no desenvolvimento profissional dos professores. Eles confirmaram que as práticas reflexivas sobre a própria prática, em especial sobre o próprio trabalho docente, ajudam a problematizar e a produzir estranhamentos sobre o que se ensina, além do motivo de se ensinar de uma forma e não de outra. Esta reflexão sobre a própria prática é potencializada quando é mediada pela reflexão coletiva e pela escrita. O professor quando escreve, em forma de narrativas ou relatos de aula, ele se dá conta de seu próprio processo de aprendizagem. Conforme observam estes autores (p. 202):

Em todos esses trabalhos, a reflexão compartilhada foi considerada como prática promotora de desenvolvimento. Os resultados apontaram que as tensões vivenciadas no grupo produzem a (re)significação de saberes e práticas e que os processos de reflexão promovem a tomada de consciência dos processos de aprendizagem; revelam o caráter formativo de algumas práticas de sala de aula; ampliam e enriquecem a aprendizagem e os saberes docentes (PASSOS et al., 2006, p. 202).

Passos et al. (2006), também, constataram que o trabalho coletivo, especialmente o colaborativo, representou um contexto altamente favorável à aprendizagem e ao desenvolvimento profissional do professor nos trabalhos investigados. Em um contexto colaborativo podem ocorrer interações com o outro e trocas de saberes, olhares e experiências. O sucesso deste trabalho em grupo, principalmente no que se refere à reflexão compartilhada, depende de algumas condições de funcionamento destes grupos, os diálogos devem ser estabelecidos em um ambiente aberto, de respeito, apoio, afeto e confiança e as ações coordenadas devem ser planejadas e negociadas coletivamente.

Concomitantemente foram identificados alguns elementos que evidenciaram a complexidade do trabalho em grupo, no que se referiu ao desenvolvimento profissional dos professores envolvidos. Alguns aspectos foram citados, como o tempo necessário para cada contexto de pesquisa; as condições oferecidas pelo local de trabalho; o acesso aos conhecimentos produzidos pela academia; a participação em projetos de pesquisa acadêmica; e a possibilidade de se trabalhar em grupos.

Os estudos investigados indicaram que o grupo colaborativo deveria envolver um pequeno número de docentes, que dispusessem de condições materiais e tempo livre para que participassem efetivamente das atividades desenvolvidas pelo grupo, bem como

revelaram que, para que estas práticas pudessem promover transformações na cultura escolar e profissional, seria necessário um tempo longo e contínuo. Um ambiente de confiança no grupo, geralmente, surge depois de um tempo maior de convivência, assim como um ambiente positivo de trabalho, a partir da mobilização das perspectivas pessoais e coletivas dos participantes, em função de um objetivo comum (PASSOS et al., 2006).

Ferreira (2006) considera que um ponto relevante na constituição de grupos de trabalhos colaborativos seja a percepção da participação no grupo como fonte de aprendizagem. Nesse sentido,

O grupo torna-se o contexto, no qual são criadas oportunidades para o professor explorar e questionar os seus próprios saberes e práticas, bem como aprender a partir dos saberes e práticas de outros professores, permitindo-lhe aprender por meio do desafio de suas próprias convicções (p.125).

Guimarães (2006), também, enfatiza a faceta da colaboração, pois gradualmente no grupo se assume que uma investigação, onde existe o confronto de ideias, a troca de experiências e a partilha de expectativas e dificuldades, além motivar e estimular os professores, propicia a eles não apenas uma reflexão mais fundamentada, mas também uma maior consciência e segurança no momento de sua atuação, refletindo em seus desenvolvimentos.

Em relação às práticas investigativas, Passos et al. (2006), a partir dos trabalhos analisados, identificaram algumas práticas que podem promover o desenvolvimento profissional. Estas foram reunidas em dois grupos: (i) a pesquisa que o professor produz em sala de aula e traz para ser compartilhada pelo grupo e (ii) a pesquisa que o professor realiza sobre a sua própria prática. Em relação à pesquisa que o professor traz para ser compartilhada pelo grupo, as práticas investigativas deste professor encontram no grupo um contexto favorável para que este discuta, analise e compartilhe com o grupo, as pesquisas que realiza em sua sala de aula com o grupo. Neste contexto de colaboração, cada participante contribui com saberes e experiências variadas e o objetivo da pesquisa passa a ser a transformação das práticas. Estes autores concluíram, após a análise dos estudos investigados, que algumas práticas investigativas permitiram que os professores participantes desenvolvessem uma maior problematização e compreensão do processo de ensinar Matemática ou de formar professores, contribuindo para o seu próprio desenvolvimento profissional, na medida em que os levaram a mudanças significativas tanto em suas práticas, quanto na de outros professores, que também participaram destas pesquisas, no papel de formadores.

Passos et al (2006) identificaram ainda, outras práticas, além das coletivas, que também trouxeram indícios de aprendizagem e de desenvolvimento profissional para os

professores participantes, como aquelas que estavam relacionadas com a experiência docente, na medida em que professores, pesquisadores/formadores estiveram envolvidos em alguma atividade que os fez investigar e refletir sobre a sua própria prática docente. Estes estudos evidenciaram que estas práticas contribuíram de maneira significativa naqueles participantes que se engajaram em um processo de reflexão sistemática sobre o que faziam, sabiam e pensavam, podendo levá-los a produzir novos significados e aprendizagens, transformando a sua prática pedagógica em Matemática e (re)significando as suas crenças, concepções e saberes, ou conhecimentos de natureza didático-pedagógica. Contudo, estes pesquisadores enfatizaram que o “potencial catalizador da reflexão” poderá ser mais bem aproveitado, se a reflexão passar a ser uma prática coletiva e/ou investigativa mediada pela escrita.

O estudo conduzido por Passos et al. (2006), também, indicou que seria desejável que o professor, no decorrer de sua trajetória docente, pudesse experienciar situações que o fizessem refletir e adquirir novos conhecimentos e saberes. Estas situações poderiam ocorrer dentro da própria instituição em que este professor trabalhasse ou em contextos de formação, inicial ou continuada, bem como em projetos de inovação curricular. Segundo estes pesquisadores, embora muitos contextos não possam ser considerados como coletivos, eles trazem uma dimensão peculiar, que é o da presença do outro, que pode ser o pesquisador, o formador ou aluno. Este outro irá questionar, problematizar e desmobilizar, possibilitando que o professor consiga se conscientizar do significado de um saber fazer e de se constituir profissional.

Em nossa pesquisa, no contexto do AProvaME, os professores inicialmente encontravam-se inseridos em um ambiente coletivo, onde ocorreram práticas reflexivas, colaborativas e investigativas, que poderiam contribuir com o seu desenvolvimento profissional. Neste primeiro momento, os professores elaboraram as primeiras versões das situações de aprendizagem, que buscavam a construção da prova matemática por parte de alunos, mediante a integração de recursos computacionais nas atividades. Em um segundo momento, quando este contexto passou a não ser mais coletivo, existiu sempre a presença do outro, o orientador, os alunos e os próprios colegas professores, quando estes professores tomaram para si o desenvolvimento de suas respectivas situações de aprendizagem, as finalizaram e as aplicaram junto aos estudantes, que participaram como sujeitos de suas respectivas pesquisas.

No decorrer da investigação, procuramos indícios de desenvolvimento profissional nos sujeitos de nossa pesquisa, tomando por base e buscando subsídios nos estudos de Passos et al. (2006), em relação às práticas promotoras deste desenvolvimento.

2.2 O USO DE RECURSOS TECNOLÓGICOS E O DESENVOLVIMENTO PROFISSIONAL

Em nossa pesquisa, no contexto do AProvaME, a elaboração das situações de aprendizagem, que buscavam que os alunos conseguissem construir a prova matemática, envolvia a integração de recursos tecnológicos. No decorrer do Mestrado Profissional, os professores cursaram uma disciplina, que abordava estes recursos, suas possibilidades e ferramentas, bem como questionava a sua utilização. Os professores, participantes do projeto, continuaram no AProvaME a investigar e aprender mais sobre estes recursos, além de passarem a refletir nas possibilidades e na relevância de sua inserção, nos momentos em que desenvolviam as atividades e as testavam com os seus alunos. Este processo, também, poderia levá-los a se desenvolverem profissionalmente.

Assim, para investigarmos o desenvolvimento profissional de professores de Matemática, levando em consideração os recursos tecnológicos, utilizamos as pesquisas e os estudos dos seguintes autores: Fiorentini (2003); Lima Costa (2008); Machado Costa e Fiorentini (2007); Miskulin (1999); Miskulin et al. (2006); Ponte (2000); Ponte et al. (2003); Ribeiro e Ponte (2000); Saraiva e Ponte (2003); e Vieira, Almeida e Alonso (2003).

Concomitantemente, a todas as ponderações que apresentamos no item anterior (2.1), em relação à formação inicial, à continuada e ao desenvolvimento profissional, temos presenciado desde os últimos anos da década de 1990, um grande desenvolvimento tecnológico, observado em todos os setores da sociedade, que, a partir daquele momento, torna-se conhecida como “sociedade da informação”.

Esta sociedade em mudança tem produzido por sua vez uma escola em mudança, refletindo diretamente no professor, que deverá assumir uma nova postura, a de um permanente aprendiz, como um agente ativo em seu local de trabalho, disposto a colaborar com os colegas, tanto em relação à prática docente, quanto se envolvendo em problemas educacionais mais amplos (SARAIVA; PONTE, 2003).

Novas tecnologias têm sido desenvolvidas, recebendo a designação de tecnologias de informação e de comunicação (TIC). Estas tecnologias apresentam perspectivas inovadoras ao ensino, o que tem propiciado um repensar da formação docente. As escolas, que já utilizam as TIC em suas atividades gerais, vêm estudando como incorporá-las nas diversas áreas curriculares, e em particular na disciplina de Matemática.

Considerando-se o cenário da formação de professores e das múltiplas dimensões que permeiam a utilização das TIC em aulas de Matemática, Miskulin et al. (2006) apontam para a existência de muitos desafios e dimensões, como as epistemológicas, culturais,

políticas, sociais e acadêmicas, que devem ser levadas em conta na implementação e disseminação das TIC em um contexto escolar.

Segundo estes pesquisadores, para que as TIC possam ser integradas e disseminadas no cenário educacional, inicialmente a escola deveria possuir um projeto político-pedagógico que valorizasse a tecnologia digital como um recurso tanto teórico como metodológico integrado ao processo de ensino-aprendizagem. A proposta de ensino precisaria estar integrada com a tecnologia, fazendo uso de recursos colaborativos, com vistas a desenvolver competências do professor, para que este possa atuar como mediador que sabe como integrar a tecnologia à sua função docente. Cursos de formação de professores, que valorizem a aprendizagem participativa e colaborativa, poderiam ser pensados e providenciados, de forma a propiciar condições a estes profissionais de acompanhar a dinâmica atual da sociedade.

Miskulin et al. (2006) consideram que a tecnologia deveria sair dos laboratórios e entrar nas salas de aula, seguindo na direção do desenvolvimento de temas relacionados às diversas áreas do conhecimento. Vista desta perspectiva, a tecnologia poderia se tornar um recurso pedagógico de apoio ao professor no desenvolvimento de sua aula. Para estes autores, esta perspectiva possibilitaria uma integração entre o professor e os alunos, estimulando a criação de novas habilidades para o desenvolvimento dos raciocínios lógico, comunicativo e criativo.

Ainda segundo estes autores, para que esta integração possa ocorrer, torna-se necessário criar um novo perfil de professor, que adquira diversos conhecimentos ainda no período de sua graduação, além de uma formação contínua sobre os conceitos pedagógicos e técnicos relacionados ao uso de recursos computacionais. Ao mesmo tempo, este novo perfil pressupõe que o professor compreenda que a construção do conhecimento nesta era digital requer uma constante atualização, que só se torna eficaz se esta participar de um processo coletivo e consciente integrado ao contexto escolar.

Embora muitos profissionais considerem que o ato de educar no sentido das novas tecnologias em uma sociedade de informação signifique “treinar” as pessoas para o uso delas, Miskulin (1999) entende que educar significa formá-las para “aprender a aprender”, devido à rápida transformação do conhecimento tecnológico. Esta pesquisadora propõe aos educadores, em geral, que se preparem para que tenham condições de assumir novas formas de produção e apropriação do saber científico, dominar e produzir novos conhecimentos, contribuindo para transcender os métodos de ensino e as teorias de trabalho, muitos deles já obsoletos. O educador matemático, em especial, assumirá um papel fundamental, pois, quando se apropriar das TIC, conseguirá integrá-las à sua prática docente em um contexto educacional, tendo em vista que estas já fazem parte integrante da realidade dos alunos (MISKULIN, 1999).

Ribeiro e Ponte (2000) afirmam que, da perspectiva de muitos dos atuais programas de ensino levados adiante em cursos de formação inicial ou continuada em Matemática, a utilização das novas tecnologias coloca aos professores novos desafios. Por sua vez, Cuban (1986 apud RIBEIRO; PONTE, 2000) sinaliza que este processo de apropriação da tecnologia pelos professores tem-se mostrado complexo e problemático.

Concomitantemente, Ribeiro e Ponte (2000) entendem que a capacidade de atuação dos professores neste domínio de prática profissional está relacionada às oportunidades de formação que estes puderem empreender. Embora muitas vezes estas oportunidades ocorram, muitos cursos de formação não são pensados e desenvolvidos de forma a privilegiar a participação do professor na construção do conhecimento, não resultando em uma verdadeira mudança na situação atual dos processos de ensino.

Estes autores ainda apontam para a frequência das ações de formação, como um dos fatores mais importantes para o desenvolvimento de competências dos professores, no que diz respeito às tecnologias e ao seu uso na prática (RIBEIRO; PONTE, 2000).

Bottino e Furinghetti (1994 apud RIBEIRO, PONTE, 2000) se referem a dois níveis de utilização da tecnologia por parte dos professores. Parece existir um “nível superficial”, em que esta se constitui em uma “ferramenta” que ajuda a melhorar a apresentação de tópicos curriculares, enquanto no “nível profundo” a tecnologia passa a ser vista como um meio para a construção do conhecimento, de um novo enfoque. Estas autoras consideram que, para que este segundo nível seja atingido, a formação de professores deve incluir não só as características e oportunidades que a tecnologia oferece, mas também os percursos didáticos, nos quais o uso desta esteja ligado funcionalmente aos objetivos matemáticos.

Algumas pesquisas têm sido desenvolvidas com o intuito de verificar como a utilização das TIC, em um ambiente de trabalho reflexivo e investigativo, poderia trazer mudanças profundas à formação, à cultura docente, refletindo-se no ensino de matemática e no desenvolvimento profissional do professor. Nesse sentido, Fiorentini (2003) aponta na direção de uma formação docente, resultante de um processo contínuo, nunca concluído e mediado por práticas reflexivas e investigativas.

Machado Costa e Fiorentini (2007), apesar de constatarem a necessidade de um longo período de tempo, para que possam ser identificadas e percebidas mudanças de concepções, saberes e práticas do professor em sua área de atuação, assinalam que alguns contextos podem acelerar o processo de mudança e o desenvolvimento profissional do professor. Algumas pesquisas realizadas, que levam em consideração um contexto favorável, têm evidenciado que o uso das TIC na formação inicial e na prática docente pode contribuir para o desenvolvimento intelectual e profissional de professores. Este contexto favorável, em vez de prever um treinamento ostensivo de professores para o uso da

informática no ensino, considera importante e fundamental a realização de um trabalho colaborativo entre os professores, formadores e especialistas em informática, que juntos planejam, executam, avaliam e refletem sobre os resultados obtidos (MACHADO COSTA; FIORENTINI, 2007; PONTE, 2000; PONTE et al., 2003).

Lima Costa (2008) investigou o desenvolvimento profissional de um grupo de professoras de Matemática no processo de elaboração de um artigo multimídia. Esta autora adotou a concepção de desenvolvimento profissional condicionada à ideia de um processo permanente e constante que valoriza o professor e o seu saber, gerado em sua atuação com os alunos em sala de aula. Nesta perspectiva o professor é considerado como protagonista ativo, que pensa, sabe e age de acordo com o que necessita para o exercício de sua profissão. No decorrer deste processo, as professoras pesquisadas constituíram um grupo que se consolidou como uma comunidade de aprendizagem. Este estudo indicou que comunidades de aprendizagem formadas por professores e pesquisador podem se constituir em oportunidades excelentes de desenvolvimento profissional para o grupo.

Machado Costa e Fiorentini (2007), em uma pesquisa constataram que a reflexão e a investigação sobre uma prática pedagógica mediada pelas TIC, em um ambiente de colaboração, se mostraram essenciais ao desenvolvimento profissional e à mudança de cultura. Este estudo foi realizado em uma escola pública brasileira, com professores de Matemática e um agente externo. Estes formaram um grupo colaborativo visando introduzir as TIC em suas práticas pedagógicas, sendo realizado um estudo de caso de uma professora participante. Este estudo indicou que o uso das TIC no ensino de Matemática, mediado pelo processo colaborativo, auxiliou o desenvolvimento profissional desta professora, bem como propiciou uma mudança de cultura em sua prática docente. Este processo possibilitou que surgissem nela novos aspectos. Ela passou a vislumbrar as possibilidades das TIC, compartilhando experiências e saberes com os outros professores e levando os seus alunos ao acesso e à interlocução com os conhecimentos disponíveis na Internet.

Estes pesquisadores observaram que um tipo de contexto, como o que foi proporcionado pela pesquisa por eles conduzida, que envolveu o uso das TIC no ensino de Matemática, mediado por um processo colaborativo, possibilita que ocorra uma mudança de concepções e oferece ao professor condições de se tornar um profissional reflexivo, crítico, investigador, autônomo e colaborador. A formação do professor poderá ser reconsiderada, propiciando a ele maiores oportunidades de participação em projetos, em contextos escolares (MACHADO COSTA; FIORENTINI, 2007).

Para Vieira, Almeida e Alonso (2003), a apropriação da tecnologia por parte do professor é um processo de construção que perpassa não só a prontidão pedagógica

necessária no âmbito da sala de aula, como a competência efetivamente exercitada cotidianamente na mediação do processo de construção do conhecimento. Estes autores asseguram que a profissão docente exige dos professores uma competência justificável e coerente para a realização de suas tarefas, com estratégias e ações didáticas definidas. No que se refere à apropriação e ao uso da tecnologia por parte dos professores, estes devem aprender a utilizar os recursos tecnológicos de uma forma compatível com o processo de ensino-aprendizagem.

Em nosso estudo, os professores participantes estavam inseridos em um projeto institucional, o AProvaME, cujo contexto foi pensado e desenvolvido com o objetivo de torná-los os principais protagonistas de um processo de construção de conhecimentos, que poderia levá-los a mudanças de concepções e práticas.

No decorrer deste projeto, os professores participantes foram sendo submetidos a múltiplas ações de formação, muitos encontros e diversas reuniões foram realizados, em que ocorreu uma reflexão coletiva sobre as leituras efetuadas, bem como discussões de aspectos ligados à prática, além de uma construção colaborativa de situações de aprendizagem, envolvendo recursos tecnológicos e prova. Este contexto propiciado pelo AProvaME, considerado favorável para a ocorrência do desenvolvimento profissional, atribuiu importância a um trabalho reflexivo, investigativo e colaborativo entre professores, pesquisadores e alunos, que em diferentes momentos planejaram, avaliaram e refletiram sobre os resultados obtidos. Este contexto favorável encontra ressonância nos trabalhos de Machado Costa e Fiorentini (2007); Ponte (2000); e Ponte et al. (2003).

Pela própria natureza e condução do projeto, como os professores foram inicialmente convidados a participar e somente os interessados aderiram, este fato já indica um interesse inicial por parte dos professores na aprendizagem sobre o tema prova matemática e na utilização do computador.

No próximo item trataremos da importância da mudança de concepções dos professores de Matemática em seu desenvolvimento profissional.

2.3 CONCEPÇÕES DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA E O DESENVOLVIMENTO PROFISSIONAL

Alguns estudos e pesquisas, como os que foram conduzidos por Jahn, Healy e Pitta Coelho (2007), Ponte (1990, 1992), Ribeiro e Ponte (2000) e Thompson (1992), apontam para a importância e revelam um interesse na investigação das concepções de professores.

Ao tratar das concepções, Ponte (1992) observa que elas possuem uma natureza cognitiva e atuam como uma espécie de filtro, refletindo na forma como as pessoas organizam e estruturaram as suas ideias, pensam e enxergam o mundo. Este autor pondera que, embora as concepções não sejam observáveis no comportamento das pessoas, tampouco se revelem facilmente, elas representam um importante papel nas escolhas e na conduta destas. Assim, se as concepções atuarem como elementos bloqueadores em relação a novas realidades ou problemas, elas limitarão as possibilidades de compreensão e a atuação das pessoas.

Segundo este autor, as concepções são formadas pela interação entre dois processos simultâneos, o individual, resultante da elaboração sobre a própria experiência, e o social, que emerge como consequência de um confronto entre as elaborações individuais com as das outras pessoas.

Em relação à Matemática, Ponte (1992) afirma que este é um assunto que as pessoas, em geral, já trazem consigo muitas concepções. Estas são influenciadas em parte pelas experiências adquiridas nesta área do conhecimento, acrescidas pelas representações sociais dominantes. A Matemática, pelo fato de ser uma ciência antiga e que tem feito parte do conjunto das disciplinas obrigatórias do currículo há muito tempo, possui uma imagem forte, que provoca tanto admiração quanto medo. Ela tem sido considerada uma disciplina extremamente difícil, que lida com objetos e teorias abstratas e incompreensíveis, sendo apenas valorizado o seu aspecto mecânico, associado ao cálculo. Este conjunto de aspectos gera efeitos nas concepções que as pessoas têm da Matemática, que se projetam de uma forma intensa e negativa em seu processo de ensino e aprendizagem.

Em um contexto escolar, os professores possuem um papel muito importante na organização das experiências de aprendizagem de seus alunos, podendo muitas vezes influenciar as concepções destes. Dessa forma, torna-se muito importante identificar: como os próprios professores veem a Matemática; a forma como é se estabelecida a relação entre as concepções e a prática; buscar o entendimento da dinâmica das concepções; como elas se formam e se modificam; e finalmente, o papel que os processos de formação podem ter nestas mudanças (PONTE, 1992).

Em se tratando das concepções sobre o ensino e a aprendizagem da prova matemática, Knuth (2002 apud JAHN; HEALY; PITTA COELHO, 2007) observa que os professores consideram a prova como um procedimento pedagógico limitado, na medida em que não a entendem como um meio de estudar Matemática, tampouco como uma forma de fazer que os seus alunos possam produzir argumentos válidos matematicamente.

Jahn, Healy e Pitta Coelho (2007) afirmam que no contexto brasileiro, ainda existe uma carência de estudos e pesquisas que tratem da identificação e do mapeamento das concepções sobre provas, que possuem alunos e professores da Educação Básica.

Por sua vez, quando se trata da introdução e uso adequado das novas tecnologias em contextos educacionais, Ribeiro e Ponte (2000) observam que estas inovações somente poderão ocorrer se também for propiciada uma mudança nas concepções e na prática dos professores. Concomitantemente, a partir de alguns estudos estes mesmos autores observaram que o simples fato dos professores apresentarem o domínio técnico do equipamento e do *software* não se mostrou suficiente, para que fossem propiciadas mudanças significativas nas concepções e práticas destes.

Ponte (1990) constata que o computador pode ser introduzido na sala de aula, sem que este fato leve a uma mudança de concepções dos professores. Este mesmo autor aponta alguns fatores que poderiam ocasionar esta mudança, como: estes manifestarem interesse pela utilização do computador de uma forma adequada; estarem abertos a novos aprendizados; estabelecerem novas relações com os alunos; assumirem novos papéis; além de criarem um ambiente favorável à reflexão. A reflexão poderia, neste sentido, colaborar para a mudança de concepções, ainda mais se ela se der em um contexto colaborativo. Verifica-se que este autor atribui uma grande importância à atitude de reflexão, especialmente se ela for vista do enfoque de uma prática social desenvolvida em um contexto colaborativo.

Alguns estudos realizados, como os de Canavarro (1993 apud RIBEIRO; PONTE, 2000), Ponte (1992) e Thompson (1992) parecem indicar a existência de uma influência da experiência prática de professores em suas concepções.

Alguns dados obtidos do AProvaME (JAHN; HEALY; PITTA COELHO, 2007), em relação à primeira fase deste projeto, indicaram a complexidade de um processo de mudança de concepções. No decorrer deste projeto, os professores participaram de algumas etapas, estruturadas de forma a poderem contribuir com o processo de mudanças destes, sendo que muitos deles perceberam-se assumindo novos papéis e novas posturas ante seus alunos. Estas autoras observaram, a partir das informações coletadas neste projeto, que em termos de desenvolvimento profissional de professores existe um longo caminho a ser percorrido, para que profissionais preparados possam se formar com condições para criar

culturas nas suas salas de aula, que envolvam os alunos na construção do raciocínio matemático.

No que diz respeito ao nosso entendimento sobre as concepções, e em como uma mudança nestas poderia influenciar a prática docente e o desenvolvimento profissional, nos baseamos nas investigações de Ponte (1990, 1992) e Ribeiro e Ponte (2000). Levamos em consideração nestes estudos a maneira como os professores concebem a Matemática, em especial a prova, como esta concepção se modifica e o papel que processos de formação podem assumir, em especial quando envolvem o uso do computador, em um contexto colaborativo.

No próximo capítulo, trataremos a prova na Educação Matemática, dado que esta temática fornece um contexto forte para propiciar e contribuir com o desenvolvimento profissional do professor de Matemática.

3 A PROVA

Inicialmente, neste capítulo apresentamos a distinção entre os termos demonstração e prova, do enfoque de nosso estudo. Em um segundo momento, tratamos a prova no âmbito da Educação Matemática, inserida em um contexto escolar. Em seguida, indicamos e descrevemos os tipos de provas e enunciamos as funções de uma prova.

Finalizamos com uma discussão sobre a prova e o seu ensino com a utilização de recursos da informática em ambientes mediados pela tecnologia. Apresentamos o *software* Cabri-Géomètre e algumas características nele presentes, que poderiam contribuir com o ensino da prova, favorecendo a sua obtenção. Este *software* fornece um ambiente interativo de geometria dinâmica, possibilitando o usuário ao utilizar as suas ferramentas, elaborar o seu próprio conhecimento, por meio da construção e da verificação das propriedades das figuras geométricas. O tipo de experiência proporcionado quando os professores interagem com o Cabri-Géomètre, possivelmente, refletirá inicialmente as concepções que estes já trazem consigo sobre prova, possibilitando verificar como estas poderão evoluir a partir das práticas de grupo, de reflexão e de investigação, ao utilizarem tais ambientes.

Indicamos também neste capítulo alguns autores e resultados de pesquisas, relacionados à temática do projeto AProvaME, que fundamentaram teoricamente as escolhas e as análises que serão efetuadas na presente pesquisa.

Quanto às denominações referentes à prova e à demonstração, não as consideramos neste estudo como palavras sinônimas, sendo que adotamos a distinção de Balacheff (1988). Para a apresentação da prova na educação matemática e no contexto escolar, utilizamos os estudos e pesquisas de Andrade e Nacarato (2005); Hanna e Barbeau (2008); Hanna e Jahnke (1996); Healy (2005); Healy e Hoyles (1998, 2000); Nasser e Tinoco (2001); Pereira (2007); e Pietropaolo (2005). Fundamentamos os tipos de prova em Balacheff (1988), embora na presente investigação também tenhamos citado o estudo de Resende e Nasser (1994). Quanto às funções da prova citamos alguns trabalhos, como os de De Villiers (2001, 2002); Hanna (1995); Nasser e Tinoco (2001); e Pietropaolo (2005). Com relação ao ensino da prova e ao uso de recursos da informática, nos remetemos a alguns autores e a seus trabalhos, como Baldin e Villagra (2004); Bussi e Mariotti (1999); De Villiers (1997); Duarte (2007); Hajnal (2007); Healy (2000); Healy e Hoyles (2002); Healy e Jahn (2007); Hoyles e Jones (1998); Laborde (1993); Laborde e Laborde (1995); Pereira (2007); Pietropaolo (2005); e Valente (1993, 2002).

3.1 DEMONSTRAÇÕES E PROVAS

Em um contexto exclusivo da Matemática, os termos demonstração e prova possuem o mesmo significado e são, em geral, usados como palavras sinônimas, consistindo em um processo de validação de uma proposição realizada por meio de um raciocínio hipotético-dedutivo rigoroso (PIETROPAOLO, 2005).

Assim, de acordo com o ponto de vista dos matemáticos da academia, a prova é um desenvolvimento formal, que parte de alguns pressupostos, as hipóteses, e por meio de um encadeamento do raciocínio e de resultados já conhecidos (teoremas), consegue-se atingir o resultado que se quer mostrar que é verdadeiro, a tese (NASSER; TINOCO, 2001).

Contudo, Pietropaolo (2005) assinala que, embora muitos matemáticos e mesmo educadores matemáticos adotem os termos provas e demonstrações como palavras sinônimas, alguns educadores matemáticos, como Balacheff (1988), distinguem estas duas denominações.

Balacheff (1988) considera uma prova como sendo um discurso que valida uma proposição para uma determinada comunidade, podendo assumir diversos níveis de generalização. A demonstração, por sua vez, consistiria em um tipo particular de prova, que validaria uma proposição em termos matemáticos, ou seja, por meio de um desenvolvimento dedutivo rigoroso de forma a atingir a prova formal.

A diferenciação entre os termos demonstração e prova, efetuada pela comunidade dos educadores matemáticos, ocorreu devido à constatação pelos professores de Matemática das dificuldades observadas em alunos, ao tentarem formalizar uma prova em uma linguagem matemática.

A distinção entre estes dois termos, também, pode ser verificada em dicionários de filosofia, que atribuem ao termo prova um sentido mais amplo do que o de demonstração, na medida em que consideram que as demonstrações são provas, porém, nem todas as provas são demonstrações.

Pietropaolo (2005) em sua pesquisa constatou que existe um certo desconhecimento por parte de alguns autores da existência desta distinção. Em alguns artigos sobre a História da Matemática, e em particular, sobre a Educação Matemática, estes autores quando se referem às demonstrações utilizam diversos termos, como demonstrações formais, demonstrações rigorosas, provas rigorosas ou somente provas. Algumas vezes em um mesmo artigo, é possível identificar significados diferentes para uma mesma expressão.

Pode-se, assim, encontrar um grande número de significados para a palavra prova, devido aos diversos termos a ela associados, ainda mais, considerando-se os diferentes contextos em que este termo é utilizado. Alguns pesquisadores em Educação Matemática,

como Godino e Récio (1997, apud PIETROPAOLO, 2005), têm se interessado e estudado estes diferentes significados, pois consideraram fundamental a realização desta análise em pesquisas que envolvem esta temática.

Estes pesquisadores identificaram características de conceitos de prova presentes em diferentes contextos institucionais, como no cotidiano, nas ciências empíricas, na matemática profissional, na lógica e nos alicerces da matemática. Embora estes contextos sejam diferentes, a procura pela validação de afirmações por meio de argumentos é algo comum entre todos eles, ainda que estes argumentos sejam construídos e apresentados de formas distintas, por procedimentos diferentes.

Em nossa pesquisa, conforme já explicitado anteriormente, adotamos a posição de Balacheff (1988), que distingue os termos demonstração e prova, pois as consideramos também como palavras dotadas de significados distintos.

Assim sendo, a prova em nosso estudo possuiu um significado mais amplo, podendo ser entendida como um discurso para estabelecer a validade de uma afirmação, não necessariamente aceita no domínio da Matemática. Em nosso entendimento o discurso ou a justificativa, como produções dos alunos, deverão ser aceitos no contexto escolar, em termos do raciocínio envolvido, embora muitas vezes estes não consigam atingir a formalização necessária. Estas produções poderão ser classificadas de acordo com o seu nível de generalidade e serão designadas provas.

Os termos demonstração ou prova formal, por sua vez, serão reservados a um tipo de prova, aceita pela comunidade dos matemáticos. Esta prova formal será baseada em um conjunto de axiomas e de outras propriedades já demonstradas, devendo ser obtida por meio de um processo hipotético-dedutivo, presente em diversos modelos matemáticos.

3.2 A PROVA, A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E O CONTEXTO ESCOLAR

A prova, como característica essencial da Matemática, deveria ser considerada um componente fundamental na Educação Matemática. Porém, introduzir a prova no contexto escolar, inserida em uma prática de sala de aula, não se tem revelado um assunto simples. Este fato tem ocorrido, em parte, devido à existência de diferentes visões que constantemente, se desenvolvem sobre a natureza e o papel da prova, bem como as regras às quais ela deveria se adequar (HANNA; JAHNKE, 1996).

Estes autores observaram que durante o século XIX e início do século XX, houve uma reavaliação dos fundamentos da Matemática e da natureza de suas verdades, refletindo-se nas diferentes visões da prova. Embora algumas concepções tenham sido

mantidas, esta retomada levou ao surgimento de filosofias extremamente divergentes, que ficaram conhecidas como o logicismo, o formalismo e o intuicionismo. Atualmente, estas diferenças se refletem nas diferentes visões de prova, que passaram a ser identificadas como “provas matemáticas experimentais”, “provas matemáticas semi-rigorosas” e “provas exatas”. Estes conceitos e práticas emergiram a partir de um grande crescimento da Matemática, registrado nos últimos cinquenta anos, juntamente com o desenvolvimento do uso de computadores na pesquisa matemática. Quando estas controvérsias forem transpostas para a sala de aula, os educadores matemáticos terão que reconhecer a importância da prova matemática, se familiarizando com este cenário complexo e levando a alterações no ensino. Da mesma forma em que a prova é considerada muito importante para os matemáticos, o papel da prova na Educação Matemática também deverá ser reconhecido. Assim, estes autores consideram que a prova, em seu entendimento mais amplo, pode tornar-se uma ferramenta essencial para se proporcionar o desenvolvimento do conhecimento matemático em sala de aula (HANNA; JAHNKE, 1996).

Rav (1999, apud HANNA; BARBEAU, 2008) observa que a prova, além de estabelecer as verdades matemáticas, possui um outro aspecto que ele considera ser muito mais importante. Ele acredita que a prova não apenas seja relevante porque demonstra um resultado, mas também porque proporciona métodos, ferramentas, estratégias e conceitos que têm uma grande aplicação, tanto na Matemática, como abre novas direções e perspectivas em campos afins.

Hanna e Barbeau (2008) complementam afirmando que o simples ato de planejar uma prova contribui com o desenvolvimento da Matemática. A prova produz uma nova compreensão matemática, novas ligações conceituais e novos métodos para resolver problemas, o que proporciona a elas um valor muito maior do que apenas estabelecer a verdade das proposições.

Healy e Hoyles (1998) assinalam que a prova em seu sentido mais abrangente possui um papel central na compreensão do conhecimento matemático, apesar de seu processo de construção ser considerado muito complexo. A construção da prova envolve elementos como a verificação que certos fatos emergem como consequência de outros, além da organização de uma sequência coerente de transformações pelas quais certas propriedades podem ser deduzidas de outras. Em especial, a prova formal ou demonstração oferece um método de validação do conhecimento. Ela é uma ferramenta que distingue a Matemática das ciências experimentais que, para validar o conhecimento utilizam processos de indução.

Estas pesquisadoras, com alguns outros autores, como Hanna (1995), Hanna e Jahnke (1996) e Pereira (2007), também, compartilham com a visão de Balacheff (1988), atribuindo ao termo prova um significado mais abrangente, e aos termos demonstração,

prova formal ou prova dedutiva, a prova obtida por um processo que envolveu o raciocínio dedutivo.

O raciocínio envolvido para a obtenção da prova formal constitui-se em um processo, no qual a validade de um enunciado é comprovada por uma cadeia de raciocínios dedutivos a partir de certo número de proposições aceitas. No caso da Matemática, algum fato só poderá ser aceito como uma lei, se este resultado for obtido por meio da realização de uma prova rigorosa, ou de uma prova formal. Em relação às ciências experimentais, embora muitos pesquisadores destas ciências possam provar algumas das leis, como consequências necessárias de outras, usando um processo de indução, eles não poderão fazer o mesmo para todas as leis. Em seguida, esta lei assim “provada” só teria validade se concordasse com a experiência (justificativa empírica) e com a observação. Assim sendo, a prova dedutiva é um dos aspectos que diferencia a Matemática das demais ciências experimentais (PIETROPAOLO, 2005).

Quando a prova na sua forma dedutiva é introduzida ao estudante sem a sua devida conexão com algum contexto experimental, Healy e Hoyles (1998) constatam que ela é vista como inacessível e sem sentido, envolvendo apenas a memorização e a reprodução.

Porém nem sempre é possível ou desejado passar por um contexto experimental para se construir uma prova.

Healy e Hoyles (1998) entendem que, caso um contexto experimental seja introduzido antes da prova dedutiva, os estudantes parecem compreender melhor o que é requerido dela, porém ainda não são capazes de construí-la. Estas autoras sugerem que uma alternativa possível para a introdução da prova em um contexto escolar seria a busca de situações de ensino, que ajudassem os estudantes a escolher, usando os seus conhecimentos já adquiridos, entre conceitos dedutivos e indutivos; contextos sobre os quais fizesse sentido formular definições e declarações, usando procedimentos de dedução que não prejudicassem a conexão com a sua respectiva justificativa empírica (HEALY; HOYLES, 1998).

Diversos estudos internacionais em Educação Matemática (CHAZAN, 1993; LIN, 2000; HEALY; HOYLES, 2000) indicam que os estudantes tendem a confundir raciocínios dedutivos com justificativas empíricas. Este conjunto de estudos nesta área constatou inúmeras dificuldades relacionadas ao ensino e à aprendizagem da prova nos diferentes países em que este assunto estava sendo estudado. Uma destas dificuldades estaria relacionada às concepções que professores e alunos trazem sobre esta temática. Em se tratando de concepções de alunos, algumas variações significativas puderam ser diagnosticadas, dependendo do país em que estes viviam, pois estas estavam relacionadas ao currículo existente em cada país estudado.

Healy e Hoyles (2000) observaram em uma pesquisa realizada na Inglaterra, que os alunos consideraram os argumentos apresentados de uma maneira formal contendo Álgebra, mais difíceis de entender, que argumentos comunicados por meio de palavras e desenhos.

Para Healy (2005) uma abordagem eficiente para o ensino da prova requer o conhecimento das dificuldades e concepções dos alunos, o desenvolvimento de situações de aprendizagem inovadoras que explorem novos contextos e ferramentas para o acesso e construção de argumentos formais, bem como a aceitação e apropriação pelos professores de tais situações.

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) pode ser identificada uma preocupação com a argumentação e a produção de uma prova (BRASIL, 1998). Os PCN apontam para a importância do desenvolvimento de certas atitudes na formação das pessoas, como os atos de levantar hipóteses e argumentar. Estes parâmetros consideram que o ato de argumentar, além de se constituir em uma aprendizagem significativa, também é essencial na convivência social e no pleno exercício da cidadania. Assim sendo, os PCN recomendam que o currículo de Matemática deva propiciar experiências e atividades, que possibilitem aos alunos o desenvolvimento de conjecturas e a formulação e a comunicação de argumentos matematicamente válidos.

Andrade e Nacarato (2005) entendem que na educação básica não cabe se falar na demonstração, no sentido da prova formal, mas sim em processos de validação, os quais envolvem habilidades para justificar, argumentar e provar fatos matemáticos.

O ambiente de sala de aula, para Pereira (2007) se constitui em um ambiente propício e privilegiado, pois consegue promover uma aproximação do aluno com as provas. Para este autor o ensino de provas exige que inicialmente se desperte no aluno a convicção de que elas são necessárias e acessíveis. Dessa forma, faz-se necessário o trabalho com argumentações e provas na sala de aula, visto como um meio em que o aluno possa compreender e vivenciar o processo de sua construção. Este processo não deve limitar-se à reprodução de provas formais, inacessíveis para a maioria, sendo que o aluno deverá ser colocado em situações em que ele possa levantar conjecturas e construir justificativas matemáticas.

Conforme citado anteriormente, a construção de uma prova no contexto escolar é diferente daquela direcionada aos matemáticos e consiste em convencer alguém ou a si mesmo de que determinada proposição ou afirmação é verdadeira. Porém, a qualidade dos argumentos necessários para este convencimento, bem como o nível de generalidade de uma prova, é variável. Muitas vezes, um aluno pode se convencer da validade de um teorema, quando são satisfeitos alguns casos particulares. Porém este tipo de argumento, certamente, não convencerá um matemático, pois no âmbito da Matemática, para se validar

uma proposição, é necessária uma demonstração ou prova dotada de toda formalidade e rigor necessários. Para Pereira (2007), os argumentos ou justificativas produzidos pelos alunos, em um contexto de matemática escolar, devem ser considerados como objetos de ensino e não apenas como respostas inconsistentes, mesmo que muitas vezes estes argumentos não constituam uma demonstração aceita pela comunidade matemática.

Alguns pesquisadores, como Balacheff (1988) e Resende e Nasser (1994), identificaram no decorrer de suas investigações diversos tipos de provas, no que se referiu à qualidade dos argumentos e ao nível de generalidade.

3.3 TIPOS DE PROVAS

Para Balacheff (1988), o seu entendimento sobre a prova originou-se a partir da produção de seus alunos, inserida em uma abordagem experimental. Este fato permitiu-lhe verificar que os processos de prova usados pelos seus alunos, para solucionar problemas, pareciam mais simples, conseguindo muitas vezes identificar, ao examinar estas soluções, como eles conseguiam se convencer da validade de uma determinada proposição. Este pesquisador apontou para a necessidade de um contexto social, que requeria uma interação oral, porém com uma intervenção mínima de um observador. Por meio de um diálogo com os alunos, os processos que os levaram à resolução dos problemas propostos poderiam ficar mais visíveis.

Assim, ao estudar as provas produzidas por seus alunos, Balacheff (1988) as classificou em duas categorias, as provas pragmáticas e as provas conceituais. Segundo o pesquisador, as *provas pragmáticas* se apóiam em ações diretas sobre algumas representações dos objetos matemáticos, nas quais o conhecimento não é formulado explicitamente. Já nas *provas conceituais* os conhecimentos são teóricos e há o controle dos objetos, sendo que estas são baseadas nas propriedades dos objetos e em suas relações.

Balacheff (1988), ainda, subdivide estas duas categorias de provas em alguns níveis, de acordo com o grau de generalidade. As provas pragmáticas são divididas em três níveis - empirismo ingênuo; experimento crucial e exemplo genérico - e as conceituais em dois níveis - experimento de pensamento e cálculo nas afirmações. Segue-se uma breve descrição de cada um destes tipos de provas:

- *Empirismo ingênuo*: O aluno conclui a certeza de uma proposição a partir da observação de alguns casos particulares, não ocorrendo generalidade no argumento.
- *Experimento crucial*: O aluno procura generalizar o resultado, partindo de um exemplo que, para ele, possui uma característica especial, ou seja, resolve o problema mediante a realização de um caso que é particular e possível.
- *Exemplo genérico*: envolve explicar as razões da verdade de uma determinada proposição; para tanto, o aluno, a partir do seu exemplo, deverá explicitar as características que se relacionam com os demais de sua classe, buscando dar a seu argumento um caráter de generalidade. Nesse nível, o aluno usa exemplos particulares e, ao mesmo tempo, inclui elementos que evidenciam a generalidade da questão. O exemplo genérico se aproxima de uma prova conceitual.
- *Experimento de pensamento*: invoca a ação de provar pela internalização e pelo desprendimento, partindo de uma representação particular. Neste caso, os focos para a construção da prova serão as propriedades dos objetos e as relações entre elas, e os resultados poderão ser obtidos por meio de um raciocínio dedutivo.
- *Cálculo nas afirmações*: esta prova não se relaciona com a experiência empírica. Ela se constitui em uma prova rigorosa e completa, que envolve as demonstrações formais e aparece como resultado em cálculos inferenciais sobre proposições. Neste tipo de prova, os axiomas e os passos do processo dedutivo são explicitados por meio da linguagem formal da Matemática. Estas demonstrações são encontradas no âmbito da Matemática do ensino superior.

Na Matemática da educação básica, Pereira (2007) aponta para o fato de que os alunos, ao buscarem a validade de uma proposição, partem geralmente de um empirismo inicial. Espera-se, contudo, que a partir deste nível inicial os alunos consigam alcançar o nível da prova conceitual, usando a experiência empírica como uma ferramenta na busca de padrões, propriedades e levantamento de conjecturas.

Balacheff (1988) observa a necessidade de uma evolução cognitiva no significado de uma demonstração, de forma que em algum momento os alunos consigam produzi-la. A passagem do empírico ao dedutivo não é espontânea nem natural, revelando-se muito complexa para os alunos, pois necessita de uma apropriação do caráter genérico da situação. Este fato exige daquele que pretende provar, um distanciamento desta ação e de outros processos de resolução de problemas. Assim, o conhecimento passará a ser o objeto de reflexão, de discurso e até de discordâncias. Para ele, a linguagem diária, que suporta a linguagem natural, possibilita algum movimento nesta direção, além de abrir maiores possibilidades do que simplesmente a produção da prova formal. Para este autor, a

linguagem deveria tornar-se uma ferramenta para produzir deduções lógicas, não se restringindo apenas a ser um meio de comunicação.

Ainda segundo este pesquisador, para a elaboração desta linguagem, de forma a que ela consiga produzir a passagem do empírico ao dedutivo, será necessária a ocorrência de três processos no objeto de estudo: a descontextualização; a despersonalização; e a destemporalização. Ele considera a *descontextualização* como um processo pelo qual o objeto em estudo passa a ser visto como um componente de uma classe de objetos; na *despersonalização* não é levado em consideração quem ou o que agiu sobre este objeto; e quando as ações sobre o objeto são tomadas independentemente de seu tempo ou duração ocorre a *destemporalização*. Dessa forma, esta passagem do empírico ao dedutivo, por ser considerada fundamental, relevante e complexa, deve ser alvo de ensino específico, merecendo atenção de educadores e professores (BALACHEFF, 1988).

Rezende e Nasser (1994), também, se interessaram em estudar as provas produzidas por seus alunos, classificando-as nos seguintes tipos: justificativa pragmática; recorrência a uma autoridade; exemplo crucial; e justificativa gráfica. Na *justificativa pragmática*, o aluno confirma a veracidade de uma afirmativa, baseando-se apenas em alguns casos particulares. Na *recorrência a uma autoridade*, o aluno afirma o resultado, porque este se encontra escrito no livro ou porque o professor falou. No *exemplo crucial*, o aluno elabora um raciocínio em um caso particular, que poderia ter sido desenvolvido no caso geral. Finalmente, na *justificativa gráfica*, o aluno indica que o resultado é verdadeiro, usando uma figura.

Em relação à presente pesquisa, os professores participantes do AProvaME, juntamente com os pesquisadores, decidiram no início deste projeto estudar e aprofundar as leituras sobre a classificação dos diferentes tipos de provas, conforme foram propostas por Balacheff (1988). Esta classificação se constituiu em parâmetro, para que alguns professores pudessem avaliar as provas produzidas pelos sujeitos de suas respectivas pesquisas, estudantes das escolas envolvidas, ao desenvolverem as atividades propostas, de acordo com o nível de generalidade atingido nelas. Estes professores, também, investigaram as dificuldades de seus sujeitos, em apresentar argumentos matemáticos válidos, de forma a verificar se estes tratavam as justificativas empíricas como provas válidas (HEALY; HOYLES, 2000). Eles identificaram algumas dificuldades que os alunos sentem para conseguir realizar a passagem do empírico ao dedutivo, assunto este que merece muita atenção por parte dos educadores matemáticos.

3.4 AS FUNÇÕES DA PROVA

Pereira (2007) constatou que no contexto escolar, para que se possa trabalhar com provas, é fundamental que o professor tenha muito clara a pertinência deste fato, do motivo e da necessidade de provar uma determinada afirmação, pois para o aluno não é necessária a apresentação ou a construção de uma prova formal para convencê-lo da veracidade de uma afirmação.

Ainda de acordo com este pesquisador, a necessidade de validar uma proposição deve fazer sentido para os alunos, levando os professores a propiciarem situações de aprendizagem, que motivem os alunos a buscar uma justificativa ou uma prova. Caso isto não ocorra, os alunos ocuparão uma posição passiva em relação ao processo de construção de uma prova. Pereira (2007) defende que, para que os professores consigam criar situações de aprendizagem que levem os alunos a buscar uma prova, é necessário que estes conheçam os diversos papéis que esta pode assumir no contexto escolar, ou seja, as diversas funções de uma prova na Matemática Escolar.

De Villiers (2001, 2002), ao investigar a atividade dos matemáticos, caracterizou as diversas funções da prova no âmbito da Matemática, trazendo-as para o da Matemática escolar. As funções que uma prova pode assumir, segundo este pesquisador, são as seguintes: explicação; descoberta; verificação; desafio intelectual; sistematização; e comunicação. A seguir é fornecida uma breve descrição de cada uma delas:

- *Explicação*: a prova neste caso teria a função de explicar o “porquê” da veracidade de uma afirmação, ou seja, proporcionar a compreensão dos motivos que a tornam verdadeira.
- *Descoberta*: a busca de uma prova não consiste apenas em um meio de verificar um resultado já descoberto, porém, também é um processo que implica uma atitude investigativa e de criatividade, sendo uma forma de explorar, analisar, descobrir, criar e inventar novos resultados.
- *Verificação*: os processos empíricos ou indutivos até podem convencer os alunos da validade de uma afirmação, porém, para solucionar dúvidas ou incertezas, será necessária a prova. A verificação se constitui na função mais evidente da prova.
- *Desafio intelectual*: constitui-se no desafio de provar algum fato que se sabe que existe ou que é verdadeiro. Neste caso, a função da prova como desafio intelectual enfatiza o caminho a ser percorrido, ou seja, o processo. Tal processo, ao valorizar a argumentação ao invés do resultado final, que é a veracidade da afirmação, leva a uma satisfação pessoal.

- *Sistematização*: na estrutura de um modelo matemático, inserido em um sistema dedutivo, existem os axiomas, que são as verdades anteriores ou proposições já provadas. Neste sistema, cada proposição é validada a partir de uma verdade anterior. Esta função da prova, que envolve uma sistematização de resultados, podendo ser vista como a organização de vários resultados num sistema dedutivo de axiomas, conceitos e teoremas, assume um papel fundamental.
- *Comunicação*: a prova, também, pode assumir uma função de interação ou comunicação entre todos os envolvidos, ou seja, a negociação do significado entre os matemáticos, os professores e os alunos.

Para De Villiers (2001), embora a prova possua diversas funções no ensino, o papel da verificação é o mais frequentemente utilizado.

Para Nasser e Tinoco (2001), a prova teria algumas funções, como a de validar um resultado, ou seja, comprovar que um resultado é verdadeiro; e a de explicar ou elucidar, isto é, mostrar as razões do resultado ser verdadeiro. Para estas autoras, a função de validar é fundamental na Matemática, porém não é motivadora para os alunos da educação básica, pois estes não compreendem a necessidade de comprovar a veracidade de um resultado que já é óbvio para eles.

Outros pesquisadores, como Pietropaolo (2005) e Hanna (1995), além de De Villiers (2001, 2002), também, estudaram as funções da prova vistas pelos enfoques dos matemáticos e dos educadores matemáticos.

Para Pietropaolo (2005), as funções de uma prova para um educador matemático seriam a de validação e a de produção do conhecimento. Assim, a prova apresentada a um aluno que não a conhecia anteriormente possuiria tanto a função de validação, esclarecendo um teorema, como a de ampliação de seu conhecimento. Para este pesquisador a diferença das funções destes dois tipos de provas residiria no seguinte aspecto: a prova que apenas valida, empregaria basicamente regras de sintaxe, enquanto a que amplia o conhecimento utilizaria raciocínios fundamentados em ideias matemáticas. A sintaxe, embora indispensável, constitui-se em um aspecto mecânico da demonstração, não se constituindo na característica mais relevante da Matemática.

Hanna (1995) cita que as funções da prova na Matemática seriam a de justificação e a de verificação, enquanto na Educação matemática, em um contexto escolar, a sua função seria apenas a de explicação.

Em função de todo este contexto apresentado, percebemos que para os professores conseguirem introduzir e utilizar a prova em um contexto escolar, estes devem conhecer dentre outros assuntos relacionados a esta temática, os tipos e as funções da prova, devendo estar preparados para enfrentar estes novos desafios.

No contexto do AProvaME, os professores, em sua maioria, usaram Balacheff (1998) para classificar os tipos de provas produzidas por seus alunos, e De Villiers (2001, 2002) na identificação das funções por elas assumidas. As atividades desenvolvidas nas situações de aprendizagem elaboradas por estes professores visaram que a prova assumisse outros papéis, além da verificação, como as funções de explicação, comunicação e descoberta, conforme proposto por De Villiers (2001, 2002).

3.5 OS AMBIENTES COMPUTACIONAIS E A PROVA

A proposta do projeto AProvaME requeria que os professores inseridos em seu contexto elaborassem situações de aprendizagem, as quais deveriam conter atividades que buscassem a construção da prova pelos alunos. Estas situações de aprendizagem deveriam contemplar diversos conteúdos matemáticos, previamente escolhidos pelos pesquisadores, além de possibilitarem a integração e utilização de recursos oferecidos pela informática. Assim, neste tópico apresentaremos algumas possibilidades presentes em ambientes computacionais, bem como alguns estudos e pesquisas realizadas, que tiveram por objetivo o desenvolvimento do raciocínio matemático; a visualização e a experimentação de propriedades de objetos geométricos; a produção de justificativas e argumentações matemáticas; e a construção de uma prova, fazendo uso de recursos computacionais.

As ponderações apresentadas, aliadas aos resultados de diversas pesquisas realizadas e indicadas, a seguir, apontam na direção do professor, devendo ele assumir o papel de mediador deste processo como um todo, para enfrentar os novos desafios que se descortinam à sua frente.

A presença de recursos da informática nos ambientes de ensino tem chamado a atenção de professores e alunos, para o potencial didático de sua utilização no processo de aprendizagem. Muitos são os programas utilizados com o propósito de motivar o ensino e a aprendizagem e ampliar as possibilidades de diferentes metodologias de ensino.

Valente (2002) enfatiza que, praticamente, os computadores desde o momento em que foram inventados estiveram envolvidos com o processo de ensino-aprendizagem. Embora inicialmente tenham sido usados como máquinas de ensinar, atualmente eles são considerados como importantes recursos no auxílio à aprendizagem, que passou a ser vista pelo enfoque de uma construção de conhecimentos que o aprendiz realiza. Este autor pondera que, no decorrer das últimas três décadas de pesquisa na área de “Informática Educacional”, as funções que o computador tem exercido como auxiliar no processo de aprendizagem tem mudado muito.

Quando se refere à aprendizagem, Valente (1993), assinala que esta pode ocorrer basicamente de duas maneiras, pela memorização ou pelo processamento de esquemas mentais, que são enriquecidos, propiciando a construção do conhecimento. Quando uma informação é simplesmente memorizada, ela não consegue ser aplicada em situações que deveriam levar o aprendiz a resolver problemas ou desafios. Porém, quando uma informação é processada, o conhecimento construído é incorporado aos esquemas mentais, que são postos para atuar a fim de resolver situações-problema e desafios. Dessa forma, o aprendiz, ao ser confrontado com um problema, mobiliza o seu conhecimento existente ou busca novas informações que deverão ser processadas e agregadas aos conhecimentos anteriores.

Para este autor, o processo de construção do conhecimento demanda a existência de estruturas mentais ou de conhecimentos organizados, que podem ser identificados em comportamentos (habilidades) ou declarações (linguagens). Este processo se baseia no princípio de continuidade, pois novos conhecimentos devem estar relacionados com os já existentes. Na medida em que o aprendiz aprende, ele enriquece as suas estruturas mentais quer adicionando novos conhecimentos, quer reorganizando os já existentes, por meio do pensamento e da reflexão (VALENTE, 1993).

Para Valente (1993), o computador tem se constituído em um importante recurso tanto para proporcionar a passagem de informação ao usuário, como para facilitar o processo de construção do conhecimento. Cada um dos diferentes tipos de *softwares* usados na educação como - os jogos; as modelagens; as simulações; os tutoriais; os aplicativos (processadores de texto, planilhas eletrônicas e outros); a programação; os *softwares* de autoria multimídia - apresenta características que podem auxiliar o processo de construção do conhecimento. Contudo, este autor entende que o aprender não deve ficar restrito ao *software*, mas sim à qualidade da interação aluno-*software*. Enquanto alguns *softwares* apresentam características que favorecem a compreensão, como no caso da programação, outros requerem um maior envolvimento do professor, elaborando situações complementares ao *software*, para facilitar a compreensão dos alunos.

No que se refere ao ensino de Matemática, o surgimento e a utilização de vários *softwares* voltados à educação têm trazido uma perspectiva muito animadora de metodologias diferenciadas, podendo levar a uma aprendizagem mais significativa. Contudo, para que isto possa ocorrer, evidencia-se a necessidade de melhorar a formação dos professores e as condições de ensino, contribuindo para a melhoria da aprendizagem dos alunos. Esta formação vai muito além do domínio dos equipamentos de informática e da manipulação das funções de um determinado *software*. Ela deve contemplar, também, o domínio conceitual do conteúdo programático, de forma a permitir a decisão da técnica ou

estratégia de ensino a ser utilizada com um *software* específico, dentro do contexto educacional (BALDIN; VILLAGRA, 2004).

Diante deste cenário, Pietropaolo (2005) ponderou que a utilização dos computadores tem trazido elementos novos ao ensino e provocado um impacto tanto na Matemática como na Educação Matemática. Este impacto decorre do fato de o computador apresentar uma realidade virtual, que propicia um ambiente favorável à exploração matemática e à descoberta de resultados, refletindo no ensino de Matemática e revolucionando a percepção das provas. Com o computador é possível levantar muitos mais conjecturas, pois ele fornece respostas muito rápidas, para validar ou não estas conjecturas.

Este autor observa que alguns ambientes computacionais possuem características que poderiam contribuir com o ensino de provas, apesar de uma visão mais formalista e rigorosa da Matemática que, muitas vezes, não aceita este tipo de abordagem. No que se refere ao convencimento dos alunos da validade dos teoremas matemáticos, o computador permite que a Matemática seja explorada *in loco*, porém, sem afastar a necessidade das provas. Ao serem apresentadas as soluções para uma determinada situação-problema de forma visual aos alunos, os ambientes informatizados possibilitam experimentações indutivas, que validam, porém não justificam (PIETROPAOLO, 2005).

De Villers (1997) em suas pesquisas verificou que o encontro dos alunos com os *softwares* matemáticos os motivava ao estudo, enquanto desenvolviam atividades de investigação. Estas atividades tinham entre os seus objetivos convencer os alunos de determinados resultados, além de despertá-los para muitas outras indagações. Os alunos admitiram que a verificação indutiva/experimental contribuiu na confirmação de um resultado já conhecido, porém não foi suficiente para uma compreensão satisfatória, levando-os a buscar os argumentos dedutivos que poderiam fornecer a devida explicação.

Pereira (2007) elaborou, aplicou e analisou uma situação de aprendizagem, elaborada no âmbito do projeto AProvaME, que integrou a sua pesquisa de mestrado. Esta situação envolveu a produção de argumentações e provas matemáticas e fez uso da planilha eletrônica. Ele desenvolveu uma sequência de atividades, usando o Microsoft Excel, com o objetivo de engajar os alunos em várias etapas do processo de prova, buscando identificar e discutir as condições de transição das provas pragmáticas para as conceituais. A planilha eletrônica apresentava aos alunos resultados imediatos e simultâneos, que os alunos podiam testar e observar vários casos ao mesmo tempo, levando-os a formular conjecturas e a buscar validações e contra-exemplos. O recurso computacional assumiu tanto a função de gerar e apresentar diversos exemplos, proporcionando possibilidades de investigação para os alunos, quanto a de ferramenta de validação das conjecturas levantadas pelos mesmos. Como resultado, este pesquisador verificou que a interação dos alunos com o computador dinamizou o processo de produção de conjecturas e da validação

experimental destas, bem como a observação das propriedades dos objetos manipulados, favorecendo a elaboração de justificativas, que foram além das evidências empíricas.

Na literatura, por nós examinada, sobre o uso de recursos tecnológicos no ensino e na aprendizagem da prova, um ambiente que tem recebido muita atenção é o da geometria dinâmica. Este fato não tem ocorrido por acaso.

No que tange à Geometria, a cultura ocidental, desde a cultura grega, sempre colocou uma ênfase muito grande na demonstração, aprofundando o estudo desta área do conhecimento. Como esta disciplina enfatiza o arcabouço dedutivo, ela cristaliza a ideia de que esta área da matemática tem condições de proporcionar o rigor e o entendimento de conceitos abstratos, que são desejáveis nos alunos.

Alguns educadores argumentam que o ensino da Geometria poderia ser facilitado pela incorporação dos programas de geometria dinâmica. Healy e Hoyles (2002) definem um *software* de geometria dinâmica como uma ferramenta, que possibilita aos estudantes construir e experimentarem objetos geométricos e as relações entre eles.

Um *software* de geometria dinâmica que se destacou a partir da década de 1990, aplicado aos diversos níveis de ensino, voltado para o ensino de Matemática, foi o Cabri-Géomètre, que já conta com um grande número de pesquisas realizadas. Pode ser utilizado do ensino básico até o ensino superior, em diversas áreas como a Matemática, a Física, o Desenho Geométrico, entre outras. Este programa possui um ambiente interativo que permite ao aluno elaborar o seu próprio conhecimento, por meio da construção e da verificação das propriedades das figuras geométricas.

O Cabri-Géomètre foi criado no Instituto Joseph Fourier, em Grenoble, na França, a partir de trabalhos iniciados em 1981. A sigla Cabri vem do francês *Cahier de Brouillon Informatique*, que significa Caderno de Rascunho Informático. Este *software* permite construir figuras geométricas que podem ser traçadas com a ajuda de régua e compasso. Uma vez construídas, essas figuras podem ser movimentadas, conservando, porém, as propriedades iniciais que lhes foram atribuídas. O Cabri-Géomètre se constitui em uma ferramenta poderosa de validação experimental de fatos geométricos, na medida em que permite o acesso rápido e contínuo a todos os casos possíveis de deformação que a figura possa sofrer. Ele apresenta, dentre os seus diferentes aspectos, além da manipulação imediata e dinâmica de figuras, a possibilidade de o professor criar livremente atividades para a sua aula.

Sendo o Cabri-Géomètre um *software* que estimula e dinamiza o estudo da geometria, pode-se citar algumas de suas diferentes possibilidades (BALDIN; VILLAGRA, 2004):

- (a) *linguagem visual*: estimula um novo meio de comunicação de conceitos abstratos, tornando a tarefa de compreensão da linguagem matemática mais agradável;
- (b) *interatividade*: propicia a oportunidade de introduzir experiências que instiguem o espírito de investigação e conjecturar sobre propriedades, e a confirmação ou não de resultados;
- (c) *desenvolvimento de atividades manipulativas concretas*: permite o acompanhamento mais personalizado da aprendizagem, respeitando as diferenças individuais;
- (d) *desenvolvimento da sensibilidade* em relação aos conceitos matemáticos de natureza pura e aqueles inerentes aos equipamentos.

Enfim, a utilização deste *software* possibilita tornar as aulas de Matemática mais dinâmicas, despertando o interesse dos alunos e fazendo com que eles se tornem agentes de sua própria aprendizagem.

Dentre os seus diversos recursos, apresentados pela própria Texas Instruments (1997), o *software* permite:

- a construção intuitiva de pontos, retas, triângulos, polígonos, circunferências e outros objetos básicos;
- a construção de cônicas (elipses e hipérbolas);
- a exploração de conceitos avançados de Geometria Descritiva;
- a utilização de coordenadas cartesianas e polares;
- a verificação das propriedades geométricas,
- a possibilidade de testar hipóteses baseadas nos cinco postulados de Euclides;
- o cálculo do lugar geométrico;
- a execução da simetria axial,
- a inversão de objetos,
- a translação e a rotação de objetos geométricos em torno de centros geométricos ou pontos específicos;
- a verificação das características dinâmicas de figuras através da animação.

Segundo Healy (2000), o processo de construção de objetos geométricos no computador é diferente do processo de obtenção destes, usando papel e lápis. Quando estes objetos são construídos no papel, usando lápis, não é necessária a preocupação com

as propriedades geométricas que definem este objeto. Este desenho funciona quase como um rascunho ou esquema, que foi construído sem necessariamente formalizar nenhuma propriedade geométrica. Depois de construído podem ser indicadas as suas propriedades. Dessa forma, é como se a figura desenhada estivesse desvinculada das propriedades que definem este objeto geométrico. Todas as propriedades surgem ao final como um bloco. Estas não indicam nenhuma relação com o objeto em si e com as demais propriedades, na medida em que muitas delas, quando são observadas no decorrer das construções, umas emergem como consequência de outras.

Ainda segundo esta pesquisadora, a ação do aluno e a expressão das propriedades matemáticas em um contexto de geometria dinâmica, não se encontram separadas como no papel e lápis, mas ocorrem simultaneamente. Assim, no início da construção de uma prova, a identificação das propriedades fornecidas está inserida nas atividades dos alunos. Neste contexto de geometria dinâmica, a prova não é algo deixado para o final do processo ou que possa ser providenciado no início, mas toma parte de um modelo matemático que o aluno escolhe para representar uma situação-problema. Uma vez construída a figura desejada, o aluno pode retomar todo o processo de construção e acessar o que foi fornecido inicialmente. Dessa forma, o Cabri-Géomètre, também, pode auxiliar na verificação das relações entre as propriedades fornecidas e as deduzidas, na medida em que estas refletem a construção final obtida e a manipulação dos objetos construídos na identificação de novas propriedades. Alguns pesquisadores acreditam que na medida em que os estudantes recebem do computador uma resposta imediata trazida pelas atividades por eles desenvolvidas, este fato poderá auxiliá-los na direção da prova de qualquer conjectura que eles formulem (HEALY, 2000).

Ao se utilizar o Cabri-Géomètre, a construção de qualquer objeto geométrico é o resultado de um processo no qual é necessário usar a definição explícita deste objeto. Pois, se isto não ocorrer, o objeto construído não corresponderá ao objeto geométrico, caracterizado por suas propriedades matemáticas (LABORDE, 1993).

Laborde e Laborde (1995) enfatizam que, ao mesmo tempo em que o *software* Cabri-Géomètre oferece ao estudante um modelo da geometria euclidiana, sobre o qual ele pode experimentar, permitindo a legitimação da atividade empírica, este programa pode também desencorajá-lo nas construções, caso as explicações não sejam geradas pela mobilização de conhecimentos geométricos prévios. Se o aluno não possuir um conhecimento das propriedades e dos objetos que pretende construir, ele não conseguirá obter a figura desejada, tampouco atingirá os objetivos pretendidos.

Healy e Hoyles (2002) retomam a questão da importância do professor, como mediador do conhecimento, pois a necessidade de explicar as construções usando modos teóricos de validação surge tanto nos momentos de interação com o computador, como

durante todo o processo de trabalho. Os estudantes ao realizarem experimentações, formulam conjecturas que podem ser testadas com as ferramentas disponíveis. O papel dos recursos computacionais na resolução de problemas geométricos em interação com diversas atividades ajuda o professor a atingir os seus objetivos pretendidos.

A importância do papel do professor neste momento também é apontada por Bussi e Mariotti (1999), na medida em que este enfatiza as relações existentes entre a teoria geométrica, as ferramentas e as figuras do sistema dinâmico, com vistas a manter um equilíbrio entre as atividades de construção no computador e a reflexão destas atividades em situações envolvendo alunos e professores.

Entretanto, algumas pesquisadoras, como Hoyles e Jones (1998), questionam se o uso dos ambientes dinâmicos nas aulas de geometria auxiliaria os alunos a desenvolver arcabouços conceituais eficazes para a prova, ou se dificultariam a transição entre as provas informais e as provas formais. Estudos realizados por estas pesquisadoras indicaram que se estes *softwares* forem usados junto com tarefas adequadas, poderiam permitir por parte dos alunos uma melhor compreensão da natureza e dos propósitos de uma prova. Porém, elas alertam para o fato de que o uso não pensado e indiscriminado de algumas ferramentas destes *softwares*, poderia deixar de lado as noções geométricas importantes para a construção do pensamento geométrico e do raciocínio matemático, principalmente no tocante à prova, que é um fator de explicação e validação dos resultados.

Um grande desafio que surge para o professor, segundo Pietropaolo (2005), consistiria na organização e no desenvolvimento de situações de aprendizagem visando à prova, usando recursos da informática. Estas atividades deveriam levar os alunos a perceberem a necessidade da elaboração de uma argumentação dedutiva, com o objetivo de explicar e justificar um resultado geométrico percebido ou induzido em um ambiente, que pode ser informatizado ou não.

Para Healy (2000), a utilização de um *software* como um recurso de ensino visando à prova matemática desencadeia importantes questões, entre elas, o desenvolvimento pelos professores de atividades que explorem o real potencial deste recurso. Deve-se também levar em consideração que um dos objetivos de uso de *softwares* é direcionar os estudantes a focarem a sua atenção nas relações existentes entre os objetos matemáticos explicitados na tela do computador, e providenciar os meios para estes desenvolvam os argumentos para explicar tais relações.

Em alguns dos trabalhos produzidos no contexto do AProvaME, redigidos tanto pelos professores participantes, como pelos pesquisadores (DUARTE, 2007; HAJNAL, 2007; HEALY; JAHN, 2007; PEREIRA, 2007), observamos que talvez os maiores desafios para o ensino da prova no Brasil sejam: (1) o apoio à negociação da passagem entre argumentos empíricos e argumentos baseados em propriedades matemáticas; e (2) a criação de contextos pelos

professores, nos quais faça sentido ao aluno apresentar seu raciocínio de uma maneira formal. A utilização de recursos tecnológicos poderia propiciar contextos possíveis para confrontar estes desafios. Entretanto a inserção de tais recursos, como no momento da passagem de argumentos empíricos para argumentos lógicos, aparentemente não tem se revelado como um processo que aconteça espontaneamente.

Em nosso estudo ao tratarmos das possibilidades e limitações dos ambientes computacionais no tocante à construção de uma prova e do papel do professor como mediador deste processo, levamos em consideração os estudos de Baldin e Villagra (2004), Healy (2000); Healy e Hoyles (2002); e Hoyles e Jones (1998).

No próximo capítulo descrevemos os procedimentos metodológicos utilizados neste estudo.

4 A METODOLOGIA DO ESTUDO

Neste capítulo apresentamos a metodologia do presente estudo. Como esta pesquisa foi concebida como sendo qualitativa, que fez uso do estudo de caso, inicialmente indicamos os pressupostos teóricos destes tipos de abordagem, os quais nortearam as escolhas efetuadas. Em seguida fornecemos algumas informações relevantes do projeto AProvaME, indispensáveis para o entendimento do estudo em questão. O procedimento da pesquisa, os sujeitos e os instrumentos de coleta de dados utilizados, como a entrevista e registros documentais, encontram-se descritos a seguir. Encerramos este capítulo com a explicação de como serão analisados os dados coletados.

4.1 A PESQUISA QUALITATIVA

De acordo com Ludke e André (2003), as questões levantadas pelos recentes desafios da pesquisa educacional fizeram que surgissem novas metodologias de investigação e abordagens diferentes daquelas que eram adotadas tradicionalmente e que possuíam um cunho mais quantitativo, como o de um estudo analítico em uma pesquisa experimental. As questões atuais têm surgido a partir da prática educacional e têm sido fortemente influenciadas por uma nova atitude de pesquisa, em que o pesquisador é colocado no meio da cena investigada, participando desta. Esta participação leva a outro tipo de estudo, a pesquisa qualitativa, que visa compreender as relações profundas que ocorrem em uma situação microssocial, como aquelas que são expressas no contexto de uma complexa realidade envolvendo o fenômeno educacional.

Os problemas da realidade educacional por sua natureza específica requerem técnicas de estudo adequadas. As abordagens características das análises experimentais como os questionários aplicados a grandes amostras ou coeficientes de correlação não são mais adequados a este tipo de estudo. Em uma pesquisa qualitativa devem ser utilizados novas técnicas e instrumentos, como a observação participante, que permite inserir o pesquisador na realidade estudada; a entrevista, que leva ao aprofundamento das informações obtidas; e a análise documental, que complementa os dados obtidos e aponta novos aspectos da realidade que está sendo estudada. O estudo qualitativo é aquele que se desenvolve em uma situação natural, possui uma riqueza de dados descritivos, focaliza a

realidade de uma forma complexa e contextualizada, e seu plano é aberto e flexível. Vale destacar que, independentemente do tipo de pesquisa que venha a ser conduzida, seja utilizando técnicas mais tradicionais ou recentes, o aspecto do rigor científico deve ser o mesmo (LUDKE; ANDRÉ, 2003).

Apesar da crescente popularidade desta metodologia de pesquisa, ainda existem muitas dúvidas sobre o que realmente caracterizaria uma investigação qualitativa; quando é adequado utilizá-la; ou mesmo, sobre questões relacionadas ao seu rigor científico. Bogdan e Bikden (1982, apud LUDKE; ANDRÉ, 2003), em seu livro *A Pesquisa Qualitativa em Educação*, discutem o conceito de pesquisa qualitativa apresentando cinco características básicas, que configurariam este tipo de estudo, a saber:

A) A pesquisa qualitativa tem o ambiente natural como sua fonte direta dos dados e o pesquisador como o seu principal instrumento, supondo um contato direto e prolongado do pesquisador com o ambiente e com a situação que está sendo investigada.

No caso da presente pesquisa, tivemos um contato direto e prolongado com o ambiente do AProvaME, a partir do 1º semestre de 2006, e com os seus sujeitos, dois professores participantes deste projeto, durante um período de dois anos. Estabelecemos este contato no contexto do projeto, no decorrer de todo o ano de 2006 durante todas as reuniões que ocorreram. Após o encerramento das reuniões em 2006, acompanhamos estes professores em 2007, enquanto estes desenvolviam e finalizavam individualmente as suas respectivas situações de aprendizagem, aplicavam-nas com alguns alunos, até a defesa de suas dissertações, em dezembro de 2007.

B) Os dados coletados são predominantemente descritivos; o material obtido nestas pesquisas é repleto de situações, pessoas, acontecimentos, incluindo entrevistas, depoimentos e extratos de diversos tipos de documentos. Todos os dados obtidos a partir da realidade são importantes.

No decorrer de nossa pesquisa, coletamos uma quantidade muito grande de dados. Além de nossa presença (observação participante) nas reuniões de duas das cinco equipes do projeto, que foram video-gravadas pelos pesquisadores durante o ano de 2006, relatórios foram elaborados pelos participantes do AProvaME e disponibilizados em uma plataforma, que hospedou um ambiente virtual, que serviu de apoio à aprendizagem, o Teleduc.

Nós pudemos acompanhar o desenvolvimento e a posterior análise de algumas das situações de aprendizagem em diferentes momentos de suas elaborações, a partir das primeiras versões, passando pelo teste-piloto até as suas finalizações, em uma etapa

anterior à aplicação destas com os alunos. Os sujeitos da presente pesquisa nos forneceram registros documentais das diversas fases de elaboração de suas respectivas situações de aprendizagem, ou seja, as diferentes versões, produzidas no decorrer deste período. Realizamos, também, três entrevistas semiestruturadas com cada um deles, em três momentos distintos, totalizando seis entrevistas. As entrevistas foram gravadas e transcritas.

C) A preocupação com o processo é maior do que com o produto, pois neste tipo de pesquisa a atenção do pesquisador ao estudar um problema consiste na verificação de como este se manifesta nos procedimentos, nas atividades e nas interações cotidianas.

Em relação à nossa pesquisa a preocupação com o processo foi maior do que com o produto final. O produto final desta pesquisa poderia ser identificado, como sendo a versão final da situação de aprendizagem elaborada pelos sujeitos, a que foi efetivamente aplicada junto aos alunos.

Vale lembrar que acompanhamos estes sujeitos no decorrer de um período de tempo, dois anos, em que participaram de diversas reuniões e colaboraram coletivamente no desenvolvimento das situações de aprendizagem, além de seus respectivos processos individuais. Em inúmeros momentos, pudemos observar as interações que estavam acontecendo, além de identificarmos algumas mudanças, acreditando que estes comportamentos fariam parte de um processo maior.

A análise das diferentes versões poderia fornecer indicações de mudança de concepções sobre prova, além da melhoria em relação ao nível de apropriação e inserção de recursos tecnológicos nas atividades, com vistas ao ensino-aprendizagem da prova nos sujeitos investigados.

Preocupamo-nos na presente pesquisa em buscar indícios ou elementos na prática destes professores, durante o período em que eles estavam participando do projeto, que poderiam indicar que eles estavam se transformando, ou seja, de que estava ocorrendo o seu desenvolvimento profissional.

D) O significado dado pelas pessoas às suas vidas e a seus processos constitui foco de atenção especial pelo pesquisador, pois nestes estudos tenta-se identificar sempre que possível como as pessoas encaram as questões que estão sendo estudadas, vistas da perspectiva delas.

No decorrer de toda a nossa pesquisa, levamos em consideração estes significados, quer seja nos momentos em que participamos das reuniões, em que estes expressavam as

suas opiniões e questionamentos, quer como nas informações fornecidas pelos sujeitos nas entrevistas e em alguns materiais disponibilizados por eles, que continham o registro individual de seus percursos.

Acreditamos que da forma como a nossa pesquisa foi desenvolvida, pudemos focar as perspectivas de cada um dos sujeitos. Nas entrevistas procuramos levantar dados relativos aos seus processos individuais, relacionados aos seus percursos, a partir de suas formações iniciais, no decorrer de suas vidas docentes até o ingresso no mestrado profissional e posteriormente no AProvaME em relação às questões de nossa pesquisa. Os sujeitos também puderam expressar opiniões e relatar desafios e dificuldades que sentiram no decorrer deste período. Pelas falas destes professores nas entrevistas, conjuntamente à análise dos registros documentais fornecidos por eles, procuramos identificar e analisar as transformações em suas aprendizagens e/ou concepções em relação à prova, bem como ao uso das ferramentas da informática no desenvolvimento da situação de aprendizagem.

E) A análise dos dados tende a seguir um processo indutivo, pois os pesquisadores não se preocupam em buscar evidências que comprovem hipóteses definidas, antes do início dos estudos. Porém, o fato de não existirem hipóteses ou questões específicas formuladas no início da pesquisa, não implica a não existência de um quadro teórico que oriente a coleta e a análise de dados.

Em relação a este item, existiu uma hipótese inicial de que o contexto do AProvaME, em que alguns professores participantes do projeto envolvidos em práticas reflexivas, investigativas e colaborativas, enquanto desenvolviam situações de aprendizagem que buscavam a prova matemática, integrando recursos da informática, poderia propiciar o desenvolvimento profissional destes. Existiu um quadro teórico que orientou a coleta e a análise dos dados, descritos no decorrer deste capítulo. No caso da presente pesquisa, buscamos evidências que pudessem comprovar a hipótese definida antes do estudo, ou seja, procuramos indícios ou elementos na prática destes professores durante o período que eles estavam participando do projeto, que pudessem indicar que eles estavam se transformando, ou seja, que estava ocorrendo o desenvolvimento profissional.

Para efeito da análise das informações contidas nas entrevistas, classificamos e organizamos os dados em categorias, de acordo com as temáticas nelas identificadas, com vistas a tentar responder a seguinte questão de pesquisa:

Em que medida a inserção de professores de Matemática em um contexto de formação, mediado pela tecnologia envolvendo a

prova matemática, pode contribuir para o desenvolvimento profissional destes?

Os registros documentais referentes às diferentes etapas da elaboração das situações de aprendizagem, de cada um dos sujeitos da pesquisa, visaram complementar as informações fornecidas pelas entrevistas, bem como identificar outros aspectos do tema estudado. Estes registros se constituem em uma fonte rica e estável, na medida em que permanecem no decorrer do tempo, permitindo que a sua consulta seja realizada diversas vezes e ainda podem servir de base para outros estudos e pesquisas.

Finalizando, Bogdan e Bikden (1982, apud LUDKE; ANDRÉ, 2003) asseveram que a pesquisa qualitativa envolve a obtenção de dados descritivos, obtidos no contato direto do pesquisador com a situação estudada, enfatiza mais o processo do que o produto e se preocupa em retratar a perspectiva dos participantes. Por estes motivos, classificamos a nossa pesquisa como sendo qualitativa.

4.2 O PERCURSO DA PRESENTE PESQUISA

4.2.1 PROCEDIMENTO UTILIZADO: O ESTUDO DE CASO

Dentre as formas que pode assumir uma pesquisa qualitativa, classificamos a nossa como sendo um “estudo de caso”, devido a algumas características apresentadas por este tipo de abordagem, cujos pressupostos teóricos encontraram ressonância com o presente estudo.

De acordo com Ludke e André (2003), o estudo de caso consiste no estudo de *um caso*, podendo este ser simples e específico ou complexo e abstrato. Dentre as suas características principais, o caso é sempre bem delimitado, tendo seus contornos claramente definidos no decorrer do estudo. Embora um caso possa ser semelhante a outros, ele se torna distinto na medida em que possui um interesse próprio, um valor em si mesmo.

Ponte (2006a) menciona que os estudos de caso têm constituído um tipo muito comum de investigação, em Educação Matemática, tanto no Brasil, como em Portugal e em muitos outros países, sendo usados em projetos de pequena e grande dimensão, inclusive

em dissertações de mestrado e teses de doutorado. Este tipo de investigação possui grandes potencialidades, embora também apresente alguns problemas próprios.

Ainda segundo este mesmo autor, um estudo de caso pode ser caracterizado por incidir em uma unidade bem-definida como um programa, uma instituição, um sistema educativo, uma pessoa ou uma unidade social, visando conhecer em profundidade esta realidade, levando em consideração o seu contexto próprio e procurando descobrir o que há nele de mais essencial e característico. Os estudos de caso na área de Educação Matemática têm sido usados para investigar questões relacionadas à aprendizagem dos alunos; aos conhecimentos e às práticas profissionais de professores; aos programas de formação inicial e continuada; aos projetos de inovação curricular, novos currículos, e muitos outros.

A nossa pesquisa incidiu sobre um projeto, o AProvaME, inserido em um programa de formação continuada, o Mestrado Profissional, ambos realizados na Pontifícia Universidade Católica (PUC) de São Paulo. Consistiu na investigação dos percursos realizados por dois professores, sujeitos desta pesquisa, que tiveram os seus casos estudados, analisados e comparados. Visou conhecer as realidades e as trajetórias destes sujeitos, para melhor compreender as influências e decorrências de um projeto de pesquisa, desenvolvido em um curso de formação continuada em seus desenvolvimentos profissionais, no que se referiu à ampliação de seus conhecimentos e às suas mudanças de concepções e práticas profissionais.

Ludke e André (2003) apresentam algumas características dos estudos de caso, que podem delimitar a pesquisa em questão, sendo indicadas a seguir:

(1) Visam à descoberta, assim, mesmo que o pesquisador inicie o estudo a partir de alguns pressupostos teóricos iniciais constituintes de sua estrutura básica, ele deverá manter-se atento a novos elementos que possam emergir, a novos aspectos que possam ser detectados, ou a outras dimensões a serem acrescentadas no decorrer do estudo.

Os pressupostos teóricos iniciais de nosso estudo se referiram ao desenvolvimento profissional do professor de Matemática, em um contexto que buscava a prova, integrada ao uso de recursos computacionais. Partiu-se do pressuposto que o contexto do AProvaME propiciaria um processo de mudança nos sujeitos, quanto ao seu conhecimento e concepções sobre prova, mediante a inserção de recursos da informática em situações de aprendizagem, refletindo em sua prática docente, aspectos estes importantes em seu desenvolvimento profissional. Procuramos nos manter atentos a todos os elementos que ocorriam, enquanto acompanhávamos a trajetória de cada um dos sujeitos de nossa pesquisa, a fim de ter condições de acrescentar novas dimensões ao estudo em questão.

(2) É enfatizada a “interpretação em contexto” nos estudos de caso, pois os pesquisadores partem do princípio que para uma melhor apreensão do objeto de estudo é necessário levar em consideração o contexto no qual ele se situa. Dessa forma, as percepções, os comportamentos e as interações entre as pessoas devem estar relacionadas com a situação específica onde está ocorrendo o estudo da problemática em questão.

Este fato foi levado em consideração durante todo o percurso de nossa investigação, pois a nossa própria pesquisa esteve inserida no AProvaME, que proporcionou um contexto muito particular para este estudo.

(3) Buscam retratar a realidade de forma completa e profunda. Este tipo de abordagem leva em consideração a complexidade natural das situações, procurando revelar e evidenciar o grande número de inter-relações existentes entre os seus componentes.

Na presente pesquisa procuramos evidenciar muitas das inter-relações que ocorreram entre os diversos componentes que fizeram parte deste estudo, quer sejam, os professores, pesquisadores e alunos, envolvidos em uma prática reflexiva, colaborativa e investigativa.

(4) Usam uma grande variedade de fontes de informação. O pesquisador levanta uma variedade de dados, coletados em diferentes situações e momentos, provenientes de diversas fontes.

O presente estudo possibilitou a coleta de uma grande variedade de fontes de informação, conforme já descrito anteriormente (v. *Item 4.1. A pesquisa qualitativa*).

(5) Procuram representar os diferentes e, às vezes, conflitantes pontos de vista presentes em uma situação social, dado que a realidade pode ser vista de diferentes perspectivas, não havendo uma que possa ser caracterizada como a mais verdadeira.

Procuramos levar em consideração os diferentes pontos de vista entre os participantes da pesquisa. Cada um dos sujeitos, embora inseridos em um mesmo contexto, passou por processos distintos, percebendo a mesma realidade, de pontos de vistas diferentes, de acordo com as suas vivências e segundo as suas próprias expectativas e perspectivas.

(6) Os relatos utilizam uma linguagem e uma forma mais acessível que outros relatórios de pesquisa. O estudo de caso se distingue de outros tipos de pesquisa, dada a sua preocupação em compreender uma instância singular, sendo o objeto de estudo tratado como único em sua realidade, embora esta seja multidimensional e historicamente situada.

Para coletar parte dos dados, conforme já descrito anteriormente, fizemos uso da entrevista, na qual obtivemos os relatos dos sujeitos, cuja linguagem utilizada pelos mesmos mostrou-se acessível. Além deste fato, é importante enfatizar que o objeto de estudo tratado constituiu nos percursos percorridos por estes sujeitos no decorrer do AProvaME, podendo ser entendidos como pertencentes à uma instância singular e considerados como únicos em suas realidades; multidimensionais e historicamente situados.

Embora saibamos que os resultados obtidos nesta investigação não sejam passíveis de generalização, esperamos que estes acrescidos às reflexões produzidas tanto pelos sujeitos, como por nós, possam subsidiar outras pesquisas que busquem investigar práticas catalisadoras do desenvolvimento profissional.

Ponte (2006a) relata que, muitas vezes, são realizados “estudos de caso múltiplos”, consistindo na investigação de diversos estudos de caso, que podem ser comparados, cujo objetivo é possibilitar o conhecimento da diversidade de realidades que coexistem dentro de um mesmo grupo. Dessa forma, os casos são comparados, por exemplo, identificando em cada professor investigado, a sua formação inicial, a sua experiência profissional anterior, as suas preocupações e interesses pessoais, que fez com que cada professor refletisse de uma forma diferente no decorrer de todo o processo. Estes fatos levaram a diferenças significativas encontradas entre os percursos dos professores participantes.

Este mesmo autor, também, assinala os fatores que determinam e explicam um caso, como as determinantes internas e as influências externas, levando-se em consideração que um caso se constitui em uma entidade bem-definida e necessariamente inserida em um determinado contexto. As determinantes internas de um caso são a sua história, a sua natureza, as suas propriedades e o seu contexto, enquanto as influências externas, diretas ou indiretas, são aquelas que o caso recebe em seu contexto, verificando-se quais os elementos que mais o influenciaram, podendo ser da realidade local ou exteriores a ela, próximos ou distantes.

Em nossa pesquisa, no que se referiu aos sujeitos, investigamos as suas formações iniciais, as experiências anteriores, as preocupações e interesses pessoais, bem como os processos pelos quais cada um deles passou, decorrentes também das influências que receberam inseridos no contexto do AProvaME, que fizeram com que eles trilhassem percursos diferentes em relação à questão que estava sendo investigada.

Ainda segundo Ponte (2006a), os estudos de caso podem ter diferentes propósitos, caracterizando-se como exploratórios, descritivos ou analíticos. Os *exploratórios* servem para obter informações preliminares a respeito do objeto a ser estudado. Os *descritivos* são aqueles que possuem como propósito principal descrever o caso em questão. Os estudos de caso *analíticos* procuram problematizar o objeto de estudo, construir ou desenvolver nova teoria ou confrontá-la com uma teoria já existente.

Assim, a nossa pesquisa pode ser caracterizada como qualitativa, na qual foi utilizado o estudo de caso que, devido ao seu propósito, pode ser caracterizado como analítico, no qual foram considerados como “casos múltiplos”, os dois professores investigados, usando como suporte teórico os estudos de Ludke e André (2003) e Ponte (2006a).

4.2.2 ALGUMAS INFORMAÇÕES DO PROJETO APROVAME

Conforme indicado anteriormente, como a nossa investigação ocorreu inserida no contexto do AProvaME, apresentamos a seguir, algumas informações relevantes sobre este projeto. Estas informações foram obtidas do Projeto de Pesquisa (HEALY, 2005) e do Relatório Científico¹ (HEALY, JAHN, 2007) apresentados ao CNPq, respectivamente, em 2005 e em julho de 2007. Para o leitor que necessitar maiores informações, a descrição completa das etapas e fases do AProvaME encontra-se no Apêndice A.

O projeto AProvaME iniciou-se em agosto de 2005, tendo duração de 24 meses. Participaram do projeto estudantes de diversas escolas públicas e particulares do Estado de São Paulo; seis pesquisadores do programa de Estudos Pós-graduados em Educação Matemática da PUC, São Paulo; e vinte e sete alunos do Mestrado Profissional deste programa, que também eram professores de escolas públicas estaduais de São Paulo. Sendo assim, estes últimos desempenharam diferentes papéis quando este projeto foi realizado, a saber: alunos do Mestrado Profissional; pesquisadores em sua equipe do AProvaME; e docentes nas escolas em que lecionavam. Estes alunos-professores foram denominados no projeto de professores-colaboradores. Foi proposto a eles que o desenvolvimento de seus trabalhos finais fosse realizado inserido no contexto do AProvaME.

¹Processo nº: 478272/2004-9

O problema do ensino e da aprendizagem da prova neste projeto abrangeu dois aspectos inter-relacionados. O primeiro referiu-se à elaboração de situações de aprendizagem pelos professores, que envolveu a investigação das possibilidades oferecidas pelos ambientes computacionais. Nestes ambientes, os professores precisaram explicitar as propriedades e as relações na linguagem formal do sistema, enquanto interagiam simultaneamente com os dados gerados pelas suas demonstrações.

O segundo enfoque foi direcionado ao professor, que necessitava desenvolver uma nova abordagem na sala de aula. O professor passaria por um processo de adaptação, necessitando de uma série de suportes e condições. Este processo visava proporcionar uma verdadeira apropriação das inovações. Para Healy (2005), uma efetiva integração de uma nova abordagem na sala de aula somente torna-se possível, mediante um processo de adaptação, cujo agente principal é o professor.

É importante ressaltar que todas as etapas do AProvaME contaram com o auxílio de um espaço virtual de aprendizagem, que ficou hospedado na plataforma Teleduc. Este espaço teve diversos objetivos. Entre eles, este ambiente apoiou o trabalho presencial, facilitou a comunicação entre os elementos das equipes, que foram constituídas no decorrer do projeto, e compartilhou informações, decisões e ações, que seriam tomadas a cada momento do AProvaME. Os pesquisadores do projeto assumiram a responsabilidade do gerenciamento deste espaço virtual, em que foram utilizadas diversas ferramentas, destacando-se o Fórum, Portfólio, Material de apoio, Leituras, Correio e Agenda. Todos os participantes do projeto foram cadastrados no Teleduc.

O AProvaME foi organizado em duas fases (Fase 1 e Fase 2), divididas em diversas etapas (Apêndice A).

Iniciamos a nossa participação no projeto no início da Fase 2, que ocorreu no 1º semestre de 2006. Esta fase foi realizada no decorrer de todo o ano de 2006 e teve por objetivo contemplar tanto a aprendizagem como o ensino, que foram os dois eixos de investigação do projeto.

A Fase 2, constituiu na elaboração e na avaliação das situações de aprendizagem pelas cinco equipes, formadas por professores-colaboradores e pesquisadores. Os pesquisadores selecionaram previamente os dez temas a serem abordados no desenvolvimento das atividades, cujos conteúdos pertenciam aos domínios da Álgebra e Geometria dos ensinos fundamental e médio. A proposta do projeto era que os professores, de forma colaborativa, elaborassem situações de aprendizagem, que requeriam o desenvolvimento de atividades, as quais deveriam envolver e valorizar a construção de conjecturas e provas em contextos que integrassem recursos tecnológicos.

Na 1ª etapa da Fase 2, os professores-colaboradores foram distribuídos em cinco equipes, sendo que cada equipe contava com dois pesquisadores do projeto. Foram

realizadas muitas reuniões presenciais em cada uma das cinco equipes, cuja frequência inicialmente era quinzenal. Contudo, muitas vezes, os professores solicitaram outras reuniões, principalmente no final desta etapa, para conseguirem terminar as situações de aprendizagem propostas.

Estas reuniões foram vídeo-gravadas, além de registros e anotações terem sido produzidos pelos professores participantes, na forma de relatórios disponibilizados no Teleduc, que continham informações sobre o que havia se passado em cada uma delas. Os professores, na medida em que desenvolviam as diferentes situações de aprendizagem, também, as disponibilizavam no Teleduc, de forma a constituírem um registro das produções para análise posterior.

Os professores-colaboradores optaram por utilizar dois tipos de ferramentas computacionais: a planilha eletrônica e um ambiente de geometria dinâmica, devido à sua maior familiaridade com elas, além destas possuírem reconhecido potencial no ensino da prova (HEALY; HOYLES, 2000, 2002).

A 2ª etapa da Fase 2 do AProvaME ocorreu no 2º semestre de 2006 e nela se deu a fase do *design* coletivo, quando as situações de aprendizagem elaboradas foram compartilhadas entre os grupos de professores. Ela teve por objetivos envolver os professores em um processo de análise e avaliação das atividades, levando a reformulações das mesmas para efetiva aplicação com os alunos em sala de aula. Os professores-colaboradores foram nesta etapa reorganizados em grupos diferentes daqueles que haviam feito parte na 1ª etapa desta mesma fase. As reuniões, também, ocorreram presencialmente com frequência quinzenal, no laboratório de informática da PUC. Todas as reuniões também foram vídeo-gravadas, além de terem sido produzidos registros dos professores-colaboradores nos fóruns do Teleduc, nos quais estes apresentavam as análises e as sugestões de melhorias das atividades. As intervenções diretas destes professores nas atividades, no momento em que eles as estavam testando no computador, também, foram registradas em alguns computadores no laboratório por meio da utilização de um *software* específico, que gravou todas as interações. Este *software* permitiu registrar na memória do computador todos os passos executados pelos professores, enquanto testavam as diferentes atividades propostas.

Na 3ª etapa da Fase 2, que ocorreu no 1º semestre de 2007, os professores-colaboradores, depois de todos estes momentos de uma construção colaborativa, com análises e sugestões subsequentes, tomaram para si o prosseguimento de sua situação de aprendizagem, a ser aplicada em uma etapa posterior com os seus alunos.

A Fase 2 contou com três etapas, que foram aplicadas; porém, em relação ao que havia sido previsto inicialmente no projeto (HEALY, 2005), ao serem efetivamente

implementadas, estas etapas sofreram algumas modificações (HEALY; JAHN, 2007) quanto ao que deveria ser realizado em cada uma delas (Apêndice A).

4.2.3 PROCEDIMENTO DA PESQUISA

Conforme exposto anteriormente, iniciamos a nossa participação no projeto na 1ª Etapa da Fase 2, no 1º semestre de 2006. Em relação a esta etapa do AProvaME, participamos de todas as reuniões realizadas durante este semestre, em dois grupos, nas equipes A e B, no momento em que os professores-colaboradores, com o auxílio dos pesquisadores, elaboraram as situações de aprendizagem.

Os temas selecionados pelos pesquisadores, para a Equipe A, foram: Progressão Aritmética (PA) e Progressão Geométrica (PG), em Álgebra, e paralelismo e perpendicularismo, pelo enfoque da Geometria Analítica, em Geometria. Para a Equipe B, os temas escolhidos foram: Máximo Divisor Comum e Mínimo Múltiplo Comum (Álgebra), e congruência de triângulos visando aplicações nas propriedades dos quadriláteros (Geometria). Os professores-colaboradores deveriam desenvolver em suas equipes, de forma colaborativa, situações de aprendizagem, as quais requeriam a elaboração de atividades, que envolvessem e valorizassem a construção de provas em um contexto que possibilitasse a integração de recursos tecnológicos. Os professores produziram registros intermediários de suas produções, na medida em que pensavam e elaboravam as diferentes versões de suas situações de aprendizagem.

Entre os meses de maio e junho de 2006, realizamos a 1ª entrevista (Apêndice B), com oito dos dez participantes destas duas equipes, no momento em que estes, inseridos em suas equipes, estavam desenvolvendo as situações de aprendizagem. Realizaram esta entrevista os professores² Adriano, Eric, Flávia e Pedro (Equipe A) e André, Edson, Ester e Vagner (Equipe B). Embora tenhamos realizado a primeira entrevista com estes oito professores-colaboradores, acompanhamos no decorrer do AProvaME cinco deles, sendo que para efeito da análise do estudo em questão escolhemos apenas dois, que foram efetivamente os sujeitos desta pesquisa.

² Vale ressaltar que os nomes dos sujeitos foram alterados, de forma a ser garantido o anonimato nas entrevistas e nos diversos registros documentais produzidos por estes no decorrer da realização da presente pesquisa.

Este fato ocorreu em um primeiro momento devido ao andamento do projeto, pois nem todos os trabalhos finais destes oito professores estavam relacionados à aplicação das atividades desenvolvidas por eles. Assim, algumas dissertações tiveram outros enfoques, como a análise de algumas questões relacionadas ao mapeamento das concepções de alunos quanto à prova (Fase 1), enquanto outras foram direcionadas à análise de algumas coleções de livros didáticos de Matemática, visando identificar as abordagens de prova presentes nestes livros. Três professores que realizaram a primeira entrevista, André, Edson e Ester, pelo fato de terem dado um andamento diferente a seu trabalho de pesquisa, não finalizaram nenhuma situação de aprendizagem, e conseqüentemente não procederam à aplicação destas com os alunos.

A redução de cinco para dois professores deu-se após a realização do exame de qualificação, devido ao grande volume de informações e dados por nós coletados, o que impossibilitaria uma análise mais cuidadosa e aprofundada da temática que estava sendo investigada.

Dos cinco professores, que foram acompanhados em um período que variou de dois anos a dois anos e meio, quatro pertenciam à Equipe A, e apenas um, à Equipe B. Da Equipe A, fizeram parte os professores Adriano, Eric, Pedro e Flávia e da Equipe B, o professor Vagner.

Os professores Adriano, Eric e Pedro escolheram para a elaboração de sua situação de aprendizagem conteúdos envolvendo sequências e Progressão Aritmética (PA). A professora Flávia desenvolveu o tema paralelismo e perpendicularismo, visto do enfoque da Geometria Analítica, e o professor Vagner se aprofundou no estudo das propriedades do paralelogramo, a partir da temática solicitada para a sua equipe, que foi a congruência de triângulos visando às aplicações nas propriedades dos quadriláteros.

Em relação à 2ª Etapa da Fase 2, participamos também de todas as reuniões, em uma das equipes, reformulada em relação às da 1ª Etapa desta mesma fase do AProvaME.

A nossa escolha por esta equipe, naquele momento composta por seis professores-colaboradores e dois pesquisadores, deu-se pelo motivo de os sujeitos de nossa pesquisa estarem participando neste novo grupo de professores. Dessa forma, tivemos condições de acompanhar de perto as interações e a evolução de cada um destes professores.

No desenvolvimento de suas respectivas situações de aprendizagem, nas quais os professores-colaboradores tinham por objetivo que os seus alunos conseguissem construir uma prova, mediante o auxílio proporcionado pelos recursos computacionais integrados nas atividades, os professores Eric, Pedro, Flávia e Vagner optaram por utilizar o Cabri-Géomètre, enquanto o professor Adriano escolheu o *software* Hot-Potatoes.

Apesar de quatro dos cinco professores terem escolhido o Cabri-Géomètre, a forma como foi realizada a inserção nas atividades revelou-se diferente para cada um deles, em

relação ao nível de aprofundamento e ao que era solicitado que os seus alunos desenvolvessem em relação à prova.

Durante o 1º semestre de 2007 os professores-colaboradores passaram a finalizar individualmente as suas atividades, com a ajuda do pesquisador, que era o seu orientador (3ª Etapa da Fase 2). Alguns deles conseguiram ainda neste semestre aplicar as atividades desenvolvidas com os seus alunos.

Entre os meses de abril e junho de 2007, realizamos a segunda entrevista com os cinco professores, incluindo os dois sujeitos da presente pesquisa (Apêndice C). Neste momento, estes professores estavam finalizando as suas atividades, a partir das análises e sugestões obtidas na fase do *design* coletivo ou do teste-piloto aplicado aos estudantes para na etapa seguinte, poderem aplicá-las com os alunos.

No final do 2º semestre de 2007, entre os meses de outubro e dezembro, realizamos a terceira entrevista (Apêndice D) com os professores. Nesse momento, estes professores já tinham aplicado as atividades a seus alunos e procedido às análises pertinentes. Os professores Eric, Flávia, Pedro e Vagner finalizaram o seu Mestrado Profissional no decorrer do 2º semestre de 2007 e o professor Adriano, no 2º semestre de 2008, defendendo as suas respectivas dissertações.

Estes cinco professores-colaboradores nos forneceram muitas informações, como as três entrevistas realizadas por cada um deles em três momentos distintos e marcantes do projeto, bem como os registros das diferentes fases da elaboração de suas situações de aprendizagem, ou seja, todas as versões a partir das iniciais, até aquela que foi efetivamente aplicada e as suas respectivas dissertações de mestrado. Estas informações e dados foram coletados de forma a acompanhar o percurso destes professores no decorrer do AProvaME, em relação às questões que estavam sendo investigadas

Como já explicitado anteriormente, pelo fato de dispormos de uma grande quantidade de dados e informações dos cinco professores-colaboradores e devido à dificuldade em se analisar todo este material de uma forma sintética e organizada, optamos por estudar a trajetória de apenas dois deles, que se constituíram nos sujeitos da presente pesquisa. Um número menor de sujeitos possibilita realizar uma análise mais aprofundada.

Optamos pela metodologia de estudo de caso, com a sua posterior análise. Este tipo de análise demanda que, para cada professor, seja construído um caso, a partir dos momentos que foram identificados *a priori*, para, em seguida, proceder-se a uma análise e síntese destes casos.

Dessa forma, na presente pesquisa apresentamos os casos de dois professores-colaboradores Flávia e Vagner, pelo fato de ambos terem desenvolvido uma situação de aprendizagem que abordava conteúdos de geometria com o uso do *software* Cabri-Géomètre. Por meio da descrição e análise de cada um destes casos, pretendeu-se verificar

como foi o deslocamento destes professores no contexto do AProvaME. O capítulo 5 apresenta, descreve e sintetiza cada um dos casos separadamente, além de produzir reflexões e análises sobre os pontos comuns e as diferenças constatadas nos percursos dos dois sujeitos.

4.2.4 OS SUJEITOS DA PESQUISA

Os sujeitos desta pesquisa, conforme relatado anteriormente, foram os professores-colaboradores, a Flávia e o Vagner, acompanhados em seus respectivos percursos durante um período de dois anos (2006-2007), no decorrer da Fase 2 do projeto AProvaME.

Os dados do quadro 1 fornecem algumas informações dos sujeitos da presente pesquisa, na ocasião que realizaram a primeira entrevista.

Nome	Idade (anos)	Tipo de instituição graduação	Tempo de docência (anos)	Tipo de escola que leciona	Nível de ensino lecionado
Flávia	31	Particular	11	Estadual	Médio
Vagner	38	Particular	16	Estadual	Médio

Quadro 1: Dados dos sujeitos da pesquisa, na ocasião da realização da primeira entrevista

Flávia e Vagner realizaram a licenciatura em Matemática em instituições particulares de ensino. No momento da realização da primeira entrevista, os dois possuíam um tempo de docência superior a dez anos e lecionavam Matemática no Ensino Médio em escolas públicas estaduais.

4.2.5 ENTREVISTAS E OUTROS REGISTROS

Os instrumentos utilizados para a obtenção das informações foram as três entrevistas e alguns registros documentais. Estes registros se constituíram nas diversas versões das situações de aprendizagem e outras informações presentes em suas dissertações de Mestrado. Os sujeitos nos forneceram todas as versões de suas situações de aprendizagem, desde as iniciais, desenvolvidas nas reuniões realizadas no contexto do AProvaME (1ª e 2ª etapas da Fase 2), as versões intermediárias quando os sujeitos tomaram para si esta elaboração apenas auxiliados pelos seus respectivos orientadores

e/ou alunos, na ocasião da aplicação do teste-piloto, até a versão final, a que foi efetivamente aplicada (Anexos A ao P). Os registros documentais visaram complementar as informações obtidas pelas entrevistas, bem como buscaram identificar outros aspectos do tema estudado.

As entrevistas seguiram um roteiro semiestruturado, cujas informações encontram-se descritas a seguir:

4.2.5.1 A PRIMEIRA ENTREVISTA

Para efeito da análise que realizamos nesta pesquisa, pudemos identificar na primeira entrevista, uma estrutura composta por seis temáticas.

Inicialmente, os sujeitos, forneceram os seus dados pessoais. Em seguida, as questões foram direcionadas à formação inicial, procurando verificar se houve por parte de seus professores na graduação, naquele momento, alguma preocupação com inserção de provas, visando ao desenvolvimento do raciocínio dedutivo, e se tiveram alguma disciplina relacionada à informática.

A terceira temática procurou resgatar o que ocorreu no período após o final da graduação: entre o ingresso e o desenrolar da vida docente até chegarem ao Mestrado Profissional, no que se referia à prova e à informática. Em relação à prova foi questionado se naquele momento de suas vidas docentes, antes do ingresso no Mestrado Profissional, pensavam e propunham atividades que envolviam a elaboração de provas por parte de seus alunos, integrando ou não recursos da informática.

A quarta temática procurou verificar o que ocorreu quando ingressaram no Mestrado Profissional e, mais especificamente, quando passaram a participar do AProvaME. Foi questionado se a sua participação no curso e no projeto possibilitou a ampliação de seus conhecimentos em relação a questões que envolviam a informática e a produção da prova, o que aprenderam e pensavam naquele momento sobre o desenvolvimento de atividades que buscavam a prova, tendo a contribuição dos recursos computacionais.

A quinta parte da entrevista procurou encontrar uma resposta quanto às dificuldades encontradas pelos sujeitos no momento do desenvolvimento das situações de aprendizagem.

A sexta e última parte da entrevista procurou verificar, junto aos sujeitos, o que eles acreditavam ser a contribuição dos recursos computacionais no desenvolvimento e aplicação de atividades com os alunos no ensino-aprendizagem da prova. Também foi verificado, se neste momento, eles julgavam ser possível a partir de um empirismo inicial seguir na direção de uma formalização matemática usando recursos computacionais.

4.2.5.2 A SEGUNDA ENTREVISTA

Na segunda entrevista, visamos obter informações quanto às diferentes versões das situações de aprendizagem desenvolvidas pelos sujeitos, a partir da finalização da 1ª Etapa da Fase 2 do projeto AProvaME, e se estes já haviam testado a atividade em algum momento, mesmo na forma de um teste-piloto.

Para efeito da análise das informações obtidas dos sujeitos, identificamos nesta segunda entrevista quatro temáticas.

Inicialmente, os sujeitos da pesquisa voltaram a fornecer os seus dados pessoais, pois como já havia se passado quase um ano da realização da primeira entrevista alguma informação quanto à vida profissional destes poderia ter se modificado.

A segunda temática envolveu a descrição das diversas versões da situação de aprendizagem por eles elaborada, indicando o processo pelo qual passaram até conseguirem atingir a versão final. As atividades começaram a ser desenvolvidas coletivamente no 1º semestre de 2006, e, somente a partir de 2º semestre de 2006, os sujeitos tomaram para si o prosseguimento no desenvolvimento destas, ainda com uma ajuda colaborativa, conhecida como a fase do *design* coletivo que ainda contou com o auxílio do Teleduc. A partir do final de 2006 e no decorrer do primeiro semestre de 2007, os sujeitos continuaram a elaborar as suas situações de aprendizagem, auxiliados apenas pelos seus respectivos orientadores. Neste momento da entrevista, também, se buscou obter informações sobre como ocorreu a fase de *design* coletivo quanto às contribuições dos demais professores participantes da pesquisa e dos alunos, no caso de ter sido aplicado um teste-piloto, e como se deu a finalização individual da situação de aprendizagem. Foi também solicitado que os sujeitos explicassem e justificassem as diversas mudanças que ocorreram no decorrer das diferentes versões.

A terceira temática da entrevista solicitou aos sujeitos que avaliassem a versão final de sua situação de aprendizagem. Buscou, também, verificar se os sujeitos conseguiam identificar as limitações de conhecimentos que tinham em relação à construção de uma prova, bem como os desafios quanto à integração e uso dos recursos computacionais com os alunos, e para aqueles que já haviam realizado o piloto ou estavam aplicando as atividades, que descrevessem como esta estava sendo realizada.

Os sujeitos finalizaram esta entrevista emitindo diversas opiniões quanto aos desafios e perspectivas de se proceder a um tipo de trabalho como este, com alunos, caracterizando a quarta temática desta segunda entrevista.

4.2.5.3 A TERCEIRA ENTREVISTA

Na terceira entrevista, procuramos obter informações quanto aos resultados da aplicação das situações de aprendizagem com os alunos.

Sete temáticas principais foram exploradas nesta terceira entrevista. Inicialmente os sujeitos voltaram a fornecer alguns dados pessoais, pois algumas informações poderiam ter sido alteradas, como realmente ocorreu.

A segunda temática se referiu à descrição da versão final da situação de aprendizagem, com as atividades que foram efetivamente aplicadas aos alunos. Deve-se ressaltar que, também na segunda entrevista, foi solicitado aos sujeitos que descrevessem e avaliassem a versão final da situação de aprendizagem por eles elaborada (terceira temática). Porém, no momento em que os professores realizaram a segunda entrevista, enquanto alguns já haviam aplicado a sua situação de aprendizagem, outros ainda não haviam conseguido finalizar as suas atividades. Dessa forma, esta questão presente na terceira entrevista veio complementar as informações já obtidas na segunda entrevista.

Na terceira temática, os sujeitos relataram como ocorreu a aplicação da situação de aprendizagem com os alunos e se foram necessários ajustes ou mudanças nas atividades, em função do andamento desta.

A quarta temática tratou das dificuldades e das reações dos alunos durante a aplicação da situação de aprendizagem.

Os questionamentos quanto às limitações percebidas pelos sujeitos, os resultados obtidos e as expectativas destes caracterizaram a quinta temática da entrevista.

A sexta temática coletou as opiniões emitidas pelos sujeitos sobre o AProvaME, o que este projeto havia significado para eles e que influência propiciou em sua formação intelectual e em sua prática docente e matemática. Foi também solicitado que os sujeitos emitissem sugestões de melhoria deste projeto, no caso de outros professores passarem por um processo de formação continuada semelhante a este vivenciado por eles.

Finalmente, as perspectivas e desafios do professor foram apresentados na sétima e última parte da entrevista.

Em relação às três entrevistas realizadas e aos registros documentais produzidos e fornecidos pelos sujeitos, pretendeu-se identificar, em suas falas (entrevistas), nas atividades elaboradas (situações de aprendizagem) e nos relatos apresentados nas respectivas dissertações (considerações finais), as possíveis influências e decorrências do AProvaME, na ampliação de seus conhecimentos e nas mudanças de concepções e práticas em relação às provas e ao uso de recursos da informática, fornecendo indícios de que teria ocorrido um desenvolvimento profissional.

4.2.6 PROCEDIMENTOS PARA ANÁLISE DOS DADOS

Para efeito da análise das informações e dados obtidos, apresentamos, inicialmente, os percursos de cada um dos sujeitos, a partir de suas formações iniciais, durante a sua participação no AProvaME, até a finalização de seus mestrados profissionais, mesclando algumas considerações quanto aos pontos comuns entre estas trajetórias ou as diferentes opções que estes realizaram no decorrer deste processo.

Inicialmente, em relação às três entrevistas, a partir de algumas dimensões de análise escolhidas *a priori*, pudemos identificar algumas temáticas em cada uma delas. Em seguida, partindo das temáticas, construímos algumas categorias levando em consideração as informações fornecidas pelos sujeitos nas entrevistas, as leituras efetuadas e as considerações teóricas.

Os quadros 2, 3 e 4, apresentam estas categorias, relacionadas com a questão de pesquisa, que o presente estudo pretendeu responder, enunciada novamente a seguir.

Em que medida a inserção de professores de Matemática em um contexto de formação, mediado pela tecnologia envolvendo a prova matemática, pode contribuir para o desenvolvimento profissional destes?

Os quadros 2, 3 e 4 podem ser visualizados, a seguir.

Temáticas/ Categorias	Informações coletadas -1ª Entrevista
Primeira	Dados Pessoais
Segunda	Formação Inicial
Terceira	No decorrer da vida docente antes do ingresso no Mestrado Profissional
Quarta	Participação no Mestrado Profissional e no AprovaME
Quinta	As dificuldades associadas ao desenvolvimento das situações de aprendizagem
Sexta	Opiniões sobre o potencial dos recursos tecnológicos no ensino e na aprendizagem da prova

Quadro 2: Categorias da 1ª entrevista

Temáticas/ Categorias	Informações coletadas –2ª Entrevista
Primeira	Dados Pessoais
Segunda	Diferentes fases na elaboração da situação de aprendizagem até atingir a versão final
Terceira	Finalização da situação de aprendizagem (versão final): antes de ser aplicada, abordagem da prova, desafios, limitações e aplicação do teste-piloto junto aos alunos
Quarta	Opiniões sobre as perspectivas e os desafios dos professores

Quadro 3: Categorias da 2ª entrevista

Temáticas/ Categorias	Informações coletadas – 3ª Entrevista
Primeira	Dados Pessoais
Segunda	Descrição da versão final da situação de aprendizagem: depois da aplicação com os alunos
Terceira	Relato de como ocorreu a aplicação da situação de aprendizagem com os alunos
Quarta	Reações e dificuldades dos alunos durante a aplicação das atividades
Quinta	Limitações percebidas, expectativas e resultados obtidos
Sexta	Opiniões sobre o AprovaME e sugestões de melhoria
Sétima	As perspectivas e os desafios dos professores

Quadro 4: Categorias da 3ª entrevista

Em seguida, a partir dos dados obtidos com as três entrevistas realizadas e das diferentes versões da situação de aprendizagem, organizamos estas informações em momentos que consideramos significativos para cada um dos sujeitos. Procedemos a uma descrição e análise de cada um destes momentos, seguidos de uma síntese dos resultados obtidos, de forma a tentarmos responder à questão proposta para esta pesquisa. As nossas reflexões e análises estão voltadas a buscar evidências nas posições assumidas pelos sujeitos, além das variações observadas entre eles, que poderiam fornecer indícios de avanços, influenciando ou não os seus respectivos desenvolvimentos profissionais.

Cada um destes sujeitos percorreu um caminho diferente, quando elaborou e desenvolveu as suas respectivas situações de aprendizagem. Devido a este motivo, o número de versões e o aprofundamento dado a elas também diferiu entre eles.

No próximo capítulo procedemos à apresentação e à análise dos casos estudados, ou seja, os percursos de Flávia e Wagner.

5 ANÁLISES DO ESTUDO REALIZADO

Inicialmente, procedemos a uma breve apresentação da trajetória percorrida pelos dois sujeitos de nossa pesquisa, em relação aos pontos comuns de seus percursos, seja nos caminhos trilhados no Mestrado Profissional e no AProvaME, bem como algumas opções por eles realizadas quanto aos teóricos que fundamentaram as suas respectivas pesquisas. Apesar de nossa pesquisa não se ater a aspectos ligados à argumentação e às conjecturas, estes termos estiveram muito presentes na fala dos sujeitos, já que a formulação de conjecturas e argumentos matematicamente válidos podem ser considerados como etapas importantes no processo de construção de uma prova. Dessa forma, apresentamos, de uma maneira muito sucinta, alguns autores e respectivos estudos que tratam da argumentação e das conjecturas.

Em seguida, efetuamos um estudo detalhado, por meio da descrição, análise e síntese das trajetórias individuais percorridas por Flávia e Vagner, a partir do início da Fase 2 do AProvaME até a finalização de seus respectivos mestrados.

Flávia e Vagner ingressaram no Mestrado Profissional em Ensino de Matemática do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC, em março de 2005, finalizando no 2º semestre de 2007 com a apresentação (defesa) de suas pesquisas, elaboradas sob a forma de uma dissertação.

No final do 1º semestre de 2005, todos os professores que cursavam o Mestrado Profissional foram convidados a participar do projeto AProvaME, sendo que Flávia e Vagner, dentre outros, manifestaram interesse, iniciando as suas participações a partir do segundo semestre deste mesmo ano. No decorrer da Fase 1 do projeto, realizada no 2º semestre de 2005, estes dois professores compareceram às diversas reuniões e aos grupos de estudo, bem como trabalharam junto com os outros professores-colaboradores e pesquisadores na adaptação do instrumento de pesquisa, o questionário, para a realidade brasileira. Em seguida aplicaram este questionário a algumas de suas turmas do Ensino Médio, nas escolas nas quais lecionavam.

A partir do 1º semestre de 2006, teve início a Fase 2 do AProvaME, com a realização da 1ª Etapa, na qual as equipes formadas por professores-colaboradores e pesquisadores estavam envolvidas no desenvolvimento colaborativo das situações de aprendizagem.

Flávia fez parte da Equipe A, que teve por objetivo elaborar atividades envolvendo conteúdos de PA e PG (Álgebra) e paralelismo e perpendicularismo, visto pelo enfoque da Geometria Analítica (Geometria). Vagner participou da equipe B, cujas propostas para as atividades foram Máximo Divisor Comum e Mínimo Múltiplo Comum (Álgebra) e o estudo das propriedades do paralelogramo, a partir da congruência de triângulos (Geometria).

Após o encerramento da 1ª Etapa da Fase 2 do AProvaME em julho de 2006, Flávia e Vagner prosseguiram com o desenvolvimento de suas situações de aprendizagem, que se constituíram em seus trabalhos de pesquisa e que foram apresentados em seus mestrados. Flávia optou pelo tema paralelismo e perpendicularismo, visto do enfoque da Geometria Analítica e Vagner, pelo estudo das propriedades do paralelogramo. Tanto Flávia como Vagner tiveram por orientador o professor Dr. Vincenzo Bongiovanni, que também participou como pesquisador do AProvaME.

Embora Flávia e Vagner tenham se baseado em estudiosos e pesquisadores diferentes para fundamentar teoricamente as suas pesquisas, no que se referiu ao processo de concepção e elaboração das atividades, bem como à análise dos resultados obtidos em algumas das etapas das situações de aprendizagem, ambos escolheram e utilizaram Parzys (2001).

Citamos para finalidade de apresentação do percurso de nossos sujeitos, os nomes dos autores que estes escolheram para fundamentar os seus respectivos estudos. Porém, estes autores não foram acrescentados ao item Referências de nosso trabalho, pelo fato de não termos consultado este material. Estes teóricos foram citados nas dissertações de Flávia e Vagner, constando em suas respectivas Referências. Em nosso trabalho a referência completa destes autores foi colocada como nota de rodapé, na primeira vez em que estes pesquisadores foram citados, conforme pode ser observado a seguir.

Além de Parsysz (2001), Flávia levou em consideração os estudos de Balacheff (1987)³, enquanto Vagner buscou subsídios teóricos também nos trabalhos de Machado (1995)⁴, de Duval (1995)⁵ e de Duval e Egret (1989)⁶.

³BALACHEFF, N. Processus de preuves et situation de validation. *Educational Studies in Mathematics*, v. 18, n. 2, p. 147-176, 1987.

⁴MACHADO, N. J. *Epistemologia e Didática: as concepções de conhecimento e inteligência e a prática docente*. São Paulo: Cortez, 1995.

⁵DUVAL, R. *Sémiosis et pensée humaine*. Berne: Peter Lang, 1995.

⁶DUVAL, R.; EGRET, M.A. L'organisation deductive du discours. In: IREM, 2., 1989, Strasbourg. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*. Strasbourg, 1989, p. 25-40.

Os estudos de Parzysz (2001) sobre a existência de uma articulação entre a percepção e a dedução, possibilitaram a este pesquisador identificar as diferentes etapas do pensamento geométrico. Ele propôs um modelo de quadro teórico a ser utilizado no ensino da Geometria, destacando quatro etapas no desenvolvimento do pensamento geométrico, classificadas nos níveis G0, G1, G2 e G3, descritos a seguir:

- *Nível G0* - denominado geometria concreta. Neste nível, parte-se do concreto, possuindo como particularidade a identificação de figuras pelo seu aspecto geral. Esta validação é perceptiva.
- *Nível G1* - denominado geometria espaço-gráfica. Neste nível parte-se das representações figurais e gráficas, e os objetos são bidimensionais, como os desenhos feitos em uma folha de papel ou na tela de um computador. Neste nível, a resolução de um exercício envolve o uso de régua, compasso, transferidor, esquadro, comandos de um programa computacional ou *softwares* de geometria dinâmica. Neste nível a validação ainda continua sendo perceptiva, pois, embora o aluno consiga identificar as propriedades das figuras construídas, ainda não consegue explicá-las.
- *Nível G2* - denominada geometria proto-axiomática. Neste nível, os conceitos são objetos teóricos e as demonstrações são feitas a partir de teoremas da Geometria Euclidiana, que podem ser obtidos empiricamente, ou por premissas aceitas pelos alunos de modo intuitivo.
- *Nível G3* - denominado geometria axiomática. Neste nível, os axiomas são completamente explicitados. Os objetos analisados são teóricos e a validação é realizada usando-se os axiomas e as propriedades desse sistema axiomático (PARZYSZ, 2001).

Parzysz (2001) sintetiza assinalando que nos níveis G0 e G1, os objetos são concretos e as validações perceptivas, e que as justificativas são feitas por meio do que se percebe, ou seja, são mais intuitivas. Nos níveis G2 e G3, os objetos são teóricos e as validações passam a ser dedutivas. Porém, enquanto no nível G2 as justificativas são realizadas por meio da constatação de propriedades evidentes, no nível G3 elas são feitas usando-se um sistema de axiomas.

Este autor, também, se preocupou em seus estudos em relatar as dificuldades que os alunos enfrentam ao passarem de um nível a outro. Nestes trabalhos, Parzysz (2001) identificou que muitos alunos na França, ao elaborarem uma prova, confundiam elementos teóricos e perceptivos. Nos dois primeiros níveis, G0 e G1, a percepção é aceita como

justificativa, enquanto nos níveis G2 e G3, mesmo que visualmente pareça evidente ao aluno o que deverá ser provado, este terá que fazer uso de teoremas ou axiomas na elaboração desta prova.

Ao buscarmos outros teóricos que se interessaram em estudar e estabelecer níveis hierárquicos de raciocínio no decorrer da aprendizagem de geometria, nos deparamos com a teoria de Van Hiele (1986). O modelo desenvolvido por este estudioso, classificado em quatro níveis, pode ser exemplificado a partir das reações que os alunos experimentam ao identificar uma figura. O primeiro nível é caracterizado pela observação, e nenhuma justificativa é solicitada. No segundo nível, o aluno observa os elementos e as propriedades da figura, mas ainda não consegue estabelecer nenhuma relação entre eles. No terceiro nível o aluno já consegue entender que existe um encadeamento de relações entre as figuras e as suas propriedades, percebendo quando uma propriedade decorre de outra e, finalmente no quarto nível, os alunos passam a compreender uma prova formal, dominando o processo dedutivo. Mais detalhes sobre este modelo podem ser encontrados em Nasser e Sant'Anna (1997).

Nasser e Tinoco (2001) consideram que o modelo de Van Hiele possui uma ligação muito próxima com a habilidade de justificar em Matemática. Nos dois primeiros níveis deste modelo, como as observações realizadas pelos alunos são empíricas, eles não enxergam a necessidade de buscar a prova, por não duvidarem da validade de suas observações. Estas autoras observam que, para que se possa alcançar o terceiro nível, se faz necessário e relevante um trabalho que desenvolva habilidades em argumentar e provar.

Em relação às situações de aprendizagem desenvolvidas pela Flávia e pelo Vagner, pudemos identificar nas atividades por eles elaboradas a existência de uma grande preocupação em desenvolver em seus alunos habilidades em argumentar. Em uma fase posterior, pudemos constatar em muitas falas presentes em suas entrevistas, que ambos valorizaram as argumentações, as conjecturas formuladas e as justificativas produzidas pelos sujeitos de suas respectivas pesquisas, atribuindo a elas uma grande importância, pois as entendiam como fazendo parte de um processo, etapas necessárias e anteriores à efetiva construção da prova.

Dentre os diversos autores que têm se preocupado em estudar a temática das conjecturas, escolhemos para a nossa investigação a abordagem de Ponte et al. (1998). Para estes autores, uma conjectura matemática se constitui em uma afirmação que responde a uma determinada pergunta. Esta afirmação se considera ser verdadeira, podendo se referir a um objeto ou a toda uma classe de objetos. Estes autores explicam que nem todas as conjecturas possuem o mesmo alcance matemático, pois enquanto algumas

se referem a fatos muito simples ou evidentes, outras são muito importantes, porque a partir delas se torna possível tirar muitas conclusões.

Ponte et al. (1998) ainda observam que, atualmente, existe um consenso geral entre os educadores matemáticos de que aprender Matemática envolve de maneira fundamental “o fazer Matemática”, sendo que este fazer demanda a realização de investigações matemáticas. Estes autores indicaram que uma investigação matemática pode ser iniciada com uma situação que necessita ser compreendida, ou com um conjunto de dados que deverão ser organizados e explicados em termos matemáticos. Em seguida, devem ser colocadas questões produtivas e interessantes, para que conjecturas possam ser formuladas. Um teste pode ser realizado, ou mais dados podem ser coletados, de forma a fortalecer estas conjecturas, rejeitá-las ou conduzir à formulação de outras. As provas formais e argumentos plausíveis, também, podem fornecer mais argumentos para confirmar ou rejeitar as conjecturas formuladas. No decorrer deste processo, poderão surgir novas questões a serem investigadas (PONTE et al., 1998).

Por sua vez, no que se refere ao desenvolvimento da habilidade de argumentar, Boavida (2005) observa que este desenvolvimento se reveste de um caráter complexo, pois demanda um processo que envolve ensinar os alunos a avaliar, a reconhecer e a produzir argumentos matematicamente válidos, adaptados à sua maturidade. O desenvolvimento desta habilidade nos alunos coloca o professor diante de muitos desafios, pois esta não se adquire apenas pela aprendizagem de técnicas e procedimentos.

Devido a este fato, verificou-se que o interesse pela argumentação no contexto da Educação Matemática é recente, tendo início somente a partir da década de 1980, a partir da constatação de sua importância como um meio para se atingir a prova matemática. Este interesse surgiu devido à necessidade de se propiciar nas aulas de Matemática, condições favoráveis ao envolvimento de alunos em experiências de aprendizagem, que os levassem a explicar e a fundamentar os seus raciocínios, a justificar as soluções para os problemas que lhes eram colocados, a descobrirem o porquê de determinados resultados e a formular, avaliar e provar conjecturas (BOAVIDA, 2005).

A partir de pesquisas por ela realizadas, Boavida (2005) entende a argumentação na aula de Matemática como sendo as conversas desenvolvidas cujo foco é a matemática, que podem assumir a forma de raciocínios explicativos ou justificativos. Estes raciocínios teriam como objetivo, por meio da indicação de razões, diminuir os riscos de incertezas ou erros na escolha de um caminho, buscando convencer a outros a aceitar ou rejeitar ideias, enunciados e ou posições.

No que tange à habilidade de argumentar, Nasser e Tinoco (2001) observam que ela deve ser construída no decorrer dos anos de escolaridade, pois é adquirida gradativamente, além de depender da maturidade e da experiência dos alunos. Dentre algumas propostas

apresentadas por estas autoras para que os professores possam promover o desenvolvimento desta habilidade em seus alunos, uma delas seria que estes explorassem em suas aulas de Matemática atividades variadas como jogos, problemas ou desafios. Contudo, além destas atividades, elas apontam para a importância de professores sempre estimularem e solicitarem aos alunos, que justifiquem todas as suas respostas. E por sua vez, os professores devem aceitar as justificativas produzidas por seus alunos, sempre levando em consideração a faixa etária e o nível de raciocínio destes (NASSER; TINOCO, 2001).

Em uma fase posterior à argumentação, como uma forma de preparar os alunos para serem capazes de dominar o raciocínio dedutivo, Nasser e Tinoco (2001) constataram a necessidade de se desenvolver o raciocínio lógico nos alunos. Elas observaram que as crianças nas séries iniciais conseguem explicar o seu raciocínio com naturalidade de forma oral, pois são mais espontâneas. Porém, no decorrer dos anos, a espontaneidade diminui e os alunos já não conseguem justificar as suas soluções nem de forma oral, nem escrita. Estas autoras apontam, assim, para a necessidade de se trabalhar com a habilidade de argumentar desde as séries iniciais, para que no futuro os alunos consigam defender os seus pontos de vista, tanto em conversas informais, como em questões matemáticas.

Pedemonte (2008) sinaliza para a existência de alguns estudos que indicam que existe uma continuidade entre a argumentação, como um processo para estabelecer produções, e a construção de uma prova. Durante um processo de resolução de problemas, uma atividade de argumentação é usualmente desenvolvida com o objetivo de produzir uma conjectura. Estas pesquisas partem da hipótese que, em alguns casos, esta continuidade poderia auxiliar os alunos na construção de uma prova, pela organização de alguns argumentos previamente produzidos em um encadeamento lógico. Os resultados de algumas pesquisas empíricas indicaram que a prova se tornava mais acessível aos alunos, se a atividade de argumentação fosse desenvolvida para a construção de uma conjectura.

Nasser e Tinoco (2001), a partir de alguns experimentos desenvolvidos pelo grupo ao qual pertenciam, enunciaram algumas estratégias que foram utilizadas com os alunos e se mostraram eficientes no desenvolvimento da habilidade de argumentação, a partir da 5ª série do ensino fundamental. São elas (p. 9,10):

- Os alunos após tentarem resolver uma tarefa individualmente e de ouvirem a explicação do professor, devem trabalhar em grupos, para que possam discutir as possíveis soluções deste problema;
- Os alunos devem avaliar as justificativas produzidas e apresentadas pelos seus colegas;

- Os professores devem sempre propor problemas, que desafiem os alunos e requeiram o raciocínio lógico, não importando o tópico da Matemática que esteja sendo abordado;
- Para evitar o uso de algoritmos ou fórmulas, os professores devem propor o mesmo problema tanto para alunos que já aprenderam o conteúdo matemático, como para aqueles que ainda não adquiriram este conhecimento;
- Propor o uso de computadores, em atividades que usem a geometria dinâmica, para que os alunos possam verificar se uma afirmativa é verdadeira ou falsa. Depois desta verificação, os alunos deverão ser levados pelos professores a justificar esta afirmação, ou a procurar um contra-exemplo;
- Em curso de formação inicial ou continuada de professores, devem ser elaboradas atividades que ajudem os alunos a diferenciar a hipótese de uma tese (NASSER; TINOCO, 2001).

Tomando por base estes experimentos, realizados conjuntamente com outros professores, Nasser e Tinoco (2001) relataram que os alunos envolvidos durante um determinado tempo em atividades direcionadas para o desenvolvimento de habilidades de argumentação, passaram a se sentir mais confiantes para construir pequenas demonstrações. Quanto às atividades, estas autoras salientaram que nelas deveria ser introduzida a linguagem formalizada de forma gradativa e planejada, em substituição à linguagem natural e apontaram para a importância de os próprios alunos desenvolverem as provas, pois não fazia nenhum sentido os alunos memorizarem as demonstrações realizadas pelos seus professores. Elas também constataram a importância de o professor levar o aluno a perceber em que ponto se encontrava a sua dificuldade em demonstrar, orientando-o por meio de perguntas, além de explicar a eles os motivos de escolher um caminho dentre outros.

Conforme já explicitado anteriormente e identificado em suas falas, Flávia e Vagner, nas atividades por eles elaboradas, se preocuparam em desenvolver nos alunos participantes habilidades de argumentar, bem como valorizaram as conjecturas formuladas por eles, ao procederem à resolução da situação de aprendizagem. Observamos que ambos usaram algumas das estratégias sugeridas por Nasser e Tinoco (2001), como o uso de computadores nas atividades que usavam a geometria dinâmica, para a verificação de afirmativas e propriedades, com a posterior produção da justificativa, bem como todas as atividades serem realizadas em duplas. No caso da situação de aprendizagem elaborada por Vagner, muitas de suas atividades foram pensadas em termos de os alunos conseguirem diferenciar a hipótese de uma tese, e no jogo de cartas que desenvolveu, os

alunos em duplas analisavam a produção de seus colegas em termos de justificativas e provas.

Finalizando este item, ao nos referirmos ao nível das atividades presentes nas situações de aprendizagem, desenvolvidas pelos sujeitos de nossa pesquisa, nos detemos conforme a própria escolha destes, nos estudos de Parzysz (2001), que tratam das etapas do desenvolvimento do pensamento geométrico. Flávia e Vagner escolheram Parzysz (2001), devido aos pressupostos teóricos encontrados em seus estudos, voltados ao ensino da Geometria. Estes estudos forneceram subsídios importantes para as suas respectivas pesquisas, como no momento em que classificaram as diversas atividades presentes em suas situações de aprendizagem.

Em relação à identificação da preocupação dos sujeitos de nossa pesquisa em desenvolver em seus alunos a habilidade de argumentar, em nosso estudo consideramos o entendimento da argumentação conforme apontada nos estudos de Boavida (2005), Nasser e Tinoco (2001) e Pedemonte (2008). Todas estas autoras apontaram para a importância de o professor procurar desenvolver em seus alunos a habilidade de argumentar. Elas sugerem que os professores propiciem nas aulas de Matemática experiências de aprendizagem, que envolvam os alunos e os levem a explicar e a fundamentar os seus raciocínios, bem como justificar as soluções para os problemas apresentados, para que, em um passo seguinte, a construção de uma prova possa se tornar mais acessível. Elas entendem que o desenvolvimento da habilidade de argumentar se reveste de um caráter complexo, não se adquire pela aprendizagem de técnicas ou procedimentos, devendo ser construída durante o processo escolar, pois o seu desenvolvimento é gradativo.

Nos itens seguintes apresentamos individualmente as trajetórias percorridas pela Flávia e pelo Vagner. Iniciaremos pela descrição e análise da trajetória de Flávia.

5.1 TRAJETÓRIA DE FLÁVIA

A Flávia desenvolveu a sua situação de aprendizagem no tema: Geometria Analítica, paralelismo e perpendicularismo. A proposta desta sequência de atividades foi a de introduzir o estudo do paralelismo no ensino da Geometria Analítica, com o intuito de construir o conhecimento dos alunos a partir de uma etapa empírica inicial na direção do desenvolvimento do raciocínio dedutivo, ou seja, levá-los do empírico ao dedutivo.

Para realizar a sua pesquisa de campo, Flávia aplicou esta situação de aprendizagem a oito alunos seus, do 1º ano do Ensino Médio de uma escola estadual, na qual lecionava, situada na cidade de São Paulo.

A sua dissertação de mestrado foi intitulada “*O Estudo do Paralelismo no Ensino da Geometria Analítica Plana: do Empírico ao Dedutivo*”. As questões de pesquisa de seu estudo foram duas e encontram-se indicadas a seguir:

- a) De que forma os ambientes de geometria dinâmica contribuem para que os alunos construam as suas argumentações e provas?
- b) Quais são as dificuldades ou resistências que se apresentam em uma situação de aprendizagem do conceito de paralelismo no ensino da geometria analítica?

Em relação ao desenvolvimento de sua situação de aprendizagem, Flávia pôde aproveitar aquela que havia sido proposta inicialmente para a sua equipe A do AProvaME, para a posterior realização de sua pesquisa, resultando em seu trabalho final de curso. A partir das primeiras versões desta situação de aprendizagem, elaboradas colaborativamente pela sua equipe, esta foi sendo gradativamente modificada e adaptada por Flávia em um período de quase um ano, visando adequá-la de acordo com os objetivos traçados para o seu estudo, pesquisa e posterior realização de sua dissertação de mestrado. A situação de aprendizagem de Flávia passou por seis versões intermediárias até atingir a última versão (Versão V3), a que foi efetivamente aplicada.

Flávia denominou as quatro primeiras versões desta situação de aprendizagem de primeiro esboço (*Esboço 1 – E1*), segundo esboço (*Esboço 2 – E2*), terceiro esboço (*Esboço 3 – E3*) e quarto esboço (*Esboço 4 – E4*). Estas primeiras versões foram elaboradas com mais dois professores da equipe de Flávia, o Adriano e o Eric, e assumiram realmente um caráter de esboço. Elas foram sendo submetidas ao grupo de professores e pesquisadores, nas diversas reuniões que ocorreram neste período, tanto nas reuniões de sua equipe do AProvaME, como no 2º semestre, na fase do *design* coletivo, além de terem sido disponibilizadas no Teleduc para constantes avaliações.

Houve uma diferença entre estas quatro primeiras versões, no que se referiu à sua estrutura e às atividades que compunham a sequência didática. Porém, estas versões iniciais foram muito importantes para a elaboração das três demais versões, quando Flávia prosseguiu sozinha no desenvolvimento da situação de aprendizagem, desenvolvendo as versões finais V1, V2 e V3. Em especial, o terceiro esboço (E3) serviu de base para a elaboração das três versões finais.

A versão (V3) da atividade é a que foi efetivamente aplicada com alunos, que foram os sujeitos da pesquisa de Flávia, e encontra-se apresentada em sua Dissertação de Mestrado, compondo o Capítulo 5 e o Anexo 5, denominados respectivamente “Concepção

das atividades e análise *a priori*” e “Sequência de Atividades”. No Anexo 5 de sua dissertação encontra-se descrita toda a situação de aprendizagem, enquanto no Capítulo 5, além da apresentação desta, foi explicado como se deu a concepção das atividades, como foram feitas as escolhas didáticas, como se deu a familiarização com o Cabri-Géomètre, além de ser apresentada a análise *a priori* das atividades.

Para a concepção e a elaboração das atividades que compuseram o *Esboço 3 (E3)* e as três versões finais de sua situação de aprendizagem (versões *V1*, *V2* e *V3*), Flávia utilizou como referencial teórico os trabalhos e estudos de Parzysz (2001). Nestas versões, a sua situação de aprendizagem contou com três etapas, com várias atividades em cada uma delas. A análise destas atividades permitiu que elas fossem classificadas nos níveis G0, G1 e G2, partindo dos objetos concretos e validações perceptivas (1ª etapa) até os objetos teóricos e validações dedutivas (3ª etapa). Flávia não chegou em sua sequência didática a trabalhar com o nível G3, onde os axiomas seriam completamente explicitados.

Para analisar os resultados obtidos pela aplicação da versão final da situação de aprendizagem (versão *V3*) com os alunos, em relação às atividades presentes na segunda e terceira etapas, Flávia utilizou os estudos de Balacheff (1987) sobre categorias de prova (provas pragmáticas e provas conceituais) e sobre os tipos de validação, a fim de verificar que tipos de provas estes produziam.

Como forma de oferecer os subsídios necessários para execução adequada da situação de aprendizagem, favorecendo a aprendizagem dos alunos em relação ao tema proposto, que era o conceito de paralelismo na Geometria Analítica, Flávia fez uso do *software* Cabri-Géomètre. Este *software* foi utilizado em diversos momentos desta situação de aprendizagem, por permitir a manipulação dinâmica de figuras, sem que estas perdessem as suas propriedades e teve por objetivo propiciar momentos de ação, reflexão e elaboração de conjecturas e validação. A formalização foi realizada em um momento posterior, usando lápis e papel. Flávia optou pela utilização do Cabri-Géomètre pelo fato de já possuir um certo conhecimento deste *software*, suas ferramentas e o seu potencial, além de estar presente no laboratório de informática da escola onde ela iria aplicar a situação de aprendizagem.

Analisando as informações obtidas nas três entrevistas e nas sete diferentes versões das atividades desenvolvidas por Flávia, pudemos identificar três momentos significativos em seu percurso, descritos conforme o quadro 5:

Momentos	Instrumentos
Momento 1	Entrevista 1 Esboço 1 (<i>E1</i>)
Momento 2	Esboço 2 (<i>E2</i>) Esboço 3 (<i>E3</i>) Esboço 4 (<i>E4</i>) Versão 1 (<i>V1</i>) Versão 2 (<i>V2</i>) Versão 3 (<i>V3</i>) Entrevista 2
Momento 3	Aplicação da atividade Elaboração do texto final da Dissertação de Mestrado Defesa Pública da Dissertação de Mestrado Entrevista 3

Quadro 5: Momentos significativos da trajetória de Flávia

A seguir, mostramos estes momentos significativos do percurso de Flávia, por meio da apresentação e da análise das entrevistas realizadas, conjuntamente a uma breve descrição das diferentes versões da situação de aprendizagem, extraindo-se a partir dos dados apresentados os aspectos, questionamentos e percepções ocorridos em cada um destes momentos.

Os Esboços *E1*, *E2*, *E3* e *E4* encontram-se apresentados, respectivamente, nos Anexos A, B, C e D; a Versão 2 (*V2*) no Anexo E; e a Versão 3 (*V3*) no Anexo F, do presente trabalho. Optamos por não apresentar a Versão 1 (*V1*), por não possuir nenhuma diferença significativa em relação à versão seguinte, a *V2*.

5.1.1 MOMENTO 1

Este primeiro momento da trajetória de Flávia foi caracterizado pela elaboração da primeira versão de sua situação de aprendizagem, o *Esboço 1 (E1)* e da realização da primeira entrevista (*Entrevista 1*). As informações principais obtidas a partir destes dois instrumentos encontram-se descritas e apresentadas a seguir:

5.1.1.1 ENTREVISTA 1

Realizamos a primeira entrevista com Flávia em maio de 2006. Organizamos as informações obtidas desta entrevista nas seis temáticas, conforme explicitadas anteriormente (*Item 4.2.5.1 A primeira entrevista*), que serão descritas e analisadas nos próximos itens.

Dados pessoais

No que tange aos seus dados pessoais, naquele momento Flávia estava com 31 anos e lecionava Matemática no Ensino Médio em uma escola estadual da cidade de São Paulo. Relatou na entrevista estar formada há 11 anos e ter realizado a sua formação inicial em Matemática, em uma universidade particular também localizada na cidade de São Paulo. Ingressou na Faculdade de Matemática em 1994 e finalizou a Licenciatura em 1996 e o Bacharelado em 1997. Salientou que começou a lecionar enquanto ainda estudava, a partir do 2º ano da Licenciatura, no 1º ano de um curso denominado na época de “colegial noturno”. Relatou estar cursando o Mestrado Profissional há um ano e meio, já tendo cursado muitas disciplinas.

Formação inicial

Quanto à sua formação inicial, ao ser questionada se na sua graduação em algum momento ocorreu a inserção de demonstrações e provas nas disciplinas, Flávia apontou que este fato ocorreu quase que na totalidade delas, com exceção das disciplinas que abordavam conteúdos de geometria. Porém, a forma como a prova foi abordada privilegiou apenas os aspectos mecanicistas e reprodutivos, sendo que os alunos apenas repetiam as demonstrações que os seus professores apresentavam, nas quais eram enfatizados os aspectos que envolviam um raciocínio dedutivo, com vistas a obter uma dedução formal. Os alunos não entendiam o que era uma prova formal, a ponto de não conseguirem elaborar as suas próprias demonstrações, tampouco percebiam a importância desta para um ensino mais efetivo de matemática.

Flávia observou que a primeira vez que entrou em contato com este tipo de abordagem, envolvendo demonstrações foi no ensino superior. Dessa forma, quando iniciou a faculdade, sentia-se despreparada e “chocada” diante destes novos desafios, percebendo a falta de base que possuía até aquele momento. Em seguida, relatou o que havia ocorrido durante o seu Ensino Médio:

“Toda a preparação que eu tive até entrar na faculdade, no colégio, em nenhum momento tive alguma prova, era só aplicação de fórmula mesmo. Dava a fórmula e aplicava. Então quando entrei na faculdade não tinha mais isso. O primeiro semestre foi assim, um choque mesmo, porque a matemática que eu tinha aprendido até então era aplicação de fórmulas, não existia mais, praticamente, então eu vejo que a imaturidade, a gente tem quando entra na faculdade, não é o problema maior. O problema maior é a falta de base que você tem, que você vem. Eu tinha uma falta de base enorme, tremenda.”

Ao mesmo tempo, Flávia verificou que no decorrer da faculdade, embora praticamente todo o curso tenha sido voltado à demonstração, por ser muito jovem naquela época, agregado ao fato de seus professores nunca terem explicado o “porquê” das demonstrações, não percebeu a importância deste tipo de abordagem. Segundo ela:

“No meu caso praticamente o curso inteiro foi demonstração. Mas naquela época eu era mais jovem e mais boba. Às vezes não se percebe a importância do que tem atrás daquilo. Em cálculo, em álgebra... O que tive menos demonstrações foi em geometria. Posso dizer que a parte de geometria, na faculdade, foi deficitária. Teve muito cálculo, bastante álgebra, topologia, tudo demonstrações, muitas vezes, não foi explicado o porquê daquela demonstração. Às vezes, a gente fazia, às vezes até sem entender; muitas vezes a gente até entendia a demonstração, mas não o porquê dela, o que estávamos fazendo na verdade. Muito foi demonstração, a maioria. Poucas aplicações. Em Estatística era aplicação e talvez em Cálculo Numérico.”

No decorrer de sua graduação, os professores de Flávia ensinavam algumas demonstrações e pediam que os alunos desenvolvessem outras, porém de uma forma repetitiva, não se preocupando com o desenvolvimento do raciocínio dedutivo por parte de seus alunos. Como nas classes era reduzido o número de alunos, estes se reuniam em grupos, tentando realizar as demonstrações que eram solicitadas.

Muitas vezes, os alunos nem mesmo entendiam o motivo de procederem desta forma, o porquê de estarem provando e a demonstração propriamente dita, o que refletia a sua pouca compreensão:

“Às vezes falávamos: ‘Professor, calma, ninguém está entendendo’; e ele, ‘Calma! Mais para a frente vai piorar’. Então, os porquês ficavam sem respostas. Geometria, nada.”

No que se referiu ao oferecimento de alguma disciplina que tratasse do uso das ferramentas da informática em sua formação inicial, Flávia relatou que havia tido aula de laboratório, mas nada voltado ao ensino de Matemática. A disciplina era denominada

Análise de Sistemas, e tinha por objetivo ensinar os alunos a programar, de forma a facilitar o trabalho do professor:

“No meu caso eu tive aula de laboratório, mas nada voltado para o ensino da Matemática. Era a linguagem DOS, Análise de Sistemas, era como se chamava a disciplina, e também a gente aprendia a programar, a gente desenvolvia programas para tirar a média, sempre voltados para facilitar a vida do professor mas nada voltado para o ensino.”

Em seguida na entrevista, Flávia recordou-se que embora não saiba precisar exatamente o semestre, a planilha eletrônica Excel também foi introduzida, voltada a um uso específico na Estatística, porém enfatizou:

“A gente ia ao laboratório. Toda a semana a gente tinha aula no laboratório, mas era mais para Matemática, mesmo, nada para o ensino.”

Ao ingressar na Universidade, Flávia relatou que o seu objetivo principal era formar-se professora de Matemática. A computação era considerada por ela e suas colegas como algo muito distante, mesmo porque naquela época as escolas estaduais ainda não possuíam computador. Assim sendo, a proposta de utilizar o computador no ensino não se mostrava uma situação real, além dela não ter nenhuma ideia ou pensamento em relação à informática ou a suas possibilidades de uso na escola:

“A gente não tinha ideia nem pensava em utilizar a computação no ensino. Não me recordo da gente discutir ou analisar um jeito, porque não era real para nós. Nós não tínhamos computador na escola estadual, então não era algo real. A gente pensava em fazer o melhor naquele momento com aquilo que a gente tinha e a gente não tinha um computador e a faculdade também não mostrou essa ‘mão’, essa ‘estradinha’ de elencar computação com educação.”

Observamos, pelo relato de Flávia em relação a como os seus professores tratavam a demonstração e a prova no decorrer de sua graduação, que estes concebiam estes dois termos, como sendo palavras sinônimas, dotadas de um mesmo significado. Dessa forma, na graduação de Flávia parece ter estado mais presente na maior parte das disciplinas a demonstração, tal como a entendem os matemáticos. Os professores inseriam a demonstração de uma forma mecânica e repetitiva, não privilegiando o desenvolvimento do raciocínio, sendo que os alunos não eram levados a argumentar ou conjecturar. Seus professores não envolviam os alunos em processos que finalizariam com a construção de uma prova, entendida em um sentido mais amplo, conforme a visão de Balacheff (1988).

No que se referiu ao oferecimento de alguma disciplina que abordasse as possibilidades da integração dos recursos da informática no desenvolvimento de algum conteúdo matemático, este fato não ocorreu em nenhum momento no decorrer de toda a sua formação inicial. Dessa forma, Flávia não tinha ideias, pensamentos, além de pouco conhecimento em relação à informática e às suas possibilidades.

*No decorrer da vida docente antes do ingresso
no Mestrado Profissional*

O ingresso efetivo de Flávia na vida docente deu-se logo após o término de sua graduação, embora ela já lecionasse enquanto ainda era estudante universitária. Naquele momento a escola estadual na qual trabalhava não possuía nenhum computador, e o primeiro chegou apenas dois anos após esta data.

Flávia relatou que algum tempo depois do término de sua graduação, se afastou da sala de aula por um ano e meio, indo trabalhar na Delegacia de Ensino como assistente técnico-pedagógica. Após este período retornou à sala de aula, e a escola na qual lecionava já possuía então cinco computadores, porém nem todos funcionavam. O reduzido número de computadores, sempre alguns quebrados, aliado a outros fatores como o grande número de alunos por sala e a inexistência de um professor eventual que pudesse ficar com metade dos alunos, enquanto os demais se dirigiram ao laboratório de informática, fizeram com que Flávia não conseguisse desenvolver atividades com os alunos de forma a integrar a informática em conteúdos de Matemática no decorrer das aulas.

Pelo fato de ter permanecido algum tempo fora da sala de aula, alocada na Delegacia de Ensino, Flávia teve a oportunidade de ministrar algumas oficinas para outros professores sobre alguns *softwares* que as escolas estaduais haviam recebido, como o Cabri-Géomètre, o Thales e outros. Flávia explicou que durante as oficinas os professores desenvolviam com ela um projeto, o qual era aplicado posteriormente por eles nas escolas em que trabalhavam. Algumas destas escolas já estavam recebendo computadores. Estes professores convidavam alguns alunos, que manifestavam interesse em participar, implementavam este projeto fora do período normal de aulas e traziam os resultados para serem compartilhados com o grupo nas oficinas. Dessa forma, os professores participantes conseguiam socializar a experiência que tiveram junto aos alunos, indicando para os outros o que consideraram ter sido positivo e proveitoso. A Flávia relatou ter sido muito interessante, agradável e positiva esta experiência.

Quando questionada se teve a oportunidade de fazer algum curso de formação para o uso de recursos computacionais de um enfoque educacional, Flávia relatou que, embora fossem oferecidos alguns cursos aos professores da rede estadual, ela nunca foi convidada

a participar de nenhuma capacitação, denominada Orientação Técnica (OT). Estes cursos não aconteciam regularmente, porém quando um curso era oferecido, geralmente este era no mesmo horário de trabalho do professor e o diretor não podia liberar o professor e deixar a sala de aula sem um substituto. Assim, para o professor em geral, era muito difícil conseguir participar destes cursos, pois ele não podia sair da sala de aula. Em seguida Flávia lembrou-se de que quando estava na Delegacia de Ensino, atuando como assistente técnica, recebeu algum treinamento em informática, porém como professora, apesar de lecionar há mais de seis anos na mesma escola, nunca havia sido chamada para nenhuma capacitação.

A seguir Flávia relatou uma experiência que teve com alguns alunos, quando lecionou na antiga quinta-série do Ensino Fundamental. Estes alunos eram menores e quando havia alguma emenda de feriado, muitos faltavam, possibilitando aos demais à ida ao laboratório e o uso dos computadores. Nestas ocasiões, Flávia relatou que usava *softwares* matemáticos, que já estavam instalados no computador como o “Fracionando” e o “Factory”. Estes programas funcionavam como joguinhos de frações, aproveitando exatamente o momento em que estes alunos estavam aprendendo frações.

Apesar dos poucos momentos que Flávia teve a oportunidade de levar estes alunos ao laboratório de informática, ela considerou este contato muito positivo, emitindo uma opinião favorável em relação a esta experiência. Ela verificou nos alunos uma grande euforia em entrar em contato com um ambiente “novo”, o que poderia estimulá-los e motivá-los, levando à melhoria na aprendizagem. Ela observou em relação aos alunos:

“A princípio, a euforia deles em entrar na sala de computação. Euforia de mexer no computador, porque muitos ainda não têm acesso a isso e, assim, melhora um pouco a aprendizagem, sim. Assim, na 5ª série, quando trabalhei com o ‘Fracionando’ e eles viram frações, eles falavam: ‘Ó professora, olha aquilo que a gente fez’. Então, é estimulante para eles, uma vez que o estimulante é o diferente: saí da sala de aula... mas, isso 5ª série, 11 anos, eles são dispostos e fáceis de serem estimulados.”

Em relação a esta experiência, na qual Flávia usou o computador com os alunos, ela emitiu a seguinte opinião:

“Acho que é estimulante, facilita a aprendizagem, mesmo porque é visual, eles estão visualizando, o software os faz visualizar melhor, eles podem experimentar mais facilmente, facilita o tempo, é uma coisa que eles gostam de mexer, é diferente, agora, tenho que testar mesmo, para o Ensino Médio.”

Ela observou que o simples fato de “quebrar” o ambiente tradicional da sala de aula, fez com que aumentasse o interesse dos alunos pelo que o professor estava falando, pelas suas ideias e pelos assuntos que estavam sendo trabalhados com o computador. Porém, Flávia também percebeu a necessidade de encadear as atividades, porque após algum tempo a sensação de euforia passava, e se não houvesse algum planejamento mais estruturado, os objetivos relacionados à aprendizagem poderiam não ser alcançados. Ela observou que os alunos precisam perceber que o professor possui o domínio da situação, sabendo o que quer atingir.

Flávia relatou que em seu dia a dia, mesmo antes do ingresso no Mestrado Profissional, sempre procurou se preparar adequadamente, investigando e estudando *softwares* matemáticos e o seu funcionamento, com o objetivo de fazer uso destes com seus alunos.

Em relação às experiências que vivenciou junto aos professores nas oficinas ou com os alunos de quinta-série, Flávia apontou que o computador poderia permitir a realização de “algumas coisas” que o ambiente tradicional não consegue propiciar, facilitando a visualização e a generalização. Para ela, o professor poderia propor exercícios mais desafiadores, com um grau maior de dificuldade, possibilitando que o aluno pudesse experimentar e explorar mais, do que usando somente papel e lápis, ficando mais focado na matemática. Em seguida, Flávia alertou para o fato de o aluno ter se acostumado ao ambiente tradicional da sala de aula, se sentindo como se estivesse em sua própria casa, sem ter a devida atenção e o foco necessário para poder se concentrar em seu próprio aprendizado. Já em relação à sala de informática:

“A atitude do aluno muda um pouco isso; ele sai daquele ambiente que já está acostumado, que já é a casa dele; que ele pode virar, pode conversar, pode fazer matéria de outra disciplina. Lá no computador, não, ele está focado naquilo.”

Quando questionada se antes de iniciar o Mestrado Profissional propunha atividades no dia a dia da sala de aula, que possibilitassem aos alunos a elaboração de demonstrações e provas, ela lembrou que a sua abordagem se restringia a fazer com que os alunos demonstrassem, porém, após a produção de alguma argumentação. Em seguida relatou como ela procedia: inicialmente mostrava uma fórmula aos alunos, explicava e até chegava a demonstrá-la, e, em um segundo momento, ela solicitava que eles argumentassem um pouco e, em seguida, tentassem demonstrar. Porém ela percebeu que a demonstração que realizava não os atingia, por se tratar de uma “demonstração de Flávia, como professora” e não do aluno. Os alunos apenas seguiam as indicações, porém, isto não significava que eles tinham aprendido e que conseguiriam em outro momento demonstrar.

Ela ponderou que no decorrer de toda a sua vida discente, como os seus professores sempre ensinaram desta forma, levando os alunos a repetir uma prática até então por ela aceita e incorporada, esta foi reproduzida em sua vida docente inicial sem grandes questionamentos. Contudo, após iniciar a sua participação no AProvaME, Flávia percebeu e compreendeu que as demonstrações que desenvolvia na lousa eram dela mesma, não fazendo parte do repertório do aluno, sendo que para eles nada disto fazia sentido. Segue-se a sua fala a este respeito:

“Antes de entrar no AProvaME as minhas demonstrações eram minhas, eu fazia na lousa, assim, tinha alguns exercícios que a gente pedia que eles argumentassem ou demonstrassem, mas pouca coisa, alguns, não era toda hora que tinha demonstração; era mais ou menos assim: eu não tive isto, então, parece que é um costume que a gente acaba levando, é uma crença, e, eram alguns momentos e com o AProvaME a gente, realmente, acabou vendo que isso é importante. Mas isso até mudou.”

Participação no Mestrado Profissional e no AProvaME

No decorrer da elaboração de sua situação de aprendizagem, Flávia ponderou que para que conseguisse aplicar as atividades de uma forma efetiva e adequada, precisaria convidar alguns de seus alunos do 1º ano do Ensino Médio, que se interessassem e realmente quisessem realizar uma atividade extra-curricular. Esta aplicação se daria em um horário diferente do período de aulas regulares e os alunos deveriam se inscrever “neste curso”.

Flávia apontou para o fato de que muitos alunos não teriam interesse em se inscrever em um curso extracurricular envolvendo o uso do computador no estudo de alguns conteúdos matemáticos, da mesma forma que não se interessariam por outras disciplinas: No momento em que Flávia realizou esta primeira entrevista, ela não havia ainda tido a oportunidade de trabalhar no laboratório de informática com os alunos do Ensino Médio.

“Agora com o colegial ainda não tentei, vou tentar, por causa da prova e creio que como vou fazer uma seleção, na verdade uma inscrição dos alunos que estão interessados, então eles têm interesse. Se eu fosse fazer isso na sala inteira, eu tenho alunos que não tem interesse nenhum. Não tem interesse nem em Matemática, nem Português.”

Durante o período em que Flávia participou do projeto, entre outras constatações, ela considerou ter ampliado o seu conhecimento em relação a muitos conteúdos matemáticos, principalmente no que se referiu à Geometria, à demonstração e à prova, juntamente com o

desenvolvimento de um olhar diferente sobre as possibilidades de integração com recursos computacionais:

“Eu aprendi muitas coisas novas em relação ao conhecimento matemático. A minha parte de geometria era bem deficitária, eu aprendi muito. Prova e demonstração, então... Na minha formação acadêmica ficou um pouco obscuro para mim, ainda, mesmo indo bem, entendendo aquilo que eu estava fazendo, não tinha, ainda, acho que, ficado muito claro para mim. Minha visão de demonstração mudou demais hoje em dia. Eu sei o que uma hipótese, o que é tese, da onde tenho que sair, aonde tenho que chegar. Minha visão, neste sentido, foi 90% de melhora, quase 100%. Agora, a parte de computação, o Cabri, eu já o conhecia, mas não tinha ainda trabalhado tanto ele, entendido tão bem quanto aqui. A metodologia aplicada de ensinar o Cabri, juntamente com a Geometria, nos deu condições de criar, pois levou em consideração o processo. Hoje em dia podemos elaborar atividades e passá-las aos nossos alunos, ao invés de utilizar atividades prontas, modelos utilizados em livros.”

Identificamos nesta fala de Flávia um processo de mudança em andamento, na medida em que ela passou a conceber a possibilidade de elaborar as suas próprias atividades, sem a necessidade de usar modelos prontos, presentes nos livros. O domínio do Cabri-Géomètre deu a ela a perspectiva de criar a partir das possibilidades deste *software*.

Em relação à informática, Flávia relatou que, no decorrer do Mestrado Profissional, foram ministradas duas disciplinas que procuraram integrar o uso do computador no desenvolvimento de conteúdos matemáticos. Em uma delas, denominada TIC (Tecnologias de Informação e de Comunicação) foram ensinados diversos *softwares* matemáticos como o LOGO, o GrafMat e outros, sendo que na disciplina Geometria foi usado o Cabri-Géomètre, onde eram mescladas aulas teóricas e aulas práticas no laboratório de informática. Nesta disciplina, também, foi discutido o papel que a informática pode desempenhar, pois ela deve ser considerada como uma ferramenta que deve ser integrada à forma de trabalho do professor, podendo se adequar tanto ao modo tradicional, como a propostas mais inovadoras, que buscam que o aluno construa o seu próprio conhecimento. Nesta disciplina discutiu-se não apenas o uso do computador, mas das tecnologias em geral, incluindo as calculadoras.

Flávia comentou que se sente mais segura hoje em dia ao trabalhar com demonstração:

“Você não se assusta mais. Você acaba olhando aquela demonstração e a entendendo. Você estuda a demonstração, não se assusta mais. Antigamente, eu pelo menos, olhava uma demonstração, e falava: eu não sei.”

Ela percebeu a importância de o professor despertar, incentivar e fazer com que os alunos pensem, argumentem e formulem conjecturas sobre as questões que lhes são colocadas, acertem e errem, bem como este deve procurar compreender o processo de raciocínio e os níveis de uma prova atingidos por eles. Flávia, também, identificou a dificuldade dos alunos quanto à passagem do empírico ao dedutivo, além de enunciar as etapas que ela acreditava que o aluno deveria passar para conseguir atingir a demonstração, por meio de uma formalização em uma linguagem adequada:

“A gente precisa despertar o aluno, fazer com que ele pense, faça conjecturas, acerte e erre, além de observar qual é o nível da argumentação e demonstração que ele está atingindo. Pensando na demonstração formal como sendo o nível mais alto a ser atingido e o empírico como o nível mais básico, pudemos perceber que o aluno não consegue pular do empírico para a demonstração formal. O aluno começa pelo empírico, realiza conjecturas, começa a construir uma ideia para depois formalizar numa linguagem apropriada.”

Em relação à produção de argumentação, Flávia observou que os alunos até conseguem falar sobre o que estão pensando, porém para eles o mais difícil é escrever, o ato de registrar, mesmo uma simples conta.

Flávia considerou que a sua entrada no Mestrado Profissional e posteriormente no AProvaME representou um marco em sua vida pessoal e profissional, pois transformou a forma como ela enxergava a Matemática. Esta participação despertou a sua atenção em relação à prova e à demonstração, possibilitou a ampliação de seus conhecimentos em diversos conteúdos matemáticos, além da constatação do potencial de utilização de recursos computacionais. Ela acredita que esta vivência a tenha levado a uma mudança em sua concepção em relação ao papel do professor, refletindo em seu comportamento em sala de aula e transformando a sua prática docente.

“Quando a gente entrou no mestrado a nossa aula mudou; a minha vida profissional mudou: a estudante e a profissional. Por que logo que... antes de entrar no AProvaME mesmo, a gente já começou a ver com outros olhos, a gente começou, primeiro tópico como foi Geometria, já teve que trabalhar com isso. Então, a gente acabou aprendendo coisas, conteúdos que até para nós, tínhamos um pouco de dificuldades, eu pelo menos. A minha visão com a matemática mudou e logo mudou meu comportamento em sala de aula. Hoje, peço mais aos alunos que argumentem, pelo menos, e procurem construir a prova, fica um pouco mais difícil, mesmo porque não são todos que querem trabalhar, querem estudar ou têm algum interesse. Mas, argumentação, eu tento levá-los a argumentar pelo menos, porque a argumentação é algo mais pessoal do que a prova. Eu trabalho nesse sentido, de que, pelo menos, eles argumentem; que eles comecem a enxergar o porquê

daquilo que ele achou, daquilo que ele calculou, o quê está acontecendo, isso eu tento fazer hoje em dia.”

*As dificuldades associadas ao desenvolvimento
das situações de aprendizagem*

Quando questionada em relação às dificuldades que encontrou no desenvolvimento das atividades, Flávia considerou que para ela a maior dificuldade residiu na elaboração da sequência didática para abordar a prova, seguida pela integração do computador nas atividades:

“A maior dificuldade foi a elaboração de uma sequência didática, porque a gente não tem esse costume de elaborar uma sequência, ainda mais levando à prova. Nos nunca havíamos feito uma sequer.”

Flávia, inclusive comentou mais detalhadamente estas dificuldades:

“Ainda mais a prova, que a gente, praticamente, não trabalha em sala de aula... Então, encontrei uma dificuldade... Minha maior dificuldade é esta. Você começa de um exercício... aí você vai dar outro... visando aquela prova. É difícil pensar numa sequência que fique redondinha e leve a prova ao aluno tão... assim, que seja fácil. Eu acho... então, ficou mais difícil, para mim, a elaboração de uma sequência didática. Em segundo foi a integração do computador com vistas à prova. De novo, não estou acostumada a fazer atividades que visem prova. Então, elaborar a sequência e introduzir o computador como uma ferramenta para levar à prova, para mim foi difícil.”

Quanto ao conhecimento matemático ou ao trabalho junto ao grupo colaborativo, Flávia relatou não ter sentido dificuldades. No que se referiu ao grupo colaborativo, para ela as opiniões, as reflexões, as contraposições e os confrontos enriquecem a todos os envolvidos e em relação ao conhecimento matemático:

“A gente não encontrou dificuldade nisso, porque na verdade o conteúdo matemático, a gente corre atrás, se tem alguma dúvida ou, às vezes, a gente conversa e tira uma dúvida do outro. A reflexão nesses momentos que a gente se reúne, para mim, é produtiva.”

No tocante aos conteúdos matemáticos que a sua situação de aprendizagem deveria abordar, Flávia alertou para o fato de que, embora não tenha tido muita dificuldade, ela precisou adaptar as atividades presentes em sua sequência didática ao 1º ano, que era a série para a qual estava lecionando no momento da realização do projeto. O conteúdo

proposto para a sua situação de aprendizagem é normalmente ensinado nas escolas brasileiras, no 3º ano do Ensino Médio.

“Agora, o conhecimento do conteúdo matemático a ser elaborado não vi como dificuldade... Claro que dificultou um pouco, no caso de GA, perpendicularismo, porque vai usar, na demonstração, trigonometria. Eles viram seno, cosseno e tangente, mas não viram cotangente, então isso... e ângulo obtuso... e usa os computadores, então, quer dizer, dificulta um pouco; porque a gente está falando de 1º ano e não de 3º e isso eles vêm no 3º ano”.

*Opiniões sobre o potencial dos recursos tecnológicos
no ensino e na aprendizagem da prova*

Flávia considerou ser muito interessante o desenvolvimento de atividades que busquem a prova tendo a contribuição dos instrumentos computacionais, após todas as experiências pelas quais havia passado até aquele momento.

Quando foi questionada quanto ao que ela havia considerado importante, enquanto desenvolvia as atividades a serem resolvidas posteriormente pelos alunos no computador, afirmou que seria o fato de eles perceberem que este recurso era apenas uma ferramenta a mais, e que eles é que deveriam ter o domínio do processo:

“que é o aluno que tem que mandar no ‘cara’... Que o computador não vai fazer nada sozinho.”

Esta fala indica que Flávia percebe que o computador, apesar de ser uma ferramenta potente, ajudar na visualização e facilitar o processo, não deixa de ser uma máquina, dependente dos conhecimentos das pessoas que com ela interagem.

Flávia observou que o computador facilita a execução do desenho, porém ao mesmo tempo questionou até que ponto este poderia auxiliar o aluno a justificar, demonstrar ou provar. Ela ponderou que apesar de considerar o computador um recurso poderoso, a sua atuação poderá tornar-se muito restrita e limitada, caso o aluno não possua o conhecimento prévio, pois este não conseguirá justificar o que desenhou, tampouco provar. Seguem algumas de suas falas:

“Até o desenho, por que eram atividades em Geometria, então, o desenho é facilitado, porque a gente usou o Cabri. O que a gente fez em um minuto, a gente levaria uns dez minutos fazendo em papel milimetrado. Só que, também, na hora de demonstrar, de justificar, você precisa ter o conhecimento, porque o computador não vai te dar aquele conhecimento, você tem que ter o conhecimento prévio, aquilo pode te ajudar na visualização, na construção... A visualização é ótima.

Porém, você precisa ter o conhecimento, para conseguir provar aquilo que você desenhou, realmente. Você deverá justificar!”

“Na verdade, o aluno sabia que tinha que traçar uma perpendicular, então, ele sabia que tinha fazer uma circunferência, porém quando você pede para o aluno justificar, ele não sabe, porque foi quase um chute. Um desenho a gente fez e começou a testar. Então, a gente acabou testando, testando, mas aí na hora de justificar, você conseguiu fazer o desenho, mas na hora de justificar, porque se eu não tenho conhecimento daquilo que fiz, eu não consigo justificar, consigo desenhar, o software me permite isso, porque ele tem tanta ferramenta que eu consigo chegar à resposta, no desenho; mas na hora de justificar, o software não me dá a resposta.”

De acordo com a sua fala, apenas o desenho, como sendo a figura construída, não é suficiente, pois o aluno precisaria justificar em seguida. E ele necessita do conhecimento para que possa justificar.

Flávia comenta que, apesar do computador ser um recurso poderoso, que facilita e ajuda muito na visualização e na experimentação, o aluno deverá ter um conhecimento prévio, para que possa justificar e provar, sendo que este conhecimento o computador não poderá fornecer a ele:

“ajuda, ótimo... eu acho que ajuda muito... visual, facilitador... demais... só que tem aquilo que você falou, ele tem que ter um conhecimento, que a máquina não vai dar, sozinha, para ele.”

No decorrer desta entrevista, Flávia questionou se ela como professora conseguiria elaborar uma sequência didática que pudesse levar o aluno a construir provas, ou se o aluno precisaria ter um *insigth* do processo, de como chegar lá:

“às vezes ele até desenha, se ele sabe alguma coisa, ele vai testando até chegar lá, no que ele quer.”

Ao ser questionada quanto à contribuição dos recursos computacionais no desenvolvimento de atividades e posterior aplicação junto aos alunos no ensino de prova, Flávia considerou como sendo muito positiva. Ela apontou diversos aspectos, principalmente, os relacionados à visualização, à generalização, por ser o computador um instrumento facilitador do processo:

“A questão da visualização, da generalização que hoje foi mais rápido. É facilitador em vários sentidos, sentido não só de estar manipulando algo mais gostosinho, mais bonito, mas também de... parece que se torna verdade aquilo... não é professor que está falando, não é um desenho mal feito na lousa ou no papel. Ele vê no computador aquele desenho ou aquela tabela, para ele aquilo se

tornou verdade... Para o aluno... se tornou um fato verídico. Aquilo realmente existe, realmente acontece, eu posso generalizar que vai dar... que em todos os caso vai acontecer. [...] ele facilita principalmente o processo em que aluno começa com o processo empírico, onde ele vai testar valores, ele vai testar as conjecturas iniciais dele. Então, ele pode estar ali validando ou não, apenas na visualização, na manipulação dos recursos do software, ele pode estar visualizando melhor, também, e isso com certeza vai facilitar para que ele consiga fazer a demonstração. A generalização poderá levá-lo à demonstração.”

Flávia considerou a fase empírica inicial muito importante, porque ela permite que o aluno teste e manipule. Ela percebeu que quando o aluno passa pela fase empírica, ele tem a possibilidade de testar por si mesmo, o que é muito positivo.

Ela também observou que, devido à existência de um “contrato didático”, presente em qualquer situação de ensino-aprendizagem, o aluno sempre acredita no professor, pois este o ensinou desta maneira e não efetua os testes necessários, que deveriam fazer parte de seu próprio aprendizado.

Flávia é totalmente favorável que se deva sempre partir de um empirismo inicial, além de acreditar ser possível, a partir deste, seguir na direção de uma generalização, com a posterior formalização matemática, usando os recursos computacionais, e cita quais são as etapas pelas quais, a seu ver, as pessoas passariam no decorrer deste processo:

“Primeiro é o empirismo inicial, não? Eu acho que ele vai testar. Testa, testa, ele vai começar a manipular, verificar visualmente se aquilo realmente acontece; depois ele pode usar o computador para... se for construir algo que se assemelha àquilo que ele verificou no empirismo, quer dizer, ele constrói. A partir desta construção ele pode generalizar para casos maiores e assim sim formalizar. Agora, eu acredito que ele consiga a partir de instrumentos computacionais do empirismo chegar à formalização porque ele vai manipular e manipulando ele vai ter... vai falar: ‘então, isso sempre ocorre’, porque, normalmente, o aluno, com três casos de exemplo, isso sempre ocorre. [...] Como isto não ocorre normalmente, o aluno acredita na palavra do professor, porque o professor falou. É o contrato didático... O professor falou que isso ocorre... uma vez que o professor falou, já sempre ocorre. Então, acho que o computador vai ser... ele é ‘legal’ neste sentido agora. Porque ele não vai ver só três exemplos. Ele pode manipular infinitos exemplos. E aí fica, como a gente já respondeu na anterior, fica mais verídico aquilo que ele está testando e fazendo, o empirismo dele já se tornou uma generalização, já saiu do empirismo porque ele deu vários exemplos, manipulou e acho que facilita. A partir da fase empírica, tudo vai facilitar... ele é um facilitador que o aluno vai ter muito mais praticidade. O aluno vai poder perceber que em vários momentos ele poderá levantar hipóteses, conjecturas, testar se aquilo é verdadeiro ou não, relacionar dados de um problema, verificar propriedades, se uma afirmação é ou pertinente. Mas o aluno testa do mesmo jeito... eu acho que o aluno está testando... E ele sai do empirismo... O computador ajuda ele? Claro que ajuda ele...Ele testa vários exemplos. Em GA, mesmo que ele saia da equação da reta, ele está manipulando a reta

para ver o coeficiente angular, ele está testando; para ele ainda é um teste. O computador poderá ajudar a sair do empirismo e ir para a formalização.”

Embora Flávia perceba que o processo da passagem entre o empírico e o dedutivo seja muito complexa para os alunos, nesta sua fala ela acredita que o aluno a partir das conjecturas iniciais, por meio da utilização do *software*, consiga manipular, visualizar e testar as propriedades da figura construída, para, em seguida, generalizar e, finalmente atingir a demonstração.

Algumas ponderações e falas, indicadas a seguir, expressam algumas ideias e opiniões de Flávia, quanto aos aspectos e possibilidades relacionados à generalização.

Ao refletir sobre uma situação na qual o aluno, ao invés do recurso computacional, usasse o seu caderno para testar as suas conjecturas, ele iria demorar muito mais tempo para conseguir chegar a uma generalização.

Flávia pensou na quantidade de exemplos que poderia oferecer aos alunos, ao se colocar no seu papel de professora ensinando algum conteúdo matemático com o auxílio do computador. Questionou sobre o que seria mais importante nestes exemplos, a quantidade ou a qualidade, já que o computador, diferentemente de outros recursos mais tradicionais, como a lousa e o caderno, lhe permitiria fazer muitos exemplos em um pequeno intervalo de tempo:

”Eu acredito que a qualidade seja mais importante que a quantidade. Mas o aluno... Você pode dar um exemplo muito bom e ele não achar que aquilo é verdade... É uma hipótese, não? Que isso ocorra. Vamos pensar que você dê quatro exemplos, e desses a partir desses exemplos ele não consiga formalizar ou chegar a nada e no computador, você não precisa dar só quatro exemplos, no computador você poderá dar cem ao mesmo tempo. Às vezes isso para o aluno isso é mais importante que a qualidade dos exemplos. Para nós, não. Eu não acho que seja mais importante, mas, olhando para o aluno... olha a visão do aluno... Você acha que ele vai conseguir entender com apenas um exemplo? Eu acredito se você der apenas um exemplo de boa qualidade, talvez não adiante. Além da qualidade, deve ser considerado se estes exemplos são ou não variados. Não adianta dar somente um exemplo de qualidade. Você vai dar quantos de qualidade?”

Acreditamos que o computador possa facilitar o processo de generalização, porém ainda existe um grande caminho para poder se atingir a formalização. Muitas vezes, neste momento, o professor deverá atuar mais próximo ao aluno.

Ao final desta primeira entrevista, Flávia considerou o fato de que, infelizmente, os professores em sua maioria, com ou sem o computador, acabam por apresentar aos alunos um pequeno número de exemplos, sendo estes os mais fáceis.

5.1.1.2 ESBOÇO 1 (E1)

A primeira versão da situação de aprendizagem, desenvolvida por Flávia e mais dois professores-colaboradores, de sua equipe do AProvaME, foi denominada por eles “Atividade validativa das ferramentas de GA (coeficiente angular, distância entre pontos) como procedimento de prova para paralelismo e perpendicularismo” (Anexo A).

Esta situação de aprendizagem foi composta por três etapas. Flávia esperava que a exploração inicial das propriedades nos quadriláteros (Geometria Plana) serviria de subsídio aos alunos, podendo levá-los a obter um novo conceito, um novo conteúdo presente na Geometria Analítica. Como esta atividade envolvia o uso de algumas ferramentas do *software* Cabri-Géomètre, Flávia teve a preocupação e o cuidado de incluir em sua atividade a apresentação deste *software*, em algum momento anterior ao início efetivo desta. Assim, antes de se iniciar a atividade propriamente dita, seriam apresentadas algumas ferramentas presentes no Cabri, de forma que os alunos conseguissem efetuar as construções propostas. Também seria fornecida uma explicação importante e fundamental relativa à concepção deste *software*, a diferença entre desenhar e construir. Embora esta tenha sido a primeira versão, as etapas foram descritas passo a passo, de forma cuidadosa, em relação ao que os alunos deveriam executar.

No Anexo A encontra-se apresentado o Esboço *E1*, onde estão indicadas a segunda e a terceira etapa, de acordo com o que foi fornecido por Flávia.

Na primeira etapa era solicitado que os alunos juntamente com os seus colegas chegassem às definições dos quadriláteros em estudo, ou seja, o paralelogramo e o quadrado. Eles deveriam se valer das propriedades do paralelismo e perpendicularismo, verificadas em figuras planas, presentes na geometria euclidiana, para em seguida analisá-las do enfoque da geometria analítica.

A segunda etapa, utilizando o *software* Cabri-Géomètre os alunos deveriam construir inicialmente um paralelogramo e depois um quadrado. Inicialmente eram fornecidas sugestões para as construções destas figuras. Em seguida, após construí-las os alunos deveriam analisá-las, obtendo as equações das retas suportes de seus lados. Em seguida, era solicitado que os alunos movimentassem as figuras através de seus vértices, a fim que observarem a alteração no comportamento dos termos (coeficientes linear e angular), nas equações de suas respectivas retas suportes. Esta verificação é facilmente visualizada, usando uma ferramenta do *software* que indica a equação da reta. Em um segundo momento, os alunos deveriam construir novamente as mesmas figuras, só que, desta vez, era solicitado a eles que não utilizem algumas ferramentas presentes no menu do Cabri-Géomètre. Ao final da segunda atividade, o professor, deveria formalizar o que ocorreu,

definindo o coeficiente angular e, por sua vez, o aluno deveria validar o desenho, usando os conceitos de Geometria Analítica, a saber, distância entre dois pontos e coeficiente angular.

Na terceira, eram fornecidas duas figuras que foram construídas usando o Cabri: um quadrado e um paralelogramo. Os alunos deveriam, a partir da validação dos conceitos obtidos e das propriedades identificadas nas etapas anteriores, a saber, coeficiente angular e distância entre dois pontos no plano, provar que uma das figuras era um quadrado e a outra um paralelogramo.

5.1.1.3 SÍNTESE DO MOMENTO 1

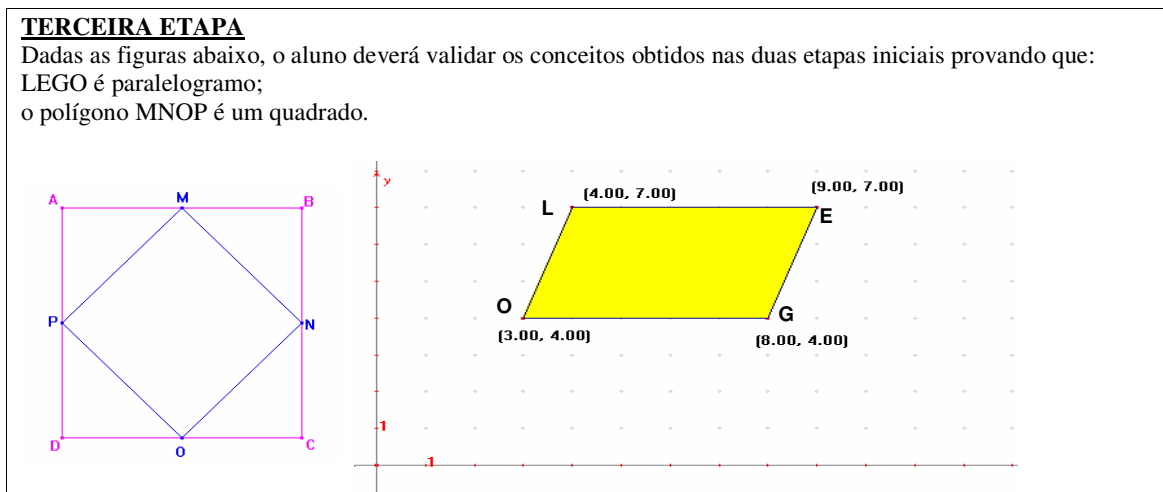
De acordo com a análise dos dados obtidos na primeira entrevista e na primeira versão da atividade (*E1*), identificamos alguns elementos que caracterizaram o *Momento 1* da trajetória de Flávia:

Flávia, no período de sua graduação, teve alguma experiência com demonstração, mas com um enfoque muito diferente daquele que ela vivenciou no AProvaME. Em sua formação inicial foi apresentada a prova formal (demonstração), como se fosse um objeto matemático, porém em nenhum momento foi solicitado que os alunos construíssem uma demonstração, usando os seus próprios conhecimentos e recursos. Aparentemente, os seus professores não diferenciavam os significados distintos dos termos prova e demonstração (Balacheff, 1988), não tendo como preocupação o ensino da prova. Dessa maneira, neste período, a demonstração foi introduzida e utilizada de uma forma mecânica e repetitiva, não fazendo muito sentido para os alunos. O mesmo ocorreu em sua vida profissional, nas aulas de Matemática que ministrava, nas quais repetia atitudes e procedimentos observados e aprendidos de seus professores, até ingressar no Mestrado Profissional e, posteriormente, no AProvaME.

A partir deste momento, Flávia passou a enxergar a prova, de uma forma diferente, não buscando apenas apresentar aos alunos o procedimento formal (demonstração), esperando que repetissem o que foi ensinado, mas que a construção de uma prova fosse considerada como parte integrante de um processo, um desenvolvimento que o aluno faria partindo do empírico até atingir o dedutivo. Pudemos identificar, em algumas de suas falas na Entrevista 1, que Flávia passou a valorizar o processo de construção de uma prova, bem como as produções dos alunos, em termos de justificativas, argumentos e conjecturas por eles formulados.

Relativamente ao *Momento 1*, Flávia elaborou a primeira versão da situação de aprendizagem, com o auxílio de outros dois professores, que foi denominada, por ela, Esboço 1 (*E1*). Identificamos em Flávia uma preocupação em relação ao *E1*, em estruturá-lo

em uma ordem lógica, na qual os alunos pudessem partir de algum conteúdo já conhecido. Acrescido a este fato, também a atividade previa que a partir do empírico, das provas pragmáticas (empirismo ingênuo) conforme Balacheff (1987), alguns alunos conseguissem atingir as provas conceituais (experiência mental). Em *E1*, pudemos observar as etapas iniciais possuindo um caráter mais empírico, sendo que a terceira etapa já solicitava uma prova, ou a demonstração formal, visando ao aspecto dedutivo, conforme pode ser visualizado no desenho 1 indicado a seguir:



Desenho 1: Terceira etapa do Esboço 1, desenvolvido por Flávia com a equipe do AProvaME. (Material cedido pela Flávia).

No *Momento 1* Flávia passou a considerar que, a partir de um empirismo inicial, se poderia seguir na direção de uma formalização matemática, desde que as atividades tivessem sido bem elaboradas e estruturadas, levando o aluno à construção do conhecimento. Estas atividades deveriam estimular a elaboração de argumentos e conjecturas por parte dos alunos.

Flávia apontou a importância que teve para ela o trabalho colaborativo desenvolvido junto à sua equipe de professores e pesquisadores inseridos no contexto do AProvaME, que propiciou a todos os envolvidos inúmeros momentos de reflexão, investigação e discussão sobre a situação de aprendizagem que estavam elaborando coletivamente. O grupo também propiciou momentos de reflexão e discussão em torno das diversas etapas de um processo de construção de um raciocínio lógico e matemático.

Em termos da integração de recursos da informática nas atividades, Flávia utilizou o *software* Cabri-Géomètre. Esta sua opção se deu pelo fato deste *software* consistir em uma ferramenta importante para a construção e visualização de figuras e na identificação das propriedades, com vistas à produção de uma prova, em um passo seguinte, além dela já

possuir familiaridade com ele, sendo que este já se encontrava instalado no laboratório de informática da escola, onde conduziu a sua pesquisa.

Em algumas falas da entrevista de Flávia, ela ponderou que um uso eficiente do Cabri-Géomètre dependeria da interatividade do professor com este recurso tecnológico. O Esboço *E1* revelou alguns indícios de apropriação tanto do *software* (filosofia e modos de utilização), como de suas ferramentas, na medida em que ela solicitou que os alunos, ao construir algumas figuras usassem ou não determinadas opções presentes em seu menu.

Flávia passou a enxergar, neste momento, o computador como um recurso facilitador, que poderia fornecer um ambiente dinâmico e interativo, ajudando na exploração, na manipulação, na visualização e na resposta rápida e precisa. Porém, para a prova o professor precisaria desenvolver outras habilidades nos alunos, devendo estar devidamente preparado para enfrentar novos desafios, que implicariam a elaboração de uma sequência didática adequada e domínio do *software*.

Flávia a princípio considerou muito positiva a integração do computador na situação de aprendizagem. Ela acreditava que esta integração poderia propiciar ao aluno atingir a demonstração, a partir da generalização de alguns exemplos particulares, nos quais seriam evidenciados alguns aspectos de generalidade.

Porém, esta visão se configurou de uma forma muito simplista, quanto às reais possibilidades de uso do computador em atividades visando à prova. Acrescido a este fato, conforme já enunciado anteriormente, Balacheff (1988) observou que a passagem do exemplo genérico (empírico) para a prova formal (dedutivo), pode se revelar muito complexa para os alunos, embora pareça ser espontânea e natural.

5.1.2 MOMENTO 2

O segundo momento da trajetória de Flávia pode ser caracterizado pelas seis versões das situações de aprendizagem por ela elaboradas no decorrer de quase um ano, de agosto de 2006 a junho de 2007, ou seja, as versões *E2*, *E3*, *E4*, *V1*, *V2* e *V3* e da realização da segunda entrevista em abril de 2007. As informações relacionadas a este *Momento 2*, coletadas a partir dos instrumentos mencionados, serão apresentadas e analisadas a seguir:

5.1.2.1 ESBOÇO 2 (E2)

Flávia prosseguiu no desenvolvimento da situação de aprendizagem, juntamente com os mesmos dois professores-colaboradores, que já a haviam auxiliado no Esboço *E1*. Esta segunda versão da situação de aprendizagem recebeu destes professores o nome de “Atividade sobre retas paralelas”, sendo na presente pesquisa designada de Esboço *E2* (Anexo B).

Ela nos relatou que entre os esboços *E1* e *E2*, havia ocorrido algumas discussões e encontros entre os professores da Equipe A e os pesquisadores do AProvaME. O Esboço *E1* foi apresentado ao grupo no 1º semestre de 2006, enquanto o *E2* foi disponibilizado no Teleduc, no 2º semestre de 2006, na etapa do *design* coletivo, e recebeu colaborações dos professores por meio de mensagens postadas no Fórum deste ambiente virtual de aprendizagem.

Flávia considerou esta versão *E2* muito direcionada, pois fornecia a indicação passo a passo de como os alunos deveriam conduzir as atividades, bem como grande parte das respostas a serem fornecidas por estes no formato de lacunas a serem preenchidas. Dessa forma, as atividades eram fornecidas em uma determinada sequência, sendo que ao final de algumas delas, era solicitado que os alunos justificassem as suas respostas, bem como elaborassem algumas conclusões sobre os conteúdos que estavam sendo estudados, porém, de uma forma muito limitada.

No *E2*, inicialmente os alunos deveriam usar o Cabri para construir diversas retas paralelas, a uma inicial, sendo fornecidos os pontos no plano, para em seguida obterem as equações de cada uma destas retas. O objetivo destas atividades iniciais era que os alunos, a partir da figura construída, pudessem compreender o significado dos coeficientes linear e angular das retas, bem como conseguissem relacioná-los com os coeficientes a e b da equação de uma reta ($y=a+bx$). A seguir a atividade levava os alunos a constatar que retas paralelas possuem o mesmo coeficiente angular, o que não ocorria com retas que não eram paralelas.

Em seguida, por meio da apresentação de um triângulo retângulo, Flávia introduziu o conceito de tangente de um ângulo agudo. A partir da tangente em um triângulo retângulo, Flávia partiu para o conceito da tangente entre uma reta qualquer e o eixo horizontal Ox . No decorrer da atividade, ela indicou a relação existente entre o coeficiente angular de uma reta com a tangente do ângulo que esta reta forma com o eixo Ox .

Esta situação de aprendizagem, também, contemplou alguns casos particulares, em que eram solicitados os coeficientes angulares de retas paralelas entre si e em relação aos eixos Ox e Oy , a serem desenvolvidas e resolvidas com papel e lápis. No final desta situação de aprendizagem, o aluno deveria concluir que se as retas possuem o mesmo

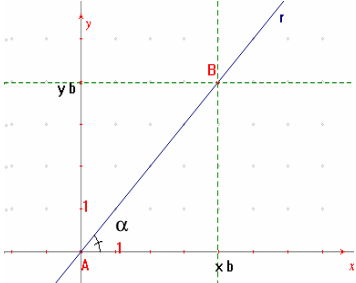
coeficiente angular, este valor será igual às tangentes dos ângulos que estas retas formam com o eixo Ox , ou seja, se retas possuem a mesma inclinação em relação ao eixo Ox , então estas retas são paralelas.

Esta segunda versão constou de apenas uma etapa formada por oito atividades, nas quais o Cabri era utilizado em apenas duas delas e o uso do papel e lápis era solicitado nas demais. Nas duas atividades em que o aluno utilizava o ambiente de geometria dinâmica, o objetivo do Cabri era que o aluno efetuasse as construções solicitadas, movimentasse a figura construída para testar as suas propriedades, visualizasse e explicasse a construção obtida, inclusive, os casos particulares. As demais atividades a serem resolvidas, usando lápis e papel, foram elaboradas de uma forma muito direcionada e enfatizavam o aspecto formal no momento de apresentar uma prova.

Da forma como as atividades, que compuseram esta sequência didática, foram concebidas, fizeram com que o Cabri fosse utilizado como uma ferramenta de visualização e verificação de propriedades, sendo que a formalização ocorreu em uma etapa posterior, usando lápis e papel.

Esta versão *E2* da maneira como foi elaborada, com lacunas a serem preenchidas, não possibilitou aos alunos responderem livremente, pois a resposta já estava sendo parcialmente direcionada (desenho 2).

05. Formalize!!!!



Na figura acima $\operatorname{tg} \alpha$ é

Na equação da reta $r: y = a x + b$, temos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, então:

(1) $y_A = a x_A + b$

(2) $y_B = \dots\dots\dots$

De (1) e (2) vem:

$y_B - y_A = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots \rightarrow$ (elimine os parênteses)

$y_B - y_A = \dots\dots\dots \rightarrow$ (coloque o a em evidência)

$a = \dots\dots\dots$

Conclusão $\operatorname{tg} \alpha$ é

Desenho 2: Atividade 05 do Esboço 2, desenvolvido pela Flávia, com a equipe do AProvaME. (Material cedido pela Flávia).

Conforme podemos observar nesta atividade (Atividade 05), mesmo esta questão, que solicitava uma formalização, foi elaborada de uma forma muito dirigida. Os alunos só deveriam preencher as lacunas que estavam faltando na frase toda.

Para Flávia, este tipo de formulação de questão direcionava o raciocínio dos alunos, pois os prendiam em uma resposta já praticamente respondida. Esta foi uma das razões, que levaram Flávia a elaborar uma outra versão da situação de aprendizagem, que não direcionasse tanto os alunos.

5.1.2.2 Esboço 3 (E3)

A terceira versão da situação de aprendizagem, designada de Esboço 3 (*E3*) foi elaborada pela Flávia, baseada no *E1*, ainda auxiliada pelos mesmos professores-colaboradores de sua equipe do projeto e recebeu o nome de “Paralelismo” (Anexo C).

Ao terminar a elaboração do Esboço *E3*, Flávia ainda não havia percebido, segundo sua própria fala, o quanto longe e ao mesmo tempo próximo ela estava da versão final de sua situação de aprendizagem. Ela sabia que algumas atividades deveriam ser modificadas, porém desconhecia como faria isto, o que a levou a seguir na direção oposta. Tanto que a versão seguinte, que constituiu o Esboço *E4*, foi bem diferente desta terceira versão.

Flávia considerou que o caminho que teve de percorrer, no decorrer de todas as versões que sucederam a esta (*E3*), não foi perdido, pois a cada versão nova elaborada, possibilitava inúmeras discussões envolvendo trocas de ideias que muito enriqueceram a todos os envolvidos. Muitas atividades desenvolvidas para esta versão foram utilizadas nas três últimas versões, a saber, a *V1*, a *V2* e a *V3* (versão final) da situação de aprendizagem.

Este Esboço *E3* foi colocado em discussão na equipe de Flávia do AProvaME (fase do *design* coletivo) e consistiu em três etapas, com muitas atividades em cada uma delas.

A primeira etapa foi formada de três atividades. Inicialmente os alunos deveriam a partir do manuseio de um sólido geométrico, um cubo, identificar e contar o número de pares de retas que passavam pelos oito vértices deste. A atividade 2 solicitava que os alunos escrevessem com as suas próprias palavras o que era um paralelogramo. Na atividade 3, o aluno deveria construir e descrever a construção de um paralelogramo, utilizando um papel milimetrado. Ao final desta atividade, o professor, levando em consideração as respostas dos alunos, forneceria a definição de paralelogramo e enunciaria as propriedades deste quadrilátero.

A segunda etapa abrangeu quatro atividades, nas quais o aluno deveria usar o Cabri-Géomètre em todas elas, na construção de figuras ou na validação das propriedades, por meio do manuseio de figuras previamente construídas. Em alguns momentos, quer seja na

construção de figuras ou na verificação de algumas propriedades eram suprimidas algumas ferramentas do menu deste *software*. Em três atividades os alunos deveriam abrir alguns arquivos contendo figuras previamente construídas, que visualmente pareciam ser, respectivamente, um paralelogramo, quatro grupos de retas paralelas, duas a duas, e um trapézio. Por meio da movimentação das figuras, os alunos deveriam identificar propriedades relacionadas ao paralelismo e determinar nas figuras geométricas que foram construídas se as retas eram ou não paralelas. Uma destas quatro atividades solicitava que o aluno construísse um paralelogramo, obtivesse a equação de suas retas suportes, movimentasse a figura por meio de seus vértices, analisasse o que estava ocorrendo, escrevesse com as suas próprias palavras o que observava e enunciasse uma propriedade básica a ser satisfeita por duas retas paralelas, em termos de seus coeficientes angulares. Nesta segunda etapa, o aluno não era chamado para formalizar nenhuma vez, porém, todas as atividades desta etapa solicitavam que os alunos descrevessem os passos, escrevessem com as suas palavras algumas propriedades observadas e justificassem os resultados, na medida em que manipulavam as figuras.

A terceira etapa consistiu de nove atividades, cuja realização por parte dos alunos alternou-se entre o uso do papel e lápis (quatro atividades) e o Cabri-Géomètre (cinco atividades). Na atividade inicial desta etapa foi apresentado o conceito de Taxa de Variação Média, descrito em uma linguagem matemática formal, juntamente a diagramas cartesianos (gráficos), a título de indicar uma aplicação na Física dos conceitos estudados em Matemática. Nas atividades a serem resolvidas no computador, os alunos deveriam construir algumas figuras geométricas planas, com várias ferramentas do menu suprimidas, para verificar se estes conheciam as propriedades destas figuras. Caso os alunos desconhecêssem estas propriedades, eles não conseguiriam construir as figuras solicitadas. Em vários momentos os alunos deveriam justificar os resultados (as figuras construídas). As atividades a serem realizadas com lápis e papel, foram mais voltadas a que o aluno demonstrasse, ou seja, apresentasse a prova formal. O objetivo destas atividades era que ao final os alunos entendessem e relacionassem os conceitos de taxa de variação média, tangente de um ângulo que uma reta qualquer forma com o eixo horizontal, coeficiente angular de uma reta e retas paralelas, de forma a conseguirem identificar quadriláteros, de acordo com as propriedades que os definem.

Ao analisarmos a versão *E3*, em relação à forma como as atividades foram concebidas e organizadas, acreditamos que Flávia já havia começado a pensar em termos das quatro etapas do pensamento geométrico, ou seja, os níveis G0, G1, G2 e G3, presentes nos estudos de Parzysz (2001). As atividades por ela elaboradas, organizadas em três etapas, podem pelo menos a princípio ser classificadas nos níveis G0, G1 e G2. Nas atividades iniciais da 1ª etapa, Flávia trabalhou com objetos concretos e validações

perceptivas (G0), na última atividade da primeira etapa e na segunda etapa com a geometria espaço-gráfica (G1), caminhando na direção dos objetos teóricos e validações dedutivas, na terceira etapa (G2).

5.1.2.3 Esboço 4 (E4)

A quarta versão da situação de aprendizagem, o Esboço 4 (E4) conteve muitos elementos da versão E2. Para a elaboração da versão E4, Flávia usou a mesma estrutura da versão E2, sendo que algumas atividades da E2 foram totalmente aproveitadas na E4, sem sofrerem nenhuma modificação, enquanto outras ela desdobrou em mais atividades, além de modificar algumas e introduzir outras (Anexo D).

Flávia relatou que quando concluiu a elaboração do E3, ela ainda não estava se sentindo muito segura quanto a conseguir atingir com os seus alunos os objetivos do projeto, ou seja, se esta versão da situação de aprendizagem como foi estruturada poderia levar o aluno a argumentar, conjecturar e a provar, usando recursos da informática.

No intuito de ajudá-los, a fim de facilitar a execução das atividades, elaborou a versão E4, que logo em seguida sentiu ser muito direcionada, como na E2, pois da forma como esta sequência didática foi desenvolvida, as atividades também assumiram um formato de um “tutorial”. Contudo, ela quis submeter esta situação de aprendizagem ao grupo colaborativo, na fase de *design* coletivo, para que, além de abrir espaço para a discussão de novas ideias, ela pudesse perceber com mais clareza o que não se queria no AProvaME. Esta discussão em muito a ajudou até a conseguir atingir a versão final, a que foi efetivamente aplicada com os alunos.

Esta situação de aprendizagem contou com uma única etapa, formada de onze atividades, cinco usando o Cabri-Géomètre e seis apenas lápis e papel. No início da atividade, foram apresentadas algumas atividades a serem resolvidas com o Cabri-Géomètre, nas quais os alunos deveriam de uma forma muito direcionada, construir retas paralelas, verificar algumas propriedades, estabelecer algumas relações e pensar sobre o que estava ocorrendo.

Em seguida, usando lápis e papel os alunos deveriam responder e justificar o que foi solicitado, que se referia à identificação e ao estabelecimento da relação existente entre os coeficientes das equações das retas obtidas e os pontos por onde estas retas passavam ou as suas posições.

O Cabri-Géomètre foi usado nas atividades, nas quais os alunos deveriam construir retas paralelas ou triângulos retângulos, movimentar estas figuras para testar e estudar as suas propriedades, identificar os coeficientes lineares e angulares das retas obtidas e as

tangentes de determinados ângulos. As seis outras atividades, as que foram pensadas para serem resolvidas usando lápis e papel, solicitavam que os alunos justificassem e formalizassem os resultados obtidos.

Observamos que no decorrer de todas estas versões iniciais, Flávia sempre procurou partir de um contexto empírico, seja com um sólido geométrico (*E1* e *E3*), ou com o Cabri-Géomètre (*E1*, *E2*, *E3* e *E4*). Este *software* esteve sempre presente em algumas das atividades iniciais, de forma a permitir que os alunos construíssem as figuras solicitadas, as manipulassem para verificar as suas propriedades, enfim realizassem experimentações indutivas, para validar algumas constatações. Porém, no momento em que se fez necessária a apresentação de provas formais, Flávia passou para o contexto de lápis e papel.

5.1.2.4 VERSÕES V1, V2 E V3

As versões *V1*, *V2* e *V3*, respectivamente a quinta, a sexta e a sétima versões da situação de aprendizagem, foram muito semelhantes entre si. Estas três versões finais foram baseadas no Esboço *E3*, aproveitando toda a estrutura desta versão.

A versão *V2* em relação à *V1* praticamente não sofreu nenhuma alteração. As alterações que ocorreram visaram apenas à melhoria da redação no texto, com o objetivo de facilitar o entendimento por parte do aluno, ou algumas nomenclaturas de pontos ou retas que foram modificadas. Assim, para efeito da realização de uma análise, as versões *V1* e *V2* foram consideradas como se fossem uma única versão, por não apresentarem diferenças significativas (Anexo E).

A versão *V3*, que se constituiu na versão final, sofreu algumas alterações mais significativas em relação à versão *V2* (ou *V1*), que não se restringiram apenas à melhoria da redação. A *V3* manteve a mesma estrutura das duas anteriores (*V1* e *V2*), sendo adicionadas e/ou aprofundadas algumas atividades em algumas etapas, pois Flávia acreditava que se ampliasse o enfoque e introduzisse elementos novos, poderia estar ajudando os alunos a levá-los à produção de uma prova (Anexo F).

Um fato que nos chamou a atenção foi a constatação de Flávia quanto à passagem brusca em sua situação de aprendizagem do que ela denominou de “grande salto do empírico ao dedutivo”. Para ela, esta passagem dificultava aos alunos atingir a prova formal. Dessa forma, observamos no decorrer de todo o processo de Flávia, a partir da elaboração das versões iniciais até a versão final de sua situação de aprendizagem, uma grande preocupação em elaborar atividades que possibilitassem uma transição mais gradual e suave do empírico ao dedutivo.

As versões finais constaram de uma etapa inicial de familiarização com o *software* Cabri-Géomètre, seguida de mais três etapas.

Flávia considerou esta etapa de familiarização necessária, pois em duas etapas da situação de aprendizagem este *software* seria utilizado, o que requeria ao menos um conhecimento mínimo deste. Caso esta familiarização não ocorresse, os alunos não conseguiriam terminar a sequência e, talvez, desistissem dela por se sentirem desestimulados por não saberem utilizar este recurso.

Para a fase de familiarização, Flávia planejou apresentar o histórico do Cabri-Géomètre e a seguir as suas ferramentas. Após esta apresentação, desenvolveria algumas atividades, as quais priorizariam as construções geométricas básicas e essenciais para que os alunos conseguissem desenvolver a sequência e o estudo que estava sendo desenvolvido. O objetivo de Flávia foi que, ao final desta etapa de familiarização, os alunos conhecessem e soubessem utilizar as ferramentas do menu e conseguissem distinguir os atos de desenhar e de construir.

As duas primeiras etapas das versões *V1*, *V2* e *V3* apresentaram a mesma estrutura do Esboço *E3*, apenas Flávia as detalhou com maior profundidade nestas versões finais. Em relação à terceira etapa, ela aproveitou todas as nove atividades do *E3* integralmente, sem modificá-las, apenas aprofundou a análise em relação ao que ela acreditava que os alunos conseguiriam executar, quais seriam as possíveis dificuldades e quais sugestões forneceria para que estes pudessem superar as dificuldades. A sétima versão (*V3*) contém duas atividades a mais que as versões *E3*, *V1* e *V2*, totalizando cinco atividades na segunda etapa e dez atividades na terceira etapa.

Conforme citado anteriormente, na concepção das atividades que fizeram parte das três etapas das versões *V1*, *V2* e *V3*, Flávia levou em consideração as pesquisas de Parzysz (2001). Na 1ª etapa de sua sequência didática Flávia trabalhou no nível G0 com objetos concretos e validações perceptivas, na 2ª etapa, podem ser identificados elementos do nível G1, atingindo o nível G2, com os objetos teóricos e validações dedutivas na 3ª etapa.

A integração do Cabri-Géomètre na situação de aprendizagem nestas três versões finais ocorreu na segunda e terceiras etapas, e pela forma como estas atividades foram concebidas, elas poderiam ser classificadas no nível G1. Algumas validações dedutivas presentes na terceira etapa destas situações de aprendizagem, realizadas com lápis e papel, se encontram no nível G2.

Na primeira etapa das versões finais, Flávia propunha inicialmente aos alunos que fizessem uma validação no concreto. Esta etapa partia do concreto, de objetos materializados e foi formada por três atividades. Os alunos na primeira atividade desta etapa deveriam manipular um material concreto (sólido geométrico na forma de um cubo), que

lhes seria entregue no início desta, e a partir de construções e investigações deveriam chegar à definição da figura quadrilátera em estudo. Na segunda atividade deveriam escrever com as suas próprias palavras o que era um paralelogramo. A única diferença entre as versões V2 e V3, nesta primeira etapa, residiu na atividade 3. Enquanto a versão V2 solicitava apenas que os alunos construíssem um paralelogramo, descrevendo e justificando a sua construção, usando um papel quadriculado, na versão V3, também era solicitado que estes fizessem o mesmo, mas utilizando desta vez uma folha em branco. Flávia, ao analisar estas três atividades, classificou as duas primeiras como pertencentes ao nível G0 e a terceira ao nível G1 de Parzysz (2001).

Flávia acreditava que esta primeira etapa da forma como as atividades foram concebidas, propiciaria aos alunos um contato com as retas paralelas e as suas propriedades.

Na segunda etapa Flávia trabalhou no nível G1 (geometria espaço-gráfica), usando o *software* Cabri-Géomètre. Nesta etapa, ela esperava que os alunos explorassem e manipulassem os objetos geométricos construídos com este *software*, permitindo a observação de generalizações.

Nas versões E3, V1 e V2, esta etapa foi formada por quatro atividades, enquanto na versão V3, por cinco atividades. O que ocorreu na realidade é que a Flávia introduziu uma atividade a mais nesta versão (versão V3), a atividade 3. A atividade 3 da versão V2 foi mantida, apenas mudou o nome para atividade 4.

Acreditamos que Flávia tenha introduzido esta atividade, visando facilitar o entendimento dos alunos sobre a relação existente entre a tangente de um ângulo formado entre uma reta e o eixo Ox, e o valor do coeficiente angular da equação desta reta, por meio do auxílio do Cabri-Géomètre.

Os registros documentais da atividade 3 da versão V2 e das atividades 3 e 4 da versão V3, pertencentes a Flávia e cedidos para a presente pesquisa, encontram-se apresentadas, a seguir.

Atividade 3:

- No Cabri-Géomètre seleccione no menu novos eixos e defina a grade;
- Construa um paralelogramo;
- Obtenha a equação das retas suportes dos lados do paralelogramo;
- Movimente a figura através de seus vértices e analise atentamente que ocorre com as equações;
- Escreva com suas palavras o que você observa (o professor permitirá que os alunos socializem suas observações e fará a institucionalização do termo coeficiente angular);
- Enuncie agora uma propriedade básica satisfeita por duas retas paralelas em termos de seus coeficientes angulares.

Atividade 3-Versão V2, desenvolvida pela Flávia

Atividade 3:

No Cabri selecione no menu novos eixos e defina a grade, a seguir:

- a) Crie uma reta que forme um ângulo agudo com o eixo Ox e obtenha a sua equação via menu;
- b) Calcule a tangente do ângulo formado pelo eixo Ox e a reta;
- c) Relacione a tangente do ângulo com a equação da reta.

Atividade 4:

No Cabri-Géomètre selecione no menu novos eixos, a seguir:

- Construa um paralelogramo;
- Obtenha a equação das retas suportes dos lados do paralelogramo;
- Movimente a figura através de seus vértices e analise atentamente o que ocorre com as equações;
- Escreva com suas palavras o que você observa (o professor permitirá que os alunos socializem suas observações e fará a institucionalização do termo coeficiente angular);
- Enuncie agora uma propriedade básica satisfeita por duas retas paralelas.

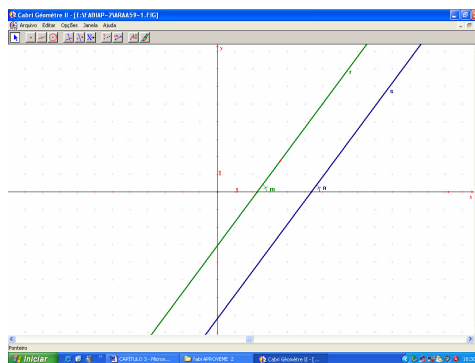
Atividades 3 e 4-Versão V3, desenvolvida pela Flávia

Na terceira etapa, Flávia trabalhou no nível G2 (geometria proto-axiomática), na qual nas nove atividades (versões *E3*, *V1* e *V2*) ou dez atividades (versão *V3*), que a constituíram, foram utilizados de forma intercalada os recursos lápis e papel e o *software* Cabri-Géomètre.

Nesta etapa, ela introduziu o conceito e a definição de Taxa de Variação Média (TVM), a partir do que era ensinado nos livros. Flávia acreditava que se os alunos trabalhassem com o conceito de TVM facilitaria a eles a compreensão do significado do coeficiente angular, com a sua posterior determinação. Dessa forma, os alunos poderiam enxergar uma aplicação do significado do coeficiente angular na Física.

O número de atividades que solicitavam a utilização do Cabri-Géomètre, nesta terceira etapa passou de quatro (versões *E3*, *V1* e *V2*) para cinco atividades (versão *V3*). Em todas estas atividades foram suprimidas algumas ferramentas do menu deste *software* de forma que os alunos não tentassem aplicar imediatamente estas ferramentas para executar algumas ações. Os objetivos de Flávia em relação ao uso do Cabri nesta etapa eram: que os alunos construíssem e descrevessem as construções solicitadas; manipulassem os objetos geométricos obtidos; justificassem os resultados; buscassem a validação de propriedades; elaborassem conjecturas e argumentos; e buscassem generalizações.

Na versão *V3* foi introduzida na terceira etapa a atividade 6 (desenho 3), apresentado a seguir:

Atividade 6: Abra o ARQUIVO 5A

a) O que se pode afirmar a respeito das retas r e s ? Justifique sua resposta.

Neste item da atividade, serão supressas, as ferramentas: distância, ângulo e paralelas?

b) O que se pode afirmar a respeito das retas r e s ? Justifique sua resposta.

Só que agora serão supressas as ferramentas equação e paralelas?

Desenho 3: Atividade 6 introduzida na terceira etapa da Versão V3, desenvolvida pela Flávia. (Material cedido pela Flávia).

Quanto às atividades que demandavam o uso de papel e lápis, embora elas tenham permanecido na mesma quantidade nas duas versões - cinco atividades, observamos uma pequena alteração nas atividades iniciais da terceira etapa. A parte teórica, a definição de TVM foi melhor explicada, como explicitado anteriormente, de um ponto de vista da formalização matemática, conforme é tratada nos livros didáticos, além de serem fornecidos outros exemplos mais focados com os objetivos da situação de aprendizagem.

Alguns elementos presentes nas versões finais da situação de aprendizagem revelam um processo em curso no desenvolvimento de Flávia. Pudemos identificar uma ampliação na sua compreensão da temática abordada, constatada na evolução da sequência didática por ela elaborada, de forma que os seus alunos conseguissem atingir a construção de uma prova, bem como a sua apropriação, com a consequente inserção do recurso computacional nas atividades, como a atividade 6, que foi introduzida na versão final e analisada na *Síntese do Momento 2*.

5.1.2.5 ENTREVISTA 2

Realizamos a segunda entrevista com Flávia em abril de 2007. Naquele momento ela estava finalizando a sua situação de aprendizagem (versão V3), a partir das análises e sugestões obtidas na fase do *design* coletivo para, na etapa seguinte, poder aplicá-la com

os alunos. Organizamos as informações obtidas em quatro temáticas, explicitadas anteriormente (*item 4.2.5.2. A segunda entrevista*), as quais se encontram descritas e analisadas nos próximos itens.

Dados pessoais

No momento da segunda entrevista, Flávia ainda contava com 31 anos, estava formada há doze anos e lecionava Matemática no Ensino Médio, primeiro e terceiro anos, na mesma escola estadual da cidade de São Paulo, de quando realizou a primeira entrevista.

Diferentes fases na elaboração da atividade até atingir a versão final

Flávia relatou que naquele momento a sua atividade estava em processo de finalização, mas que ainda faltava acrescentar alguns detalhes.

Em seguida, ela apontou para o fato desta situação de aprendizagem já ter sido parcialmente elaborada no 1º semestre de 2006, pela sua equipe de professores-colaboradores do AProvaME. No 2º semestre daquele mesmo ano, ela foi analisada por outros grupos de professores, que a executaram e postaram seus comentários, via Fórum no Teleduc:

“Esta atividade foi trabalhada, ela foi analisada, pelos outros grupos e houve comentários a respeito dela. E ela já sofreu algumas alterações, o corpo é o mesmo, só que houve alterações, porque eu coloquei.”

Estas alterações foram efetuadas, principalmente, devido ao fato de Flávia sentir que a sequência didática elaborada inicialmente propunha um salto muito grande do empírico ao dedutivo. Daí o motivo da existência de tantas versões intermediárias. Ela sentia a necessidade de que a sua situação de aprendizagem apresentasse as atividades sendo desenvolvidas de uma forma mais gradual e suave, com mais passos, para facilitar justamente a passagem do empírico ao dedutivo, para não sair do empírico e “cair diretamente” na dedução. Ela também observou que os aspectos dedutivos “ficaram um pouco a desejar”, apontando para a necessidade de mais atividades que focassem mais os aspectos dedutivos, de forma a fazer com que os alunos conseguissem atingir a demonstração:

“O desenvolvimento desta situação de aprendizagem eu peguei desde o começo; é o mesmo tema. Porém nós fomos modificando as atividades porque percebemos que tinha um salto muito grande, ou que ficava a desejar justamente a parte de dedução, de demonstração. E saía muito rapidamente do empírico e já caía diretamente para a dedução e a gente queria fazer uma coisa mais lenta que eles utilizassem mais... tivesse mais passos, fosse uma coisa mais gradual; não fosse um pulo, um salto muito grande de informação para os alunos.”

Em seguida Flávia, descreveu como se encontrava a sua situação de aprendizagem naquele momento, em termos de estrutura e objetivos. Esta situação seria dividida em três etapas, sendo que na primeira os alunos iriam trabalhar mais no concreto, sólidos geométricos e papel milimetrado:

“É mais ou menos um concreto, os alunos vão mexer com alguns sólidos geométricos; eles já têm noções, já conhecem algumas propriedades de alguns sólidos; definições... a gente queria que eles resgatassem o paralelismo de figuras planas a partir de sólidos geométricos ... alguns sólidos a gente ia planificar e aí, nessa figura plana eles iam verificar ou relembrar o que são retas paralelas... as condições de paralelismo daquela figura. E, depois, a gente parte já para uma construção de geometria.”

Flávia justificou ter pensado nesta etapa de sua situação de aprendizagem, pelo fato de estar trabalhando com os níveis de Parzysz (2001):

“G0, G1 G2... o G3 não sei se a gente vai conseguir alcançar porque é a dedução formal, prova formal. Este nível ainda eu não busquei. Então o G0, seria esse o espaço concreto, a gente está mexendo com figuras, com gráficos em folha quadriculada, papel milimetrado. Os alunos deverão desenhar algumas figuras planas. Nesta parte concreta estou construindo com cartolinas e depois eu vou trabalhar com sólidos, um cubo. Transparências de acetatos e utilizar... tipo canudos, varetas para eles determinarem quantas retas paralelas o cubo tem e tal.”

Na segunda etapa, Flávia propôs a utilização do Cabri-Géomètre:

“depois, a 2ª etapa, aí ele já entra em um outro tipo de empírico... é mais o empírico no gráfico mesmo. Então para verificar a geometria eu vou usar o Cabri, ele é muito usado na segunda etapa quer dizer, a segunda etapa é toda constituída pelo Cabri-Géomètre.”

As duas primeiras etapas das versões finais da situação de aprendizagem, segundo Flávia, se localizaram no nível empírico, porém com diferentes tipos de recursos a serem utilizados pelos alunos. Na primeira etapa a atividade propôs o uso de materiais concretos,

pertencentes ao mundo objetivo (nível G0), enquanto na segunda etapa, o recurso seria o *software* Cabri-Géomètre (nível G1). Dessa forma, Flávia ao se referir à segunda etapa, diz:

“Eu utilizo o Cabri, então eles vão trabalhar justamente com a equação da reta suporte, que passa pelos lados de um paralelogramo. Então eles vão verificar, como o Cabri, que é muito ‘legal’, muito bom, que eles podem movimentar a figura e quando eles pedem a equação da reta suporte dos lados, eles percebem que os coeficientes, para eles, os números que acompanham o x são sempre iguais nos lados opostos. A gente queria que eles percebessem justamente isso. Então, quer dizer, é uma... uma brincadeira, mas que para eles é assim... é algo, algo empírico, mesmo; eles estão brincando... e eu quero que eles percebam isso. Não é algo assim que eu quero falar: ‘Olha, retas paralelas têm coeficientes iguais’. Eles já viram retas paralelas na primeira etapa, então na segunda etapa seria isso: ‘Olha! São paralelas, professora. Olha só que interessante, quem acompanha o x, sempre está igual. Por mais que eu mexa a figura, eles continuam ou permanecem iguais’.”

Sobre a terceira etapa da situação de aprendizagem, Flávia relatou que procurou partir do empírico na direção do dedutivo, usando um exemplo de taxa de variação média (TVM). Para tanto, partiu de uma situação na Física, onde a TVM foi aplicada, prosseguindo nas diversas atividades, mescladas entre os ambientes do computador e do papel, nas quais os alunos deveriam sair da definição da TVM, para em seguida relacioná-la com a tangente do ângulo formado pela intersecção da reta com o eixo Ox. Em um passo seguinte os alunos deveriam relacionar a tangente com o coeficiente angular da reta. O seu objetivo era que os alunos percebessem que coeficientes angulares iguais implicariam retas paralelas. Nesta etapa, Flávia trabalhou no nível G2.

“Na terceira etapa eu já tento sair desse empírico e levá-los até um dedutivo usando taxa de variação média, por que... geometria analítica é ensinada muito com aquela definição clássica: coeficiente angular pela tangente, não? E aí, como eles utilizam em Física, a gente tentou colocar essa taxa de variação média, justamente para eles saírem do empírico, de exercícios de Física cotidianos, até eles conseguirem chegar a formalização. Eles deveriam mostrar que taxa de variação é a mesma coisa que a tangente e aí, chegar à demonstração de que com a taxa de variação média, os coeficientes de retas paralelas são iguais, quer dizer, aí eu faço uma construção, a partir de três exercícios. Nestes eu mesclo o Cabri e folha mesmo, o convencional, então é uma mescla de atividades. Mas eles saem da definição de taxa de variação média, caminham para relacionar essa taxa com a tangente que eles já conhecem; depois, tentam relacionar a tangente com o coeficiente, a taxa com coeficiente, e chegar a definição e aí trabalhar com retas paralelas. Nesse meio termo eles perceberem que coeficientes iguais implicam em retas paralelas; paralelismo de retas.”

Em relação a sua escolha do Cabri-Géomètre, para integrar a sua situação de aprendizagem, Flávia expressou o seguinte comentário:

“Eu gosto muito desse software; eu o acho importante, além de um ótimo software para se trabalhar geometria. Não é cansativo; ele é cativante porque você desenha, você manipula, você pode fazer conjecturas, ele não é um software fechado, que você só ‘clica’, dá sim ou não; a resposta certa, ou não... aqueles softwares fechados... ele é um software aberto que você pode construir ou realizar qualquer estudo de geometria lá dentro.”

Versão final da atividade: abordagem da prova, desafios, limitações e aplicação junto aos alunos

No momento da realização da segunda entrevista, a situação de aprendizagem de Flávia já se encontrava em processo de finalização. Quando foi questionada quanto ao que faltava para finalizá-la, ela respondeu que esta estava praticamente pronta, pois apenas deveriam ser incorporados a ela alguns detalhes “de acabamento”, devido à sua percepção da existência de um salto do empírico ao dedutivo:

“É o acabamento; porque a atividade está pronta. Mas ainda faltam pequenos detalhes”.

Nesta segunda entrevista, realizada um ano após a primeira, quando a questionamos novamente em relação às maiores dificuldades que sentiu ao prosseguir sozinha na elaboração de sua situação de aprendizagem, modificando-a e adequando-a de acordo com os objetivos de sua pesquisa, Flávia apontou novamente que a sua maior dificuldade residiu na elaboração da sequência didática que pudesse levar o aluno a conseguir sair do empírico até o dedutivo, sem grandes saltos:

“Eu tive mais dificuldade na elaboração da sequência didática. Justamente porque a gente queria fazer uma sequência que o aluno pudesse sair do empírico e chegar até o dedutivo; sem ter grandes saltos de informação e a gente não está acostumada a fazer esse tipo de sequência nem de atividade. Como professores do ensino público a gente não tem isso; nós não estamos acostumados a trabalhar dessa forma. Então, assim... problemas com a prova, em si, nós não temos; para nós até que é algo aceitável... vamos dizer que, fácil; é algo que a gente até que está acostumado a ver e a trabalhar; é tangível para nós. Agora, mexer com o software também não foi problema.; o problema foi conseguir do empírico, porque o software trabalha bastante com o empírico, no caso da minha sequência, a partir do empírico ‘elencar’ algumas questões de forma que ele chegasse no dedutivo, de alguma maneira suave para o aluno; que não fosse algo assim: - ‘Nossa! É mágica!’; saiu daqui e surgiu agora uma fórmula que não sei da onde surgiu. Essa foi a maior dificuldade, elaborar uma sequência na qual o aluno tivesse uma maior facilidade e não achasse que a matemática é, realmente, um passe de mágica; sai de um número e vai para algo.”

Ao compararmos esta resposta àquela dada por Flávia, na ocasião da primeira entrevista, verificamos que, embora a maior dificuldade por ela apontada tenha sido a mesma, ou seja, a elaboração da sequência didática, o enfoque foi diferente nas duas entrevistas. Na primeira entrevista ela observou que a dificuldade na elaboração da sequência foi devido aos professores-colaboradores nunca terem pensado em como eles mesmos poderiam desenvolver situações de aprendizagem buscando a prova, seguida pela integração de recursos computacionais.

Porém, depois de quase um ano trabalhando com esta situação de aprendizagem, Flávia respondeu que as dificuldades estavam relacionadas ao modo como as diversas atividades poderiam ser estruturadas na situação de aprendizagem, de forma que pudessem levar o aluno a partir de um empirismo inicial atingir o dedutivo, com a formalização matemática almejada. É interessante comparar a resposta de Flávia na segunda entrevista, com a sua fala a este respeito na ocasião da primeira entrevista:

“A maior dificuldade foi a elaboração de uma sequência didática, porque a gente não tem este costume de elaborar uma sequência, ainda mais levando à prova. [...]. Em segundo foi a integração do computador com vistas à prova.”

Na segunda entrevista, ela expressou não ter sentido dificuldades trabalhar com a prova e com o *software*. Inclusive ela emitiu este comentário:

“E para nós, a prova até que não foi difícil, não?”

As questões seguintes da entrevista se referiram à aplicação efetiva da atividade com os alunos (número de alunos, horário, número de aulas necessárias, dificuldades, desafios, limitações e adaptações). Alguns professores-colaboradores do AProvaME, nesta ocasião do projeto, já haviam realizado uma aplicação de um teste-piloto com um ou dois alunos.

Flávia relatou não ter aplicado nenhum piloto até aquele momento. Ela pensou em aplicar a atividade a doze alunos, que trabalhariam em seis duplas. Estes encontros deveriam ser gravados e filmados. Após a aplicação da atividade, Flávia faria uma análise *a posteriori* dos resultados obtidos, o que era fundamental para poder se verificar o que realmente ocorreu. Pelo fato de o tipo de análise possuir um caráter qualitativo, quanto mais informações puderem ser obtidas, melhor será para o entendimento do desenrolar do processo como um todo.

*Opiniões sobre as perspectivas e
os desafios dos professores*

Quando questionada em relação aos desafios a serem enfrentados pelos professores, se quiserem atuar com esta nova perspectiva, Flávia considerou inicialmente os “operacionais”, como sendo aqueles que dependem da existência e da possibilidade de uso de uma sala de informática na escola, seguidos pelos *softwares* e pela sua instalação, para que possam ser trabalhados com os alunos.

Em seu caso, ela nos relatou que já havia solicitado a sala e o *software* há bastante tempo. Porém, em sua escola, somente poderia instalar o Cabri para ser utilizado com os alunos quem tivesse feito anteriormente o curso. Acrescido a este fato, os professores não tinham a chave do laboratório e os computadores estavam em rede, o que dificultou mais ainda mais a instalação do Cabri.

O desafio seguinte citado por Flávia direcionou-se para o professor. Ela observou que o professor, em geral, não está acostumado a trabalhar com prova, tampouco elaborar sequências didáticas. Muitas vezes, o professor pode até elaborar atividades a serem efetuadas pelos seus alunos, porém estas não levam à dedução, sendo somente empíricas. Para Flávia, uma sequência didática possui um objetivo e uma finalidade específica, como a que ela desenvolveu no contexto do AProvaME. Flávia observou que, infelizmente, a maioria dos professores, se acostumou a elaborar e a passar listas de exercícios para os alunos resolverem.

Em seguida Flávia, ponderou que, talvez, o professor não esteja preparado para trabalhar desta nova maneira, como ela própria não estava antes de ingressar no AProvaME:

“Eu acho que o professor não está acostumado a trabalhar dessa forma. Nós não estávamos ainda... é um processo difícil; é um processo trabalhoso; é um processo demorado porque, pelo fato de não estarmos acostumados, não é algo natural para trabalharmos assim ou pensarmos dessa forma. Então, é trabalhoso... você precisa pesquisar, você precisa ter tempo para estudar, não é algo que você em meia hora resolveu, ou fez, uma sequência; não, você vai estudar, e o professor, normalmente, não tem tempo; essa é uma das dificuldades, o tempo; você precisa ter tempo, você precisa estar preparado para isso, você precisa estudar e ter apoio por trás, no nosso caso, da escola, para trabalhar com os alunos e são coisas que para o professor realmente da rede de ensino fundamental e médio são fatores que nós não temos... assim, apoio da direção, normalmente, e condições de parar, ter um tempo para estudar e realizar uma atividade que realmente tem alguma finalidade boa, não só aplicação de fórmula.”

Para Flávia, esta nova abordagem, por ser um processo trabalhoso e lento, requer do professor estudo, pesquisa, apoio e tempo. Muitas vezes os professores, em função do grande número de aulas que ministram, não conseguem dispor de tempo para estudar e pesquisar, além de não receberem nenhum apoio por parte da escola em que lecionam.

5.1.2.6 SÍNTESE DO MOMENTO 2

De posse das informações obtidas a partir destas seis versões da situação de aprendizagem e da segunda entrevista, identificamos diversos elementos que caracterizaram o *Momento 2* do percurso de Flávia:

Do Esboço 1, ao que Flávia possuía algumas expectativas quanto aos alunos construírem uma prova, ante as atividades propostas, a sua perspectiva das dificuldades da passagem do empírico-dedutivo ampliou-se muito a partir do Esboço 3 (*E3*). Neste *E3*, a situação de aprendizagem passou a assumir já a estrutura das versões finais, ou seja, as versões *V1*, *V2* e *V3* com três etapas, com diversas atividades pertencentes a cada uma delas. No Esboço *E3* e nas três versões finais, as atividades já podem ser classificadas de acordo com os níveis G0, G1 e G2, do modelo proposto por Parsysz.

Em todas estas versões (*E3*, *V1*, *V2* e *V3*), na primeira etapa se trabalhou no nível G0 (geometria concreta) com objetos concretos e validações perceptivas, com uma transição no final para o nível G1 (geometria espaço-gráfica), quando se pediu ao aluno que construísse a sua ideia de paralelogramo no papel quadriculado e em uma folha em branco (versão *V3*). Na segunda etapa, como todas as atividades foram trabalhadas em um ambiente informatizado, identificou-se neste momento o nível G1. Na terceira etapa, as atividades eram para ser realizadas tanto usando papel e lápis, como em ambiente informatizado por meio da utilização do *software* Cabri-Géomètre. Inicialmente estas atividades foram trabalhadas no nível G1, ocorrendo uma transição para o nível G2. O objetivo desta etapa foi o de fornecer subsídios para que os alunos conseguissem provar as suas conjecturas, fazendo uso de validações dedutivas.

O objetivo de Flávia, ao elaborar a sua situação de aprendizagem, que passou por tantas versões intermediárias até atingir a sua versão final, era que os seus alunos no decorrer da aplicação das atividades conseguissem produzir os diversos tipos de provas, usando Balacheff (1987), partindo do empirismo ingênuo até atingir a experiência mental de uma forma mais suave e menos abrupta. No decorrer do desenvolvimento de todas as versões, Flávia preocupou-se muito com o “salto do empírico ao dedutivo”, o que para ela dificultava ao aluno produzir a prova formal ou demonstração.

Em sua última versão (V3) de sua situação de aprendizagem, dado o aprofundamento e a abrangência das atividades, é possível perceber em Flávia, além de suas preocupações quanto à passagem abrupta do empírico ao dedutivo, a importância que passou a atribuir no desenvolvimento do aluno, o hábito de validar.

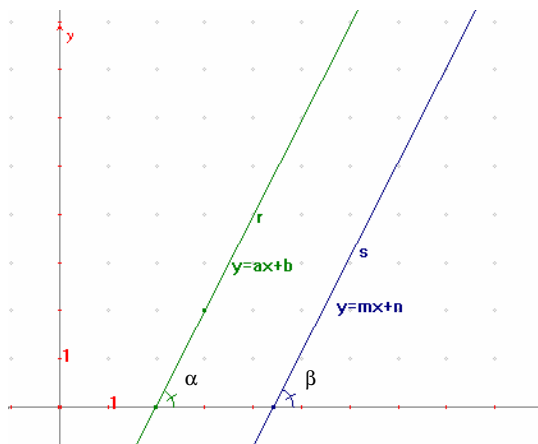
Como relatado anteriormente, o uso do *software* Cabri-Geómètre foi proposto e utilizado pela sua equipe do AProvaME, e Flávia manteve esta escolha quando prosseguiu sozinha no desenvolvimento das atividades, por se consistir em uma ferramenta importante na visualização das figuras e na identificação das propriedades, com vistas à produção de uma prova em um passo seguinte.

Ao analisarmos as atividades nas diversas versões da situação de aprendizagem, verificamos que, em nenhum momento o Cabri-Géomètre, foi utilizado para se construir uma prova, vista de seu aspecto dedutivo, sendo que a demonstração deveria ser elaborada em um momento posterior usando papel e lápis.

Podemos verificar este fato, por meio da Atividade 7, da terceira etapa da versão V3 (desenho 4), exibida, a seguir, e que solicitou a elaboração de uma prova, usando papel e lápis.

Atividade 7 (Papel e lápis):

Como você faria para afirmar que as retas r e s na figura abaixo são paralelas. Justifique sua resposta.



Desenho 4: Atividade 7 da terceira etapa da Versão V3, desenvolvida pela Flávia. (Material cedido pela Flávia).

Identificamos no decorrer do percurso de Flávia inserida no AProvaME, uma gradual apropriação e inserção das ferramentas do Cabri-Géomètre nas diferentes versões da situação de aprendizagem, porém sem um grande desenvolvimento quanto ao aspecto de

uma melhor exploração do potencial de um ambiente de geometria dinâmica. Em sua fala na segunda entrevista, a integração do *software* não foi apontada como tendo sido uma grande dificuldade. Porém, ao analisar as diferentes versões da situação de aprendizagem, a integração do Cabri-Géomètre nas atividades manteve praticamente um mesmo nível, sem muitas inovações.

Antes de iniciar a aplicação das atividades com os alunos, Flávia percebeu a importância destes em passar por uma fase de familiarização com o Cabri, já que este *software* iria ser utilizado por eles na segunda e terceira etapas de sua situação de aprendizagem. Segundo a sua própria fala os alunos poderiam se sentir desestimulados e desmotivados, caso não conseguissem utilizar o Cabri, de acordo com o que a atividade solicitava, podendo até desistir de participar da pesquisa. Flávia preparou uma etapa de familiarização de acordo com o que ela identificou que seria necessário para que os alunos conseguissem resolver as atividades que lhes eram solicitadas. Ela se ateu ao histórico, às ferramentas do menu e a algumas construções necessárias para a execução das atividades, além de enfatizar aos alunos a diferença fundamental entre as ações de desenhar e de construir, que fazia parte da própria concepção de um *software* de geometria dinâmica.

Em seguida ao elaborar as atividades da segunda e terceira etapas, Flávia passou a usar as possibilidades do Cabri-Géomètre gradativamente, de um enfoque diferente. Inicialmente, nas versões *E1*, *E2* e *E4*, embora Flávia já soubesse usar bem este *software*, solicitava aos alunos que realizassem as construções, explorando as ferramentas habituais, as que fossem mais apropriadas para cada uma das situações, como as de visualização, manipulação dos objetos geométricos construídos e exploração das propriedades. A partir do Esboço *E3* e evoluindo muito no decorrer das atividades *V1*, *V2* e *V3*, Flávia, no que dizia respeito à produção de uma prova, passou a solicitar que os alunos executassem no decorrer das atividades certas construções, suprimindo ferramentas diferentes do Cabri.

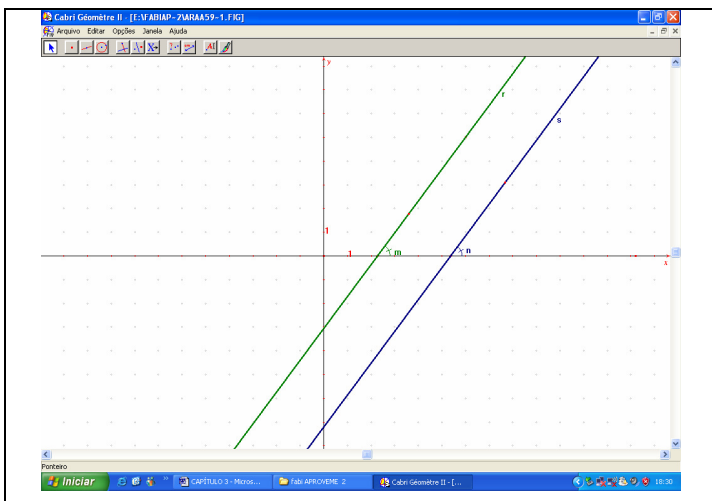
Quando são retiradas algumas ferramentas do menu, este fato obriga o aluno a seguir por outros caminhos, que o levem a pensar e a conjecturar. Neste momento, Flávia passou a pensar de acordo com os objetivos que pretendia atingir, sobre como estas atividades deveriam ser elaboradas e propostas aos alunos, de forma a levá-los a conjecturar, para que conseguissem executá-las adequadamente. Para que o aluno pudesse conjecturar, a resolução da atividade não poderia ser tão imediata, a ponto dele utilizar a ferramenta pronta, já desenvolvida para esta finalidade.

A título de exemplo, encontra-se apresentada e descrita, a seguir, parte da atividade 6 (desenho 5), presente na terceira etapa da situação de aprendizagem da versão *V3*, bem como o que Flávia havia pensado em termos de possíveis caminhos (estratégias de resolução) que seus alunos efetuariam quando estivessem executando a atividade. Como

apontado anteriormente, esta atividade foi elaborada e se integrou apenas nesta versão V3, não fazendo parte de nenhuma das versões anteriores.

Passos

1º) Inicialmente era solicitado aos alunos que abrissem um arquivo, onde encontrariam a figura, indicada a seguir, construída com o Cabri-Géomètre:



Desenho 5: Atividade 6 da terceira etapa da versão V3, desenvolvida pela Flávia.
Fonte: Dissertação de Mestrado da Flávia.

2º) A partir desta figura, os alunos eram questionados quanto ao que eles poderiam afirmar a respeito das retas r e s , e, em seguida, deveriam justificar a sua resposta. Neste item foram suprimidas as ferramentas *distância*, *ângulos* e *paralelas*?

Para Flávia, como neste item da atividade foram suprimidas do menu as três ferramentas indicadas, este fato obrigaria os alunos a utilizar a ferramenta *equações*. A utilização desta ferramenta permite identificar os coeficientes angulares das duas retas. Caso estes coeficientes angulares fossem iguais, as retas r e s seriam paralelas.

3º) A partir da mesma figura, os alunos eram questionados novamente quanto ao que eles poderiam afirmar a respeito das retas r e s , e, em seguida, deveriam justificar a sua resposta. Neste item foram suprimidas as ferramentas *equação* e *paralelas*?

Desta vez, Flávia suprimiu as ferramentas *equação* e *paralelas*?, o que obrigaria os alunos a utilizar a ferramenta *ângulo*. Por meio da utilização desta ferramenta o aluno obterá o ângulo formado entre cada uma destas retas r e s , com o eixo horizontal. Casos

estes ângulos fossem iguais, eles seriam ângulos correspondentes. Em se tratando de ângulos correspondentes, as retas r e s são paralelas.

O Cabri se mostrou neste contexto ser um recurso interessante à disposição de professores e alunos, tendo uma participação relevante durante todo o processo de elaboração das atividades pela Flávia e de posterior execução por parte do aluno. Contudo, apesar do Cabri ter possibilitado que o aluno argumentasse e conjecturasse nas fases intermediárias, a produção de uma prova formal foi efetivada em um ambiente de papel e lápis.

Em relação à sua concepção anterior sobre provas, ela considerou que todo este processo vivenciado no AProvaME, conjuntamente com as contribuições dos professores colegas ou pesquisadores, fez que ela constatasse uma mudança em sua visão de que a matemática fosse algo inacessível às pessoas em geral, sendo feita pelos matemáticos apenas para os seus pares. O projeto mostrou à Flávia que é possível tornar a matemática mais acessível aos alunos:

“porque não é matemática para matemáticos; é matemática para alunos.”

Ao compararmos as respostas dadas por Flávia nas duas primeiras entrevistas, quanto às dificuldades que ela teve, quando elaborava a situação de aprendizagem, observamos que embora a maior dificuldade tenha sido a elaboração da sequência didática, os motivos relatados foram diferentes.

Na primeira entrevista, que ocorreu no início do projeto, ela considerou que a maior dificuldade na elaboração da sequência foi em razão de os professores-colaboradores nunca terem pensado em como eles mesmos poderiam desenvolver situações de aprendizagem buscando a prova, seguida pela integração de recursos computacionais. Na segunda entrevista realizada um ano após a primeira, ao prosseguir sozinha na elaboração de sua situação de aprendizagem, Flávia também relatou que a sua maior dificuldade residiu na elaboração de uma sequência didática, com atividades estruturadas e em uma determinada ordem, que pudessem levar o aluno a conseguir sair do empírico até o dedutivo, sem grandes saltos. Nesse momento, ela não mencionou dificuldades em se trabalhar com prova, nem mediante a integração de recursos computacionais nas atividades que, segundo ela, não ofereceram grandes dificuldades.

Quanto aos desafios que Flávia apontou, quando se referiu a trabalhar com provas nesta nova abordagem nas escolas, além das dificuldades operacionais, que não dependem do professor para serem solucionadas, a atenção deveria se voltar aos professores, que em

geral não dispõem de tempo para refletir, se atualizar e pesquisar, tampouco encontram apoio nas escolas em que trabalham.

Para que o professor possa se desenvolver profissionalmente, muitos aspectos estão envolvidos. Quase que a totalidade de leituras e resultados de estudos e pesquisas a que tivemos acesso no decorrer da elaboração de nossa pesquisa, voltadas ao desenvolvimento profissional do professor, apontaram para algumas práticas que poderiam promover transformações na cultura escolar e profissional, como o trabalho reflexivo e investigativo a ser realizado pelo professor, que se mostrou com maior força, se realizado em um ambiente colaborativo.

Contudo, outras questões também se revelaram importantes, como o tempo disponível e livre para que os professores possam estudar, pesquisar e se atualizar, bem como as condições oferecidas pelo local de trabalho (PASSOS et al., 2006).

Ao final deste *Momento 2*, Flávia considerou ter sido muito positiva a contribuição que teve dos professores de sua equipe do AProvaME e pesquisadores, na concepção e elaboração inicial das atividades, como a posterior colaboração em termos da análise realizada pelos demais professores participantes do projeto no momento do *design* coletivo. Esta prática coletiva, de reflexão, investigação e cooperação proporcionou a Flávia a possibilidade de refletir muito sobre a temática proposta para o projeto e o repensar de cada uma das atividades no decorrer das diversas versões.

5.1.3 MOMENTO 3

No terceiro momento do percurso de Flávia, alguns eventos ocorreram, tais como a aplicação da situação de aprendizagem aos alunos, a elaboração do texto final da dissertação de Mestrado; a defesa pública desta, e a realização da terceira entrevista.

Flávia finalizou a última versão de sua situação de aprendizagem, a versão *V3*, logo após a realização da segunda entrevista (Entrevista 2), no *Momento 2* de sua trajetória. Em seguida, ela aplicou esta situação de aprendizagem a oito alunos no *Momento 3*.

A última versão da situação de aprendizagem, a versão *V3*, encontra-se descrita integralmente no Anexo 5 do texto final da dissertação de Mestrado de Flávia. Concomitantemente, no Capítulo 5, a situação de aprendizagem foi apresentada juntamente com o relato de como esta foi concebida; como foram realizadas as escolhas didáticas; como se deu a familiarização com o Cabri-Géomètre, seguida pela análise *a priori* das atividades. Nesta análise foram descritas detalhadamente todas as atividades, além de serem especificados os objetivos destas; o que se esperava que os alunos conseguissem

fazer; como lidar com as dificuldades destes; além de serem indicadas algumas estratégias de resolução para cada uma das atividades propostas, tanto no que dizia respeito à prova, como nas construções dos objetos geométricos usando o Cabri-Géomètre.

O Capítulo 6 de sua dissertação esclarece como se deu a experimentação com os alunos, ou seja, como ocorreu a aplicação da situação da aprendizagem planejada e as análises *a posteriori*. Na etapa da experimentação, ela investigou e observou os alunos durante a aplicação das atividades, em relação a suas atitudes, progressos e dificuldades. A análise *a posteriori* consistiu na interpretação das informações e dos dados obtidos no momento da experimentação.

Para Flávia, o confronto entre as análises *a priori* e *a posteriori* permitiram responder as duas questões que nortearam a sua pesquisa. A terceira entrevista de Flávia se encontra descrita e analisada no próximo item.

5.1.3.1 ENTREVISTA 3

Buscamos nesta terceira entrevista obter informações dos resultados da aplicação da situação de aprendizagem com os alunos. Organizamos as informações obtidas nesta entrevista em sete temáticas, conforme explicitadas anteriormente (*Item 4.2.5.3 A terceira entrevista*), as quais serão descritas e analisadas nos próximos itens.

Dados pessoais

A Flávia realizou a sua terceira entrevista em novembro de 2007, um mês após a defesa de sua dissertação, quando finalizou o Mestrado Profissional. Naquele momento, após sete meses da realização da segunda entrevista, Flávia continuava lecionando Matemática na primeira e na terceira séries do Ensino Médio da mesma escola. O tempo de docência passou para 13 anos e a idade para 32 anos.

Versão final da atividade

Inicialmente, como citado anteriormente, Flávia relatou como ficou a versão final de sua situação de aprendizagem. Ela informou que esta foi composta de três etapas, tendo adotado como referencial teórico, para a elaboração das atividades, os estudos de Parsysz (2001).

Assinalou que na primeira etapa partiu-se do nível G0 (concreto) e caminhou-se na direção do G1 (espaço-gráfico). Na primeira etapa, os alunos deveriam manipular um cubo

(nível G0), que tinha por objetivo fazê-los observar as retas paralelas e conversar sobre o que poderia estar envolvido com o paralelismo. Em seguida, na segunda etapa, a atividade seguiu para o espaço-gráfico, onde os alunos começariam a interagir com o computador, por meio da utilização do *software* Cabri-Géomètre. Neste momento passariam a usar o espaço cartesiano (nível G1). Na terceira etapa Flávia, tentou trabalhar com o protoaxiomático (nível G2). Segundo ela:

“Não era um axiomático total... a gente tentou levá-los, pelo menos, a argumentar suas respostas, ter uma argumentação mais pertinente, justificar suas respostas ou, em um caso de uma dupla, chegar, realmente a uma prova.”

Quanto à versão final de sua situação de aprendizagem, Flávia relatou que ela havia sofrido algumas modificações em relação às intermediárias. Ela atribuiu este fato principalmente, à sua própria mudança de postura como professora. Antes, mesmo sem perceber, ela e os outros professores elaboravam sequências, que levavam os alunos praticamente às provas. Eles não trabalhavam a fim de fornecer as “ferramentas” aos alunos, para que estes mesmos conseguissem construir uma prova. O relato seguinte exemplifica as constatações de Flávia:

“Muita coisa mudou em relação às versões intermediárias, eu acho. Essa sequência levou, praticamente, quase um ano para ficar pronta porque eu tive que mudar, um pouco, a minha postura como professora. A gente, como professora, às vezes, está acostumada a algumas coisas e eu tive que olhar de uma maneira diferente. A gente está acostumada com atividades que: - ‘faça isso, faça isso, faça isso...’, passo a passo. Essa atividade... essa sequência ainda não ficou ‘a ideal’, eu acho. Pode ser melhorada em muito, mas ficou... eu achei que ela cumpriu o papel dela, alcançou um objetivo que a gente queria. Agora... o começo... a primeira situação de aprendizagem que a gente ‘bolou’, a primeira sequência, era bem passo a passo. Então, a gente praticamente levava o aluno a construir a prova e não o deixava seguir sozinho. A gente não trabalhava dando ferramentas para que eles construíssem a prova. A gente os levava a construir a prova, quer dizer, faça isso, depois faça isso. Olha, agora faça isso, pronto, provou! E não, o aluno não provou; porque quem provou foi eu, professora, eu que falei para ele faça isso, isso, isso e essa postura que a gente tem que mudar, eu acho que todos os professores têm que mudar de postura. Quando a gente pensa em fazer uma sequência didática, que a gente vai mudar ou diferenciar da aula tradicional que estamos acostumados a fazer e que os alunos já estão acostumados a ver, acho que a gente tem que pensar em mudar de postura realmente.”

Flávia constatou a importância e as dificuldades do professor não apenas em elaborar “uma sequência”, mas “a sequência”, que possa levar os alunos a construir uma

prova, com menos atividades do tipo “faça isso ou faça aquilo”, e mais atividades que façam com que os alunos possam argumentar e descobrir novas “coisas”. Seguem algumas reflexões produzidas a partir de sua experiência:

“Eu não posso levar o meu aluno a construir uma prova, sendo que eu o mandei fazer aquilo. Eu tenho que pensar numa sequência e acho que isso é o mais difícil... construir uma sequência que o meu aluno tenha ideia de fazer aquilo e aquela ideia possa ser uma prova. Acho que essa é o mais difícil. Acho que isso foi o que mudou durante toda a sequência... a sequência começou com o passo a passo e a última sequência que foi aplicada com os alunos perdeu um pouco dessa característica faça isso, faça aquilo e agora faça isso que você construiu uma prova; ela não tem essa característica. Ela ainda não é tão aberta, acho que poderiam ser menos atividades e talvez atividades que levassem eles a argumentar mais e a descobrir mais coisas, mas ela já tem uma característica boa que é a do aluno descobrir as coisas; acho que foi isso que mudou realmente.”

Aplicação da situação de aprendizagem aos alunos

Oito alunos de Flávia participaram como sujeitos de sua pesquisa. Flávia convidou todos os alunos de suas turmas para participarem de sua pesquisa, a partir da explicação desta para toda a classe. Oito alunos manifestaram interesse em participar do projeto, aceitando de forma voluntária colaborar com a sua pesquisa.

Todas as atividades foram executadas em duplas no decorrer de todas as etapas desta aplicação. As duplas se formaram aleatoriamente, sendo que cada aluno pôde escolher inicialmente o seu parceiro, sendo apenas solicitado que a mesma dupla permanecesse junta até o final de toda a aplicação da situação de aprendizagem. Esta aplicação ocorreu na própria escola em que Flávia trabalhava, na sala ambiente de informática, no período da tarde, fora do horário de aula destes alunos, que estudavam pela manhã.

A efetiva aplicação de sua situação de aprendizagem atrasou um pouco em relação à data que ela havia previsto inicialmente, devido a uma série de dificuldades “operacionais” encontradas, como a negação inicial por parte da diretora da escola para a utilização da sala ambiente de informática, até questões relacionadas aos computadores, como instalação do *software* e senhas para poder ligar os computadores.

Em relação ao que foi efetivado com os alunos e ao tempo utilizado para cada uma das etapas da atividade, Flávia relatou que, inicialmente, realizou com os alunos uma familiarização com o Cabri-Géomètre, que durou cinco horas, distribuídas em duas tardes, cada uma delas com duas horas e meia de duração.

Nesta familiarização, apresentou este *software* aos alunos, mostrou as ferramentas que o ambiente possui e relatou alguns aspectos históricos do Cabri-Géomètre. Ao final, solicitou aos alunos que realizassem a atividade de familiarização, que foi composta por dezesseis pequenas atividades. A seguir, Flávia explicou como foram concebidas estas atividades:

“Eu elaborei estas atividades. Eram 16 atividades. Eu construí essas atividades de acordo com o que eu precisava usar e o que eu queria que eles aprendessem; porque algumas coisas eram básicas para nossas atividades, realmente, para minha sequência. Então, eu construí pontos, retas, intersecção de retas; ponto sobre objeto; ponto fora do objeto; quer dizer, o que era diferente, o que tinha de comum; porque ponto para eles é ponto. Mas o que é um ponto sobre um objeto? Você não pode tirar ele dali, e tal... a gente trabalhou com traçado de retas paralelas, perpendiculares, construção de quadrado, trapézio, e algumas coisas e aí depois eu os deixei investigar bastante... eles testaram algumas ferramentas do software; eles gostaram, começaram a desenhar e fizeram uns desenhos a mão livre. Então, foram cinco horas de atividades, de familiarização com o Cabri. Eu os deixei à vontade... vamos construir; arrastar; ver o que acontece e tal: -‘Olha! Você não construiu, então vamos construir..’. Então, eles foram aprendendo tudo o que era construção, que era só traçar retas, isso foi interessante e eles gostaram de mexer no Cabri. E, depois de cinco horas, a gente começou com a nossa sequência. Então, foi só no terceiro dia que a gente começou, realmente, a trabalhar com a sequência didática.”

Após a familiarização, Flávia passou a trabalhar efetivamente a sequência didática com os seus alunos. Esta sequência foi dividida em três partes, dividida em seis encontros de duas horas e meia cada. No total foram realizados oito encontros, assim distribuídos: dois para a familiarização, um para a primeira etapa, dois para a segunda etapa e, finalmente, três encontros na terceira etapa.

Flávia relatou que não precisou fazer nenhum ajuste na atividade, enquanto a estava aplicando, em função do que estava ocorrendo naquele momento. Ela não necessitou mudar nenhum material, nem teve problema com o equipamento. Ela acredita que a única mudança referiu-se ao seu papel de professora. Muitas vezes, precisou assumir a posição de mediadora, procurando levar o aluno a questionar e a argumentar, fazendo-o assumir uma postura, para a qual ele não foi preparado e a que não estava acostumado. O aluno sempre foi muito passivo:

“É passivo assim: -‘Professora, o que é para fazer?’... E isso o professor, também, tem que mudar. Quer dizer, é toda uma postura de professor e toda postura de aluno... mudança de postura, tanto de professor, quanto do aluno.”

Flávia considerou que tanto o professor, como os alunos precisariam mudar de postura neste processo. Ela observou que o professor tem uma grande responsabilidade no fato de os alunos terem se acostumado a assumir uma postura passiva. Quando o aluno perguntar, o professor deverá devolver o questionamento a este:

“O aluno está acostumado a assumir uma atitude passiva infelizmente nós os acostumamos assim... eles não têm culpa, quem tem culpa é o professor. Nós acostumamos os alunos a perguntar... ‘Professor o que é para fazer?.. Olha, faz isso’... a gente dá a resposta direto para o aluno; a gente não questiona... ‘Espera um pouquinho... Você já leu o enunciado? Lê. Fala para mim. O que ele está pedindo? Ah! Ele está pedindo para fazer isso, isso e isso... Então como você faria para responder?’... quer dizer, é uma mudança de postura, devolve o questionamento para o aluno. O aluno te questiona como ele deve fazer? Não. Você o questiona. –‘O que você faria, então, para fazer o que enunciado pede’. É uma mudança... e o aluno acaba... isso acaba surtindo efeito. No começo ele vai te perguntar. No começo da sequência eles perguntaram algumas vezes: ‘Mas o que é para fazer?’ E eu devolvi o questionamento e no final da sequência eles já não perguntavam mais. Eles se anteciparam e aprenderam que deveriam ler o enunciado e verificar o que tinham que fazer.”

Em relação ao perfil dos sujeitos que participaram de sua pesquisa, Flávia esclareceu que estes não poderiam ser classificados como “bons” ou “maus” alunos, pois compareceram estudantes com médias bem diferentes, de 3 a 10. O critério utilizado para a escolha foi o interesse dos alunos. Flávia convidou todos os seus alunos, das três classes nas quais ministrava a disciplina Matemática e apenas oito alunos manifestaram interesse em participar. A fala de Flávia indica como o grupo de alunos era heterogêneo, em termos de acesso e uso do computador:

“Teve um aluno que nunca tinha mexido em um computador e não tem computador em casa, a escola não oferecia... então ele se empolgou; é um bom aluno, um aluno aplicado, gosta de matemática e ele gostou da ideia de participar [...] eu tive que ensinar tudo ao aluno que nunca tinha mexido, inclusive a ligar o computador. Então, a gente tem várias realidades; desses oito alunos, várias realidades. Tem um que trabalha com computador e tinha um que nunca tinha mexido. Nós, professores já estamos acostumados com essa diferença. Mas isso não interferiu.”

Flávia observou que, embora os alunos vivessem diferentes realidades, este fato não interferiu na aplicação da atividade, salientando novamente a importância das atitudes, postura e comportamento do professor, que tanto pode estimular o aluno, despertando o seu interesse em aprender, como também pode desestimulá-lo completamente.

“Não interferiu em nada porque, como eles sentaram em duplas, às vezes ele não sabia... ‘Professora, como é que liga mesmo?’. O amiguinho dele... ‘Ah, eu te ensino de novo’. Ensinou de

novo... Então, quer dizer, eles são colegas, são amigos, eles se ajudam nesse sentido. Então, esta é a característica dos alunos [...] acho que o que muda é o professor que estimula e cria o interesse no aluno aprender ou não, ou então desestimula.”

*Dificuldades e reações dos alunos durante
a aplicação da atividade*

Flávia constatou que apesar das dificuldades materiais, em relação aos poucos computadores na escola, além de muitos estarem quebrados, a sua maior “dificuldade” incidiu nesta nova proposta de se trabalhar com os alunos, por se tratar de algo novo. Uma nova proposta demanda do professor preparo, tempo, vontade, e abertura para novas possibilidades.

Muitas vezes o aluno perdia o foco, enquanto realizava a atividade, o que demandava de Flávia uma rápida intervenção para trazê-lo novamente à situação proposta. Contudo, ela não encarou este fato como sendo uma dificuldade, na medida em que os alunos responderam bem a este momento em todos os sentidos, demonstrando um bom comportamento, interesse em aprender, além de terem mudado de postura no decorrer do processo.

Flávia observou que foi possível atuar desta forma com os alunos, pelo fato de serem poucos, apenas oito. Ela acredita que uma dificuldade estaria relacionada a uma grande quantidade de alunos, pois cada aluno requer um tempo e a atenção do professor. Talvez, ela não conseguisse obter resultados positivos se tivesse que trabalhar com a classe toda, com cinqüenta alunos ao mesmo tempo.

Flávia constatou, ao final da aplicação de sua situação de aprendizagem, que os alunos haviam gostado de participar desta experiência, além de terem ficado felizes e eufóricos pelo fato de terem estudado matemática, com o auxílio do computador. Ela observou que a informática é um elemento que atrai os alunos, podendo despertar nestes um interesse em aprender. A escola nunca havia proporcionado aos alunos, anteriormente, esta oportunidade:

“Eles receberam bem. Eles gostaram da atividade. Eles estavam eufóricos em trabalhar no computador da escola porque nunca tinham feito. Então isso foi interessante. Eles ficaram felizes porque estavam mexendo em uma coisa nova que era o Cabri, eles gostaram e depois começaram a mexer naquelas formatações de reta, colocar coloridinho... então, acho que eles gostaram... eles gostam de mexer no computador. Quando você alia a informática, acho que não é toda sequência que você vai aliar à informática, mas quando você alia a informática, o aluno... eles gostam muito dessa parte. Informática, MP3; tudo que é novidade... Então, acho que isso estimula, ou, é um chamariz inicial para o aluno se despertar o interesse em aprender ou fazer aquilo.”

As dificuldades identificadas enquanto os alunos realizavam as atividades, Flávia revelou que, em relação ao trabalho com o computador, eles não tiveram dificuldade, excetuando-se aquele que não havia tido contato anterior, o que foi solucionado logo após a familiarização com o Cabri.

Porém, ela observou que ao efetivarem as atividades, os alunos apresentaram dificuldades em ler o enunciado, entender o que era solicitado para ser feito e justificar as respostas. Flávia atribuiu estes fatos a “vícios” que os alunos incorporaram e que foram ensinados pelos seus próprios professores, condicionando os comportamentos e as posturas destes. Flávia considerou o professor como sendo em parte “culpado” por esta situação, por nunca ter criado experiências de aprendizagem que pudessem levar os alunos a ler os enunciados, a interpretar as situações-problema propostas, a pensar, a argumentar, a justificar e até a conseguir demonstrar. Para Flávia, a dificuldade em justificar reside no fato de que os professores, em geral, nunca trabalham com provas e demonstrações com os seus alunos, sendo que este tipo de abordagem nem sempre está presente, mesmo em livros didáticos.

Além disto, o aluno ao resolver um exercício ou solucionar um problema obtendo uma resposta, não valida este resultado. Flávia observou que para o aluno não existe uma preocupação quanto à validação da resposta obtida. Ela constatou que muitas das dificuldades citadas, como a leitura do enunciado, interpretação da situação-problema, as ações de argumentar e conjecturar foram sendo resolvidas no decorrer da aplicação das atividades, menos a validação das respostas obtidas. Assim, Flávia constatou a importância de o professor colocar na sequência, atividades com as quais os alunos possam validar as respostas obtidas. Ela própria verificou em sua sequência, momentos em que era necessário validar para que o aluno pudesse prosseguir. Contudo, ela mesma não havia previsto esta necessidade inicialmente, quando efetivou a sua análise *a priori*:

“O professor tem que trabalhar isso com aluno; o professor tem que levar o aluno a perceber que ele tem que validar a sua resposta; e isso ficou claro numa atividade minha, na segunda atividade da terceira etapa, que, o aluno, encontrou uma resposta errada e não validou as respostas; porque se tivesse feito teria percebido o seu erro. Então, acho que esse aspecto não tinha sido observado inicialmente por mim, a priori, eu não tinha considerado esse aspecto e foi considerado no final na análise das respostas dos alunos e foi muito válido para eu perceber que os alunos não estão acostumados com questões e não estão acostumados a validar respostas e eu acho que isso tem que ser muito bem trabalhado.”

Flávia apontou para a leitura, em sua dissertação, de sua “análise *a posteriori*”, das respostas dos alunos na atividade 2, da terceira etapa. Esta foi a atividade que levou Flávia a questionar sobre o fato de os alunos necessitarem aprender a validar as suas respostas e

a verificar se os dados dos enunciados são coerentes. Na síntese do *Momento 3*, está enunciada a atividade que levou Flávia a perceber este novo objetivo e a adquirir esta visão que, anteriormente, ela não possuía.

Ela acredita que o fato de os alunos não validarem os resultados obtidos e não verificarem a coerência do enunciado seja, também, causado em parte pela existência de um “contrato didático” entre professores e alunos, fazendo com que todos aceitem que o professor está sempre certo e que tudo sabe. A seu ver, este paradigma também deve ser rompido. Em função destas constatações, Flávia pretende em uma próxima experiência de aprendizagem elaborar uma sequência didática ou atividades, que poderão ser aplicadas em sala de aula, com ou sem o auxílio do computador, cujos objetivos seriam levar o aluno a verificar o que realmente o enunciado pede e a validar a sua resposta, bem como verificar se o enunciado esta coerente.

Este novo olhar, quanto aos aspectos relacionados à validação de resultados, surgiu como decorrência das análises realizadas por Flávia do comportamento dos alunos por ocasião da elaboração de sua dissertação de mestrado.

Limitações percebidas, resultados e expectativas

Quando questionada em relação às suas limitações, quanto à prova ou aos recursos tecnológicos no momento da aplicação da atividade junto aos alunos, Flávia relatou não ter encontrado dificuldades em nenhum destes aspectos.

Quanto à utilização do Cabri-Géomètre, ela relatou já ter tido contato anterior com este *software*, pois ministrou algumas oficinas para professores de escolas estaduais, enquanto estava alocada na Delegacia de Ensino, cursou uma disciplina no Mestrado Profissional, como também mencionou já ter trabalhado diversas vezes com este *software*. Por ter muita familiaridade com o Cabri, ela se sentiu muito segura ao utilizá-lo com os alunos.

Ao final da sequência didática Flávia constatou que das quatro duplas de alunos, uma delas conseguiu atingir o que ela considerou como uma “formalização”, enquanto as outras três chegaram à “argumentação”. Ao buscarmos mais informações em sua dissertação de mestrado sobre estas denominações, percebemos que ela aponta para a “formalização” correspondendo à prova conceitual e a “argumentação”, à prova pragmática de acordo com a classificação dos tipos de provas propostas por Balacheff (1988).

Flávia também apontou para a importância de se levar em consideração todo o processo, pois no início do projeto os alunos nem sabiam justificar. Para ela os resultados obtidos superaram as suas expectativas.

A maior mudança observada por Flávia deu-se após a aplicação da atividade e da sequência finalizada, com os sujeitos de sua pesquisa em sala de aula, participando do curso regular. Estes alunos passaram a assumir uma postura mais atuante e participativa. Ela percebeu que o processo vivenciado com estes oito alunos criou um vínculo de carinho entre todos os envolvidos, levando a um aumento no interesse em aprender, o que refletiu na melhoria da aprendizagem. Flávia constatou que mais do que o aprendizado de um conteúdo da Matemática, os alunos aprenderam a aprender e gostaram muito deste processo, o que para ela foi o mais importante neste percurso:

“Essa sequência não foi só aprendizagem de paralelismo e ensinar geometria analítica plana, mas foi além... foi uma aprendizagem de aprender. Eles aprenderam a aprender; aprenderam e gostaram de aprender... eu acho que isso que foi válido e gostoso ao final da sequência.”

Flávia, no decorrer da aplicação das atividades com os alunos, constatou a importância de os alunos sentirem dificuldades e errarem, porque ao perceberem o erro e tentarem consertar, este processo poderia levá-los a uma real aprendizagem. A percepção e o entendimento destas questões, também, desencadearam um processo de mudança nela. Em diversos momentos das três entrevistas, ela indicou claramente que havia percebido mudanças em como enxergava a matemática, possibilitando-lhe assumir novas posturas e comportamentos.

Em relação à prova, apesar de ainda não deter todo o conhecimento sobre este assunto, percebeu a grande influência que teve o AProvaME na maneira como, hoje, ela passou a enxergar a demonstração e a prova na matemática. Seguem abaixo alguns depoimentos de Flávia:

“É óbvio que eu não sei tudo, que tenho muito a aprender ainda; mas fato é que aprendi muito com o projeto AProvaME. No 1º semestre do projeto AProvaME a gente mexeu muito com essa questão: o que é prova; o que é demonstração; o que é argumentação; então, foi trabalhado muito isso, no projeto AProvaME. A gente leu muita coisa; a gente discutiu; tinha fóruns no ambiente no Teleduc sobre isso; a gente tabulou algumas respostas para verificar o que era prova ou não; eu acho que eu também estava segura sobre o que era prova ou não. É claro que quando a gente analisa as questões... as respostas dos nossos alunos, a gente usa, também, não só aquilo que é considerado prova academicamente, mas a gente leva em consideração aquilo que a gente vivenciou em sala de aula; aquilo que o nosso aluno apresentou; aquilo que ele progrediu ou não; então, tudo isso entra... é uma análise subjetiva do professor; não é só o aplicador que está ali, é um professor também e isso foi levado em consideração. Então, quando a gente percebe que o aluno, ou ele provou ou justificou, ele argumentou... talvez se você fosse levar a prova do meu aluno a uma comunidade acadêmica, eles falassem que não era uma prova formal; mas para mim era uma prova, porque eu verifiquei o

que? Aquilo que o meu aluno conseguiu realizar... de onde ele saiu até onde ele chegou; e tudo isso foi levado em consideração. Então, essa análise era minha, como professora... então, acho que tem algumas diferenças ainda e várias opiniões sobre o que é uma prova; mas, eu estava bem segura em relação ao que eu sabia sobre prova e o que eu ia considerar como prova porque a gente levou em conta tudo aquilo que o nosso aluno apresentou e tudo aquilo que ele aprendeu.”

No decorrer do AProvaME, Flávia desenvolveu um novo olhar sobre o aluno: o que ele apresentou, se progrediu, se conseguiu argumentar ou justificar, enfim, o processo por ele vivenciado, o raciocínio que foi desenvolvido e o que aprendeu efetivamente, embora muitas vezes o aluno não tenha conseguido atingir a prova formal, aquela que é academicamente aceita. Ela passou a considerar como prova a produção do aluno, o que ele apresentou e aprendeu.

Opiniões sobre o AProvaME e sugestões de melhoria

Após a sua participação no projeto, Flávia percebeu a necessidade do próprio professor vivenciar um processo semelhante ao do aluno para que a sua aprendizagem também se torne real, resultando em uma prática efetiva. Seguem alguns trechos de sua fala, onde ela expôs estar muito agradecida por ter tido a oportunidade de participar do AProvaME e a grande influência deste projeto em sua vida acadêmica:

“Acho que inclusive, não só o aluno, mas o professor precisa passar por este processo para aprender. A demonstração, eu fiz na lousa, eu aprendi, não o aluno. O aluno tem que fazer para aprender; o professor também; ele tem que fazer alguma coisa para aprender. Não adianta só escutar e eu acredito que... o que significou para mim... muita coisa... mudou totalmente a minha visão, assim, da minha postura em sala de aula... quando eu entrei no mestrado a minha pretensão era aprender alguma coisa e era melhorar a minha prática pedagógica, por isso é que eu escolhi o profissional e não o acadêmico, porque era voltada para a prática pedagógica e eu acho que esse projeto me ajudou muito; porque eu vi que estava em um caminho, que eu não fazia o meu aluno aprender; eu o fazia reproduzir respostas e isso mudou completamente.”

“Eu acho que hoje sou capaz de trabalhar diferenciadamente com os alunos e esse projeto me ensinou muito isso; quer dizer, eu sou capaz de fazer uma atividade, uma sequência diferenciada; tenho que fazer porque é isso que leva o aluno a aprender e não a reproduzir. Este projeto nos levou a questionar várias coisas sobre, até, a nossa condição em sala de aula; muitos alunos, poucos alunos; acho que o projeto AProvaME nos lembrou que de que prova e demonstração são muito importantes em matemática. Mas não a prova e demonstração que a gente faz, na lousa; a prova e demonstração que vem do aluno. Eu acho que isso, também, foi muito importante no projeto AProvaME. Bom, eu sou agradecida por participar do projeto AProvaME, eu aprendi muito.”

Flávia gostaria que o projeto AProvaME não terminasse, ou seja as ideias que a partir dele surgiram e as propostas de uma nova abordagem não poderiam “morrer”, deveria haver um prosseguimento, podendo até ser um outro projeto:

“Mas que envolvesse prova e demonstração; sequência didática; analisasse as respostas de alunos; construísse sequências diferenciadas... eu acho que isso é muito bom e só tem a melhorar; acredito que o primeiro passo foi dado e não pode perder o primeiro passo; tem que se dar o segundo realmente.”

Como uma sugestão de prosseguimento do AProvaME, Flávia propôs que fossem oportunizados momentos em que todos os professores participantes do projeto pudessem se reunir para trocar experiências.

Perspectivas e desafios dos professores

Flávia colocou as suas perspectivas a fim de que todos os professores que participaram do AProvaME passassem a trabalhar da forma como aprenderam e vivenciaram no projeto, pensando no aluno e no aprendizado.

Em relação aos desafios, que são muitos, geralmente o professor nem chega a pensar ou mesmo a se perguntar sobre outras possibilidades, pois nem tempo para isso ele dispõe, já que leciona nos três períodos. Caso o professor queira fazer algo diferenciado, ele deverá dispor de tempo para pesquisar, estudar, assim como analisar à realidade a sua volta, para adequar os seus objetivos aos da disciplina, além de estar aberto a novas abordagens.

Porém, apesar das inúmeras dificuldades citadas, o maior e mais importante desafio considerado por Flávia, aquele que o professor precisa enfrentar e vencer, é a vontade de querer fazer algo diferenciado, que possa levar a melhorias para todos os envolvidos neste processo:

“Eu acho que o maior, o mais importante e único desafio do professor é a vontade, que ele precisa vencer; é claro que ele tem que ter condições; mas a vontade é o primeiro passo... eu acredito nisso. Ele tem que ter a vontade de querer fazer; se tiver vontade de querer fazer todos os outros desafios se tornarão supérfluos e passarão para um segundo plano, e o professor conseguirá driblar todos esses desafios.”

5.1.3.2 SÍNTESE DO MOMENTO 3

De posse das informações obtidas a partir da terceira entrevista e dos dados apresentados e analisados, bem como as reflexões e ponderações, realizadas por Flávia e que constaram de alguns capítulos de sua dissertação de mestrado, pudemos identificar alguns elementos que caracterizaram o *Momento 3* de seu percurso.

Como relatamos anteriormente, após seis versões intermediárias, Flávia finalmente finalizou e aplicou a versão final (*V3*) de sua situação de aprendizagem, a oito alunos seus do primeiro ano do Ensino Médio de uma escola estadual, onde lecionava. Ao analisarmos as diferentes versões desta situação de aprendizagem, alguns elementos nos chamaram a atenção: a forma como as diversas atividades evoluíram, algumas foram aprofundadas, outras incluídas ou excluídas; o encadeamento entre elas gerando a sequência didática; a modificação do texto visando à melhoria da clareza e do entendimento, pelos alunos, do que era solicitado. Ao identificarmos estes elementos, acrescidos de alguns relatos nas entrevistas, pudemos perceber em Flávia uma grande preocupação quanto a tornar mais suave a passagem do empírico ao dedutivo, além de procurar desenvolver nos alunos o hábito de validar os resultados obtidos.

Quanto aos teóricos utilizados em seu estudo, Flávia usou elementos da engenharia didática de Michele Artigue (1988)⁷, com as análises *a priori* e *a posteriori* de cada uma das atividades, além dos estudos de Parzysz (2001) e de Balacheff (1987). Este último autor forneceu alguns subsídios teóricos que foram utilizados por ela, para classificar os tipos de provas produzidos pelos sujeitos de sua pesquisa nas diversas atividades propostas.

Após a aplicação de sua situação de aprendizagem e análise dos dados obtidos, Flávia identificou nas produções dos alunos que, alguns deles, em algumas atividades conseguiram atingir a experiência mental, enquanto outros chegaram ao exemplo genérico e poucos não conseguiram ir além da experiência crucial (BALACHEFF, 1987).

Ao analisarmos as falas de Flávia no decorrer das entrevistas, observamos que ela aos poucos foi modificando a sua concepção de prova, que antes de ingressar no AProvaME se restringia à demonstração formal. Constatamos que ela se esforçou e se empenhou em elaborar atividades que facilitassem à passagem das provas pragmáticas para as conceituais; contudo, no decorrer do projeto observamos que Flávia passou a valorizar todas as produções dos alunos, entendidas como pertencentes a um processo permanente de construção do raciocínio matemático.

⁷ ARTIGUE, M. *Ingénierie Didactique: Recherches en Didactique des Mathématiques*, Grenoble, France, v. 9, n. 3, p. 281-308, 1988.

As práticas desenvolvidas no projeto fizeram que Flávia percebesse que o trabalho com provas demanda uma nova postura em relação a todo um pensar matemático, e a importância em levar os alunos a argumentar, justificar, validar e formalizar.

Flávia considerou o fato de ter participado do projeto AProvaME no decorrer de todas as suas etapas, como sendo de fundamental importância para o seu desenvolvimento, representando um marco em sua vida profissional. Ela ponderou que esta vivência lhe proporcionou uma ampliação em seus conhecimentos, modificou a sua visão em relação à prova, a fez reavaliar a sua própria prática docente, o que parece refletido em sua postura como professora em sala de aula.

É interessante observar em algumas falas de Flávia, que ela constatou que o Mestrado Profissional contribuiu para a sua formação intelectual e para o aprendizado de conteúdos matemáticos, enquanto o projeto AProvaME a levou a uma mudança de postura, uma nova visão de professor e do aluno e a um novo pensar matemático. Assim sendo, ela se sentiu privilegiada, por ter podido participar deste projeto.

“Eu me senti privilegiada no sentido de poder participar do AProvaME; pois para mim foi uma aprendizagem maior do que todas as outras juntas. É claro que, quando a gente entra no mestrado, eu por exemplo, já comecei a aprender desde a primeira aula de geometria. Na primeira aula já comecei a aprender, mas a mudança de postura em sala de aula eu aprendi no projeto AProvaME; quer dizer, o conteúdo matemático, a formação intelectual, isso, no mestrado todo eu aprendi, desde a primeira aula; agora, a mudança de postura, a nova visão de professor e a visão do aluno, o que eu quero que o meu aluno aprenda não é só uma fórmula, é todo pensar matemático; argumentar, justificar, validar, formalizar... todo esse pensar matemático, que é o que a gente quer que o nosso aluno aprenda, eu aprendi no projeto AProvaME.”

Ao analisarmos as diferentes versões da situação de aprendizagem de Flávia, no tocante à integração e à inserção das ferramentas do Cabri-Géomètre nas atividades, observamos uma pequena evolução na proposta de utilização deste recurso, porém sem um grande desenvolvimento quanto ao aspecto de uma melhor exploração do potencial de um ambiente de geometria dinâmica. Nas entrevistas, Flávia pouco se deteve na questão da integração de recursos computacionais nas atividades, com vistas à produção de uma prova. Quando este aspecto vinha à tona, ela apenas apontava este *software* como um importante recurso no momento da visualização; na construção de figuras e na verificação de suas propriedades; na elaboração de argumentos e formulação de conjecturas, e na possibilidade de realizar vários exemplos. Porém, para a produção de uma prova, no sentido da demonstração, visando ao desenvolvimento de um raciocínio dedutivo, ela propôs atividades que utilizavam papel e lápis, em substituição às que eram executadas usando o computador.

No tocante às novas tecnologias em cursos de formação inicial ou continuada, Ribeiro e Ponte (2000) relatam que a sua utilização pelos professores lhes têm colocado grandes desafios. Concomitantemente, os mesmos autores entendem que a capacidade de atuação dos professores neste domínio de prática profissional está relacionado com as oportunidades de formação que estes puderem empreender. Porém, eles constataram que muitos destes cursos não são pensados e desenvolvidos de forma a privilegiar a participação do professor na construção do conhecimento, o que poderá não resultar em uma transformação na prática destes.

No Mestrado Profissional foram oferecidas duas disciplinas que abordavam recursos computacionais. Uma delas, a denominada de TIC envolveu o aprendizado, a discussão e a utilização de alguns recursos tecnológicos e ferramentas da informática inseridos em um contexto educacional; e a outra relacionada à Geometria, fez uso do Cabri-Géomètre. Os sujeitos de nossa pesquisa, além de terem cursado estas disciplinas, no decorrer do AProvaME investigaram as possibilidades de uso e se apropriaram destas ferramentas na medida em que pensavam e desenvolviam as atividades, de acordo com as suas necessidades, no que se referiu aos objetivos do projeto.

Flávia já possuía um conhecimento anterior e uma certa familiaridade com o Cabri, que adquiriu em sua vida docente anterior ao Mestrado Profissional. No decorrer do Mestrado Profissional e do AProvaME, ela ampliou os seus conhecimentos em relação a este *software* e as suas possibilidades. No tocante aos dois níveis de utilização da tecnologia por parte dos professores, segundo Bottino e Furinghetti (1994, apud RIBEIRO, PONTE, 2000), parece que Flávia atingiu o “nível profundo”, pois a tecnologia passou a ser vista por ela como um meio de construir o conhecimento por um novo enfoque. Porém, apesar de perceber todo o potencial do Cabri e tê-lo integrado às suas atividades, explorando alguns aspectos de geometria dinâmica, este procedimento não evoluiu muito no decorrer das diferentes versões de sua situação de aprendizagem.

Muitas pesquisas têm sido desenvolvidas com o intuito de verificar se a utilização das TIC, em um ambiente de trabalho reflexivo e investigativo, poderia trazer mudanças na formação de professores, de forma a se refletir no ensino e no desenvolvimento profissional de professores (FIORENTINI, 2003).

No que diz respeito aos aportes teóricos de nossa pesquisa em relação ao desenvolvimento profissional, Passos et al. (2008, p. 213) a partir das análises e interpretações produzidas nos estudos por eles investigados, observaram que:

as práticas reflexivas, investigativas e colaborativas, desenvolvidas em ambientes coletivos de aprendizagem docente constituem uma poderosa tríade catalizadora do desenvolvimento profissional dos professores de Matemática.

Ainda segundo estes autores, o trabalho coletivo, especialmente o colaborativo, representa um contexto altamente favorável à aprendizagem e ao desenvolvimento profissional do professor. Em um contexto colaborativo podem ocorrer interações com o outro e trocas de saberes, olhares e experiências. O sucesso deste trabalho em grupo, principalmente no que se refere à reflexão compartilhada, depende de algumas condições de funcionamento destes grupos, os diálogos devem ser estabelecidos em um ambiente aberto, de respeito, apoio, afeto e confiança e as ações coordenadas devem ser planejadas e negociadas coletivamente (PASSOS et al., 2006).

Observamos que o contexto propiciado pelo projeto AProvaME, envolvendo prova e demonstração, a elaboração e o desenvolvimento de sequências didáticas, que faziam uso de recursos da informática, o contato muito próximo com alunos, as reuniões frequentes com outros professores e pesquisadores, em um ambiente de reflexão, investigação, discussão e colaboração, mostrou-se muito propício para acarretar mudanças em posturas, concepções e práticas.

Além destas constatações, este contexto conseguiu proporcionar à Flávia, em termos de funcionamento, condições muito favoráveis, especialmente nas duas primeiras etapas da Fase 2, quando ela contou efetivamente com o apoio de um grupo colaborativo, pois, neste momento, ocorreu uma reflexão compartilhada, cujos diálogos foram estabelecidos em um ambiente aberto, de respeito, apoio e confiança, o que possibilitou a troca de saberes e experiências.

Em relação ao período de tempo para serem identificadas e percebidas mudanças de concepções, saberes e práticas do professor em sua área de atuação, Machado Costa e Fiorentini (2007), apesar de constatarem a necessidade de um período longo, apontaram que alguns contextos podem acelerar o processo de mudança e o desenvolvimento profissional do professor. Algumas pesquisas realizadas, que levam em consideração um contexto favorável, têm evidenciado que o uso das TIC na formação inicial e na prática docente pode contribuir para o desenvolvimento intelectual e profissional de professores. Este contexto favorável considera importante e fundamental a realização de um trabalho colaborativo entre os professores, formadores e especialistas em informática, que juntos planejam, executam, avaliam e refletem sobre os resultados obtidos (MACHADO COSTA; FIORENTINI, 2007; PONTE, 2000; PONTE et al., 2003).

Passos et al. (2006), também, verificaram que as práticas reflexivas sobre a própria prática, em especial sobre o próprio trabalho docente, ajudam a problematizar e a produzir estranhamentos sobre o que se ensina, além do motivo de se ensinar de uma forma e não de outra. Esta reflexão sobre a própria prática é potencializada quando é mediada pela

reflexão coletiva e pela escrita. O professor, quando escreve, em forma de narrativas ou relatos de aula, se dá conta de seu próprio processo de aprendizagem (PASSOS et al., 2006).

Na terceira etapa da Fase 2 do AProvaME, Flávia contou apenas com a ajuda de seu orientador e teve a oportunidade de investigar, planejar, elaborar e refletir continuamente sobre cada uma das atividades que compôs a sua situação de aprendizagem. Os registros escritos destas diferentes versões possibilitaram-lhe tornar-se consciente de seu próprio processo de aprendizagem e de seu desenvolvimento.

Pudemos identificar a partir das informações fornecidas por Flávia, que ela vivenciou uma prática de questionamentos a partir de seus pares, no decorrer de todo o seu percurso inserida no projeto. Pelos seus relatos nas entrevistas e pela análise das diferentes versões de sua situação de aprendizagem, Flávia conseguiu romper com concepções e práticas vigentes, que parecem tê-la levado a seu desenvolvimento profissional.

No próximo item apresentamos a trajetória de Vagner.

5.2 TRAJETÓRIA DE VAGNER

A situação de aprendizagem elaborada por Vagner e aplicada com os sujeitos de sua pesquisa partiu de uma das temáticas propostas para a sua equipe do AProvaME, a de Geometria, e que foi o estudo das propriedades do paralelogramo a partir da congruência de triângulos. Ele aplicou esta situação de aprendizagem a oito estudantes, de uma escola estadual, em que não lecionava, situada no interior do Estado de São Paulo. Estes estudantes não eram seus alunos.

O título da dissertação de Vagner foi: *“Um estudo sobre propriedades do paralelogramo envolvendo o processo de argumentação e prova”*, tendo como questão de pesquisa:

Quais dificuldades e avanços apresentam alunos na articulação de informações, visando provar propriedades dos paralelogramos?

A sua equipe B do projeto AProvaME discutiu muito as atividades que fariam parte desta situação de aprendizagem, no decorrer das reuniões que ocorreram no 1º semestre de 2006. O objetivo dos professores-colaboradores seria elaborar atividades que levassem ao estudo das propriedades do paralelogramo a partir da congruência de triângulos.

Porém, apesar de terem ocorrido muitos encontros no decorrer deste período, em que as atividades foram pensadas e desenvolvidas, esta situação de aprendizagem não conseguiu ser finalizada até o final daquele semestre. Ela foi disponibilizada no Teleduc da

forma como foi fechada na última reunião do primeiro semestre de 2006, embora ainda estivesse incompleta, para que outros professores-colaboradores pudessem executar e testar as atividades e colocar os seus comentários, com vistas à melhoria destas (Anexo G).

Em julho de 2006, Vagner elaborou um esboço inicial contendo algumas atividades, onde colocou as suas primeiras ideias, baseado no que havia sido desenvolvido no AProvaME, porém, ainda, com muitas incertezas sobre como se desenvolveria a sua situação de aprendizagem, e a submeteu à avaliação de seu orientador. Designaremos em nossa pesquisa, esta primeira proposta de elaboração da situação de aprendizagem de Vagner, de *Esboço*, identificada pela letra *E* (Anexo H).

O orientador de Vagner solicitou-lhe que esperasse a fase do *design* coletivo do AProvaME, a ser realizada no 2º semestre de 2006, para verificar como se daria a avaliação da situação de aprendizagem, desenvolvida pela sua equipe do projeto (Anexo G), conforme havia sido disponibilizada no Teleduc. Assim, o *Esboço* permaneceu “congelado” até novembro de 2006.

Esta situação de aprendizagem, elaborada pela sua equipe do AProvaME (Anexo G), não foi porém trabalhada no decorrer das reuniões que ocorreram no 2º semestre de 2006 pelos professores-colaboradores. Deu-se prioridade na fase do *design* coletivo à análise e à avaliação das situações de aprendizagem de outros professores, que estavam em processo de finalização de seus respectivos mestrados profissionais. Especialmente Vagner analisou e comentou cuidadosamente as atividades de alguns de seus colegas, àquelas que foram submetidas à análise em seu grupo de professores. Dessa forma, a situação de aprendizagem, foco da pesquisa de Vagner não foi submetida à análise e à avaliação na etapa do *design* coletivo.

Vagner retomou o desenvolvimento de sua pesquisa em novembro de 2006 e prosseguiu sozinho, contando com a ajuda de seu orientador no desenvolvimento das atividades que seriam aplicadas em sua própria pesquisa e dos alunos na ocasião da aplicação do teste-piloto. Os alunos efetivaram o teste-piloto nos meses de março e abril de 2007 e emitiram opiniões quanto à melhoria desta. Assim, no decorrer deste período, a partir de julho de 2006, Vagner não teve mais a ajuda do grupo colaborativo.

Ao final do 2º semestre de 2006, dois professores-colaboradores postaram seus comentários no Fórum do Teleduc, porém, naquele momento, Vagner já estava trabalhando as suas atividades de outra maneira, e em função dos prazos ele nem chegou a lê-los. A sua situação de aprendizagem havia tomado um aspecto um pouco diferente da versão inicial, a que foi trabalhada no decorrer do 1º semestre de 2006 pela sua equipe do AProvaME.

A partir do *Esboço*, a situação de aprendizagem de Vagner passou por diversas versões, com muitas mudanças ocorrendo entre elas, até atingir a versão final, que foi

aplicada nos meses de maio e junho de 2007. Apesar de terem sido elaboradas diferentes versões no decorrer deste período, a estrutura desta situação de aprendizagem, a partir do *Esboço*, assumiu basicamente a estrutura da versão final, com as atividades organizadas em três partes.

No tocante à versão final da situação de aprendizagem, em relação aos objetivos das três partes que a constituíram, as duas iniciais buscaram resgatar conteúdos de geometria já ensinados no ensino fundamental, o paralelismo (primeira parte) e a congruência de triângulos (segunda parte). A terceira, considerado por Vagner como sendo a sua pesquisa propriamente dita, ficou dividida em duas partes: na primeira eram fornecidas questões que visavam levar os alunos a conjecturar e a introduzi-los na prova, e a segunda parte foi um jogo de cartas, cuja finalidade foi a de ajudar os alunos no momento da elaboração da prova formal, pois já envolvia os aspectos dedutivos.

A situação de aprendizagem elaborada pelo Vagner não evoluiu no decorrer das versões como um grande bloco. A primeira parte teve duas versões intermediárias, enquanto a segunda apenas uma, até atingirem a versão final, denominadas por ele de ATMP 1 (Atividade no micro, envolvendo prova – 1ª fase) e ATMP 2 (Atividade no micro, envolvendo prova – 2ª fase), aplicadas no piloto e que não foram modificadas na pesquisa posterior.

Na versão final estas duas partes foram agrupadas em uma fase denominada Fase Preliminar, sendo designadas de 1ª Etapa (Anexo J) e 2ª Etapa (Anexo M). Para efeito de descrição e análise na presente pesquisa, as versões intermediárias das duas primeiras fases foram designadas de *F11*, *F12* (Anexo I) e *F21* (Anexo L).

A sequência de atividades da primeira etapa da terceira parte, que na versão final da situação de aprendizagem passou a constituir o Bloco I, denominado “Conjecturas e Introdução à Prova” (Anexo O), passou por quatro versões intermediárias até atingir a versão final, duas anteriores ao piloto, o piloto constituiu a terceira versão, uma posterior ao piloto e a versão final, que foi aquela efetivamente aplicada na pesquisa (Anexo O). Em nossa pesquisa, estas versões intermediárias foram designadas de *F31*, *F32*, *F33* e *F34* (Anexo N).

O jogo de cartas, que constituiu o Bloco II, foi concebido por Vagner em novembro de 2006, submetido ao piloto, e sofreu apenas uma pequena modificação para ser aplicado na versão final (Anexo P). Para efeito de análise, a versão do jogo anterior ao piloto foi designada de *F41*. Não apresentamos a versão *F41* em nenhum anexo, pois como a modificação entre as duas versões foi muito pequena, julgamos necessário apenas proceder à descrição do que foi realizado.

Em relação à realização do teste-piloto, Vagner considerou ter sido muito importante esta aplicação, pois observou alguns comportamentos e atitudes nos alunos enquanto

executavam, o que o levou a introduzir alguns elementos novos na última versão de sua situação de aprendizagem, especificamente nas atividades pertencentes aos Blocos I e II, antes de iniciar efetivamente a sua pesquisa com os estudantes. Como descrito anteriormente, a 1ª Etapa e a 2ª Etapa pertencentes à Fase Preliminar não sofreram nenhuma mudança, a partir do piloto até a finalização da pesquisa.

A versão final da situação de aprendizagem, a que foi efetivamente aplicada, constou de três partes, a saber: as Fases Preliminares, formadas pela 1ª Etapa e 2ª Etapa, e a terceira parte, que consistiu nas atividades da pesquisa propriamente dita, o Bloco I (Conjecturas e Introdução à Prova) e o Bloco II (Jogo de Cartas). Denominamos na presente pesquisa esta versão de *Versão Final* ou *VF*.

No decorrer deste processo, Vagner elaborou dois jogos de cartas. Um deles fez parte da *Versão Final* e consistiu o Bloco II. O outro foi denominado pré-atividade lógica, e propunha que os alunos selecionassem e articulassem as proposições por ele fornecidas em uma determinada ordem. A diferença para o jogo de cartas, que foi usado no Bloco II, é que nestas cartas as proposições estavam escritas em linguagem coloquial. O Vagner inclusive aplicou esta atividade, em uma etapa anterior ao Bloco II.

Vagner considerou como sendo efetivamente a sua pesquisa as atividades desenvolvidas nos Blocos I e II. A Fase Preliminar foi efetivada apenas com o objetivo de resgatar conteúdos de Geometria, fundamentais para que a sua pesquisa pudesse ser realizada. A apresentação dos Blocos I e II, juntamente com os resultados que foram obtidos pela aplicação das atividades aos alunos e as análises desenvolvidas, se deram no Capítulo 3 da dissertação de mestrado de Vagner.

As atividades encadeadas na sequência e que fizeram parte da *Versão Final* procuraram levar os alunos, inicialmente, a construir os conceitos de hipótese e tese de forma empírica, para que, em uma fase seguinte, pudessem atingir a forma dedutiva, ordenando as proposições de forma a conseguirem elaborar provas das propriedades dos paralelogramos.

Ao analisar as produções dos sujeitos de sua pesquisa, a partir dos resultados obtidos pela aplicação da *Versão Final*, no que se referiu às atividades presentes nos Blocos I e II, Vagner buscou identificar os elementos de prova produzidos por eles, em especial se estes haviam atingido a prova formal.

Vagner, também, desenvolveu e aplicou uma Prova Diagnóstica, anterior à sua situação de aprendizagem, com a finalidade de realizar um levantamento prévio de conhecimentos de Geometria, que os alunos dispunham em relação à temática que foi tratada em sua pesquisa (Anexo 2 da dissertação de Vagner).

Após a realização de sua pesquisa e dos dados analisados, Vagner, também, buscou verificar se a experiência, pela qual estes estudantes haviam passado, proporcionou a eles ganhos em aprendizagem (Anexo 6 da dissertação de Vagner). Assim sendo, ele distribuiu um protocolo aos sujeitos de sua pesquisa com diversas questões a serem respondidas por eles, sobre os assuntos tratados em sua situação de aprendizagem.

Ele também elaborou um material com sugestões de alterações em algumas atividades dos Blocos I e II e da pré-atividade lógica, baseado em todas as análises realizadas das atividades (*a priori* e *a posteriori*) e dos resultados e dados obtidos dos sujeitos de sua pesquisa (Anexo 7 da dissertação de Vagner).

Vagner, em todas as versões de sua situação de aprendizagem, teve por objetivo que os alunos conseguissem atingir a prova formal. Em sua sequência, a questão da integração do computador nas atividades, com vistas à construção da prova, foi pouco explorada. Ele não conseguiu enxergar como poderia efetuar um uso específico do Cabri-Géomètre, que proporcionasse aos alunos a possibilidade de generalizar e formalizar.

Assim sendo, este *software* foi utilizado apenas em algumas atividades da 1ª Etapa e da 2ª Etapa da Fase Preliminar e nas atividades iniciais do Bloco I, como uma ferramenta de visualização e exploração, na elaboração de conjecturas, para testar algumas propriedades e buscar padrões. Muitas figuras foram fornecidas, parcialmente construídas por Vagner, bastando ao aluno completar o que era solicitado na atividade. O aspecto dinâmico deste *software* praticamente nem foi explorado. Vagner optou pelo uso do Cabri, pois além de já ter algum conhecimento deste *software*, este já estava instalado no laboratório de informática da escola onde foi realizada a sua pesquisa.

Ao analisarmos as informações obtidas nas três entrevistas e nas diversas versões das situações de aprendizagem desenvolvidas por Vagner pudemos identificar três momentos significativos em seu percurso, descritos no quadro 6:

Momentos	Instrumentos
Momento 1	Entrevista 1 Atividade Esboço (E)
Momento 2	F11, F21, F31 e F41 F12, F32 F33 Teste-piloto ATM1, ATMP 2, F34 Versão Final (Etapas I e II e Blocos I e II) Entrevista 2
Momento 3	Aplicação da Prova Diagnóstica Aplicação da Situação de Aprendizagem Elaboração do texto final da Dissertação de Mestrado Entrevista 3 Defesa Pública da Dissertação de Mestrado

Quadro 6: Momentos significativos da trajetória de Vagner

Mostramos, a seguir, estes três momentos significativos da trajetória de Vagner, por meio da apresentação e da análise das entrevistas realizadas, conjuntamente a uma breve descrição das diferentes versões da situação de aprendizagem. Pretendemos expor, a partir das informações e dos dados obtidos, os aspectos, os questionamentos e as percepções, ocorridos em cada um destes momentos, com vistas a se tentar responder à questão de nossa pesquisa.

5.2.1 MOMENTO 1

O primeiro momento de Vagner foi caracterizado pela realização da primeira entrevista (*Entrevista 1*) e do *Esboço* de sua situação de aprendizagem.(E). As informações principais obtidas a partir destes dois instrumentos encontram-se descritas e apresentadas a seguir.

5.2.1.1 ENTREVISTA 1

Realizamos a primeira entrevista com Vagner em maio de 2006. As informações obtidas desta entrevista, dividida nas temáticas explicitadas anteriormente (*item 4.2.5.1. A primeira entrevista*), encontram-se descritas e analisadas nos próximos itens.

Dados pessoais

No momento da realização desta primeira entrevista, Vagner contava com 38 anos e lecionava Matemática no Ensino Médio em duas escolas estaduais, situadas em duas cidades do interior do Estado de São Paulo. Ele fez a sua graduação em licenciatura Ciências e Matemática em uma universidade particular, também, situada no interior do Estado de São Paulo e já estava lecionando há dezesseis anos.

Formação inicial

No tocante à sua formação inicial, ao ser questionado se no decorrer de seu curso de licenciatura em Matemática, houve a preocupação por parte de seus professores em suas respectivas disciplinas quanto à inserção das provas, visando ao desenvolvimento do raciocínio dedutivo, Vagner informou que esta abordagem praticamente não ocorreu. Ele relatou que a demonstração foi tratada de uma forma muito superficial e possuía mais um caráter mecânico e reprodutivo, repetição de fórmulas e procedimentos, a argumentação foi muito pouco trabalhada e a temática da prova nem foi cogitada. Nas avaliações nunca foi solicitado que os alunos provassem ou demonstrassem alguma proposição ou algum teorema.

Vagner observou que, hoje em dia, infelizmente tanto os professores como os alunos não conseguem trabalhar com provas, e como os alunos não se envolvem, isto faz com que a prática, quando ocorre, continue a ser reprodutiva.

Ainda em relação à sua formação inicial, quando questionado se ele havia tido algum contato com alguma disciplina relacionada à Computação, que tratasse do uso do computador ou de alguma ferramenta da informática, Vagner relatou que foram ensinadas algumas linguagens de programação, como o BASIC, COBOL, DBase e a planilha eletrônica LOTUS. Estas disciplinas foram ministradas durante dois anos. Ele relatou que nesta ocasião a instituição de ensino, onde estudou, já dispunha de um laboratório de informática e a ênfase nestas disciplinas era ensinar o aluno a programar, porém nada voltado ao processo de ensino e aprendizagem de Matemática.

Vagner relembrou que o seu contato inicial com a computação foi na faculdade, pois até aquele momento, ele nem ao menos sabia o que era um disquete. Ele relatou que naquela época, em 1988 ainda não se falava em aplicação da informática em sala de aula e na utilização do computador como um meio facilitador da aprendizagem.

*No decorrer da vida docente antes do ingresso
no Mestrado Profissional*

Após a sua formação inicial e antes de seu ingresso no Mestrado Profissional, Vagner participou de alguns cursos temáticos de curta duração (30 horas) cujos conteúdos versaram sobre frações, funções, geometria e outros tópicos de Matemática, além de ter realizado uma especialização de dois anos em uma universidade pública situada em uma cidade no interior do Estado de São Paulo (1994 a 1995).

Quando Vagner começou a lecionar, ele relembrou que ainda nem se pensava em ter computadores nas escolas, assim, nesta ocasião, ele não chegou a utilizar os recursos de informática em aulas de matemática. A escola em que ele lecionava foi uma das pioneiras a ter laboratório de informática, pelo fato de possuir curso técnico, sendo que tanto os alunos como a direção se empenharam a fim de conseguirem instalar este laboratório.

Em relação à informática, Vagner relatou que teve um primeiro contato quando fez um treinamento de um dia na escola em que lecionava, ministrado por outro professor desta mesma instituição. A seguir fez alguns cursos isolados de apenas um dia ou de uma semana, cuja proposta era o ensino de algum *software* específico.

Após a instalação do laboratório nesta escola, Vagner lembrou ter chegado a trabalhar com os alunos usando o LOGO. Porém, pelo fato de o laboratório nunca estar adequado em termos de número de computadores, além de muitos quebrados, tornava-se difícil levar e acomodar todos os alunos, de forma que pudessem desenvolver as atividades adequadamente.

Ao ser questionado quanto à utilização de programas de computador em um processo de ensino e aprendizagem, Vagner comentou que o simples uso de *softwares* em nada modificava o contexto. Contudo, observou que as inovações proporcionadas pela tecnologia poderiam acrescentar um pouco nas aulas, desde que o professor passasse a elaborar novas estratégias, a partir das ideias que fossem surgindo e, também, na medida em que se ampliasse o seu contato com o *software*:

“O que acrescenta um pouco são essas inovações, as ideias que vão surgindo em como utilizar o software, posso fazer isto, aí surge uma outra ideia. Então no LOGO foi feita uma experiência da coleção do Professor de Matemática, que o aluno poderia digitar a frequência da nota

musical e o LOGO tocaria essa nota para ele. Nós calculamos por PG as notas e eles puderam inventar um pouquinho, compondo as músicas deles. Então é mais a questão assim de você ter contato, bolar estratégias. O software sozinho é aquilo que a gente já sabe.”

Como Vagner havia utilizado as ferramentas da informática apenas em poucos momentos com os alunos, considerou não ter experiência suficiente para identificar se havia ocorrido alguma diferença em relação à aprendizagem destes.

Ao ser questionado se ele trabalhava com provas com os seus alunos, quando ingressou na carreira docente, após a sua formação inicial, Vagner relembrou alguns fatos marcantes em sua trajetória em relação a este aspecto.

Quando cursou o Ensino Médio, seus professores não falavam em prova. Em sua graduação a demonstração foi tratada de uma forma muito superficial, possuindo um caráter mecânico, obtida por meio da repetição de fórmulas e procedimentos, a argumentação foi muito pouco explorada e a temática da prova nem foi abordada. Na especialização que cursou, embora algumas disciplinas como Álgebra e Cálculo tenham sido ministradas, elas não foram desenvolvidas pelos seus professores, de uma abordagem envolvendo prova e demonstração.

Ele, como professor, antes do Mestrado Profissional, teve contato com alguns outros professores da mesma escola em que lecionava, que buscavam levar os seus respectivos alunos a produzir argumentações e formular conjecturas. Assim, Vagner começou a tentar desenvolver uma abordagem neste sentido, além de existir uma proposta do governo que apontava para esta direção.

Na medida em que a sua prática como professor foi se consolidando, Vagner começou a se sentir mais seguro. Ademais o contato com outros professores mais experientes fez com que se despertasse nele a vontade de querer participar de cursos de formação continuada, que propunham, além de se trabalhar com o conteúdo proposto, o desenvolvimento de atividades que faziam com que os professores participantes pudessem repensar as suas próprias práticas docentes. Devido a este motivo, ele fez questão de ingressar no Mestrado Profissional e participar do projeto AProvaME, para que pudesse atuar de uma forma diferente com os seus alunos.

Participação no Mestrado Profissional e no AProvaME

Após o ingresso de Vagner no mestrado e no AProvaME, a importância da argumentação para ele ficou mais evidente. Ele percebeu a importância de levar os alunos a produzir argumentações. Porém, relatou sentir algumas dificuldades no momento da implementação desta abordagem na sala de aula, nas escolas em que lecionava. Devido ao

“contrato didático”, muitos alunos reclamavam dos professores que procuravam levá-los a assumir novas posturas. Estes alunos alegavam que os professores não ensinavam e que perdiam tempo da aula.

Podemos observar em algumas falas de Vagner, neste momento da primeira entrevista, que parece que ele não diferenciava os termos prova e prova formal. Ele indicou que o seu interesse em levar o aluno a argumentar aumentou, nem que este não conseguisse “fazer provas”, ou seja, construir a demonstração ou a prova formal. Segundo a sua fala:

“Então foi aumentando o interesse em pelo menos levar o aluno a argumentar alguma coisa, nem que não fosse para fazer provas. Mas é lógico, depois do mestrado isso aumentou muito mais ainda, mas a gente sempre que pode, coloca alguma coisa mais neste sentido. Agora o contrato didático com o aluno normalmente complica um pouco. Reclamaram da gente e de outro professor em relatórios que foram solicitados para eles. A mesma reclamação para todos, é que o ‘professor enrola muito a aula’. O aluno quer alguma coisa mais direta.”

Quanto à influência do mestrado e do AProvaME na ampliação de conhecimentos em relação à argumentação e à prova, Vagner ainda não havia identificado uma diferença significativa, pelo fato de o projeto ainda se encontrar no início.

Porém, em relação à informática, tanto o mestrado, como o AProvaME possibilitaram o aprendizado de novos *softwares*, novas formas de trabalhar, novos enfoques e outras possibilidades em programas, muitos dos quais ele já havia tido contato anteriormente.

Vagner relatou que, embora já tivesse realizado um curso de Cabri-Géomètre há alguns anos, antes de iniciar o seu mestrado, no decorrer deste curso, ele freqüentou uma disciplina que apresentou o Cabri com um outro enfoque. Ele relatou que praticamente precisou reaprender tudo novamente, tanto em termos de conteúdo específico, como em relação às suas possibilidades de aplicações. Ele comentou que em relação ao Cabri, ainda sentia dificuldades para fazer uso de um recurso de programação, denominado “*programar macros*”.

No mestrado não apenas foram ensinados os programas, como também estes foram questionados quanto à sua efetiva utilização:

“até que ponto é conveniente o uso destes softwares, até que ponto eles poderão construir conhecimento, como se constrói conhecimento, além do uso da Internet para finalidades educacionais, como a WebQuest.”

Vagner acredita que o uso do computador possa proporcionar a realização de algumas coisas que o ambiente tradicional não permite, principalmente, no que se relaciona

à visualização e à busca de padrões, dado o grande número de simulações e exemplos que podem ser feitos e analisados em um tempo muito reduzido.

Ele lembrou uma experiência que teve com os alunos, em que inclusive, pôde colocar em prática a contextualização. Ele criou um tipo de um “canhãozinho”, que apesar de não ser muito pedagógico, pois envolvia guerra, tinha por objetivo fazer com que os alunos conseguissem aplicar a função de 2° grau no lançamento balístico. Da sala de informática, com o auxílio de Vagner, os alunos acessavam um *site*, que disponibilizava um laboratório virtual, onde era possível usar a matemática. Assim sendo, os alunos podiam fazer os cálculos e depois verificar pelo uso do computador onde esta bolinha iria atingir o solo. Vagner acredita que, caso este estudo fosse realizado apenas no ambiente tradicional, o aluno iria efetuar apenas o cálculo matemático.

Ele ponderou que quando o aluno tem a chance de conferir, mesmo que seja usando um simulador, este fato poderia tanto estimulá-lo como trazer a realidade para mais perto dele:

“É como a gente falou no começo, a questão de descobrir padrões. Então se ele pode trabalhar com uma infinidade de triângulos, com uma infinidade de gráficos, é muito mais fácil no computador, muito mais rápido.”

Ao ser questionado nesta primeira entrevista, que etapas ele implementaria quando fosse elaborar atividades que buscassem a prova, a serem resolvidas pelos alunos, por meio da integração do computador, Vagner respondeu que, inicialmente, usaria este recurso para alavancar alguns conceitos, para, em seguida, formalizar este conteúdo de uma forma mais tradicional ou sistematizada. Assim sendo, para ele, o computador seria usado em atividades de exploração, de levantamento de dados, de hipóteses e de padrões. Ele funcionaria como um “estimulador”, para que, em um momento posterior, se pudesse passar para a fase da formalização. Em seguida, ele exemplificou:

“Eu notei este fato ao utilizar o Cabri. A gente costuma trabalhar muito com o que chamamos de nível G1, que é a parte mais empírica. Com o Cabri o aluno pode fazer vários experimentos rápidos, porque o computador faz isso para ele, tanto na parte de funções, traçando gráficos, na parte geométrica, e aí o aluno pode tirar as suas conclusões. Para o aluno hoje é um pouco difícil, ele tirar o padrão e tirar a conclusão. A gente vê em sala de aula ele tem uma certa dificuldade, então o computador ajudaria bastante.”

Vagner acredita que a dificuldade dos alunos estaria relacionada à falta de costume destes em trabalhar desta forma. Para ele, o professor deveria incentivar os alunos para que estes consigam estabelecer padrões e tirar conclusões. Porém, ele pondera que em geral os

alunos preferem a aula tradicional, aquela em que o professor fala e eles aceitam. Muitas vezes, quando o professor procura fazer com que os alunos parem, pensem, analisem e tirem conclusões, muitos deles oferecem resistência.

Ao ser questionado quanto ao preparo do professor, para que este consiga integrar os recursos tecnológicos em conteúdos de Matemática, Vagner acreditava que não seria muito difícil para o professor, bastava ele possuir um embasamento teórico, além de aprender a lidar com o *software*, sendo suficiente apenas um pouco de treinamento.

*As dificuldades associadas ao desenvolvimento
das situações de aprendizagem*

Ao desenvolver a situação de aprendizagem, Vagner considerou como sendo as suas maiores dificuldades a elaboração da sequência didática para abordar o conteúdo proposto, seguido pela reflexão e pelo desenvolvimento individual e no grupo colaborativo, das atividades que possibilitariam a construção de conjecturas e provas por parte dos alunos. Segundo ele, a equipe, da qual participou na 1ª etapa da Fase 2 do AProvaME, não conseguiu trabalhar de uma forma objetiva, os professores-colaboradores não focavam a atividade proposta e não a finalizavam no tempo solicitado, ficando sempre pendências entre as reuniões. A terceira dificuldade foi o conhecimento do conteúdo matemático, e a última seria a integração do computador, com vistas à prova.

Nós acreditamos que Vagner não tenha entendido o que foi solicitado nesta questão, pois embora ele tenha enunciado as dificuldades, colocando-as em ordem decrescente (da maior para a menor dificuldade), ele apontou como sendo inicialmente a sua maior dificuldade a não existência de um laboratório adequado em termos de computadores, em número suficiente, além de nem todos estarem funcionando. Em seguida, observou que os alunos não teriam dificuldade para resolver a situação de aprendizagem, tampouco ele ao planejar a aula que usaria esta atividade. Segundo a sua fala:

“Para o aluno a atividade concebida com o uso do computador ficaria mais fácil de ser resolvida e ele conseguiria aprender rapidinho. É lógico que como a gente não esta usando, então bolar a estrutura é fácil, agora se formos aplicar na prática a gente sabe que irão aparecer dificuldades, sendo que as atividades precisarão ser reformuladas. Sair de casa com a aula planejada com a atividade eu não acho que é difícil. Se eu tivesse os computadores, os laboratórios, condições para levar os alunos, pelo menos dois alunos por vez, eu nem classificaria, porque eu acho que eu não teria dificuldade, pois na hora que eu fosse levá-los eu já estaria levando consciente do que eu ia fazer, de como eu ia fazer, tudo isso. Assim, a elaboração da atividade vinculada ao uso do computador, eu acho que não teria problema.”

*Opiniões sobre o potencial dos recursos tecnológicos
no ensino e na aprendizagem da prova*

Quando questionado sobre o que pensava atualmente sobre o desenvolvimento de atividades que busquem a prova, tendo a contribuição dos recursos da informática, Vagner considerou que os ambientes computacionais podem contribuir muito, quando se trata de identificar padrões de comportamento de figuras e funções, além de ser uma ferramenta poderosa por facilitar os cálculos e favorecer a visualização. Só que para a prova é necessário desenvolver outras habilidades no aluno, que são a leitura e a interpretação. Para ele, o aluno que se limitar a apenas manusear o *software*, não sabendo como fazer uma leitura daquilo que obteve, este tipo de atividade não conseguirá levar a nada.

Vagner observou que, enquanto os alunos estiverem investigando os casos, no início atividade, a utilização do *software* será de grande utilidade, porém no momento de obter a prova formal, ele questionou a real ajuda desta ferramenta:

“Eu acredito que só para a prova formal mesmo, pelo menos no momento, eu não sei se ajudaria muito. É porque enquanto ele está investigando os casos, é ótimo, isto é de grande utilidade. Agora quando ele vai fazer uma prova, vai formalizar, o que no nosso caso seria o nível G3, vai fazer exatamente a prova formal, ai eu já não sei até que ponto influenciaria.”

Assim, para Vagner o computador deveria ser usado como recurso para levantamento de hipóteses e padrões, assumindo uma função exploratória.

Ele acredita que é possível a partir de um empirismo inicial seguir na direção de uma formalização matemática usando os recursos computacionais. Ao ser questionado sobre quais seriam as etapas pelas quais as pessoas passariam no decorrer deste processo, ele assinalou que poderiam ser as mesmas que ele vivenciou no AProvaME e, em seguida, enunciou estas etapas:

“Eu acho que as etapas talvez pudessem ser as mesmas que a gente usou para classificar o que já foi aplicado no AProvaME. Como eu já falei antes, a primeira parte mais empírica, o aluno não fez nenhuma prova, mas pelo menos ele identificou alguns casos, o pessoal conseguiu avançar um pouquinho mais. Então ele está no laboratório, ele pode identificar alguns casos, ele pode tentar refinar um pouco, tentar observar se isso é verdade sempre, achar uma maneira de expressar essa generalização, esse é o ponto de partida, ele tentar verificar se é verdade sempre, ver a necessidade da prova, talvez as etapas sejam as mesmas que a gente já andou trabalhando no AProvaME, partindo apenas do computador. Em um momento posterior se passaria para a etapa de formalização.”

Ele propôs iniciar-se pela fase empírica, onde o computador exerceria uma função exploratória, na visualização e na identificação de propriedades em alguns casos particulares, para em seguida buscar uma generalização, verificar se esta propriedade é verdadeira sempre, até atingir a etapa de formalização. É interessante verificar nesta fala de Vagner, que ele não explicita como integrará o computador nas atividades, de forma a conseguir proceder à generalização e à formalização.

5.2.1.2 ESBOÇO (E)

Ao encerrar as reuniões no final do 1º semestre de 2006, a equipe de Vagner finalizou parcialmente a situação de aprendizagem proposta, e disponibilizou esta versão no Teleduc (Anexo G).

Pelo fato de a situação de aprendizagem ter sido elaborada coletivamente pelos cinco professores-colaboradores e dois pesquisadores, ela não será descrita com detalhes, tampouco analisada para fins de nossa pesquisa. Seguem-se algumas informações sobre ela, que consideramos importantes para o entendimento de como se deu a elaboração da situação de aprendizagem de Vagner. Esta situação de aprendizagem contava com três fases (Fases I, II e III).

A Fase I visava levantar o conhecimento prévio dos alunos quanto à nomenclatura e às propriedades dos quadriláteros (quadrilátero qualquer, paralelogramo, losango, retângulo, quadrado, trapézio e pipa). Esta fase deveria ser realizada em um ambiente de geometria dinâmica, no qual várias figuras construídas com o auxílio do Cabri-Géomètre eram previamente fornecidas em arquivos digitais, e os alunos por meio de manipulação, deveriam identificar as figuras e as suas características, verificar as suas propriedades, classificá-las e estabelecer as relações entre elas. Nesta fase, os alunos já deveriam começar a identificar quando uma propriedade “sempre acontecia”, “acontecia às vezes” ou “nunca acontecia”.

A Fase II também fazia uso do Cabri-Géomètre e tinha por objetivo que os alunos identificassem os casos de congruência de triângulos. Era fornecido um arquivo, no qual se encontrava um triângulo construído com este *software*. O aluno contaria com as ferramentas “Transporte de ângulos” e “Transporte de segmento”, desenvolvidas por meio de macros no Cabri. O aluno, seguindo as orientações presentes nas atividades e usando as ferramentas citadas anteriormente, deveria construir um segundo triângulo, analisando seis possibilidades. Destas seis, apenas quatro eram os casos de congruência. O aluno deveria confirmar se o triângulo construído era congruente ao triângulo dado, arrastando a figura

recém-construída e sobrepondo à figura inicial. Novamente deveria responder se o triângulo construído era congruente ao dado, indicando em cada situação se isto ocorreria “sempre”, “às vezes” ou “nunca”.

Na Fase III, era proposta uma situação problema, onde era fornecido a “Lucas”, nome fictício do personagem da atividade, um triângulo retângulo, construído com o Cabri. A seguir, Lucas usando as ferramentas “Transporte de ângulos” e “Transporte de segmentos” construía outros três triângulos retângulos. Com estes quatro triângulos e a ferramenta arrastar, Lucas formava uma figura que parecia, inicialmente, ser um losango. Após a construção, ele justificou por meio de uma prova que esta figura era um losango. A seguir, Lucas propunha que fosse verificado se seria possível construir outros quadriláteros a partir deste triângulo retângulo. E caso fosse possível, quais seriam eles. Nesta fase, o aluno precisaria justificar qual era o quadrilátero obtido e, para tanto, ele deveria partir da congruência de triângulos, obter os quadriláteros e identificar as suas propriedades. Não seria aceita a resposta, esta figura se “parece” com tal quadrilátero.

A partir desta situação de aprendizagem desenvolvida por sua equipe, Vagner elaborou a “semente” de sua própria sequência de atividades em julho de 2006, que foi denominada no presente trabalho *Esboço* (v. Anexo H). Neste *Esboço*, Vagner colocou as suas ideias iniciais, visando ao desenvolvimento de sua própria situação de aprendizagem e a submeteu à avaliação de seu orientador. Este lhe pediu que aguardasse a avaliação a ser realizada pelos professores-colaboradores, durante a fase do *design* coletivo, da versão postada no Teleduc; além de indagar-lhe qual a contribuição que este trabalho poderia trazer para o estado da “arte atual”, no que se referia à argumentação e à prova, em ambientes mediados pela tecnologia. O *Esboço* permaneceu inalterado até novembro de 2006, quando Vagner retomou e prosseguiu o desenvolvimento de sua situação de aprendizagem, dotando-a de uma nova estrutura.

O *Esboço* constou de uma fase inicial, cujo objetivo era analisar os pré-requisitos e elaborar uma análise *à priori*. A esta fase, seguiam-se outras (Fases I, II, III, IV, V e VI), as quais se propunham a ensinar, revisar e resgatar diversos conteúdos de Geometria, como paralelismo, ângulos, triângulos, quadriláteros notáveis e congruência de triângulos, além de fornecer uma familiarização com o Cabri-Géomètre. Na Fase I eram fornecidas atividades aos alunos, com o objetivo de verificar o conceito deles em relação a alguns entes geométricos, como retas, segmentos de reta, retas paralelas, retas perpendiculares, ângulos, polígonos, quadriláteros, losango, quadrado, paralelogramo, retângulo e trapézio.

Na Fase II, os alunos deveriam buscar algumas definições em livros e dicionários, e na Fase III, estes aprofundariam estes conceitos a partir da exploração no Cabri. Na Fase IV, diversas figuras deveriam ser construídas usando uma abordagem tradicional ou o Cabri. Na Fase V, seria utilizada uma atividade desenvolvida no AProvaME. Na Fase VI, os alunos

deveriam responder a algumas questões já relacionadas a provas. No *Esboço*, Vagner fez uso de alguns teóricos, para justificar a escolha e as sugestões de atividades em cada uma das fases.

5.2.1.3 SÍNTESE DO MOMENTO 1

De acordo com a análise das informações e dados obtidos na primeira entrevista e no *Esboço (E)*, pudemos identificar alguns elementos que caracterizaram o *Momento 1* da trajetória de Vagner:

Vagner relatou que tanto no decorrer de sua graduação, como do curso de especialização que frequentou após a sua formação inicial, os seus professores não abordaram a prova e, praticamente, nenhuma demonstração foi realizada. As poucas demonstrações ensinadas foram tratadas de uma forma superficial, além de possuírem um caráter de prova formal, sendo enfatizado apenas o seu aspecto mecânico e repetitivo. Enquanto aluno, em todas estas situações anteriores ao AProvaME, verificou que em nenhum momento os seus professores pensaram em solicitar aos alunos que construíssem uma demonstração, usando os seus próprios conhecimentos e recursos.

No decorrer de sua vida profissional, em uma fase anterior ao mestrado, manteve contato com alguns professores da mesma escola em que lecionava, que possuíam uma preocupação em desenvolver o raciocínio matemático em seus alunos, questionando o que eles faziam, procurando levá-los a pensar, a conjecturar e argumentar, sendo que este fato influenciou Vagner e fez com que ele fosse despertado para estas questões.

Assim, o seu ingresso no Mestrado Profissional e, posteriormente, no AProvaME decorreu de um interesse próprio, visando ampliar os seus conhecimentos e repensar a sua prática docente, pois ele gostaria de atuar com os seus alunos de uma forma diferente daquela que foi praticada pelos seus professores, daí o seu interesse em trabalhar com provas.

Para Vagner, a importância da argumentação se tornou mais evidente no decorrer de sua participação no AProvaME, na medida em que percebeu a importância em levar os alunos a argumentarem, mesmo que estes não conseguissem, em um primeiro momento, construir uma prova formal.

Porém, enquanto professor em sala de aula, relatou estar sentindo dificuldade em trabalhar com os seus alunos, para levá-los a argumentar e a construir uma prova. Ele observou que os alunos, de uma forma geral, nunca foram acostumados a trabalhar desta forma, e que, muitas vezes, rejeitavam este tipo de abordagem, não assumindo a postura de sujeitos ativos no momento de seus próprios aprendizados. Ele complementou que na

maioria das ocasiões os alunos manifestavam preferir a aula tradicional, aquela em que o professor fala e eles aceitam. Muitas vezes, quando o professor procura fazer com que eles parem, pensem, analisem e tirem conclusões, muitos deles oferecem resistência. Vagner considerou que para que esta abordagem consiga ser efetivada na sala de aula, será necessário mudar tanto a postura do professor, como a do aluno, de forma a instalar uma nova cultura na sala de aula.

Em relação à utilização de recursos computacionais em um processo de ensino e aprendizagem, Vagner constatou que o Mestrado Profissional, conjuntamente ao AProvaME possibilitaram o aprendizado de outros *softwares*, novas formas de se trabalhar com eles, novos enfoques e outras possibilidades em programas, que ele já conhecia anteriormente. Vagner considerou que o uso do computador pode proporcionar a realização de algumas coisas que o ambiente tradicional não permite, principalmente, no que se refere à visualização e à busca de padrões, dado o grande número de exemplos e simulações que podem ser feitas e analisadas em um tempo muito reduzido.

Assim, as funções do computador seriam as de possibilitar a exploração, o levantamento de dados, de hipóteses e de padrões, para que em um momento posterior se pudesse passar para as fases de generalização e formalização. Porém, para ele, até aquele momento ainda não havia ficado muito claro, como os recursos computacionais inseridos nas atividades poderiam ajudar nos processos de generalização e de formalização. Ele verificou que para a prova seria necessário desenvolver outras habilidades no aluno, que seriam a leitura e a interpretação, pois aquele aluno que se limitasse apenas a manusear o *software*, não sabendo como fazer uma leitura daquilo que realizou e obteve, este tipo de atividade não conseguiria levá-lo a nada.

Apesar de todos estes aspectos positivos, citados anteriormente, como a facilidade de visualização e de exploração, Vagner afirmou que o simples uso de programas em nada modificaria o contexto, se o professor não se conscientizasse da necessidade de elaborar novas estratégias e metodologias diferenciadas. Mas para que este novo comportamento pudesse ocorrer, a seu ver, os professores precisariam ampliar o seu contato com estes recursos tecnológicos, de forma a aprenderem a utilizá-los melhor.

Quando realizamos a primeira entrevista com Vagner, ele acreditava não ser muito difícil para os professores integrarem o computador em atividades que explorassem conteúdos matemáticos, bastando que estes possuíssem um embasamento teórico, além de algum treinamento para que estes aprendessem a lidar com os *softwares* que seriam utilizados. Analisando esta fala de Vagner, verificamos que, no momento desta entrevista, ele ainda não avaliava a complexidade deste processo.

No *Momento 1* de sua trajetória, a equipe de Vagner do projeto havia parcialmente finalizado a situação de aprendizagem, proposta para ela pelos pesquisadores e que se

tornou posteriormente a sua. Esta versão foi disponibilizada no Teleduc, e estava no aguardo de uma posição por parte de outros professores-colaboradores, que deveriam avaliá-la, emitindo comentários e sugestões de melhoria. Neste momento, Vagner relatou que a sua maior dificuldade havia sido o desenvolvimento da sequência didática para abordar o conteúdo proposto, seguido pelo trabalho junto à sua equipe do projeto. Ele comentou que o seu grupo colaborativo não conseguiu trabalhar de uma forma objetiva, os professores-colaboradores não focavam as atividades propostas e não as finalizavam no tempo solicitado, ficando sempre pendências entre as reuniões.

Enquanto aguardava esta avaliação, Vagner elaborou o *Esboço*, que continha as primeiras ideias, ainda com muitas incertezas, para a concepção de sua situação de aprendizagem. Este *Esboço*, continha muitas fases e atividades, porém nada muito focado, como se ele quisesse aproveitar muitas das sugestões e ideias que foram discutidas e debatidas no decorrer das reuniões e encontros que ocorreram no 1º semestre de 2006. Assim, ele aproveitou algumas atividades da situação de aprendizagem elaborada por sua equipe do projeto, pensou em algumas atividades que envolvessem pesquisas e leituras em livros e dicionários, a fim de resgatar os conceitos de geometria necessários para a execução das atividades, além de solicitar que os alunos escrevessem o que entendiam de diversos entes geométricos, e fizessem desenhos usando papel e lápis, além de realizarem algumas construções usando o Cabri. Este *Esboço* sofreu muitas alterações, até ser atingida a versão final, a que foi efetivamente aplicada aos alunos.

No *Esboço* está presente o uso do *software* Cabri-Géomètre, integrado às atividades. Este fato se deu devido à opção de sua equipe por este *software*, desde a sua primeira reunião no projeto realizada em março de 2006. Vagner apenas prosseguiu com a elaboração desta situação de aprendizagem. Ele já conhecia o Cabri, além de já ter cursado uma disciplina no Mestrado Profissional que aprofundou o estudo deste *software*.

Pelo fato de o *Esboço* se tratar de uma primeira ideia, elaborada muito no princípio do projeto, não pudemos identificar atividades que valessem a pena serem analisadas, em relação ao que se está investigando na presente pesquisa.

A partir de seu ingresso no AprovaME, pudemos identificar em algumas falas de Vagner (Entrevista 1), que ele já havia modificado um pouco a sua visão quanto ao significado de uma prova, que inicialmente se restringia a uma demonstração, passando a considerar o processo de raciocínio do aluno, bem como a importância de propiciar condições aos alunos para que estes possam produzir argumentações. Contudo, pudemos observar em diversas de suas falas, especialmente no início do projeto, que muitas vezes ele não diferenciava os termos prova de demonstração. Ou seja, quando ele se referia à prova, este termo, para ele, significava a prova formal ou demonstração.

5.2.2 MOMENTO 2

O segundo momento da trajetória de Vagner pode ser caracterizado pelas diversas versões por que passaram cada uma das partes de sua situação de aprendizagem desenvolvidas no decorrer de sete meses, de novembro de 2006 a maio de 2007, da aplicação do teste-piloto nos meses de março e abril de 2007, da finalização da *Versão Final* e da realização da segunda entrevista em abril de 2007. As informações relacionadas a este *Momento 2*, coletadas a partir dos instrumentos mencionados, são apresentadas e analisadas a seguir.

5.2.2.1 DIVERSAS VERSÕES DA SITUAÇÃO DE APRENDIZAGEM

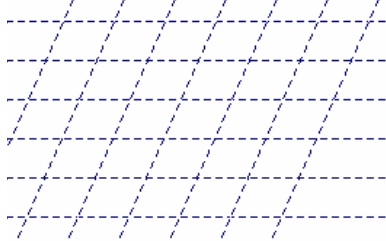
Como já descrevemos anteriormente, a situação de aprendizagem elaborada por Vagner não evoluiu no decorrer das versões como um grande bloco. A partir do *Esboço*, Vagner estruturou a sua situação de aprendizagem em três partes, que permaneceram até a *Versão Final*, apenas com mudanças ocorrendo no interior destas. As diferentes versões de sua situação de aprendizagem são descritas neste item, incluindo a *Versão Final*, que foi apresentada na dissertação de Mestrado de Vagner, além de serem indicadas as diferenças entre todas elas.

A primeira parte teve duas versões intermediárias, enquanto a segunda apenas uma, até atingirem a última versão. Estas duas partes originaram a 1ª Etapa e a 2ª Etapa da Fase Preliminar na *Versão Final*. As versões intermediárias da primeira parte foram designadas no presente trabalho de *F11* e *F12*, enquanto a única da segunda parte recebeu a denominação *F21*. Nestas versões o Vagner se referiu às atividades como sendo questões.

As versões *F11* e *F12* visaram resgatar conteúdos de geometria relacionados ao paralelismo e a ângulos entre retas concorrentes e retas paralelas interceptadas por transversais, revisando aos conceitos de ângulos correspondentes, alternos e opostos pelo vértice, sendo que algumas atividades ou questões solicitavam que os alunos justificassem as respostas. Todas as atividades (questões) presentes nestas duas versões eram para serem resolvidas usando lápis e papel.

A diferença entre as versões *F11* e *F12* é que Vagner introduziu na versão *F12*, uma atividade a mais, a questão 5, na qual o aluno já deveria colocar algum elemento de prova. As questões desenvolvidas nestas versões iniciais se assemelham àquelas presentes em livros didáticos ou listas de exercícios, com exceção desta questão 5, indicada a seguir (desenho 6), onde já se pode encontrar uma introdução à prova:

5) Abaixo você tem uma malha de retas paralelas. Usando-as, desenhe um paralelogramo qualquer. Usando seu desenho explique por que se diz que um paralelogramo tem ângulos opostos congruentes (isto é, de mesma medida).



Desenho 6: Questão 5 da versão F12, da situação de aprendizagem desenvolvida por Vagner. (Material cedido pelo Vagner).

A versão *F12* evoluiu para a ATMP 1 (Atividades no micro e prova), denominação dada por Vagner, sendo que esta versão foi aplicada no teste-piloto. No piloto as atividades desta fase não sofreram nenhuma alteração, permanecendo até a última versão. Na *Versão Final* estas atividades receberam a designação de 1ª Etapa.

Nas versões *F11* e *F12*, as atividades foram estruturadas de uma maneira que aluno praticamente só executava o que era solicitado. Da versão *F12* à ATMP 1 observamos uma grande evolução, na medida em que foram introduzidas atividades de observação e experimentação. Estas foram adicionadas de forma a possibilitar um contato maior do aluno com o computador, por meio da utilização do Cabri, além de fornecerem mais subsídios para que os alunos pudessem tirar conclusões.

A versão ATMP 1, que se constituiu na 1ª Etapa, constou de doze atividades, sendo que seis delas demandavam o uso do Cabri-Géomètre. As outras seis deveriam ser resolvidas usando lápis e papel, sendo que duas delas, as questões 3 e 5 saíram da versão *F21*, originando as questões 7 e 11 da ATMP 1, ou 1ª Etapa.

Das seis questões que propunham a utilização do Cabri-Géomètre, três delas usavam arquivos prontos (arquivos “P2”, “P3” e “P4”), com as figuras previamente construídas por Vagner, e as restantes solicitavam que os alunos procedessem a construções muito simples, como a construção de duas retas interceptadas por um transversal.

Nas três atividades iniciais onde o Cabri foi utilizado, os alunos deveriam construir duas retas paralelas interceptadas por uma transversal, identificar e medir os ângulos obtidos, para, em seguida, mover as retas (ferramenta ponteiro) e verificar se os ângulos se modificavam. Estas atividades tinham por objetivo que os alunos identificassem as propriedades dos ângulos obtidos entre estas retas, usando a geometria dinâmica. As três atividades seguintes eram direcionadas a fazer com que os alunos pudessem formalizar o

conhecimento, com questões a serem respondidas a lápis na própria folha de atividades distribuída a eles.

Nas outras três questões em que o Cabri foi utilizado, Vagner já fornecia as figuras construídas em nos arquivos previamente elaborados, de forma que o aluno apenas abrisse o arquivo e efetuasse o que estava sendo solicitado. Em seguida, na folha de atividades eram indicadas algumas explicações dos conceitos de geometria envolvidas naquelas atividades, com alguns questionamentos presentes nas outras três atividades a serem respondidas a lápis. Nestes arquivos, em que as figuras eram previamente fornecidas, os alunos deveriam manipulá-las para que pudessem também verificar as propriedades, validar as suas justificativas e tirar conclusões. Vagner esperava que, ao final desta atividade, os alunos já conseguissem identificar um paralelogramo e as suas propriedades.

No tocante a esta 1ª Etapa, as atividades visaram resgatar as noções de ângulos, retas paralelas, ângulos correspondentes, suplementares, opostos pelo vértice e paralelogramo. Conforme descrito anteriormente, ela foi constituída por 12 atividades (questões), e o Cabri foi utilizado em seis delas, e nas outras seis os alunos deveriam observar alguns desenhos envolvendo retas paralelas e ângulos e responder usando lápis e papel, às perguntas solicitadas.

Vagner classificou estas atividades feitas com o auxílio do Cabri, como pertencentes ao nível G1 de Parzysz (2001). Nestas atividades, o uso deste *software* foi solicitado quando os alunos precisaram se basear em medições, utilizando a ferramenta “medir ângulos” para identificarem se as retas eram ou não paralelas, visando ao aprendizado dos conceitos de paralelogramo e de ângulos correspondentes, alternos, colaterais e suas congruências.

As duas últimas atividades (questões 11 e 12), a serem resolvidas usando lápis e papel, poderiam ser classificadas como pertencentes ao nível G2, de Parzysz (2001), pois já propunham uma introdução à prova.

A segunda parte da situação de aprendizagem apresentou uma versão intermediária, a versão *F21*. As atividades que foram elaboradas nesta versão sofreram muita influência do trabalho desenvolvido pela equipe de Vagner, na Fase 2 do AProvaME, e tiveram por objetivo resgatar o conteúdo de geometria, relativo à congruência de triângulos. Inclusive muitas destas atividades saíram desta situação de aprendizagem, sofrendo apenas pequenas adaptações e/ou ampliações.

Esta versão (*F21*) foi dividida em três partes. Na primeira, os alunos deveriam usar o Cabri, para construir triângulos congruentes a um triângulo dado. Os alunos usariam as ferramentas “Transporte de segmentos” e “Transporte de ângulos”, desenvolvidas anteriormente pelos professores-colaboradores e pesquisadores da equipe de Vagner, por meio do recurso “programar macros”. Em seguida os alunos deveriam preencher uma

tabela, identificando se os triângulos obtidos (construídos) por meio dos itens ou dos elementos transportados eram congruentes ao primeiro triângulo ABC dado. Na segunda parte eram usadas varetas para se estudar e determinar os casos de congruência. Na terceira parte eram dadas questões envolvendo triângulos que deveriam ser respondidas usando lápis e papel, nas quais os alunos deveriam determinar lados e ângulos em triângulos congruentes ou não, devendo justificar as respostas, com elementos de demonstração, prova e formalização presentes nestas atividades.

Na versão *F21*, Vagner fornecia três arquivos prontos, com as figuras previamente construídas no Cabri (arquivos “C1”, “C2” e “Estudando Congruências”). No arquivo “C1”, estava construído um triângulo ABC qualquer e uma reta r . No arquivo “C2”, estavam representados segmentos de retas, ângulos e triângulos congruentes ou não, para que os alunos procurassem verificar onde ocorreria a congruência entre estes elementos. O outro arquivo denominado “Estudando Congruências” era composto de figuras móveis (ângulos e retas), a não ser quanto às medidas dos elementos que estabeleceriam os casos de congruência entre triângulos. A partir destas figuras móveis, os alunos deveriam tentar finalizar a construção do triângulo. Embora os alunos pudessem alterar as demais medidas, continuariam a verificar que os triângulos são congruentes.

Este arquivo, “Estudando Congruências”, pode ser visualizado a seguir (desenho 7):

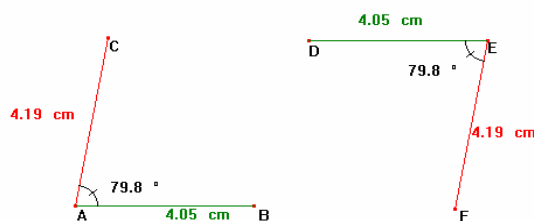
O ARQUIVO “ESTUDANDO CONGRUÊNCIAS

Esse arquivo é composto por figuras móveis a não ser quanto às medidas dos elementos que estabelecem um caso de congruência. Por exemplo, no caso ALA haverá um lado e dois ângulos a ele adjacentes cujas medidas não podem ser alteradas. Os alunos poderão mudar as outras medidas, mas deverão verificar que por mais variação que ocorra os triângulos serão congruentes.

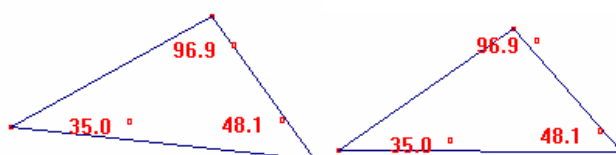
PRIMEIRO PAR



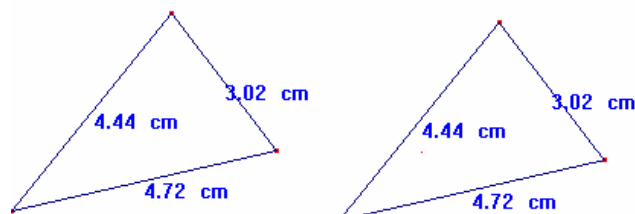
SEGUNDO PAR



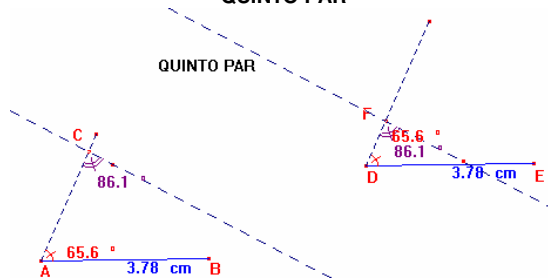
TERCEIRO PAR



QUARTO PAR



QUINTO PAR



Desenho 7: Arquivo “Estudando Congruências”, presente na versão *F21* e na *ATMP 2* e na *Versão Final* da situação de aprendizagem, desenvolvida por Vagner. (Material cedido pelo Vagner).

A versão *F21* sofreu algumas modificações importantes em relação à seguinte, a *ATMP 2*, que foi aplicada no teste-piloto, mantida sem nenhuma alteração a partir deste, se constituindo na última versão desta fase, denominada 2ª Etapa, na dissertação de Vagner. As três partes da versão *F21* foram reduzidas a apenas uma na *AMTP 2*. As atividades da

primeira parte, nas quais as figuras a serem construídas usavam o Cabri e necessitavam das macros: “Transporte de segmentos” e “Transporte de ângulos” foram retiradas, bem como as atividades da segunda parte que faziam o uso de varetas. As atividades que compunham a terceira parte, que propunham o uso de papel e lápis foram mantidas, além de terem sido adicionadas algumas outras que faziam uso do Cabri.

No tocante aos motivos das alterações que foram efetuadas a partir da versão *F21* para se atingir a AMTP 2, Vagner explicou que as atividades da primeira parte não foram utilizadas devido a “problemas operacionais”, que, para ele, se constituíram nas dificuldades que encontrou para trabalhar com as “macros” no Cabri. As atividades da segunda parte foram retiradas pelo fato de requererem o uso de varetas, que demandavam um tempo maior de aplicação, que ele já não dispunha. Porém, esta ideia de se trabalhar com varetas não foi abandonada, sendo parcialmente utilizada, em duas atividades da *Versão Final*, no Bloco I, quando Vagner quis provocar no aluno um desequilíbrio cognitivo, pois que não bastariam apenas três varetas quaisquer, para que um triângulo fosse obtido.

A ATMP 2, que se constituiu na 2ª Etapa constou de apenas uma parte, iniciando-se com uma parte introdutória, seguida de duas questões, formadas por vários itens cada uma delas. Nesta parte introdutória, inicialmente, Vagner definia elementos congruentes, como sendo aqueles que têm a mesma medida. Em seguida definia o que são triângulos congruentes e enunciava os casos de congruência de triângulos. Nesta parte introdutória, Vagner fez uso de dois arquivos previamente elaborados por ele, o “C2” e o “Estudando Congruências”, e que já estavam presentes na versão *F21*. As outras duas atividades (questões), compostas por diversos itens a serem respondidas a lápis na folha distribuída aos alunos, visava reforçar os casos de congruência de triângulos. A utilização do Cabri-Géomètre nesta versão ATMP 2 (2ª Etapa), ocorreu apenas nas atividades da parte introdutória e visou enfatizar os aspectos de observação e de manipulação.

No que se referiu à 2ª Etapa, Vagner relatou que a maior parte das atividades usando o Cabri estava localizada no nível G1, pois os alunos deveriam finalizar as construções de triângulos, previamente elaborados em arquivos por ele, seguindo as instruções recebidas e fazendo verificações por meio de medições.

Em relação à terceira parte, a sequência de atividades foi dividida em duas etapas. A primeira etapa, que na *Versão Final* da situação de aprendizagem passou a constituir o Bloco I (Conjecturas e Introdução à prova), passou por quatro versões intermediárias até atingir a versão final, duas anteriores ao piloto, o piloto constituiu a terceira versão e duas posteriores ao piloto. A versão efetivamente aplicada na pesquisa de Vagner foi a quinta versão desta sequência de atividades. Em nossa pesquisa estas versões intermediárias foram designadas *F31*, *F32*, *F33* e *F34*. Todas as cinco versões estavam divididas em duas

partes, a primeira fornecia questões que visavam à elaboração de conjecturas, e na segunda as atividades se constituíam em uma introdução à prova. A proposta do Bloco I foi a de fornecer uma articulação entre a geometria concreta e a geometria dedutiva.

A segunda etapa da terceira parte, que na *Versão Final* foi denominada Bloco II, se constituiu no jogo de cartas. Este jogo passou apenas por uma versão intermediária, a versão *F41*, que foi submetida ao teste-piloto, na qual foram introduzidas apenas pequenas alterações, originando o Bloco II.

A seguir, procedemos a uma breve descrição de todas as versões intermediárias da terceira parte da situação de aprendizagem de Vagner, que originaram o Bloco I (versões *F31*, *F32*, *F33*, *F34*) e o Bloco II (versão *F41*), incluindo estes dois blocos, sendo indicadas também as principais diferenças entre elas.

Em relação às versões que fizeram parte da primeira etapa, originando o Bloco I, iniciamos pelas versões anteriores ao piloto, a *F31* e a *F32*. Estas duas versões contaram onze atividades, seis iniciais dotadas de um caráter mais empírico e cinco finais, que propunham uma iniciação às provas, de um caráter mais formal. Das seis atividades iniciais, três (*F31*) e quatro (*F32*) delas faziam uso de materiais manipulativos, como varetas, folha de papel quadriculado e percevejo, de forma que os alunos a partir da experimentação, usando estes materiais, deveriam construir triângulos e quadriláteros, seguindo as orientações fornecidas. Uma das atividades propunha o uso do Cabri, e solicitava que o aluno construísse um paralelogramo e medisse os ângulos opostos. Ao final destas atividades iniciais eram feitas algumas afirmações, quanto às figuras construídas. Os alunos, ao analisarem estas afirmações, deveriam indicar uma resposta para cada uma delas, se elas eram “Verdadeira” ou “Falsa” na versão *F31*, enquanto na versão *F32* eles deveriam escolher uma dentre três possibilidades: “Verdadeira sempre”, “Verdadeira às vezes” e “Falsa”.

Da versão *F31* para a versão *F32*, ocorreu uma melhoria na linguagem, com uma escrita mais formalizada, além de uma alteração na ordem das atividades, com vistas à melhoria do encadeamento das ideias, na sequência dos assuntos tratados.

Ao pensar na questão da generalização, Vagner trabalhou melhor este aspecto da prova, na versão *F32*. Nesta versão, uma das atividades foi reformulada com o objetivo de verificar se os alunos se contradiziam ou não, depois de terem respondido a uma afirmação anterior. Ele pensou nesta atividade para mostrar aos alunos que eles não poderiam generalizar a partir de poucos casos particulares que já foram provados, ou seja, a validação empírica poderia falhar, sendo sempre necessário desenvolver a prova.

Este fato pode ser verificado nas atividades apresentadas, a seguir, presentes nos registros documentais cedidos pelo Vagner:

Usando o Cabri:

4) Construa um paralelogramo e meça seus ângulos opostos. Repita o procedimento para outros paralelogramos. Tendo em vista sua experiência, analise a afirmação:

“Se um quadrilátero é paralelogramo então os seus ângulos opostos congruentes”

Verdadeira Falsa

Em sua opinião:

5) “Para termos certeza que uma propriedade é sempre válida basta analisar vários casos onde essa veracidade se verifique.”

Verdadeira Falsa

Atividades 4 e 5 da versão F31 da situação de aprendizagem desenvolvida por Vagner.

6) Você receberá mais três varetas. Usando-as, deverá montar um triângulo. Levando em consideração o que você fez e respondeu na atividade anterior, em sua opinião:

“Para que uma propriedade seja válida basta analisar vários casos onde essa veracidade se verifique.”

Verdadeira Falsa

“João verificou que em 50 paralelogramos as diagonais se interceptavam (se cruzavam) nos respectivos pontos médios.”

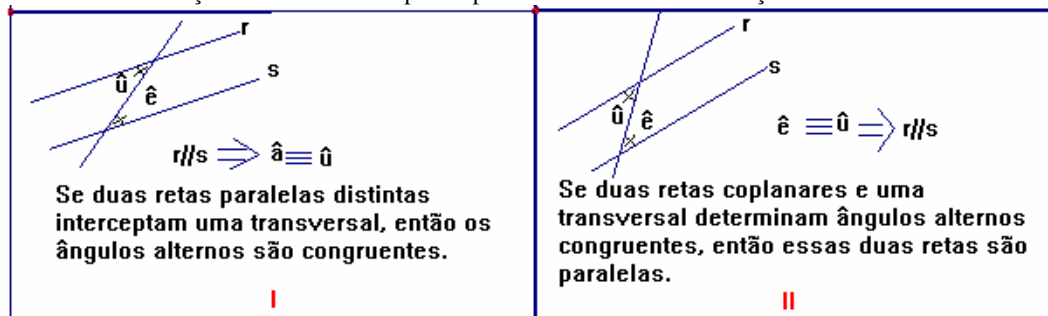
ele provou que em todo paralelogramo as diagonais se interceptam em seus pontos médios porque

ele não provou que em todo paralelogramo as diagonais se interceptam em seus pontos médios porque

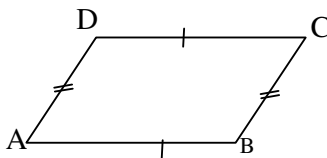
Atividade 6 da versão F32 da situação de aprendizagem desenvolvida por Vagner.

A segunda parte destas duas versões, contendo cinco atividades cada uma, visou propiciar uma “Iniciação às provas”. Estas atividades não foram modificadas, permanecendo iguais nas duas versões. A última atividade nestas duas versões (questão 11) almejava que o aluno desenvolvesse uma demonstração, construindo a prova formal (desenho 8):

11) Vamos usar as afirmações abaixo sem nos preocuparmos com suas demonstrações:



A partir delas e do esboço abaixo, você deve provar que “se um quadrilátero tem os lados opostos congruentes então ele é um paralelogramo”.



Formalize sua prova. Comece indicando a hipótese, quais são os triângulos congruentes que você usou, qual é o caso de congruência, justificando-o.

Desenho 8: Atividade 11 das versões *F31* e *F32* da situação de aprendizagem desenvolvida por Vagner.
(Material cedido pelo Vagner).

A versão *F33* foi a que foi utilizada no piloto, e sofreu algumas mudanças em relação à *F32* na primeira parte. Foram retiradas desta parte, as três primeiras atividades da versão *F32* que usavam materiais manipulativos, como varetas, folhas de papel quadriculado, percevejo e instrumentos de medida, como régua e esquadro. Estas três atividades foram substituídas por outras análogas, nas quais era utilizado o Cabri. Esta substituição visou informatizar a manipulação, pois, segundo Vagner, surgiu uma necessidade de praticidade, aliada ao fato do pouco tempo que ele dispunha para realizar a pesquisa, além de vir ao encontro da proposta inicial do AprovaME, que era integrar o computador nas atividades.

Porém, a integração e o uso do Cabri, nestas atividades, não foram muito explorados, pois o Vagner já fornecia os arquivos com as construções parcialmente prontas, funcionando mais uma vez como uma ferramenta de exploração e identificação de propriedades e padrões. O restante desta versão *F33* da situação de aprendizagem não sofreu mais alterações em relação à versão *F32*, mantendo, inclusive, o mesmo número de questões, onze no total, seis na primeira parte e cinco na segunda.

Após o piloto, Vagner procedeu a uma pequena alteração na versão *F33*, originando a versão *F34*. A modificação se deu na primeira atividade; na versão *F33* era fornecido ao aluno um arquivo, com pares de segmentos congruentes, previamente construídos com o Cabri, com os quais ele deveria formar um quadrilátero qualquer, para, em seguida, verificar se este quadrilátero era um paralelogramo e, depois, analisar a afirmação proposta: “Se os

lados opostos de um paralelogramo são congruentes, então esse quadrilátero será um paralelogramo”.

Na versão *F34*, esta questão foi dividida em dois itens, *a* e *b*. A mudança se deu no item *b*, que solicitava que a partir de dois segmentos quaisquer, usando a ferramenta “compasso” do Cabri, o aluno obtivesse um quadrilátero, cujos lados opostos seriam congruentes. O aluno deveria verificar usando as ferramentas do Cabri, se este quadrilátero era um paralelogramo. Em seguida o aluno deveria analisar a mesma afirmação enunciada anteriormente. A seguir, é apresentada a mesma atividade 1, nas duas versões (versão *F33* e versão *F34*), fornecida por Vagner e presente em seus registros documentais:

Vamos definir **paralelogramo** como o quadrilátero que possui **lados opostos paralelos**.

No arquivo “PARES DE SEGMENTOS CONGRUENTES”:

1) Tome dois pares de segmentos congruentes e forme com eles um quadrilátero.

Verifique se ele é um paralelogramo. Repita a operação para outros pares de lados congruentes. Tendo em vista a experiência que você acabou de realizar, analise a afirmação:

“Se os lados opostos de um quadrilátero são congruentes, então esse quadrilátero será um paralelogramo”.

() Verdadeira sempre () Verdadeira às vezes () Falsa

Atividade 1 da versão *F33* da situação de aprendizagem desenvolvida por Vagner.

Vamos definir **paralelogramo** como o quadrilátero que possui **lados opostos paralelos**.

No arquivo “PARES DE SEGMENTOS CONGRUENTES”:

1) a) Tome dois pares de segmentos congruentes e forme com eles um quadrilátero. Você deverá verificar, com as ferramentas do Cabri, se ele é um paralelogramo. Como poderá fazer isso? _____

Repita a operação para outros pares de lados congruentes.

b) Trace um segmento e rotule suas extremidades como A e B. Trace outro segmento qualquer AC (origem em A e extremidade num ponto qualquer a ser rotulado como C). Usando a ferramenta “compasso” você deve transportar esses dois segmentos formando um quadrilátero cujos LADOS OPOSTOS SÃO CONGRUENTES. Verifique, com as ferramentas do Cabri, se ele é um paralelogramo.

Tendo em vista a experiência que você acabou de realizar, analise a afirmação:

“Se os lados opostos de um quadrilátero são congruentes, então esse quadrilátero será um paralelogramo”.

() Verdadeira sempre () Verdadeira às vezes () Falsa

Atividade 1 da versão *F34* da situação de aprendizagem desenvolvida por Vagner.

A versão *F34* originou uma quinta versão, que constituiu o Bloco I da *Versão Final*, efetivamente aplicado na pesquisa conduzida por Vagner, conforme apresentado em sua dissertação de mestrado.

Em relação às alterações efetuadas na versão *F34* para se obter Bloco I, uma delas foi a decisão de Vagner em apresentar a definição dos termos hipótese e tese, na introdução deste bloco, antes da primeira atividade, além de explicar como estes elementos

podem ser identificados em uma expressão ou proposição. Em seguida, nas quatro primeiras atividades, ao final, depois de ser colocada a afirmação a ser analisada, a partir das construções realizadas, era solicitado ao aluno que este identificasse na proposição quais os trechos referentes à hipótese e à tese.

Na segunda parte da situação de aprendizagem, nas atividades 9, 10 e 11, voltadas à prova, Vagner suprimiu no Bloco I algumas frases ao final delas em relação à F34. Ele considerou que havia direcionado demais a resposta do aluno com muitas explicações, bem como queria verificar como este aluno poderia obter a prova, com mais liberdade de pensamento, usando os conhecimentos que dispunha nos temas que envolviam paralelismo e congruência de triângulos. Nesta versão foram mantidas as onze atividades, seis na parte inicial e cinco na segunda parte.

A seguir descrevemos brevemente o Bloco I (Conjecturas e Introdução à prova) e o Bloco II (Jogo de Cartas), a partir de informações apresentadas na dissertação de Vagner, e de algumas explicações que ele nos forneceu no decorrer de nossa pesquisa:

A proposta do Bloco I foi a de fornecer uma articulação entre a geometria concreta e a geometria dedutiva. Este bloco foi dividido em duas partes:

Atividades 1 a 6 – Questões de validação empírica, nas quais foi utilizado o Cabri (1 a 4) e varetas (5 e 6), que tiveram por objetivo apresentar as proposições aos alunos com os seus elementos: hipótese e tese, além de verificar as concepções dos alunos quanto à extensão de uma validação empírica, ou seja, analisar como os alunos validavam uma prova empírica.

O Cabri nestas atividades também foi utilizado como uma ferramenta de visualização e para testar as propriedades. As cinco primeiras questões (1 a 5) eram de validação experimental (empírica) de algumas proposições referentes às propriedades dos paralelogramos. O objetivo destas questões foi o de apresentar aos alunos alguns exemplos de proposições, evidenciando a sua estrutura, a hipótese e a tese. Vagner considerou a tese como sendo uma conclusão, que geralmente aparece escrita após a palavra “então”. A hipótese foi considerada como uma condição que contém pelo menos uma informação, a partir da qual se inicia o raciocínio para se obter a tese e começa, geralmente, com a expressão “se”. O aluno deveria partir da hipótese (aceitar a hipótese), verificar a respectiva tese, ou seja, verificar se acontece a tese. Um fato (hipótese) implicaria outro fato (tese).

As atividades solicitavam que os alunos utilizassem o Cabri (questões 1 a 4) ou as varetas (material concreto – questões 5 e 6) e efetuassem as construções pedidas. Nas questões em que o uso do Cabri era requisitado, os alunos deveriam perceber com quais elementos geométricos (segmentos, retas paralelas, pontos médios) poderiam construir a

hipótese solicitada e com que ferramentas de verificação do programa (verificação de paralelismo, congruência) identificariam a tese por meio da percepção visual e das informações fornecidas pelos recursos do programa tal como “retas paralelas”. Vagner explicou que os procedimentos presentes nestas atividades estão relacionados com as ideias de Machado (1995), no que se refere ao seu “tetraedro”, o que este autor considerou como sendo as quatro dimensões do pensamento geométrico, a saber: a percepção, a construção, a representação e a concepção. Nas quatro primeiras questões, ainda, é solicitado que os alunos identifiquem na redação da questão, qual parte corresponde à hipótese e qual parte corresponde à tese.

A questões 5 e 6 pretendiam motivar o aluno a buscar outros tipos de prova, não apenas a empírica (nível G1 de Parzysz), para que o aluno não confiasse apenas na intuição. O objetivo destas questões foi o de provocar um desequilíbrio cognitivo no aluno.

Atividades 7 a 11 – Questões de validação formal, que tiveram por objetivo verificar o desempenho dos alunos no momento em que estes fossem construir uma prova mais rigorosa. Nestas questões cada conclusão deveria ser justificada e escrita corretamente não mais a partir de procedimentos empíricos, mas sim usando proposições já existentes. Vagner apontou que estas atividades se encontram no nível G2 de Parzysz, o nível proto-axiomático. Para se efetuar uma prova, os alunos deveriam partir do uso de resultados já admitidos como verdadeiros, ou seja, estes resultados não precisariam mais ser provados para serem usados nas provas de teoremas.

As atividades seguintes se referiram à segunda etapa da terceira parte da situação de aprendizagem, o jogo de cartas que originou o Bloco II. Vagner pensou em desenvolver um jogo de cartas, devido às informações de colegas professores, agregado à sua vivência de muitos anos como docente no ensino público, que era provável que os alunos nunca tivessem realizado uma demonstração. Assim esperava que os alunos encontrassem muita dificuldade em elaborar provas formais, no momento de articularem as proposições a serem utilizadas.

Preocupado com este fato, Vagner elaborou um jogo de cartas, que funcionava como se fosse um “quebra-cabeças”, onde os alunos deveriam colocar as cartas em uma determinada sequência até conseguirem construir uma prova. Nas cartas estavam escritas algumas proposições, bastando que os alunos selecionassem as cartas e as encadeassem em uma ordem lógica, de forma a obterem a prova esperada. Estas cartas funcionariam como “lembretes” aos alunos, seriam dicas de proposições que estes poderiam utilizar. Vagner pensou nas cartas como uma forma de ajudar os alunos, especialmente àqueles que

nunca haviam realizado uma prova formal, para que conseguissem articular as proposições a serem utilizadas na construção de uma demonstração.

O jogo de cartas passou apenas por uma versão intermediária, que foi designada na presente pesquisa de *F41*. Esta versão foi elaborada antes do teste-piloto, sendo submetida à análise neste teste. Após a realização do piloto, ela sofreu apenas duas pequenas modificações, sendo designada na *Versão Final* de Bloco II, conforme apresentado na dissertação de mestrado de Vagner.

Uma mudança foi a inclusão de uma planilha, a ser usada pelos alunos no decorrer do jogo, onde estes deveriam fazer algumas anotações, por meio de dois registros, um escrito e outro figural, onde indicariam o caminho que seguiram, ou seja, as cartas que escolheram, na direção de atingir a prova formal. A análise das planilhas teve como objetivo acompanhar o progresso dos sujeitos de sua pesquisa, antes e depois de algumas intervenções e do uso de alguns recursos do jogo, de forma a recolher o material suficiente para responder à questão da pesquisa de Vagner.

A segunda alteração se deu na redação de uma das cartas do jogo. Esta carta possuía a seguinte redação: "Em triângulos congruentes, lados e ângulos correspondentes também são congruentes". A nova redação desta carta passou a ser a seguinte: "Em figuras congruentes, os elementos correspondentes também são congruentes". Essa alteração foi realizada para possibilitar que esta carta também pudesse ser usada em outras figuras, não apenas triângulos. Esta ideia de alteração, segundo Vagner, surgiu a partir de uma conversa com uma aluna, após a realização do teste-piloto.

Em relação ao Bloco II (Jogo de Cartas), sua elaboração foi realizada por Vagner com muito cuidado, tanto em relação aos conceitos trabalhados, como as regras, ou aspectos técnicos, que deveriam ser respeitados pelas duplas de alunos. Neste jogo de cartas, os teoremas equivalentes às várias definições de paralelogramo foram explorados e articulados.

O objetivo do jogo de cartas era realizar o maior número possível de provas das propriedades dos paralelogramos. Este jogo foi formado por 38 cartas. Vinte delas constituíram as provas, teoremas, provas e os seus recíprocos (Prova A, Prova a, Prova B, Prova b, ..., Prova I, Prova i, Prova J, Prova j) cujos enunciados eram as propriedades dos paralelogramos que deveriam ser provadas. Pode-se citar como exemplo:

- Prova A - Em todo paralelogramo dois ângulos opostos quaisquer são congruentes.
- Prova a – Todo quadrilátero que tem os ângulos opostos congruentes é paralelogramo.

Vagner escolheu estas denominações para as provas nas cartas, porque ele quis designar um teorema pela letra maiúscula, enquanto o seu recíproco pela mesma letra, porém minúscula.

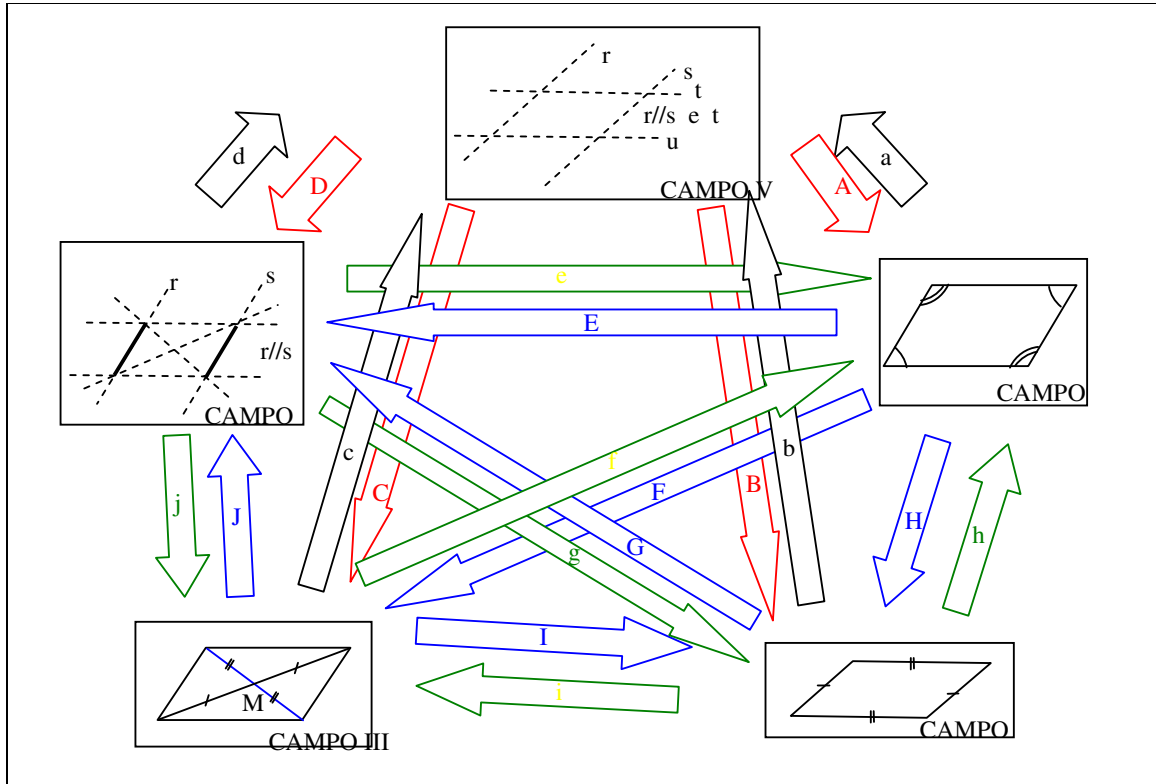
As outras 18 cartas restantes, denominadas “cartas-condição” (carta I a carta XVIII) deveriam ser usadas para que os alunos conseguissem realizar a prova. Os enunciados destas cartas se referiam a proposições e casos de congruência. Por exemplo:

- Carta I - Se duas retas paralelas distintas interceptam uma transversal, então os ângulos são congruentes.
- Carta IV - USO DA DIAGONAL MENOR
- Carta VII - ÂNGULOS OPOSTOS PELO VÉRTICE SÃO CONGRUENTES
- Carta VIII - LAL – Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes dois lados e o lado compreendido, então eles são congruentes.

Em muitas destas cartas, além do texto, também estava presente um esboço, um registro figural, da proposição ou da propriedade indicada.

As provas deveriam ser feitas por alunos em duplas e eles competiriam entre duplas. O objetivo seria construir as provas. Cada dupla deveria escolher uma propriedade do paralelogramo para provar. Para tanto, a dupla receberia todas as “cartas-condição”, selecionaria as adequadas, as colocaria em ordem de modo que uma implicasse a ocorrência da seguinte, ligando a hipótese à tese. As duplas deveriam articular estas cartas, sendo previsto um prazo para que cada uma obtivesse a prova. Quando o tempo terminasse, cada dupla deveria anotar em uma planilha recebida, obedecendo a uma determinada ordem, as “cartas-condição” que foram utilizadas na prova e a submeteriam à avaliação da outra dupla. Ao terminar cada rodada, ou seja, cada uma das duplas já deveria ter elaborado a sua prova, além de ter avaliado a prova produzida pela equipe “oponente”. Além disso, o pesquisador, também, ao final de cada rodada, deveria analisar as duas provas, uma realizada pela dupla, que poderia ser ou não validada, e a avaliação desta mesma prova produzida pela outra dupla, a da equipe oponente.

Vagner representou, também, as vinte provas realizadas num tabuleiro com cinco regiões denominadas “campos”. Nestes campos as provas tinham uma representação figural de todas as afirmações, que poderiam ser em um determinado momento uma hipótese e em outro, uma tese (desenho 9).



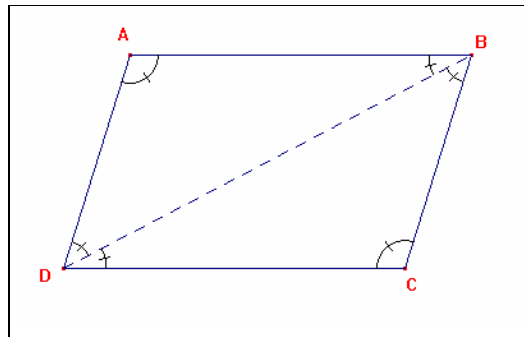
Desenho 9: Tabuleiro do jogo de cartas reduzido, onde estão representados os cinco campos. Fonte: Dissertação de Mestrado de Vagner.

Vagner também elaborou e aplicou aos alunos, antes de iniciar o Bloco II uma pré-atividade, onde eram fornecidas 12 cartas, que deveriam ser colocadas em uma determinada sequência, porém estas não estavam escritas em linguagem matemática, mas de forma coloquial.

Esta pré-atividade foi pensada por Vagner, como uma maneira de tentar minimizar uma das dificuldades dos alunos no desenvolvimento de uma prova, que seria a de articular as proposições em uma determinada sequência de forma que a tese de uma, fosse a hipótese da outra, ou seja, uma carta não poderia ser utilizada se a hipótese nela escrita ainda não tivesse sido previamente demonstrada. Ele forneceu o seguinte exemplo para a apresentação de um teorema e de seu recíproco: a prova de um “teorema” (Se uma pessoa é mordomo, então ela é um ladrão) e o seu “recíproco” (Se uma pessoa é um ladrão, então ela é um mordomo). As cartas foram fornecidas aos alunos de uma forma embaralhada.

Porém Vagner apontou que caso os alunos obtivessem sucesso nesta atividade (pré-atividade lógica), este fato não garantiria um bom desempenho na fase seguinte, o jogo de cartas. No caso desta pré-atividade, a tese de uma carta acabava por se tornar idêntica à hipótese da carta seguinte. Enquanto no jogo as condições a considerar para a nova tese não estavam disponíveis de uma forma tão explícita.

Ainda em relação à sua situação de aprendizagem, Vagner relatou que no decorrer da aplicação do teste-piloto surgiu a ideia de acrescentar uma outra atividade à sequência, que usaria a figura representada a seguir (desenho 10):



Desenho 10: Ideia de outra atividade surgida a partir do teste-piloto e que não foi implementada na *Versão Final* da situação de aprendizagem de Vagner.
Fonte: Dissertação de Mestrado de Vagner.

O objetivo desta atividade era que os alunos recortassem e manuseassem esta figura. Esta ideia surgiu em Vagner a partir dos estudos de Machado (1995), em relação às dimensões do pensamento geométrico relacionadas à construção e à percepção. Todavia esta atividade não foi implementada na pesquisa de Vagner.

5.2.2.2 ENTREVISTA 2

Realizamos a segunda entrevista com Vagner em abril de 2007. Naquele momento ele estava finalizando a *Versão Final* de sua situação de aprendizagem, a partir das observações que haviam sido levantadas no decorrer da aplicação do teste-piloto a três alunos, nos meses de fevereiro e março deste mesmo ano. Organizamos as informações obtidas em quatro temáticas conforme explicitadas anteriormente (*Item 4.2.5.2 A segunda entrevista*), as quais se encontram descritas e analisadas nos próximos itens.

Dados pessoais

No momento da realização da segunda entrevista, Vagner ainda contava com 38 anos, estando formado há dezessete anos e continuava lecionando Matemática no Ensino Médio, nos dois primeiros anos, na mesma escola estadual do interior do Estado de São Paulo, de quando realizou a primeira entrevista.

*Diferentes fases na elaboração da atividade
até atingir a versão final*

Vagner explicou que a sua situação de aprendizagem partiu dos memoriais do AProvaME. Ele relatou ter utilizado inicialmente as atividades elaboradas em conjunto pela sua equipe do projeto, que sofreram algumas alterações quando ele pegou para si o desenvolvimento desta sequência. Ele comentou que, no momento da realização desta segunda entrevista, já havia finalizado o teste-piloto e iria iniciar a aplicação da versão final nos próximos dias. Esta situação de aprendizagem foi direcionada aos alunos da oitava série do ensino fundamental e do 1º ano do Ensino Médio.

Ele observou que o seu público-alvo não havia aprendido quase nada de geometria na escola, sendo que muitos alunos nem sabiam ao menos o que era um paralelogramo. Vagner, diante desta situação, resolveu elaborar uma “provinha” (avaliação diagnóstica) para verificar o que os alunos sabiam e até que ponto conseguiriam chegar. Após a aplicação desta avaliação, os resultados confirmaram que estes alunos não tiveram praticamente nada de geometria. Alguns apenas sabiam o que eram retas paralelas e nada mais em termos de conteúdos de geometria, que deveriam ter sido trabalhados no ensino fundamental.

Vagner relatou que a situação de aprendizagem desenvolvida pela sua equipe do AProvaME não foi analisada por nenhum dos grupos que participaram da fase do *design* coletivo. Ele ponderou que, embora não tenha ocorrido esta análise, as diversas atividades foram muito discutidas no decorrer do 1º semestre, com muitas contribuições dos professores-colaboradores, tanto que muitas vezes era difícil “fechar os acordos”. Ele considerou as ideias que foram surgindo no decorrer desta elaboração coletiva muito interessantes, propiciando uma contribuição por parte dos colegas, que foi muito positiva. Porém, ele relatou que, no decorrer do segundo semestre, se distanciou um pouco em relação ao que havia sido previsto inicialmente, e que, em alguns momentos, ele modificou as atividades e, em outros, as manteve somente alterando a ordem.

Inicialmente, Vagner aproveitou em parte as duas pré-atividades (Fases I e II), originadas do AProvaME, cujo objetivo era resgatar e ensinar alguns tópicos de geometria. Em uma etapa seguinte, pensou em aproveitar em parte a Fase III, porém efetuando algumas alterações. Algumas das atividades que foram retiradas, se referiam ao uso das macros, “Transporte de segmentos” e “Transporte de ângulos”, elaboradas pela sua equipe, pois Vagner sentiu dificuldade em relação ao uso desta ferramenta do *software*.

Ao final do 2º semestre de 2006, Vagner verificou que haviam sido postados no fórum do Teleduc, dois comentários de professores, relativos à situação de aprendizagem, de acordo com aquela disponibilizada no final do primeiro semestre. Devido a fatores como

o tempo que lhe restava para finalizar o trabalho, além de um rumo diferente que as suas atividades haviam tomado, Vagner decidiu não ler estes comentários.

Em relação à *Versão Final* de sua situação de aprendizagem, quando comparada ao que havia sido desenvolvido pela sua equipe no decorrer do primeiro semestre de 2006, e finalizada parcialmente ao final deste semestre, Vagner explicou que o uso da informática ficou mais concentrado nas atividades de familiarização, que ele denominou de 1ª Etapa e 2ª Etapa. Na versão que foi postada no Teleduc, estas etapas foram designadas de fases (Fases I, II e III). Na Fase I as atividades foram pensadas de forma que os alunos pudessem se familiarizar com os tipos de quadriláteros e na Fase II, com os casos de congruência. A alteração que Vagner efetuou em relação à Fase I foi priorizar o paralelismo e os ângulos entre retas paralelas e concorrentes. No que se referiu à Fase II, embora ele tenha feito algumas adaptações, as atividades sobre congruência de triângulos foram praticamente mantidas. Quanto à Fase III, praticamente nada foi fechado no decorrer das reuniões do AProvaME, sendo que ele assumiu sozinho o desenvolvimento desta fase, inclusive o jogo. Vagner, então, pensou em dividir esta fase em duas partes: a primeira seria uma introdução às provas, mesmo as empíricas e depois as atividades que levariam a uma formalização. O jogo iria auxiliar a construção da parte formal da prova. Ele relatou que a sua pesquisa começaria neste ponto, na Fase III. As duas anteriores deveriam ser aplicadas devido à necessidade de ensinar geometria.

Vagner prosseguiu explicando o porquê de ter desenvolvido um jogo de cartas, que os alunos deveriam utilizar ao tentarem desenvolver uma demonstração. Nas cartas estariam escritos alguns elementos que seriam usados, pelos alunos, durante a construção da prova formal:

“No meu caso desenvolvi um jogo de cartas para o aluno tentar fazer a demonstração. Essas cartas traziam alguns elementos da prova, então, na verdade, eles teriam que organizar estes elementos e construir assim a prova completa, a demonstração completa.”

Vagner pensou nas cartas, devido ao fato de os alunos não terem aprendido nada de geometria. Assim, ele poderia resgatar o conteúdo básico que eles precisariam para que pudessem trabalhar com as provas propostas nas atividades. Nas cartas, os alunos poderiam visualizar algumas propriedades, como as relacionadas ao paralelismo, ângulos e congruência de triângulos, sem necessidade de memorizá-las. Ele citou alguns exemplos de cartas, como:

“Uma delas dizia que se eu tenho retas paralelas, elas determinam com uma transversal, ângulos correspondentes congruentes; outra afirmava que ângulos opostos pelo vértice são congruente, quatro cartas correspondiam aos quatro casos de congruência.”

Em seguida Vagner discorreu um pouco sobre como iria funcionar este jogo:

“Por exemplo, se um aluno quiser usar algum caso de congruência, digamos que ele queira usar o caso ALA, ele vai ter que procurar no paralelogramo, um lado comum e dois ângulos adjacentes a este lado congruentes dois a dois. Então ele tem presente nas cartas, na verdade, todos os elementos que ele necessita para fazer uma prova. Primeiro, ele deverá identificar quais são esses ângulos e localizar o lado comum. Com estes três elementos, ele poderá obter a prova, usando o caso de congruência, que neste caso seria o ALA. Assim sendo, para o aluno fazer uma prova, ele deverá encadear uma certa sequência com alguns elementos de prova. Essas cartas já trazem esses elementos prontos. É como se fossem lembretes para o aluno, para que não tenha que fazer tudo sozinho. A parte do aluno seria ver qual carta... ou seja quais dos elementos seriam os apropriados para aquela prova e colocá-los na sequência correta.”

Quando questionado quanto às dificuldades que sentiu na etapa em que os professores-colaboradores elaboraram coletivamente a situação de aprendizagem, Vagner relatou que a principal dificuldade foi a de não ter se identificado plenamente com todos os acordos, com todas as ideias que surgiam. Devido ao fato de a situação de aprendizagem proposta para o grupo ter se tornado a sua própria pesquisa, ou seja, de algo coletivo, mudou-se o enfoque para o particular, ele começou no decorrer de seu processo a se distanciar um pouco das atividades originais, as que foram desenvolvidas pela sua equipe do AProvaME.

Em algumas das versões intermediárias de sua situação de aprendizagem, Vagner também percebeu que muitas vezes direcionava os alunos, resolvendo quase que por completo as questões propostas. Assim, para ele, outra dificuldade era acreditar que os alunos tinham potencial e que conseguiriam desenvolver as atividades sem tanto direcionamento:

“E a nossa dificuldade era acreditar que o aluno conseguiria se soltássemos a mão dele, ele teria mais potencial sozinho, sem necessidade de direcionar tanto as atividades. Esta dificuldade não foi somente minha, mas também de mais colegas, da gente sentir a necessidade de estar colocando mais detalhadamente para o aluno, para que este conseguisse assimilar o que estava sendo proposto pela atividade.”

Versão final da atividade: abordagem da prova, desafios, limitações e aplicação junto aos alunos

No momento da realização desta entrevista, Vagner já havia aplicado o teste-piloto a alguns estudantes, que no início eram seis, mas finalizaram apenas três. Destes três, uma aluna conseguiu terminar toda a situação de aprendizagem e atingir a prova formal. A aplicação completa da situação de aprendizagem com os sujeitos de sua pesquisa se daria no mês seguinte.

Quanto ao teste-piloto, Vagner relatou que esta aplicação durou aproximadamente 30 horas. No início, ele ensinou os alunos a usarem o Cabri, sendo que este fato foi positivo para eles, pois lhes facilitou o aprendizado da geometria. Em seguida, Vagner ensinou alguns conteúdos de geometria, que se fizeram necessários para um bom andamento da pesquisa e os alunos que permaneceram até o final do piloto, pareceram gostar das atividades. Vagner relatou que estes alunos se interessaram e acharam válido trabalhar com demonstrações. Ele observou que quando a atividade começou a exigir a parte formal, eles tiveram um pouco de dificuldade. Ao encerrar o piloto estes alunos já estavam conseguindo um melhor resultado. Vagner considerou que, se caso continuasse por mais alguns dias, estes alunos, talvez, pudessem produzir um pouco mais. Ele observou uma real mudança nestes alunos, pois estes, que até aquele momento nunca tinham aprendido geometria, conseguiram se desenvolver da direção de construir uma prova.

Vagner relatou que a maior dificuldade ao realizar o piloto foi a de manter os alunos na pesquisa, pois conforme já apontado anteriormente, começaram seis alunos e finalizaram apenas a metade deles. E mesmo os três que concluíram o piloto não puderam comparecer a todos os encontros. Dessa forma, em muitas ocasiões, Vagner precisou modificar o que iria aplicar naquele encontro, reformulando as atividades, em função do que estava ocorrendo naquele momento, para poder deixar todos os alunos a par dos conteúdos trabalhados.

A partir das observações e dos resultados obtidos no piloto, cuja aplicação mostrou-se relevante, Vagner relatou que procedeu a algumas modificações em sua situação de aprendizagem. Estas ocorreram na terceira etapa, nos Blocos I e II. No que se referiu ao jogo (Bloco II), ele percebeu que, no momento em que o aluno fosse efetivar a prova, ou seja, quando fosse construir a demonstração, seria interessante fornecer a este um material suplementar, uma folha de papel, que o ajudaria a organizar as cartas, a rascunhar e expressar as suas ideias, deixando impresso o seu registro. Este rascunho poderia auxiliar o aluno a organizar o seu raciocínio e encadear as suas ideias:

“Eu percebi que mesmo o aluno tendo todos os elementos que precisava para a prova, ele ainda tinha dificuldade de organizar o raciocínio. Então o que vai ter agora na pesquisa é uma folha suplementar onde ele pode, além de anotar as cartinhas ou elementos que usando, também poderá rascunhar. Acho que o aluno sentiu a necessidade de rascunhar, percebi isso no piloto. E uma fase importante do piloto foi que deu para perceber que alunos que não tinham nada de geometria conseguiram já desenvolver alguma coisa de prova. A sequência do raciocínio correta, saindo da hipótese e chegando à tese. Então foi um avanço, também.”

Vagner relatou que a aluna, que conseguiu atingir a prova formal no piloto, a enunciou de forma oral. Ele precisou gravar a fala dela em relação aos passos que realizou, em seguida produziu um registro escrito e lhe mostrou, pedindo a ela que identificasse o que havia feito. Vagner apontava os elementos no desenho e questionava. Em seguida a aluna confirmava ou não, e apontava os elementos solicitados por Vagner. Dessa forma, ele se deu conta de que precisaria, também, trabalhar com os alunos a maneira destes se expressarem, para que ele pudesse entender a que elementos os alunos estavam se referindo.

Ele gostaria de que os alunos tivessem condições de produzir um registro escrito, mas também não poderiam descuidar da notação:

“Além do rascunho, vou ter que melhorar neles a notação. Percebi que devo ensinar agora na fase preliminar, treinar o aluno a fazer representação simbólica, ou mesmo escrita, do que ele precisa colocar no papel, ou seja, ele deverá usar a notação matemática.”

Outra dificuldade citada por Vagner foi o fato de ter percebido que, muitas vezes, ele apresentava uma tendência em direcionar muito as atividades nos objetivos que ele pretendia atingir:

“É direcionar o aluno naquilo que eu quero chegar...Porque tem aquele momento em que o aluno dá aquela parada e não adianta deixar ele sozinho que eu sei que não vai ter saída. Mas deu para aprender a ficar um pouco mais quieto, esperar o pessoal...Deu para aprender a ter um pouco mais de paciência, esperar o aluno sem fazer intervenção antes do momento certo.”

Em relação às propostas iniciais da situação de aprendizagem, a que havia sido desenvolvida por sua equipe do AProvaME, Vagner relatou que a maior mudança se deu no tocante à não inserção do computador nas atividades, com vistas a auxiliar os alunos na construção da prova.

A ideia inicial do grupo em relação aos alunos era que eles a partir de duas diagonais perpendiculares, deveriam verificar quais eram os quadriláteros que poderiam ser obtidos.

Nestas construções seriam solicitados alguns elementos de prova. Embora muito se tenha debatido, esta atividade usando os recursos do Cabri acabou não sendo realmente desenvolvida. O semestre terminou e a sequência ficou em aberto.

Quando Vagner prosseguiu com o desenvolvimento da situação de aprendizagem, apesar de ele ter um pouco de conhecimento do Cabri, não conseguia pensar em como poderia integrar este recurso nas atividades, com vistas a construir uma prova, tampouco sabia utilizar o recurso para elaborar macros. Em decorrência das dificuldades que estava enfrentando, Vagner optou por focar outro aspecto, considerado por ele como sendo mais formal, tentou organizar o raciocínio do aluno por meio do jogo de cartas e deixou de lado o uso do computador.

A seguir estão apresentados alguns extratos de suas falas:

“Eu tentei um outro aspecto mais formal, que seria o aluno estar usando estas cartinhas para organizar o raciocínio dele. Então, acabei praticamente fugindo do computador na minha dissertação; mas a ideia do AProvaME ainda ficou lá.”

“Eu sempre concebi o computador como um auxílio na aprendizagem. Agora, no momento da prova eu tive dificuldade em ver como seria, por exemplo, a construção: ‘provar através da construção’ e foi isso que achei que a gente, também, não debateu muito... essa parte específica, quando ele vai provar através da construção. O que eu lembro, que nós comentamos no AProvaME, foi que o aluno teria que usar os recursos, justificar esses recursos de construção, então seriam raciocínios relativos a uma prova. Se ele fosse usar, a partir da nossa atividade inicial que eram diagonais perpendiculares, ele teria que usar propriedades de paralelogramos que tivessem diagonais perpendiculares. Mas eu talvez não tenha assimilado exatamente em sua plenitude como seria essa prova. E aí encerrou o ano, encerrou o semestre, aliás, e depois a gente começou a analisar as atividades de outros grupos; essa nossa praticamente nós não mexemos mais, mexemos nas de outros grupos e quando comecei a finalizar então a dar um rumo para a minha, acabei tendendo para este lado, talvez pela dificuldade em ver como seria o enfoque pelo AProvaME.”

“Eu diria que a gente debateu bastante as Fases I e II, que ainda não eram provas, porém debatemos pouco, na minha opinião, a Fase III que seria exatamente a prova. É, eu senti um pouco mais de dificuldade nessa questão. Como o aluno vai desenvolver esta prova através das construções.”

Assim sendo, as maiores mudanças na situação de aprendizagem elaborada por Vagner em relação ao que havia sido previsto inicialmente, ou seja, a versão elaborada por sua equipe do AProvaME foi a não integração do computador na fase final da sequência, justamente nas atividades que visavam à construção de provas por parte dos alunos, além de um maior enfoque no aspecto formal da prova. Na *Versão Final*, em muitas atividades,

eram fornecidas algumas proposições, nas quais os alunos deveriam identificar a hipótese e a tese.

Vagner relatou que usou o Cabri em alguns momentos de sua situação de aprendizagem, nas duas etapas iniciais (1ª e 2ª Etapas) e na primeira parte da 3ª Etapa. Ao emitir uma opinião sobre o Cabri, ele o considerou como sendo um bom *software*, apesar de ter algumas limitações, dependendo da forma como se trabalha com este recurso:

“O Cabri é um bom software, que tem as suas limitações, mas para geometria, por exemplo, a parte exploratória, de um aluno explorar vários casos e tirar conclusões, é ótimo; tem um aspecto dinâmico, facilita para o aluno.”

Vagner concluiu explicando que elaborou a sua situação de aprendizagem com o objetivo de que os alunos conseguissem construir a prova formal, ou que pelo menos vislumbrassem o aspecto formal, o que já seria um grande avanço, especialmente porque estes alunos nunca haviam aprendido geometria:

“Eu vou tentar, o aspecto formal, o que seria um pouco de ousadia, não? Veja os alunos nem geometria tiveram... Então, talvez, eles não consigam atingir esse formal. Vou verificar até que ponto eles conseguem chegar perto do aspecto formal.”

Opiniões sobre as perspectivas e os desafios dos professores

Quando questionado quanto ao que ele acreditava que seriam os desafios dos professores para que estes conseguissem trabalhar com provas, integrando os recursos da informática, Vagner observou que o primeiro seria a existência de laboratório de informática na escola, com um número adequado de computadores, além de todos estarem funcionando.

O segundo desafio estaria relacionado à prova, fazer com que os professores voltassem a trabalhar com demonstração e prova. Ele relatou que antigamente, em concursos para professores de matemática, muitas questões demandavam o desenvolvimento de uma demonstração. Porém, ele verificou que nos últimos concursos, não foi fornecida nenhuma questão que solicitasse alguma demonstração.

O terceiro desafio estaria relacionado à formação inicial do professor. Vagner citou a sua própria graduação, na qual ele pouco havia trabalhado com provas, e muito menos envolvendo a utilização do computador. Ele questionou se o professor, enquanto aluno, não aprendeu a demonstrar ou provar, como ele na posição atual de professor conseguiria

trabalhar com os seus alunos neste sentido, elaborando atividades que levassem o aluno a provar, ainda mais envolvendo a utilização do computador:

“Então, a questão da prova é um desafio maior. O próprio professor fazer o trabalho; o professor conseguir elaborar prova. Se pegássemos um professor ao acaso e o colocássemos para realizar uma prova, acredito que ele teria muita dificuldade. A gente não tem trabalhado com demonstração e prova, fica lá esquecido. O que a gente não usa mais, esquece. A gente vai ter que parar, pensar com mais calma... Eu mesmo, para poder fazer a atividade, sentei com calma, demonstrei os teoremas, para depois fazer a prova para os alunos. Se fosse pegar, assim direto, ia ter dificuldade também. Também tem a questão de não termos computador; caso se começasse a trabalhar desde a graduação, se fosse realizado um trabalho melhor com provas, depois que tivesse o computador, o professor poderia começar a desenvolver as suas ideias quanto à integração do computador. Ele poderia pegar trabalhos que já estão prontos, verificando o que pode ser aproveitado.”

Vagner ponderou que, embora algumas vezes o professor tenha adquirido estes conhecimentos na graduação, ao se formar e ingressar na vida docente acaba por considerar inviável este tipo de abordagem. Ele percebeu a existência de um grande salto entre a graduação, em termos de ideais, que acabam por inúmeros motivos não se concretizando na vida docente posterior.

Vagner considerou o AProvaME dotado de uma grande riqueza, na medida em que valorizou a ideia e o raciocínio do aluno, enquanto a prova seria uma mera consequência deste processo, podendo o aluno chegar a atingi-la ou não, o que não inviabilizaria a produção deste aluno. Para ele, o AProvaME foi uma experiência que poderá ser usada em sala de aula. No caso de sua pesquisa, ele constatou que se direcionou mais para o lado formal, que talvez tenha sido uma ideia equivocada em relação ao projeto:

“Acho que o AProvaME é uma experiência que dá para ser usada em sala de aula, também. Então, no caso da minha pesquisa, eu é que acabei tendendo mais para o lado mais formal. É que acreditei que este projeto, mesmo essa parte relativa à minha dissertação, tivesse que chegar a um aspecto formal. Talvez eu tivesse uma ideia equivocada. Não sei se era mesmo esse o objetivo. Talvez se fosse desenvolver as atividades como ficou previsto no AProvaME, através de construções usando apenas alguns elementos de prova, embora não fechasse, não tivesse a prova formal iria ter uma parte do aluno, raciocínio que ele conseguiu, ver o que ele conseguiu desenvolver... então, no meu caso, essa parte mais formal, mais importante, é a parte do aluno. Se é mais formal, para ser usado em sala de aula, é uma coisa mais a longo prazo, demora um pouquinho. Se eu usasse, por exemplo, uma pequena atividade do AProvaME, se o aluno conseguisse provar esse aspecto, esta seria uma prova mais simples. É um começo para trabalhar com o aluno... e alguns conseguem desenvolver ideias boas e ideias formais. Então, nesse ponto, dá para ajudar bastante em sala de

aula, uma coisa simples, rápida de fazer, que os alunos não têm muita dificuldade e não tem todo aquele formalismo que... e, também, não é uma prova muito longa. Se eu pegar, um dia, uma atividade no AProvaME, dessas pequenininhas, em outro dia, uma outra atividade, assim começa a ajudar o aluno. Se a gente usar isso lá no fundamental, quando chegar no Ensino Médio ele vai estar com mais habilidades desenvolvidas para fazer a prova.”

5.2.2.3 SÍNTESE DO MOMENTO 2

De posse das informações obtidas a partir das diversas versões intermediárias da situação de aprendizagem, do teste-piloto, da *Versão Final* e da segunda entrevista, pudemos identificar diversos elementos que caracterizaram o *Momento 2* do percurso de Vagner.

Vagner relatou que a principal dificuldade que sentiu, no período em que ele e os professores-colaboradores de sua equipe do AProvaME (1ª Etapa da Fase 2) elaboraram coletivamente a situação de aprendizagem, foi a de não ter se identificado plenamente com todas as ideias que surgiam, com todos os acordos que foram estabelecidos.

A partir do *Esboço* desenvolvido por ele em julho de 2006, Vagner prosseguiu sozinho, contando apenas com a ajuda de seu orientador na elaboração de sua situação de aprendizagem. Deste *Esboço* em que Vagner possuía algumas expectativas quanto às dificuldades dos alunos ante a atividade proposta, a sua perspectiva em relação à elaboração da prova formal ampliou-se muito, concomitantemente, à sua constatação em não identificar claramente como o computador poderia ser integrado às atividades de forma, que este recurso ajudasse na construção da prova. Ele não enxergava como o Cabri poderia ser utilizado para esta finalidade.

O objetivo de Vagner ao elaborar esta situação de aprendizagem, que passou por tantas versões intermediárias até atingir a *Versão Final*, era que os seus alunos conseguissem atingir a prova formal, buscando desenvolver neles o raciocínio dedutivo e a compreensão dos conceitos hipótese e tese, como pode ser observado no jogo de cartas (Bloco II), na pré-atividade lógica e nas atividades iniciais do Bloco I. Nestas atividades eram fornecidas algumas proposições, nas quais era solicitado que os alunos identificassem a hipótese e a tese.

Vagner observou que, embora a proposta inicial do AProvaME fosse a integração do computador nas atividades, ele não sabia como fazer uso dos recursos do Cabri, de forma que os alunos construíssem a prova. Em sua situação de aprendizagem, nas atividades, o uso do *software* Cabri-Géomètre se mostrou um recurso interessante e importante na visualização e exploração das figuras, na verificação de propriedades e na busca de

padrões. Porém, para a construção da prova formal, em que seria necessário generalizar e formalizar, as atividades por ele propostas demandaram o uso lápis e papel, inclusive o jogo de cartas, que constituiu o Bloco II.

Ao observar as falas de Vagner, é possível identificar a sua preocupação em relação a como o aluno desenvolveria uma prova, usando os recursos do Cabri. Na realidade o seu questionamento deveria ser: como ele poderia elaborar uma situação de aprendizagem em que o Cabri estivesse inserido nas atividades, de forma a auxiliar e possibilitar ao aluno desenvolver a prova. Vagner, muitas vezes, atribuía limitações a este *software*, dependendo da forma como o usuário fosse utilizar este recurso. Seguem algumas de suas falas a este respeito:

“Eu sempre concebi o computador como um auxílio na aprendizagem. Agora, no momento da prova eu tive dificuldade em ver como seria, por exemplo, a construção: ‘provar através da construção’ e foi isso que achei que a gente, também, não debateu muito... essa parte específica, quando ele vai provar através da construção. O que eu lembro, que nós comentamos no AProvaME, foi que o aluno teria que usar os recursos, justificar esses recursos de construção, então seriam raciocínios relativos a uma prova. Se ele fosse usar, a partir da nossa atividade inicial que eram diagonais perpendiculares, ele teria que usar propriedades de paralelogramos que tivessem diagonais perpendiculares. Mas eu talvez não tenha assimilado exatamente em sua plenitude como seria essa prova. E aí encerrou o ano, encerrou o semestre, aliás, e depois a gente começou a analisar as atividades de outros grupos; essa nossa praticamente nós não mexemos mais, mexemos nas de outros grupos e quando comecei a finalizar então a dar um rumo para a minha, acabei tendendo para este lado, talvez pela dificuldade em ver como seria o enfoque pelo AProvaME.”

“E eu senti um pouco mais de dificuldade nessa questão. Como o aluno vai desenvolver esta prova através das construções.”

Para Vagner o jogo por ele desenvolvido teria como objetivo auxiliar o aluno a construir a parte formal da prova. Vagner constatou que os alunos praticamente não sabiam nada de Geometria, assim pensou no jogo, como uma estratégia de ensino na qual ele poderia resgatar o conteúdo básico que estes necessitavam, para que pudessem trabalhar com as provas propostas nas atividades. Nas cartas estavam escritos elementos que os alunos usariam enquanto estavam construindo a prova. Assim, eles poderiam visualizar algumas propriedades, como as relacionadas ao paralelismo, ângulos e congruência de triângulos, sem necessidade de memorizá-las.

No decorrer do percurso de Vagner inserido no projeto, analisando as diferentes versões de sua situação de aprendizagem, não foi verificada uma real apropriação das ferramentas do Cabri-Géomètre, que se revelou no aspecto de uma não exploração do

potencial deste ambiente de geometria dinâmica. Este dado contrasta com a fala de Vagner, quando da realização da primeira entrevista. Naquele momento, a integração do *software* não foi considerada por ele como uma grande dificuldade, contudo, ao analisarmos as diferentes versões da situação de aprendizagem, a questão da integração do Cabri, nas atividades, manteve praticamente um mesmo nível, sem muitas inovações.

Na versão final, as atividades pertencentes à sua situação de aprendizagem distribuídas nas suas três etapas, puderam ser classificadas nos níveis G0, G1 e G2, do modelo proposto por Parsysz. Vagner classificou todas as atividades a serem resolvidas com o auxílio de Cabri em todas as etapas de sua situação de aprendizagem, como pertencentes ao nível G1.

Em relação à sua concepção anterior sobre provas, ele relatou que o processo vivenciado no AProvaME, conjuntamente com as contribuições dos professores colegas, pesquisadores e alunos, fez com que ele verificasse uma mudança em sua visão anterior da prova como algo inacessível aos alunos. A sua postura de levar o aluno a pensar sobre o que estava fazendo, a conjecturar e a argumentar foi adquirida em uma fase anterior ao AProvaME, em seu contato com professores que lecionavam na mesma escola que ele. O projeto apenas acentuou e confirmou a importância em se trabalhar com o aluno nesta nova abordagem. Porém, Vagner relatou as dificuldades que estava encontrando com os seus alunos, ao tentar implementar este contexto em sala de aula. Ele apontou ser necessária uma mudança de cultura na sala de aula, em que os alunos, também, deveriam mudar concepções e posturas.

Vagner não teve muita contribuição do grupo colaborativo ao elaborar a sua situação de aprendizagem, apenas no decorrer do 1º semestre de 2006. Em uma de suas falas nesta segunda entrevista, ele mencionou que, talvez, não tivesse entendido em sua plenitude a proposta do AProvaME, o que resultou em uma ideia equivocada, pois o que ele mais buscou em suas diversas versões de situação de aprendizagem era que os alunos conseguissem atingir a prova formal. E, uma vez que identificou algumas dificuldades dos alunos, elaborou as atividades com vistas a atingir este objetivo. As atividades foram muito bem elaboradas, resultado em parte de sua constante reflexão em relação às suas diferentes etapas, compartilhada com o seu orientador e alguns alunos.

5.2.3 MOMENTO 3

Alguns eventos ocorreram no terceiro momento do percurso de Vagner, tais como a aplicação da prova diagnóstica a alguns estudantes; a aplicação da situação de aprendizagem aos sujeitos de sua pesquisa; a elaboração do texto final da dissertação de Mestrado; a realização da terceira entrevista; e a defesa pública da dissertação.

A pesquisa de Vagner foi realizada em uma escola pública estadual situada no interior de Estado de São Paulo. Embora ele não lecionasse nesta escola, a direção consentiu com a realização de sua pesquisa. Esta escola possuía laboratório de informática.

Vagner, inicialmente, elaborou uma Prova Diagnóstica (Anexo 2 de sua dissertação), com questões que envolviam conteúdos e definições básicas em geometria e buscou verificar e documentar o conhecimento prévio dos alunos, que seriam os sujeitos de sua pesquisa. Esta avaliação constou de seis questões, que foram respondidas usando lápis e papel, as quais buscaram identificar se os alunos tinham os seguintes conhecimentos: determinação do valor de ângulos formados entre retas paralelas interceptadas por uma transversal ou entre retas concorrentes (ângulos correspondentes, alternos internos, opostos de vértice e suplementares); determinação dos ângulos internos de um triângulo; determinação do valor de ângulos e lados entre dois triângulos, no caso destes serem congruentes e casos de congruência de triângulos. Uma questão solicitava aos alunos que fizessem o esboço de um paralelogramo e a última questão, denominada “brincando com a lógica”, avaliava se os alunos, por meio de algumas figuras, entendiam o significado de alguns termos provindos da lógica como “todos” e “nenhum”.

Vagner aplicou esta Prova Diagnóstica a seis estudantes da escola citada anteriormente. Os resultados obtidos revelaram que estes tinham pouco ou nenhum conhecimento sobre os assuntos tratados, confirmando o que o pesquisador já supunha, adicionado aos relatos dos próprios alunos. Poucos haviam estudado no ensino fundamental os conteúdos (tópicos) de geometria atribuídos a esta fase escolar. Muitos dos estudantes que fizeram esta avaliação diagnóstica com a intenção de participar posteriormente da pesquisa, acabaram por motivos particulares desistindo e não prosseguiram em sua pesquisa. Contudo, embora tenham ocorrido desistências, os protocolos obtidos, ou seja, as respostas serviram como uma pequena amostra da situação dos estudantes daquela unidade escolar. Apenas um dos seis protocolos pertencia a um aluno, que participou efetivamente da pesquisa.

Pelo fato de terem sido identificadas muitas deficiências conceituais nos alunos em geometria a partir destes protocolos, Vagner iniciou a sua pesquisa pela fase preliminar (Atividades Preliminares), em que as atividades presentes nesta fase procuraram resgatar conteúdos importantes desta área do conhecimento para a realização da pesquisa. Ele

acreditava que partindo das atividades preliminares, em uma fase posterior se tornaria possível o trabalho com provas, mesmo as empíricas. Assim, esta fase preliminar visou dar suporte à realização da pesquisa, pois ele não enxergava como os alunos poderiam pensar em prova usando as propriedades dos paralelogramos, se desconheciam até as definições de retas paralelas e de paralelogramo. Vagner relatou que mesmo no decorrer da realização das atividades preliminares, alguns alunos abandonaram a pesquisa.

Apesar das desistências de alunos tanto da fase de avaliação diagnóstica, como das atividades preliminares, ao serem substituídos, Vagner cuidava para que os novos participantes tivessem assegurada a apreensão dos conceitos necessários para a sua participação na pesquisa.

A aplicação da situação de aprendizagem completa (Blocos I e II) se deu com oito estudantes, distribuídos em quatro duplas, denominadas de A, B, C e D. Como já citado anteriormente, os sujeitos da pesquisa de Vagner, não eram seus alunos. No decorrer da aplicação de sua pesquisa, ele assumiu tanto a função de professor durante o processo de experimentação e coleta de dados, como o de observador, pois em diversos momentos procurou não intervir antes de coletar os dados.

As seções tiveram duração de duas horas cada e foram necessários 13 encontros, sem contar a prova diagnóstica, para a aplicação completa da situação da aprendizagem. Todos os encontros foram realizados na sala de informática que dispunha de quatro computadores, inclusive nas sessões que não exigiam o uso deste recurso. O número reduzido de computadores disponíveis, além de muitos estarem quebrados, impediu que mais alunos fossem chamados a participar da pesquisa, o que talvez pudesse ter evitado a necessidade de substituições de alunos, que assumiram o lugar daqueles que haviam desistido.

A princípio, Vagner havia previsto oito encontros de duas horas cada para a aplicação completa da situação de aprendizagem, sendo três deles para a realização da fase preliminar e as outras cinco para a pesquisa. Contudo, o trabalho precisou ser reiniciado quando foi necessário se readaptar a aplicação das atividades da fase preliminar aos novos alunos, que substituíram os desistentes, além de outros ajustes que necessitaram ser realizados em decorrência do que estava ocorrendo durante a aplicação das atividades.

Dessa forma, apesar de Vagner ter procurado manter no novo cronograma, a mesma estrutura, os Blocos I e II precisaram de mais tempo do que o previsto, sendo necessário o acréscimo de mais cinco seções de duas horas cada. Quanto à fase preliminar, a aplicação das duas etapas (1ª Etapa e 2ª Etapa) teve duração total de três sessões e as atividades da pesquisa, dez seções, quatro no Bloco I e seis no Bloco II.

Para efeito das análises que Vagner realizou em sua pesquisa, os dados obtidos nas duas atividades preliminares não foram apresentados em sua dissertação, sendo que ele

apenas aplicou e acompanhou o desenvolvimento destas com os alunos. Apenas os Blocos I e II fizeram parte da análise de sua pesquisa.

Quanto às informações que foram coletadas, Vagner gravou os encontros com os alunos, além de contar com os registros escritos destes, como os protocolos, compostos pelas planilhas e pelos rascunhos efetuados. Em alguns momentos, quando os alunos expressavam as suas ideias através do posicionamento das varetas ou canetas, representando lados de um triângulo ou quadrilátero, Vagner gravava e anotava o que estava ocorrendo, o diálogo que era estabelecido entre o pesquisador e a dupla, para que pudesse, posteriormente, no momento da análise contar com registros gravados e escritos.

As planilhas foram utilizadas para registro escrito dos dados obtidos durante a aplicação do Bloco II. Estas planilhas permitiram o recolhimento de dados sobre o desenvolvimento da prova pelos alunos e evidenciaram tanto a sequência de proposições utilizadas, quanto a concepção que os alunos tinham destas proposições por meio de um registro figural. Para Vagner, o uso destas planilhas possibilitou acompanhar os progressos dos alunos antes e depois de algumas intervenções ou do uso de alguns recursos do jogo, obtendo material suficiente para responder à sua questão de pesquisa, verificar como os alunos articulam informações visando provar propriedades dos paralelogramos.

No item, a seguir, apresentamos as informações obtidas com a terceira entrevista de Vagner.

5.2.3.1 ENTREVISTA 3

A terceira entrevista visou obter informações dos resultados da aplicação da situação de aprendizagem com os alunos. As informações obtidas desta entrevista, dividida nas sete temáticas, conforme explicitadas anteriormente (*Item 4.2.5.3 A terceira entrevista*), encontram-se descritas e analisadas nos próximos itens.

Realizamos a terceira entrevista com Vagner em outubro de 2007, sendo que a defesa de sua dissertação já havia sido marcada para dezembro deste mesmo ano. Neste momento, após sete meses da realização da segunda entrevista, Vagner continuava lecionando Matemática nos primeiros e segundos anos do Ensino Médio da mesma escola pública estadual. O tempo de docência continuou em dezessete anos e a idade passou a ser 39 anos.

Versão final da atividade

Vagner relatou que a *Versão Final* de sua situação de aprendizagem já estava praticamente pronta, quando ele realizou a segunda entrevista em abril de 2007. Ele relatou que naquele momento já havia efetivado um teste-piloto com três alunos, no decorrer dos meses de março e abril, em seguida procedeu a algumas alterações (bem poucas) e fechou a última versão que foi aplicada entre os meses de maio e junho de 2007.

Esta *Versão Final* da situação de aprendizagem, a que foi efetivamente aplicada aos alunos, para poder realizar a sua pesquisa foi a seguinte, de acordo com o relato de Vagner:

Como os alunos confirmaram que haviam tido pouco contato com a geometria, ele aplicou as duas etapas preliminares, a ATMP 1 e a ATMP 2, que tiveram por objetivo resgatar conteúdos básicos e importantes da geometria para que a pesquisa pudesse ser efetuada. Na ATMP 1 ele trabalhou com paralelismo e conceitos como ângulos correspondentes, ângulos alternos, retas paralelas e definição de paralelogramo. No final desta sequência de atividades, ele apontou para a atividade 11, cuja proposta foi introduzir um tipo de prova, embora o aluno talvez não percebesse que já estava fazendo uma prova. Para ele, se o aluno conseguisse chegar até o final desta atividade, ou seja, se provasse a congruência entre dois “angulinhos” opostos indicados na figura, como \hat{a} e \hat{e} , este aluno estaria provando que a figura construída naquela malha formada por retas paralelas era um paralelogramo.

O objetivo da ATMP 2 foi possibilitar que o aluno pudesse descobrir empiricamente a congruência de triângulos. Nas duas etapas preliminares, tanto a ATMP 1, quanto a ATMP 2, os alunos utilizaram o *software* Cabri. Vagner acreditava que os alunos, ao executarem as atividades que faziam parte da ATMP 2, conseguiriam se interar dos casos de congruência entre triângulos de uma forma empírica.

O Vagner relatou que havia disponibilizado aos alunos, nos arquivos por ele preparados, figuras previamente construídas com o Cabri, que representavam triângulos incompletos. Os alunos seguiam o que era solicitado nas folhas de atividades que lhes foram distribuídas e manipulavam as figuras presentes nos arquivos previamente construídas por este pesquisador. Pelo fato de o *software* ser de geometria dinâmica e seguindo a proposta destas atividades, os alunos manipularam as figuras, com o objetivo que descobrirem os quatro casos de congruência dos triângulos.

Ele citou um exemplo, o caso LAL, no qual o aluno não poderia mexer em dois lados e no ângulo formado entre estes lados, que eram fixos. Ele poderia manipular os outros elementos do triângulo que haviam sobrado (dois ângulos e um lado). Ao finalizar a figura, com o terceiro lado que estava faltando, o aluno deveria verificar que este lado era igual nos dois triângulos, assim concluiria que estes triângulos eram congruentes. Em outra atividade

era fornecida ao aluno uma figura que tinha um lado e os dois ângulos da base fixos. Ele poderia esticar os outros dois lados à vontade, até que esses dois se cruzassem originando o vértice no triângulo. Embora o aluno estivesse realizando a experimentação na tela do computador, ele estaria manipulando com as próprias ferramentas do programa. Em seguida ele poderia comparar uma figura com a outra, e que o objetivo era que concluísse que se tratavam de triângulos congruentes.

A seguir, Vagner relatou que a pesquisa propriamente dita foi efetivada na Fase III, sendo formada pelos Blocos I e II. O Bloco I foi dividido em duas etapas, com questões de validação empírica (questões 1 a 6) e iniciação às provas (questões 7 a 11), que foram as que buscaram a validação formal.

Vagner observou no decorrer de sua participação no AProvaME, pelas situações que este projeto propiciou, que os alunos em geral manifestavam um forte apelo na direção de uma prova empírica. Assim sendo ele elaborou e introduziu as atividades 5 e 6, justamente para provocar nos alunos um desequilíbrio cognitivo. O seu objetivo, ao elaborar a questão 5, era que os alunos respondessem que realmente três varetas sempre formariam um triângulo, ou seja, se eles tomassem três varetas quaisquer, sempre conseguiriam obter um triângulo. Já a questão 6 propunha uma generalização e deveria fazer com que os alunos pensassem na questão da validação ou não de uma prova empírica.

O Bloco II foi o jogo de cartas, nas quais estavam escritas diversas proposições, que deveriam ser colocadas em uma determinada sequência, de modo a que os alunos conseguissem constituir uma prova.

Como mencionamos anteriormente, no que se referiu à sua pesquisa, Vagner relatou ter levado em consideração os estudos e trabalhos de Parsysz (2001), de Machado (1995), de Duval (1995) e de Duval e Egret (1989).

No tocante à Parsysz (2001), as atividades distribuídas nas três etapas de sua situação de aprendizagem, em sua *Versão Final*, puderam ser classificadas de acordo com os níveis G0, G1 e G2, deste modelo. Ele exemplificou relatando que podem ser encontradas atividades no Bloco I, situado predominantemente no nível G2, que poderiam ser classificadas nos níveis G0 e G1, bem como a presença de uma atividade na fase preliminar, de caráter predominantemente empírico, que demandava a elaboração de uma prova formal (questão 11 da ATMP 1). Em relação a todas as atividades a serem resolvidas com o auxílio de Cabri, em todas as etapas de sua situação de aprendizagem, Vagner as classificou como pertencentes ao nível G1.

Vagner relatou que encontrou nos estudos de Machado (1995), um reforço de fundamental importância, quanto à existência de uma articulação entre as atividades perceptivas e os momentos de elaboração, ou seja, entre o conhecimento empírico e a sua sistematização. Vagner utilizou a metáfora do “tetraedro” de Machado (1995), que o autor

considerava como sendo as quatro dimensões do pensamento geométrico: a percepção, a construção, a representação e a concepção, vistas como etapas importantes para auxiliá-lo na elaboração da prova formal.

Ao questionarmos Vagner quanto às dimensões do “tetraedro” (MACHADO, 1995) e das formas de representação da informação (DUVAL, 1995 e DUVAL; EGRET, 1989), que havia considerado em suas atividades na *Versão Final*, ele procedeu a seguinte explicação:

(1) A dimensão da “*percepção*” foi utilizada praticamente em toda a sua pesquisa. A questão 2 da ATMP 1 já solicitava que o aluno observasse quantos eram os ângulos obtidos a partir de um desenho por ele realizado na questão anterior, de duas retas paralelas cortadas por uma transversal. Para Vagner a “observação” estaria ligada à percepção. Ele reconhece que a observação não implica necessariamente percepção, mas a sua intenção era que os alunos percebessem os elementos geométricos que estavam presentes em suas atividades.

(2) Em relação à dimensão “*representação*”, a questão 4 (da ATMP 1) solicitava um esboço, um rascunho do desenho que o aluno via na tela do computador, indicando os pares de ângulos correspondentes em duas retas paralelas interceptadas por uma transversal. Esta dimensão da “representação”, para Vagner, estaria ligada tanto a Machado (1995), quanto a Duval (1995). Vagner considerou que sempre que os alunos faziam desenhos ou esboços, estaria presente a “representação”, mas nada impediria que ela também fosse feita, por exemplo, com varetas. Nesse caso, também, estaria presente a dimensão da “construção”.

(3) Vagner procurou construir a dimensão da “*concepção*” ao longo das fases preliminares, tendo por objetivo que o aluno assimilasse (concebesse) conceitos como retas paralelas, ângulos correspondentes, triângulos congruentes, entre outros.

(4) A dimensão da “*construção*” foi a menos utilizada. Ele havia pensado em uma atividade, onde o aluno deveria dividir um paralelogramo, construído com o Cabri e impresso em uma folha de papel, em dois triângulos, para em seguida sobrepô-los. Machado (1995) falava em objetos como massa de modelar e varetas, e Vagner os assimilou como materiais para o aluno fazer suas “construções”, ou seja, trabalho com material manipulativo. Na pesquisa, ele considerou como construção quando os alunos usaram varetas (ou canetas) para formar triângulos, ou mesmo quando o triângulo manuseado era de papel. Construções com tais materiais estão ligadas às provas no nível G0 (Parzysz).

Aplicação da situação de aprendizagem aos alunos

Como mencionado anteriormente, os sujeitos da pesquisa de Vagner foram oito estudantes de uma escola pública estadual situada em uma cidade no interior do Estado de São Paulo, que foram convidados e manifestaram interesse em participar desta experiência. Estes alunos estavam distribuídos entre a oitava série do Ensino Fundamental e a primeira série do Ensino Médio. Outros estudantes realizaram o teste-piloto. Nenhum deles era ou foi aluno de Vagner. Todas as atividades de sua pesquisa foram realizadas em duplas.

Vagner relatou que para a aplicação completa desta situação de aprendizagem foram necessários treze encontros, todos realizados no período da tarde, e cada sessão durava em média 2 horas. O período de aplicação acabou sendo muito extenso, devido à falta de conhecimentos anteriores dos alunos, e nem sempre todos puderam estar presentes a todos os encontros. Apesar dos imprevistos, Vagner procurou garantir àqueles que eventualmente precisaram faltar a alguma sessão, uma pequena revisão no encontro seguinte, de forma que todos pudessem ter sempre o mesmo nível de conhecimentos.

Ele relatou que os resultados obtidos pelos alunos nas duas fases preliminares não foram analisadas. Para ele, estas atividades apenas visaram a um resgate de conteúdos importantes da geometria, para que a sua pesquisa pudesse ser realmente efetivada na etapa seguinte. Ele descreveu estas fases no decorrer de seu trabalho, além de apresentá-las nos Anexos 3 e 4. No momento da aplicação destas atividades, os sujeitos de sua pesquisa se sentaram em duplas na frente do computador, e uma folha com as atividades era distribuída e os arquivos disponibilizados. Vagner explicou que o processo se dava de uma forma diferente de sua aula tradicional, pois os alunos iam executando o que lhes era solicitado e o pesquisador permanecia em silêncio, apenas observando. Vagner apenas realizava uma intervenção, quando sentia que era necessário, para dar uma explicação ou fornecer uma dica. Porém, relatou que evitava ao máximo as intervenções, principalmente nas atividades finais.

Como cada dupla de alunos tinha o seu próprio ritmo ao executar as atividades, Vagner solicitava que as duplas que terminassem antes, esperassem as outras que estavam mais atrasadas. Assim, ele não entregava as folhas com as atividades de uma única vez no início da pesquisa, mas estas eram entregues aos poucos, na medida em que os alunos iam finalizando as atividades presentes em cada uma delas. Embora Vagner tenha fornecido aos alunos uma introdução ao Cabri, antes de iniciar a pesquisa, como muitos foram desistindo no decorrer desta, ele precisou repassar novamente este *software*, quando estes já estavam efetivando as atividades. Nesta situação, ele procedia à apresentação das ferramentas, na medida em que estas se faziam necessárias.

Após a realização das duas atividades preliminares, Vagner iniciou a aplicação de sua pesquisa propriamente dita, que se constituiu na Fase III. Ele descreveu e analisou as atividades e os resultados da aplicação com os alunos, com todo o rigor necessário, efetuando as análises *a priori* e *a posteriori*. Estas informações constaram do capítulo 3 de sua dissertação de mestrado.

Vagner comentou que o procedimento adotado nesta Fase III foi parecido com a da fase preliminar; os alunos iam executando as atividades, se surgisse alguma dúvida, ele explicava, caso contrário eles continuavam fazendo. Na primeira parte da Fase III as atividades eram empíricas (questões 1 a 4). O objetivo principal era fazer com que os alunos entrassem em contato com o que seria uma proposição; tanto é que nestas questões lhes era solicitado que identificassem a hipótese e a tese, devendo entendê-las como sendo um fato que acarretaria um outro. O objetivo de Vagner, ao elaborar estas atividades, era que os alunos executassem de forma empírica o que propunha a hipótese e, a seguir, verificassem se, realmente, ocorreria o que era relatado na tese.

O Vagner apontou um dado interessante que obteve em relação a estas quatro primeiras questões, quando encerrou a análise *a posteriori* que realizou em sua dissertação. Ele observou que até a questão 4, aparentemente, o objetivo por ele pretendido não havia sido atingido. Os alunos até destacavam nas proposições fornecidas a hipótese e a tese, porém muitos deles pareciam não estar muito conscientes do que estavam fazendo, e outros, ainda, apresentavam algumas dificuldades conceituais. Ao final destas quatro primeiras questões, ele constatou que muitos alunos ainda não haviam compreendido, realmente, o que era uma hipótese e uma tese, e o que uma afirmação ocasionava na outra.

Ao executarem a questão 5, duas duplas perceberam que nem sempre três varetas quaisquer conseguiam formar um triângulo, ou seja, este fato nem sempre acontecia. Alguns alunos chegaram a utilizar uma caneta para construir o triângulo, colocando um elemento externo em relação aos que haviam sido fornecidos. Eles perceberam que poderia ocorrer um caso que não encaixasse, ou seja, o triângulo não seria obtido. Vagner salientou que a caneta funcionou como um contra-exemplo. Nesta atividade foram fornecidas apenas três varetas, que poderiam sempre ser associadas em trios, tornando sempre possível formar um triângulo. A caneta, então, assumiu o papel da vareta que fugia à condição de existência e que não havia sido fornecida aos alunos neste lote. Vagner observou que esta questão não conseguiu induzir os alunos ao erro, pois estes não se limitaram a trabalhar apenas com o material fornecido.

Porém, Vagner verificou que ao executarem a questão 6, estas mesmas duplas acabaram voltando ao empírico. A questão 6 propunha uma generalização, mas ainda em um contexto empírico. Em sua segunda parte apresentava a seguinte situação: “João verificou que em 50 paralelogramos as diagonais se interceptavam (se cruzavam) nos

respectivos pontos médios”, e questionava aos alunos se João estava provando ou não esta afirmação. Os alunos responderam que João havia provado esta proposição. Contudo, Vagner observou que eles nem pensaram em fazer a prova. Quando lhes foi perguntado na primeira parte se João havia verificado apenas empiricamente, eles responderam afirmativamente, porém apesar de perceberem que a parte empírica tinha falhas, que foi o objetivo da questão 5, todos eles acabaram voltando ao empírico no final. Vagner observou que os alunos voltaram a confiar no empírico, pois afirmaram que João havia feito a prova.

Vagner, ao elaborar as questões 5 e 6, tinha por objetivo fazer com que os alunos percebessem que a prova empírica apresentava falhas. Depois que os alunos executaram estas questões, ele constatou que o seu objetivo não havia sido atingido; pois, ao final da questão 6, eles acabavam aceitando a prova empírica, quando ela se apresentava com um caráter de uma generalização. Em seguida, Vagner explicou melhor o que havia ocorrido.

Na questão 5, os alunos perceberam que nem sempre três varetas quaisquer formavam um triângulo, respondendo “verdadeira às vezes”. Na questão 6, foi fornecido aos alunos outro conjunto de varetas. O objetivo era que eles percebessem que, embora em muitos casos o triângulo pudesse ser obtido, talvez, ainda existisse um caso, em que este fato não ocorresse. Segue o relato de Vagner, em relação ao que ele pensou que havia ocorrido quando os estudantes resolveram as questões 5 e 6:

“Ao realizarem a prova empírica, os alunos verificaram que embora eles pudessem testar vários casos, ainda poderia ter um que poderia não dar certo. Eles passaram por esta atividade, mas na 2ª parte da atividade 6 que fala que o João testou 50 paralelogramos, eles colocaram que a prova foi feita. Talvez o que influenciasse foi o fato de ter sido colocado o número 50 paralelogramos, porque acredito que eles tenham realizado algumas combinações que deram certo, umas 4 ou 5 combinações no máximo, porém de 4 para 50 talvez isso influenciasse a resposta; mas o objetivo era que, mesmo sendo 50, era uma prova empírica; ele podia testar 50 vezes, mas na vez nº 51 poderia não dar certo, e eles não perceberam isso.”

No que se referiu as demais atividades do Bloco I, a questão 7 já propunha uma iniciação às provas, e as duplas não tiveram dificuldade nesta questão. Uma das duplas teve dificuldade na questão conceitual, em relação aos ângulos correspondentes, que embora este conteúdo tenha sido trabalhado com estes alunos na fase preliminar, o Vagner acredita que não ficou bem fixado para estes alunos.

Vagner observou no tocante à questão 8, que ela não apresentou dificuldades aos alunos, pois ela estava muito simples, não exigindo muito deles, sendo mais voltada à observação.

Ele assinalou que a questão 9 era praticamente uma repetição da questão 8. As questões 9, 10 e 11 traziam elementos de prova, ou seja, os alunos deveriam realizar

demonstrações ou provas formais. Algumas duplas conseguiram, enquanto outras não fizeram a parte formal como foi sugerido, mas apresentaram uma justificativa empírica, ou seja, ao menos justificaram.

Após a finalização destas atividades, foi iniciada a aplicação do jogo de cartas. Vagner apontou que a ideia do jogo surgiu devido ao fato de ele ter almejado fazer alguma coisa diferente. Em relação a este jogo, ele relatou que os alunos pareceram gostar desta atividade, e que alguns deles conseguiram articular algumas proposições. Em relação à estrutura do jogo, Vagner explicou a forma como ele se desenrolava: uma dupla escolhia uma prova e a outra dupla outra prova, podendo ser a mesma nas duas duplas. Estas duplas tinham um tempo pré-determinado para elaborar a prova, marcavam na planilha as cartas e os desenhos usados e depois de finalizado este tempo deveriam analisar a prova produzida pela outra equipe. Na planilha o aluno deveria indicar o seu caminho em relação à articulação das cartas para conseguir construir a prova.

Vagner observou que antes do teste-piloto, ele não fornecia esta planilha aos alunos. Porém, depois da realização do piloto, ele constatou a necessidade de fornecer aos alunos, uma folha de papel, que assumiu a forma de uma planilha, onde o aluno deveria indicar a sequência das cartas que estava utilizando, além de efetuar um desenho da proposição, um registro figural, juntando as duas representações, a escrita (carta) e a figural. Muitas vezes o aluno pensava em algum elemento geométrico, mas quando lhe era pedido que indicasse este elemento, apontava para o errado.

“O aluno colocava uma carta, onde estava escrito ‘o uso da diagonal menor’; às vezes este nem sabia direito onde é que estava esta diagonal; então, no registro figural, ele representaria a diagonal, faria o desenho dela. Teve um caso que o pessoal indicou a carta da diagonal maior e traçou a menor; então eu considerei isso como sendo uma distração, o raciocínio, em si, estava certo, naquela prova este fato não influenciou. Muitas vezes eles falavam sobre algum elemento e desenhavam outro; por exemplo, ângulos correspondentes, pelo rascunho que eles faziam, a gente via que eles colocavam o correspondente e marcavam os opostos, no paralelogramo; ou senão eles colocavam correspondentes mas não eram correspondentes formados por retas paralelas e, aí, eles admitiam como se fossem. Então, a representação figural ajudou bastante porque você pode ver o que o aluno está escrevendo e o que está pensando; o que está na mente dele.”

Ele observou que, muitas vezes, o aluno manifestava tanta confiança no registro figural, que era apenas um esboço, e não fazia as provas necessárias. Vagner observou que não bastava que no esboço estivessem representadas duas retas paralelas. Para ter a certeza de que elas eram paralelas, os alunos deveriam desenvolver uma demonstração. Uma vez provado que as retas eram paralelas, a partir deste momento ele poderia usar esta proposição para provar outras afirmações. Vagner complementou:

“A gente usa esboço com lado paralelo e, às vezes, estou provando justamente isso; que os lados são paralelos; quer dizer, a gente acaba usando a tese para provar a tese, por causa do esboço.”

Vagner relatou que se mostrou necessário, algumas vezes, modificar um pouco as regras do jogo, além de muitas vezes precisar de mais tempo para aplicar a atividade, em função do que estava ocorrendo. Uma das regras do jogo era que os alunos construíssem em duplas a sua prova e, em seguida, analisassem a prova da outra dupla. Como já havia sido difícil para eles construir a própria prova, a análise da prova da outra equipe foi deixada de lado nas fases iniciais do jogo. Algumas regras que diziam respeito a, por exemplo, que dupla começaria, quem marcava ponto ou quem ganharia, não foram levadas em consideração com tanto rigor, por não serem tão relevantes, pois a obediência a elas demandava muito tempo do jogo. Outras vezes, o Vagner precisou separar as duplas, separar as cartas e mesmo reduzir o número de cartas, para que as duplas pudessem escolher as cartas adequadas com mais facilidade. Ele foi fazendo ajustes no jogo, dependendo do que estava acontecendo:

“O tempo influenciou, as dificuldades influenciaram; praticamente nas últimas sessões é que o jogo começou a ser feito como foi planejado mesmo.”

Vagner considerou ao final como sendo mais importante o fato de os alunos terem conseguido articular as cartas.

Outra mudança, que se deu no momento da aplicação do jogo, foi o pedido para que todos os alunos partissem da mesma carta, do mesmo “campo”, ou, então, da mesma carta-teorema, ou seja, todas as duplas deveriam realizar nas primeiras sessões a mesma prova. Vagner resolveu unificar as provas, nas primeiras rodadas do jogo todas as duplas deveriam fazer a mesma prova, devido às dificuldades que ele observou nos alunos. A prova escolhida foi: “Se um quadrilátero é um paralelogramo, então os lados opostos são congruentes”. Segundo Vagner, esta prova exigiria um número menor de proposições para argumentar e articular.

Antes do jogo de cartas, Vagner preparou e aplicou uma pré-atividade, na qual trabalhou com a lógica, enunciada em forma de uma linguagem mais popular. Como ele percebeu que os alunos ainda estavam tendo dificuldades em identificar a hipótese e a tese, ele acreditava que em vez de usar uma linguagem matemática formalizada, ficaria mais fácil para o aluno entender este encadeamento de proposições, se estas fossem fornecidas na forma de uma linguagem coloquial. A partir do entendimento do encadeamento das

proposições nesta linguagem, ele relacionaria com a prova matemática, em termos do que é a hipótese, a tese e a demonstração. Esta pré-atividade também foi feita usando cartas. Ele relatou que, quando pensou em elaborar esta pré-atividade, o jogo já estava estruturado. Em seguida, comentou que se caso tivesse pensado em algo semelhante antes, talvez nem tivesse desenvolvido o jogo. Ele exemplificou esta pré-atividade lógica:

“Em uma das cartas a prova deveria ser que o mordomo era o culpado, seguindo-se o tradicional, havia o detetive e o mordomo, sendo que o mordomo era o ladrão. Posteriormente a gente até decidiu, se fosse uma complicação futura, trocar os termos. O importante era colocar estas palavras para ficar um pouco mais dinâmico, incentivar um pouquinho, e foi até observado que uma das proposições ficou assim: se uma pessoa é escocesa e come usando garfo e faca é ladrão; é lógico que não tem nada a ver, não? Mas a frase acabou ficando um pouco pejorativa para quem é escocês. Geralmente as pessoas comem com garfo e faca. Mas uma das provas era isso, provar que a pessoa era uma ladra. Essa afirmação era similar a um dos teoremas usados: se nós temos um paralelogramo, então os lados opostos são congruentes. Para fazer essa prova o aluno teria que: primeiro observar que o paralelogramo tinha os lados paralelos; usar um elemento a partir dele, a diagonal. Ele teria que pensar nessa diagonal, dividir em dois triângulos; depois ele teria que fazer duas observações de dois ângulos congruentes; então ele teria que partir de lados paralelos; com a diagonal, isso ele forma ângulos alternos e juntando, então, a diagonal com o paralelo ele teria dois pares alternos; com esses dois pares ele conseguiu um caso de congruência de triângulos e provaria, com isso, que em um paralelogramo; os lados opostos são congruentes. Então eu partia de uma informação, a hipótese; a pessoa era o mordomo, depois eu teria que colocar outra informação, que seria correspondente a diagonal. Eu não lembro, agora, a frase que foi usada, mas, eu acho que foi relativa ao mordomo; acho que foi o seguinte: se esse é o mordomo e ele é escocês, então temos duas afirmações, a partir da hipótese e se ele come usando garfo e faca; então isso seria similar a retas paralelas e uma transversal, que é diagonal. A partir disso ele teria que identificar dois ângulos, então um ângulo seria a faca e o outro ângulo seria o garfo. A outra carta, uma das penúltimas cartas seria que, se a pessoa é o mordomo, se é escocês, aliás, que é a diagonal, ele come usando o garfo, come usando a faca, então ele trabalha no palacete que isso seria o caso de congruência de triângulos e depois quem trabalha no palacete é ladrão; então, ele faria essa ligação; com essas palavras, assim a linguagem estaria um pouco mais próxima deles. Apenas uma dupla não conseguiu, mas eu acho que foi um pouco de distração. Eu pedi que tentassem de novo e eles conseguiram na vez seguinte. Quanto à outra, a recíproca, todas as duplas, sem exceção, conseguiram, inclusive a dupla que teve mais dificuldade na pesquisa.”

Este relato de Vagner indicou que todas as duplas conseguiram até fazer a volta, ou seja, realizar a proposição recíproca, e ele acredita que, talvez, a redação das cartas tenha auxiliado muito, pois bastava lê-las para que o aluno percebesse que a tese de uma já era a hipótese da outra.

Porém, ele observou que no caso do jogo foi um pouco diferente, pois mesmo usando as cartas, algumas ideias teriam que partir deles. Por exemplo, no caso da atividade citada, os alunos teriam de se lembrar de usar a diagonal, pois se não usassem esta informação, interromperia o desenvolvimento da prova. Neste ponto, ele, como pesquisador, realizava uma intervenção, pedia aos alunos que re-analisassem as suas ideias; verificassem quando estavam usando uma carta que não tinha fundamento e tentassem mudar o caminho. Quando eles não conseguiam e tentavam o caminho empírico, usando varetas ou canetas, Vagner também aceitava o desenvolvimento.

Em relação ao *software* Cabri-Géomètre, Vagner relatou que ele foi utilizado nas atividades preliminares e nas primeiras atividades do Bloco I, mas como uma ferramenta de visualização e de manipulação de propriedades. No momento da busca da prova formal, o seu uso foi deixado de lado:

“Como esta era uma pesquisa que tendia para a prova formal, que os alunos conseguissem a prova formal, então o Cabri já não fazia mais sentido, porque ele acabava ficando mais no empírico. Embora nós tenhamos deixado o pessoal no começo apresentar algumas provas empíricas, no final nem chegamos a ligar os computadores; que acabou não sendo usado, mesmo na parte empírica.”

Vagner relatou que ocorreram muitas versões intermediárias entre àquela parcialmente finalizada no final do 1º semestre de 2006 e a efetivamente aplicada no 1º semestre de 2007, a que se constituiu na *Versão Final*.

*Dificuldades e reações dos alunos durante
a aplicação da atividade*

Vagner relatou que os alunos gostaram de ter participado da pesquisa e realizado a situação de aprendizagem. A atividade que os alunos mais gostaram foi a pré-atividade lógica, a versão do jogo com as proposições em linguagem coloquial.

Ele relatou que uma grande dificuldade foi devida à desistência de alunos no decorrer de todo o processo. Vagner precisou recrutar outros alunos a partir da avaliação diagnóstica e nas fases preliminares 1 e 2, e garantir aos novos que ingressavam o mesmo nível de conhecimentos dos demais, que já estavam participando. Muitas vezes, os mais antigos precisavam esperar um pouco, até que o nível de conhecimentos se tornasse equivalente para todos. A partir da Fase 3, Blocos I e II, felizmente os oito alunos que se comprometeram a participar, permaneceram até o final.

Em relação às dificuldades que os alunos tiveram, muitas haviam sido previstas por Vagner, como os erros conceituais e as relacionadas à estruturação do raciocínio lógico.

Quando Vagner efetuou a análise *a posteriori* em sua dissertação, a maior dificuldade que ele identificou nos alunos foi que estes não conseguiram manter a sequência lógica. O aluno ia desenvolvendo a sequência, e de repente, colocava um elemento que não poderia estar sendo usado, por não ter fundamentação:

“O aluno geralmente começava com o raciocínio estruturado e de repente a resposta caía do nada.”

Em relação às atividades preliminares, Vagner constatou que ao resolverem as questões, muitas vezes os alunos aceitavam a prova empírica como válida, quando nelas estavam escritos alguns elementos que procuravam expressar um caráter de generalização. Quando este caráter estava presente, os alunos não se preocupavam em desenvolver a prova formal, ou demonstração. Uma outra dificuldade se referiu a não compreensão do significado de hipótese e tese por parte de alguns alunos, mesmo após a aplicação destas atividades iniciais.

No tocante ao Bloco II, Vagner comentou que pensou em desenvolver o jogo de cartas, devido a uma vontade sua em fazer alguma coisa diferente, fora do tradicional. Porém, à medida que o jogo estava sendo aplicado, ele precisou abandonar um pouco a estrutura mais rígida previamente elaborada, para dar mais vazão aos alunos colocarem a sua produção e a sua argumentação. A partir deste momento começaram a surgir dúvidas conceituais, já previstas, devido ao fato de os alunos não terem aprendido quase nada de geometria. Ele considerou que os seus sujeitos da pesquisa até que se saíram bem, levando em consideração que o conceito foi apresentado a eles em uma semana e nas duas semanas seguintes já estavam usando estes conceitos. Às vezes, em algum determinado momento, os alunos esqueciam o que era diagonal ou ângulos correspondentes, o que Vagner considerou como sendo natural, ante o contexto vivenciado.

Ainda no decorrer da aplicação do jogo de cartas, Vagner identificou outras dificuldades nos alunos, entre elas a de usarem uma proposição, sem se preocuparem com a carta que a fundamentaria. Ele acredita que, algumas vezes, o registro figural, citado anteriormente, tenha atrapalhado os alunos. Eles aceitavam este registro, que na realidade era um esboço, como uma representação válida, e não se preocupavam em desenvolver a prova necessária.

Segue uma fala de Vagner a respeito do jogo, do fato de os alunos usarem proposições não fundamentadas e das limitações de um esboço:

“O jogo não deixou de ser tradicional no sentido da prova, pois o aluno acabava tendo que usar os mesmos teoremas. A única diferença é que ele recebia um conjunto de proposições e tinha que articular e usar o raciocínio lógico. Ele teria que colocar essas proposições na ordem correta. Um fato que aconteceu muito no jogo, que foi a principal dificuldade deles, foi usar uma proposição sem estar fundamentada; então, por exemplo, usavam que os ângulos alternos eram congruentes; só que para isso precisava que as retas fossem paralelas; então a proposição estaria escrito lá: em retas paralelas, ângulos alternos são congruentes... eles usavam, mas não verificavam se as retas eram paralelas. Uma coisa, também, que ajudou muito, a ocasionar esse erro, acho que foi o próprio esboço que eles usaram. Uma coisa que acho que vai ser bem relevante na pesquisa, ela tem a parte histórica, e na parte histórica, desde a época de Euclides, a gente usa esboço com lados paralelos; então, às vezes, eu estou tentando provar uma figura, que uma figura tem lados paralelos, e a gente faz um esboço para auxiliar essa prova e no esboço a gente já faz a figura com lados paralelos.”

Vagner observou que, apesar de todas as dificuldades por ele identificadas nos estudantes no decorrer da aplicação de sua situação de aprendizagem, ele pôde perceber algum progresso neles, pois estes começaram a construir alguns argumentos com prova. Embora alguns não tenham conseguido finalizar a prova, eles ao menos estabeleceram uma sequência lógica. Vagner ponderou que, para um aluno que praticamente não teve geometria, o fato de ele conseguir argumentar e fazer, pelo menos, uma parte da prova já poderia ser considerado uma mudança. Outro dado relevante, que ele obteve, foi no momento em que as duplas analisavam a produção de seus colegas. Alguns alunos até conseguiram identificar alguns elementos de erros que os colegas haviam cometido. Segue-se uma fala de um aluno:

“Bom, aí não podia ter usado tal proposição, não tinha fundamento para isso.”

Limitações percebidas, resultados e expectativas

Quando questionado quanto às suas limitações em relação ao seu conhecimento sobre prova no momento da aplicação da atividade junto aos alunos, Vagner apontou para um outro aspecto, considerado por ele como de fundamental importância. Na realidade ele não considerava estar desenvolvendo uma prova, mas simplesmente se encontrava repetindo uma prova pronta, já elaborada por algum matemático:

“Uma coisa que eu pude reparar foi como eu havia falado no começo, no fundo, as provas, pelo menos essas envolvendo o paralelogramo, elas não mudaram ao longo tempo. Então como pesquisamos a parte histórica, pudemos acompanhar que ao longo da história, estas provas não

mudaram. No fundo, eu ainda não tinha parado para pensar, mas quando a gente fala que sabe fazer uma prova, na verdade, estamos repetindo uma prova feita.”

Em relação às limitações quanto ao *software*, Vagner percebeu algumas falhas algum tempo depois das atividades já elaboradas no momento em que elas eram aplicadas. Mesmo com a realização do teste-piloto, estas falhas não haviam sido identificadas. Ele citou como exemplo a atividade 1, que solicitava que se arrastassem segmentos:

“Se o aluno ‘clicar’ no centro do segmento, ele fará o que foi planejado, porém se ele ‘clicar’ na extremidade, já deformará o desenho, o que não havia sido observado mesmo depois do piloto. Este problema só foi verificado no momento da aplicação.”

Embora Vagner tenha concebido e elaborado a atividade com cuidado, no momento da aplicação, sempre ocorria algum fato com o qual ele não contava.

Ele citou outro exemplo, em uma atividade na qual os alunos deveriam provar uma determinada proposição, devido a um fato inesperado, que não havia sido previsto anteriormente, o aluno acabava provando o contrário.

Uma das atividades preliminares de sua situação de aprendizagem solicitava que o aluno terminasse a construção de dois triângulos, a partir de dois segmentos (lados) e um ângulo entre eles, todos congruentes (caso LAL). Quando o aluno construía o terceiro lado, às vezes os pontos de intersecção entre os lados não coincidiam perfeitamente, fazendo com que quando este fosse medir estes ângulos, dependendo da precisão que ele havia colocado no Cabri, os valores destes ângulos não resultavam iguais. Nesta atividade, o aluno deveria verificar que dois ângulos obtidos de um triângulo eram iguais aos do outro triângulo, já que eles eram congruentes. Dependendo da precisão que era usada no Cabri, quantas casas consideradas, embora estes ângulos devessem ser congruentes, os seus valores não eram iguais. Neste caso, os alunos precisaram ser convencidos de que a diferença nos valores havia se dado devido ao arredondamento do número:

“Então uma coisa interessante para quem vai trabalhar com software, praticamente você só pode dizer que ele está pronto para usar, depois que já passou por uma turma; porque você já testou. Caso contrário você acaba não percebendo todos os erros.”

Em relação às expectativas, Vagner considerou que, embora em sua situação de aprendizagem tenha começado com atividades que propunham algumas verificações empíricas, ele elaborou outras que tinham por objetivo que os alunos conseguissem construir a prova formal, como aquelas apresentadas nos livros didáticos atuais.

Vagner relatou ter procurado fazer o melhor possível na elaboração de suas atividades, pois acreditava que o aluno conseguiria construir a prova formal. Ele lembrou ter necessitado interromper o seu processo algumas vezes, para que pudesse investigar, estudar e pensar tanto no desenvolvimento de sua situação de aprendizagem, como na resolução de suas diversas questões, com vistas a construir a prova de suas próprias atividades.

Ele acredita que a maioria dos professores, hoje em dia, não esteja preparada para trabalhar com provas, por não estarem habituados. Vagner considerou que, ele mesmo, precisou, com calma, desenvolver todas as provas solicitadas nas atividades por ele elaboradas, com as quais os alunos trabalhariam. Para ele, estes professores se encontram na mesma situação em que ele estava antes, e que para eles conseguirem se adequar será apenas uma “questão de treino”.

Opiniões sobre o AProvaME e sugestões de melhoria

Vagner refletiu sobre o fato de que quando se fala que um aluno sabe fazer uma prova, o que ocorre é que este apenas sabe repetir provas já feitas por algum matemático no passado. Na parte histórica de sua dissertação ele trouxe alguns matemáticos, como Euclides, o Legendre, o Hadamard, que praticamente fizeram a mesma coisa. Ele lembrou que entre Euclides e Hadamard se passaram quase 2000 anos e eles desenvolveram a mesma prova. Vagner colocou que é isto o que fazemos hoje em dia, pois quando dizemos que sabemos fazer uma prova, na realidade o que estamos fazendo é repetir uma prova, que apenas decoramos o caminho. Assim destacou a importância do AProvaME, na medida em que este projeto buscou introduzir atividades que levassem os alunos a pensar, a raciocinar, de forma empírica ou não, não buscando simplesmente apenas reproduzir o caráter formal.

Vagner relatou que quando cursou a disciplina Desenho Geométrico, foi enfatizado pelos seus professores apenas um conjunto de procedimentos de construção, sendo que os conceitos foram deixados de lado. Assim sendo, o aluno decorava os passos de como se construía, por exemplo, a altura de um triângulo e não precisava raciocinar. Neste ponto, Vagner aponta para um diferencial do AProvaME:

“Eu cheguei a cursar uma grande parte do Desenho Geométrico que é você repetir procedimentos. Nesse ponto o AProvaME é bem interessante porque mesmo que ele use o Cabri, ele vai testar outros recursos, ele também tem um lado de fazer você pensar; então, vai usar um simétrico, tem muita simetria com recursos no Cabri; então ele vai tentar justificar algumas conclusões; aí é um desenho geométrico, vamos dizer, dinâmico e também apoiado em conceitos.”

Quando questionado quanto ao que havia significado para ele o AProvaME e que influência este projeto tinha propiciado para a sua formação intelectual e a sua prática docente, Vagner considerou esta experiência muito rica, especialmente pelo fato de ele poder aplicar os conhecimentos que adquiriu em relação à prova, na sala de aula. Em seu caso, ele salientou novamente que havia optado por trabalhar mais na direção da prova formal.

Vagner leu alguns trabalhos de colegas do AProvaME e os achou muito interessantes. Ele verificou que alguns deles se aprofundavam nas verificações empíricas, porém com atividades ótimas para os alunos assimilarem conceitos. Dessa forma, embora tenha constatado que a sua situação de aprendizagem tenha ficado um pouco extensa, sugeriu aos colegas que estes poderiam aplicar em sala de aula, muitas atividades que se originaram no contexto do AProvaME, começando pelas empíricas desenvolvidas por seus colegas, seguidas pelas suas, que visavam à formalização matemática. As suas atividades entrariam em uma fase final:

“No meu caso, praticamente, poderia ser um fechamento, pois como eu acabei escolhendo a prova que é mais formal, ela reúne vários conhecimentos; o aluno teria que mobilizar muito conhecimento para poder finalizar na prova.”

Ao falar sobre as contribuições do AProvaME não só para ele, mas para os seus colegas, Vagner apontou para o conjunto do material gerado, a riqueza das situações de aprendizagem elaboradas, que poderiam ajudar os professores, na medida em que estes poderiam selecionar as atividades que mais se adequassem aos conteúdos a serem trabalhados e as usassem em suas aulas, auxiliando-o em suas práticas pedagógicas.

Ao ser questionado se esta participação no projeto havido refletido em sua prática docente e se ele percebeu alguma mudança, no seu dia a dia em sala de aula, ao ensinar matemática, ele considerou que em relação à prova houve alguma influência, embora pouca e na parte experimental, devido ao fato de ele, ainda hoje, não conseguir trabalhar com a prova formal com os seus alunos. Ele apontou para a necessidade de se começar o trabalho com provas, a partir da 1ª série do ensino fundamental:

“Em relação à prova exatamente, teve influência, mas por enquanto foi assim bem branda porque a gente acaba não trabalhando com a prova. O que eu fazia de prova, antes de participar do AProvaME, era verificação empírica. Mesmo hoje em dia a gente acaba não fazendo muito a prova formal; de vez em quando tentamos uma mais simples, a gente arrisca uma prova formal, usando álgebra por exemplo. Mas essa prova que a gente já fazia, que era parte experimental, sem dúvida, ela foi influenciada, também, pelo AProvaME, então, mesmo que eu continue fazendo essa parte

empírica, ela pode ser reestruturada, pode sofrer modificações; logicamente com sugestões, com a experiência do projeto, acrescentando, por exemplo, os protocolos que o alunos responderam, que é a pesquisa mesmo. Eu acho interessante, a gente passar para os alunos, uma iniciação ao trabalho com provas. Acho que seria interessante mesmo no ensino, nas quatro primeiras séries, da 1ª a 4ª série do fundamental, acho que é interessante; algumas atividades que os alunos fizeram lá naqueles protocolos e que eles apresentaram no começo. A gente já está usando na sala de aula outras sugestões que aprendemos no AProvaME.”

Quanto à importância do AProvaME, Vagner apontou para a perspectiva do resgate do trabalho com provas e do significado de provar. Ele considerou positivo o contato que teve com os alunos, bem como a análise das provas por eles produzidas. Ele ponderou sobre a vivência desta experiência, envolvendo todas as fases, as reuniões e os contatos muito interessantes para a sua formação.

Como uma sugestão voltada ao projeto, Vagner apontou para a importância de todo o material produzido no AProvaME, desde as atividades no Teleduc até os trabalhos finais dos professores-colaboradores, serem disponibilizados para todos os participantes, para que estes pudessem ter acesso e, eventualmente, utilizar este material em suas aulas.

Perspectivas e desafios dos professores

Ao ser questionado quanto aos desafios que os professores encontram, caso queiram trabalhar em uma abordagem para fazer com que os seus alunos consigam desenvolver provas, Vagner apontou para as dificuldades que os alunos se deparam. Para ele, estas dificuldades poderão fazer com que os alunos, dependendo da situação, não se interessem, desistam e tudo permanecerá sem nenhuma modificação. Acreditamos que, neste momento, Vagner se referiu às provas, como sendo as provas formais ou demonstrações.

Em seguida, Vagner observou que o projeto AProvaME procurou resgatar a perspectiva de um trabalho com provas, porém de um outro enfoque. Ele ponderou que um tipo de trabalho envolvendo demonstrações longas, de cunho algébrico, talvez, não estivesse mais ao alcance dos alunos, pois eles não foram preparados para compreender uma prova formal mais complicada. Vagner lembrou que durante o 1º semestre de 2006, no decorrer das reuniões de sua equipe, os professores elaboravam e discutiam algumas atividades, mais curtas e que envolviam o uso de computador e as levavam para a sala de aula, para testar com os seus alunos. Ele acredita que este tipo de atividade poderia ajudar o aluno a atingir os objetivos propostos.

Para Vagner uma perspectiva que poderia auxiliar o professor seria fazer uso de recursos da informática, pois ele acreditava que o aluno se interessaria mais:

“Quando a gente usa a informática, o aluno se interessa um pouco mais, a aula se torna mais agradável, ele poderia começar a tirar alguma coisa por dedução. Assim que ele começar a se acostumar a trabalhar com dedução, já vai estar com um degrau galgado para tentar fazer uma prova simples; se ele fez uma prova simples, ele vai conseguir fazer outra também. Então, praticamente, até ele chegar a prova formal são vários degraus; então acho que, talvez, um desafio, uma perspectiva seja primeiro começar a trabalhar mais com prova; o fato de usar o computador vai ajudar bastante para a motivação do aluno e a partir daí, quando ele começar a perceber que não é um ‘bicho de sete cabeças’, ele conseguirá deduzir. O computador ajudará na etapa da percepção, que poderá levar à etapa seguinte, que seria a cognição.”

Podemos observar nesta fala de Vagner que ele acredita que atividades no computador consigam trabalhar aspectos da dedução, que para ele se constituem em um degrau para a construção de uma prova, a partir das mais simples. De acordo com o nosso entendimento, o computador pode auxiliar na motivação e na percepção, conforme também citado por Vagner. Porém, para se chegar ao trabalho com dedução, não acreditamos que o computador consiga ainda providenciar este aspecto da construção de uma prova formal.

Vagner finalizou a entrevista indicando que seria importante o resgate do trabalho com provas, tanto nos cursos de formação inicial como continuada, procurando promover uma nova cultura sobre a prova, levando professores mais bem preparados para a sala de aula.

5.2.3.2 SÍNTESE DO MOMENTO 3

No final do *Momento 2*, Vagner realizou a sua segunda entrevista e finalizou a sua situação de aprendizagem, resultando na sua *Versão Final*. No *Momento 3*, ele aplicou esta *Versão Final* a oito estudantes de uma escola pública, que consentiu com a realização de sua pesquisa. Estes estudantes foram os sujeitos de sua pesquisa.

Em sua dissertação de mestrado em relação à *Versão Final*, a terceira etapa, ou as atividades que ele considerou como sendo de sua pesquisa propriamente dita (Blocos I e II), encontra-se descrita e analisada no Capítulo 3. As duas fases preliminares (1ª Etapa e 2ª Etapa) foram apresentadas nos Anexos 3 e 4, respectivamente.

Vagner fez uma análise extensa e cuidadosa dos dados obtidos dos alunos, ao efetuarem a sequência didática, a partir dos protocolos e das planilhas preenchidas por eles nas atividades (questões) presentes nos Blocos I e II.

Quando Vagner analisou as produções dos sujeitos de sua pesquisa, estas indicaram algumas dificuldades destes no decorrer do processo de argumentação e prova, que ele agrupou em três categorias. Na primeira categoria estavam as dificuldades voltadas à elaboração de uma prova propriamente dita. As dificuldades ligadas à aceitação de provas empíricas estavam na segunda categoria. Muitas vezes, os alunos tomavam as provas experimentais como válidas e não se preocupavam em fazer várias verificações. Como eles não estavam acostumados com provas, para eles a verificação de alguns casos particulares já era suficiente para aceitar a prova como válida. Ele também observou que, em vários momentos, os alunos efetuavam uma verificação experimental, sem entender os conceitos envolvidos. Finalmente, na terceira categoria estavam presentes as dificuldades relacionadas à leitura e à interpretação dos enunciados, observadas especialmente nas atividades que apresentavam os textos mais longos.

Vagner considerou, a partir desta análise, que embora tenham sido identificadas estas dificuldades, ocorreu algum avanço neste processo. Ele observou que alguns alunos realizaram cálculos sem o apoio empírico, outros conseguiram apresentar provas formais completas, e os que não conseguiram, pelo menos, mostraram um raciocínio lógico até o ponto que conseguiram atingir. Ao final, um resultado positivo, em relação à situação de aprendizagem aplicada, deu-se quando uma dupla de alunos pôde analisar a prova produzida pela outra dupla.

É interessante observar que, embora em sua terceira entrevista Vagner tenha relatado algumas dificuldades que os alunos tiveram ao resolver as atividades, ele em nenhum momento questionou a sua sequência didática.

Quanto aos teóricos utilizados em seu estudo, ele também utilizou elementos da engenharia didática de Michele Artigue (1988), com as análises *a priori* e *a posteriori* de cada uma das atividades; além dos estudos de Parzysz (2001) e de Machado (1995), quanto aos níveis de raciocínio geométrico; e de Duval (1995) e Duval e Egret (1989) no que se referia às formas de representação da informação.

Durante todo o processo que percorreu na elaboração de sua situação de aprendizagem, Vagner procurou propiciar condições e fornecer subsídios para que os sujeitos de sua pesquisa conseguissem atingir a prova formal, e analisou em sua pesquisa o desempenho destes alunos durante o desenvolvimento da demonstração propriamente dita.

Embora possam ser verificadas, em algumas falas de Vagner, que o seu entendimento quanto à prova tenha evoluído no decorrer de sua participação no projeto, passando a concebê-la de uma forma mais abrangente, conforme apontado por Balacheff

(1988), o que refletiu em sua situação de aprendizagem foi o de proporcionar, no decorrer de toda a sequência, condições aos alunos para que conseguissem atingir a prova formal, ou a demonstração.

Dessa forma, elaborou uma situação de aprendizagem que ajudasse aos alunos na construção da prova formal e deu ênfase à elaboração de conjecturas e argumentos, bem como aos procedimentos delineados por eles, colocando as suas expectativas em que estes, pelos menos inicialmente, conseguissem encadear as ideias de forma lógica, seguindo pela compreensão e distinção da hipótese e da tese nas proposições fornecidas, para que, em uma fase seguinte, partissem para a formalização matemática.

Para ele era muito importante que os alunos entendessem o significado de hipótese e tese. Dessa forma, pensou e elaborou algumas atividades que tinham por objetivo propiciar aos alunos este entendimento. Porém, no decorrer da aplicação da situação de aprendizagem, embora os alunos conseguissem resolver as atividades, muitas vezes ele questionava se estes realmente haviam compreendido corretamente o significado destes dois conceitos e se em um outro momento, desvinculados do projeto, conseguiriam em uma proposição identificar a hipótese e a tese.

Durante todo o seu trajeto inserido no AProvaME ele se deteve nesta perspectiva. Porém, podemos encontrar em algumas falas de Vagner, momentos em que ele se questionava se havia entendido corretamente a proposta do projeto AProvaME.

Vagner não conseguiu introduzir em sua situação de aprendizagem, atividades nas quais o computador fosse utilizado, com vistas a auxiliar no processo de construção de uma prova, que era um dos objetivos do projeto. Este dado é importante, na medida em que, quando foi realizada a primeira entrevista, ele relatou que não estava sentindo dificuldade em integrar o computador nas atividades. Após a finalização de sua situação de aprendizagem, Vagner ponderou que com Cabri é possível verificar casos particulares, não sabendo como seria feita esta utilização no momento em que fosse necessário se proceder a uma generalização, com a posterior formalização.

O Cabri foi utilizado em sua situação de aprendizagem como um recurso para facilitar a visualização, a exploração e a identificação de propriedades. Como ele não sabia como poderia integrar o computador nas atividades que visavam à construção da prova, ele afastou o computador e propôs o uso do jogo de cartas com as proposições em linguagem matemática.

Embora Vagner já tivesse um contato anterior com o Cabri-Géomètre, em sua vida docente anterior ao Mestrado Profissional, ao ingressar neste programa ele ampliou os seus conhecimentos em relação a este *software* e as suas possibilidades de utilização. Contudo, no que se referiu aos dois níveis de utilização da tecnologia por parte dos professores, segundo Bottino e Furinghetti (1994, apud RIBEIRO, PONTE, 2000), parece que Vagner não

chegou a atingir o “nível profundo”, na medida em que a integração deste *software* nas atividades se restringiu apenas à apresentação de determinados conteúdos, funcionando como uma ferramenta de exploração e visualização. Vagner, embora soubesse de todo potencial do Cabri, procedeu à sua integração apenas nas atividades pertencentes às etapas empíricas preliminares, não evoluindo em termos de possibilidades de utilização no decorrer das diversas versões de sua situação de aprendizagem, além de ter explorado muito pouco os aspectos deste *software* voltados à geometria dinâmica.

Observamos que, nas entrevistas, em nenhum momento Vagner mencionou as dificuldades dos alunos na passagem do empírico ao dedutivo. Apenas em sua Dissertação, nas Considerações Finais, ele apontou para a grande dificuldade que observou quanto ao processo de passagem da prova empírica para a prova formal, considerada como por ele uma ruptura brusca no processo escolar, que necessita ser ensinada. Segue o texto que ele redigiu em sua dissertação (p. 193):

A análise das observações e do material recolhido das quatro duplas evidenciou a complexidade do processo de argumentação e prova. A passagem de uma verificação empírica para uma prova formal é uma ruptura brusca no processo escolar que necessita ser ensinada.

Vagner constatou que o AProvaME exerceu uma influência positiva na forma como ele passou a enxergar a prova. No que se referiu ao reconhecimento da importância do professor em levar o aluno a pensar e a argumentar, esta já era uma preocupação de Vagner, anterior a este projeto. O processo por ele vivenciado, inserido no contexto do AProvaME, o fez refletir e ponderar sobre a necessidade e a relevância do resgate do trabalho com provas, tanto nos cursos de formação inicial como continuada, de forma a ampliar conhecimentos e levar professores mais bem preparados para a sala de aula.

Contudo, muito embora ele tenha percebido a importância da prova e de envolver os alunos em atividades que busquem a prova, enunciou em sua terceira entrevista uma série de dificuldades que tem encontrado, quando procura trabalhar nesta abordagem no dia a dia da sala de aula, em um contexto diferente do AProvaME, para que os alunos consigam atingir a prova formal.

Em seu contexto de trabalho, na escola em que leciona, ele relatou não conseguir colocar em prática os conhecimentos e o desenvolvimento que obteve no projeto. Os professores não sabem como trabalhar os conteúdos matemáticos neste novo enfoque com os alunos, e muitas vezes os próprios alunos não aceitam este tipo de abordagem, devido a uma cultura escolar já instalada há muito tempo.

Ao analisarmos as diversas falas presentes nas entrevistas de Vagner, quando ele se refere ao AProvaME, ele aponta para a riqueza das atividades elaboradas pelos

professores-colaboradores no decorrer deste projeto e para a necessidade destas serem compartilhadas no grupo, com o objetivo de serem utilizadas em sala de aula. Porém, a influência do projeto parece ter ficado restrita à ampliação de conhecimentos e ao desenvolvimento de materiais diferentes dos livros didáticos, além de estratégias “inovadoras” que poderiam motivar os alunos e despertá-los para novas abordagens. Não conseguimos observar, nos relatos de Vagner, que tenha ocorrido em relação à sua prática docente, uma mudança de postura ante seus alunos.

Quando Vagner realizou a sua primeira entrevista, ao ser questionado quanto ao preparo do professor para que este tivesse condições de se apropriar dos recursos tecnológicos, a ponto de integrá-los em atividades envolvendo conteúdos de Matemática, Vagner acreditava naquele momento que não seria muito difícil para o professor, que bastava este possuir um embasamento teórico, além de aprender a lidar com o *software*, sendo suficiente um pouco de treinamento. No decorrer de sua trajetória, inserido no AProvaME, ele passou a se dar conta da complexidade que envolvia todo este processo.

No decorrer da participação de Vagner inserido no projeto, ele contou com a ajuda do grupo colaborativo, a sua equipe do AProvaME apenas na primeira etapa. Neste momento, como estava muito preocupado com o desenvolvimento de sua situação de aprendizagem, embora tenha considerado positiva esta contribuição, em termos de ajuda ela não foi muito efetiva, na medida em que em seu grupo ocorriam tantas as discussões e opiniões que, ao final das reuniões, segundo ele, nenhum acordo era fechado, o que resultou em uma situação de aprendizagem incompleta ao final do 1º semestre de 2006. Ele relatou nesta fase não ter se identificado plenamente com todas as ideias que surgiram, nem com todos os acordos que foram estabelecidos.

Conforme já mencionado anteriormente, segundo Passos et al. (2006), o trabalho coletivo, especialmente o colaborativo, representa um contexto altamente favorável à aprendizagem e ao desenvolvimento profissional do professor. Embora Vagner estivesse inserido em um contexto colaborativo, onde ocorreram interações com os outros, para ele, estas parecem não ter propiciado trocas de saberes e experiências. Ele ponderou que o funcionamento de sua equipe do AProvaME, pelo fato de aos finais das reuniões os acordos não serem fechados e o desenvolvimento da situação de aprendizagem não evoluir de acordo com as suas expectativas, não propiciou a contribuição que ele almejava. Algumas vezes, em suas falas nas entrevistas, ele observou que, talvez, não tivesse entendido a proposta do projeto, pois não enxergava como as discussões e as reflexões, que ocorriam, poderiam posteriormente auxiliar o processo de desenvolvimento de sua situação de aprendizagem.

Vagner parece não ter percebido que, embora os professores não conseguissem finalizar as atividades, o contexto vivenciado, onde estavam ocorrendo práticas reflexivas,

investigativas e colaborativas, poderia propiciar mudanças em concepções e práticas, influenciando o desenvolvimento profissional e refletindo em sala de aula.

Ferreira (2006) considera que um ponto relevante na constituição de grupos colaborativos seja a percepção da participação do grupo como fonte de aprendizagem. Neste caso, o grupo se tornaria o contexto no qual seriam criadas oportunidades para o professor explorar e questionar os seus próprios saberes e práticas, bem como aprender a partir dos saberes e práticas de outros professores. Vagner parece não ter considerado a sua participação no grupo colaborativo, uma fonte de aprendizagem, que lhe permitiria aprender por meio do desafio de suas próprias convicções.

A partir do 2º semestre de 2006, ele prosseguiu praticamente sozinho no desenvolvimento de sua situação de aprendizagem, contando apenas com a ajuda de seu orientador e dos estudantes em determinadas ocasiões, como no momento em que foi realizado o teste-piloto. As observações e os comentários obtidos, a partir destes estudantes, fez com que ele incorporasse algumas mudanças na *Versão Final*.

Passos et al. (2006), baseados em suas investigações, também, afirmaram que as práticas reflexivas sobre a própria prática, em especial sobre o próprio trabalho docente, ajudam a problematizar e a produzir estranhamentos sobre o que se ensina, além do motivo de se ensinar de uma forma e não de outra.

Vagner, pelo fato de ter mantido contato o seu orientador e com os estudantes no decorrer do teste-piloto, teve a oportunidade de investigar, planejar, elaborar, aplicar, analisar os resultados e refletir sobre cada uma das atividades que compôs a sua situação de aprendizagem. A evolução de seus registros escritos possibilitou-lhe dar conta de seu próprio processo de aprendizagem.

Observamos que o percurso de Vagner se caracterizou por ter sido mais individual. O processo por ele vivenciado propiciou-lhe uma ampliação de conhecimentos em relação a diversos conteúdos matemáticos, além de ter passado a enxergar a prova como parte de um processo visando à construção de uma demonstração e de ter começado a valorizar as argumentações e as justificativas produzidas pelos estudantes. Porém, parece que estas mudanças não foram suficientemente intensas, a ponto de se refletirem em sua prática docente em sala de aula com seus alunos.

No decorrer do percurso de Vagner, não ocorreu uma prática de reflexão, discussão e investigação, exercida em um contexto de grupo. A participação no mestrado e no projeto parece ter proporcionado uma ampliação de seu conhecimento, porém, pouco alterou a sua concepção sobre prova, bem como não parece ter propiciado uma reavaliação de sua prática docente.

Vagner valorizou muito o processo por ele vivenciado em relação à importância que passou a atribuir ao ensino de provas e demonstrações. Este fato pode ser identificado em

sua dissertação de mestrado, nas considerações finais, quando encerra escrevendo que espera que o seu trabalho indique a viabilidade do ensino de provas estimulando novas abordagens, pois a busca da demonstração considerada um tema dos mais delicados do ensino deveria estar presente no planejamento de todo professor.

No próximo capítulo apresentamos as conclusões do presente estudo.

6 CONCLUSÕES

Atualmente a função docente tem enfrentado grandes desafios, muitos dos quais relacionados às transformações profundas que estão ocorrendo em todos os setores da sociedade. Um novo cenário se impõe de uma forma abrangente e rápida, refletindo-se também no contexto educacional, exigindo que o professor assuma uma postura profissional diferente da qual em que foi formado, mas que tem permanecido nos últimos anos. Este novo modelo de sociedade demanda da escola que os seus professores trabalhem outras competências nos alunos, uma delas leva em conta a tecnologia, aliada ao resgate da argumentação e da prova.

As escolas, frente a estes novos desafios e responsabilidades, constataram que apenas a formação inicial do professor não é mais suficiente para um efetivo exercício docente (ADLER et al., 2004).

Assim, dentre as diversas ações a serem tomadas para que se consiga proceder a uma mudança significativa no panorama atual, uma delas que se mostrou muito importante direcionou-se para a necessidade de repensar a formação inicial de professores, além de propiciar condições para os que já se encontram em exercício possam participar, em diversos momentos de suas trajetórias profissionais, de algum tipo de formação continuada.

Muitos pesquisadores, atualmente, têm voltado sua atenção para a formação do professor, considerando-a de uma nova perspectiva, a do desenvolvimento profissional. Nesse novo contexto educacional, o professor passou a ser visto pela sociedade e por ele mesmo como um profissional autônomo, que possui uma história de vida, experiências, potencialidades, pensamentos, ideias, concepções e saberes próprios, tornando-se responsável pelo seu crescimento profissional. Este crescimento, entendido como um processo, estende-se por seu percurso de professor, que começa com a formação inicial e segue durante toda a sua trajetória docente. O desenvolvimento profissional traz consigo a ideia de um processo contínuo que, no entanto, está sempre incompleto e inacabado (FERREIRA, 2003; PONTE, 1996).

A partir de diversas pesquisas realizadas tanto no Brasil quanto em outros países, que investigaram o desenvolvimento profissional de professores que ensinam Matemática, pesquisadores da área de Educação Matemática buscaram identificar indícios de práticas que conseguiram promover este desenvolvimento nos professores participantes. Dentre

estas práticas que potencializam o desenvolvimento profissional, os pesquisadores identificaram as práticas coletivas de reflexão, colaboração e investigação, entre os professores envolvidos. Estes mesmos pesquisadores observam que não é qualquer contexto, e as práticas nele desenvolvidas, que conseguem propiciar o desenvolvimento profissional (PASSOS et al., 2006).

A nossa investigação foi conduzida em um contexto, em que ocorreram práticas de grupo, envolvendo a reflexão; a investigação; a discussão; e a colaboração entre os professores participantes, práticas que podem promover o desenvolvimento profissional. Este contexto foi caracterizado por uma abordagem que visou ao trabalho com provas, que traz muitos elementos importantes para que o professor possa repensar a sua prática.

O papel da prova na Educação Matemática é muito importante, e ela não deve se restringir apenas a uma prática matemática. A prova, desde que entendida em sua concepção mais ampla, possui um papel central na Educação Matemática, podendo tornar-se uma ferramenta essencial na compreensão do conhecimento matemático.

Devido à existência de um contexto tanto nacional como internacional, que considera o processo de construção de uma prova muito complexo, esta temática foi deixada de lado por muito tempo no ensino da Matemática, principalmente na educação básica. No Brasil, embora este fato também tenha ocorrido durante muito tempo, tem-se verificado nos últimos anos um resgate do ensino da prova. Diversos estudos e pesquisas têm sido conduzidos, atualmente, de forma a serem identificadas as dificuldades associadas ao ensino e aprendizagem desta, em alunos e professores (NASSER; TINOCO, 2001; ANDRADE; NACARATO, 2005; PIETROPAOLO, 2005; PEREIRA; 2007).

A nossa pesquisa foi realizada inserida no contexto do AProvaME. Os objetivos deste projeto consistiram na investigação de: como a experiência com o computador influenciaria nos alunos, a sua compreensão da prova; se possibilitaria que estes distinguíssem argumentos dedutivos de evidências empíricas; e se os auxiliaria no desenvolvimento de habilidades para lidar com argumentos matemáticos expressos de diferentes formas. Outra questão, também, levada adiante pelo projeto, consistiu na identificação das condições e suportes que poderiam favorecer uma verdadeira apropriação, pelos professores participantes, dos recursos computacionais. Este projeto se caracterizou por uma abordagem que visou ao trabalho com provas, buscando um melhor entendimento de seu processo de ensino e de aprendizagem, usando recursos tecnológicos.

Observamos, atualmente, que a presença de recursos computacionais nas escolas tem chamado a atenção de professores, alunos e pesquisadores quanto ao seu potencial didático e à sua utilização no processo de ensino-aprendizagem. O uso destes recursos em sala de aula implica reflexões e discussões sobre a formação inicial e continuada do

professor, de forma a buscar uma prática docente mais adequada às novas necessidades e desafios.

Embora algumas pesquisas tenham sido desenvolvidas, no Brasil, sobre o papel das tecnologias digitais no ensino-aprendizagem da Matemática, elas deixaram de lado algumas questões importantes, como: a interação que ambientes mediados pela tecnologia podem fornecer; aspectos cognitivos que permeiam as atividades entre professores e alunos na sala de aula; e a devida preparação do professor (HEALY, 2006).

A hipótese de nosso estudo se referiu ao contexto do AProvaME, em que alguns professores participantes do projeto, envolvidos em práticas coletivas, de reflexão, investigação e colaboração, enquanto desenvolviam situações de aprendizagem que buscavam a prova, integrando recursos da informática, seria suficientemente forte a ponto de promover o desenvolvimento profissional nestes professores.

Assim, o nosso trabalho buscou responder a seguinte questão de pesquisa: “em que medida a inserção de professores em um contexto de formação, mediado pela tecnologia envolvendo a prova matemática, pode contribuir para o desenvolvimento profissional destes?”

No decorrer da pesquisa acompanhamos o percurso de dois professores de Matemática, participantes deste projeto durante um período de dois anos. Estes professores, que se constituíram nos sujeitos de nossa pesquisa, foram denominados de Flávia e o Vagner. Eles desenvolveram e aplicaram situações de aprendizagem, em dois temas pertencentes à Geometria, cujas atividades foram elaboradas com vistas a que os estudantes que as efetivassem, conseguissem construir provas, auxiliados pelos recursos computacionais integrados a estas atividades.

Em nossa pesquisa, nos propusemos a buscar indícios ou elementos nas falas ou nas diferentes versões das situações de aprendizagem desenvolvidas por Flávia e Vagner, durante o período em que estavam participando do AProvaME, que pudessem indicar que eles estavam se transformando, ou seja, que eles estavam se desenvolvendo profissionalmente.

No tocante às considerações finais, pretendemos retomar aspectos de nossa pesquisa, que acreditamos ser relevantes, tais como a fundamentação teórica e metodológica, a realização de nossa pesquisa propriamente dita, os principais resultados observados, as restrições e as limitações desta pesquisa, as contribuições deste trabalho para a área de educação matemática, as suas implicações, além de propormos perspectivas para novos estudos.

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA E METODOLÓGICA

Utilizamos diversos autores e obras para fundamentar teoricamente o nosso estudo. No que se referiu à distinção entre desenvolvimento profissional e formação continuada, dentre os diversos estudos e pesquisas investigados, destacamos Fiorentini (2003), Fiorentini e Nacarato (2005), Ferreira (2006), Passos et al. (2006) e Ponte (1998).

Todos estes autores concebem o desenvolvimento profissional do professor de uma forma mais abrangente do que simplesmente uma formação continuada. Eles entendem o desenvolvimento profissional como sendo um processo permanente, contínuo, pessoal, e nunca concluído, que abrange inúmeras etapas e instâncias formativas, compreendendo a formação inicial, bem como o desenvolvimento e a atualização da atividade profissional em processos de formação continuada, após a conclusão da licenciatura e que se estende por toda a vida profissional. Em nossa investigação levamos em consideração a trajetória de cada um dos sujeitos, as experiências destes no decorrer de suas vidas discentes, a partir de suas formações iniciais, seguido de seus percursos docentes em relação às questões que pretendíamos estudar, bem como os desafios que os fizeram refletir e muitas vezes alterar percursos profissionais.

Embora estejamos investigando nesta pesquisa o desenvolvimento profissional, não pudemos utilizar integralmente a visão de Ponte (1998) quanto a este termo; pois o contexto do projeto AProvaME já havia sido previamente decidido e estabelecido pelos pesquisadores responsáveis, quando ingressamos no projeto, o mesmo ocorrendo com os sujeitos de nossa pesquisa. Eles não decidiram que questões gostariam de estudar e desenvolver, que projetos desejaríamos executar e a forma como seriam conduzidos no decorrer do projeto.

Ao nos questionarmos sobre os fatores que poderiam influenciar o desenvolvimento profissional e contextos favoráveis, encontramos subsídios no trabalho de Passos et al. (2006). Estes autores, a partir da realização de uma meta-análise em pesquisas brasileiras que investigaram processos de formação e desenvolvimento profissional de professores de Matemática, indicaram contextos favoráveis que poderiam promover este desenvolvimento. Eles identificaram e analisaram as práticas que se evidenciaram como catalizadoras do desenvolvimento profissional, como as práticas coletivas de reflexão, colaboração e investigação, além de outras práticas contributivas como aquelas que estavam relacionadas com a experiência docente, envolvendo professores, pesquisadores em alguma atividade que os fizessem investigar e refletir sobre a sua própria prática docente.

Em nossa investigação, no âmbito do AProvaME, professores inseridos em um contexto inicial de práticas coletivas de reflexão, colaboração e investigação elaboraram as primeiras versões de suas situações de aprendizagem na direção da construção da prova

matemática, integrando recursos computacionais. Quando este contexto deixou de ser coletivo, no momento em que os professores tomaram para si o desenvolvimento e a finalização da situação de aprendizagem, com a aplicação do teste-piloto, passou a existir a presença do outro, o orientador, os próprios colegas professores e os alunos, que também os ajudaram a refletir sobre cada um das atividades presentes, bem como investigar novas possibilidades, com vistas a melhorá-las para que pudessem atingir os objetivos propostos pelo projeto.

Na proposta do projeto AProvaME, os professores participantes desenvolveriam situações de aprendizagem, cujas atividades além de buscarem a prova, deveriam fazer uso de recursos computacionais. Em relação à questão da integração das TIC nas atividades, dentre os diversos estudos e pesquisas a que tivemos acesso, nos baseamos no trabalho de Machado Costa e Fiorentini (2007). Embora estes autores tenham considerado a necessidade de um longo período de tempo, para que possam ser identificadas e percebidas mudanças de saberes, atitudes e práticas de professores em sua área de atuação, eles apontaram para alguns contextos que poderiam acelerar este processo de mudança e o desenvolvimento profissional. Eles indicaram que um contexto favorável, no qual ocorrem práticas coletivas de reflexão, investigação e colaboração, acrescido ao uso das TIC na formação inicial e na prática docente, poderia contribuir e acelerar o desenvolvimento dos professores envolvidos. No contexto do AProvaME, todos os envolvidos, quer sejam os professores e pesquisadores ou professores e orientadores dependendo da etapa, planejaram e desenvolveram todas as diversas versões da situação de aprendizagem, bem como refletiram e avaliaram cada atividade no que se referiu à busca da prova e à integração dos recursos computacionais.

Ainda tratando-se de desenvolvimento profissional, alguns pesquisadores nos últimos anos têm estudado as concepções de professores. Dada a importância desta temática, buscamos contribuições nos trabalhos de Ponte (1990, 1992) e Ribeiro e Ponte (2000), dentre outros autores. Estes autores apontaram para a importância de uma mudança de concepções, que poderiam levar a modificações em práticas e posturas, de forma a propiciar o desenvolvimento profissional. Embora alguns autores acreditem que o uso de recursos tecnológicos pelos professores poderia levá-los a modificar concepções, outros constataram que, muitas vezes, o computador é introduzido na sala de aula, sem que este fato leve a qualquer mudança. Ponte (1990) apontou alguns fatores que poderiam ocasionar uma mudança de concepções nos professores, como estes manifestarem interesse pela utilização do computador de uma forma adequada, estarem abertos a novos aprendizados, estabelecerem novas relações com os alunos, assumirem novos papéis, além de criarem um ambiente favorável para a reflexão. Em relação ao AProvaME, da forma como as fases, etapas e atividades foram estruturadas pelos pesquisadores, estas poderiam

contribuir com o processo de mudança de concepções nos professores participantes, sendo que muitos deles perceberam-se ao final assumindo novos papéis e posturas ante seus alunos.

As diferentes situações de aprendizagem elaboradas pelos professores-colaboradores participantes do AProvaME, de acordo com os temas previamente selecionados pelos pesquisadores do projeto, abordaram diferentes conteúdos da Matemática, pertencentes aos domínios da Álgebra e da Geometria (Anexo A). O objetivo destas situações de aprendizagem era que os estudantes ao resolverem as diversas atividades, encadeadas em uma determinada sequência, conseguissem ao final construir uma prova. No contexto do projeto, os professores deveriam levar em consideração o raciocínio dos alunos e as suas produções, mesmo que ao final estes não conseguissem atingir a demonstração.

Diferenciamos os termos prova e demonstração, embora muitos pesquisadores não façam nenhuma distinção entre estas duas denominações. Adotamos a posição de Balacheff (1988), que atribuiu significados distintos a estes dois termos. Assim, a prova em nossa investigação foi entendida de uma forma mais abrangente, como uma produção dos alunos, para estabelecer a validade de uma afirmação, não necessariamente aceita no domínio da Matemática. Estas produções dos alunos, justificativas ou discursos, são aceitos em um contexto escolar, em termos do raciocínio envolvido, embora muitas vezes não consigam atingir a formalização necessária. Por outro lado, as demonstrações ou provas formais são reservadas a um tipo de prova, baseada em um conjunto de axiomas e de outras propriedades já demonstradas, obtida por meio de um raciocínio hipotético-dedutivo, sendo aceita pela comunidade dos matemáticos.

Diversos autores têm se preocupado em estudar como a prova poderia ser introduzida no contexto escolar em uma prática de sala de aula, revelando alguns aspectos relacionados a esta introdução, como as dificuldades encontradas por alunos e professores e a importância de sua posterior utilização, devido às contribuições que ela pode trazer para o desenvolvimento da Matemática. Estes autores observam que a prova possui um valor muito maior do que estabelecer a validade das proposições, na medida em que ela pode trazer uma nova compreensão matemática, estabelecer novas ligações conceituais e proporcionar novos métodos para resolver problemas. Para melhor compreender estes aspectos, utilizamos dentre outros estudos citados em nossa pesquisa, os trabalhos de Hanna e Jahnke (1996); Hanna e Barbeau (2008); Healy (2005); e Healy e Hoyles (1998).

Em se tratando das dificuldades associadas à elaboração da prova dedutiva, Healy e Hoyles (1998) afirmam que quando esta é introduzida aos estudantes sem a sua devida conexão com algum contexto experimental, ela é vista por eles como inacessível e sem sentido, envolvendo apenas a memorização e a reprodução. Estas autoras entendem que,

caso um contexto experimental seja introduzido antes da prova dedutiva, os estudantes parecem compreender melhor o que é requerido dela, porém ainda não são capazes de construí-la. Dessa forma, elas sugerem que uma alternativa possível para a introdução da prova em um contexto escolar consistiria na busca de situações de ensino, que pudessem ajudar os estudantes a escolher, usando os seus conhecimentos já adquiridos, entre conceitos dedutivos e indutivos; contextos sobre os quais fizesse sentido formular definições e declarações, usando procedimentos de dedução que não prejudicassem a conexão com a sua respectiva justificativa empírica.

As situações de aprendizagem elaboradas no contexto do AProvaME levaram em conta as sugestões e observações destas autoras (HEALY; HOYLES, 1998), proporcionando inicialmente um contexto experimental, no qual os estudantes puderam elaborar justificativas empíricas, para que em um momento posterior conseguissem seguir na direção dos procedimentos dedutivos, na construção da prova formal.

Ao encerrar a aplicação de sua situação de aprendizagem, para analisar as produções dos sujeitos de sua pesquisa, Flávia usou a classificação dos tipos de provas propostas por Balacheff (1988). Este pesquisador, ao estudar as provas produzidas por seus alunos as classificou em provas pragmáticas e provas conceituais, levando em consideração o seu grau de generalidade. Ele subdividiu as provas pragmáticas em três níveis (empirismo ingênuo, experimento crucial e exemplo genérico) e as conceituais em dois níveis (experimento de pensamento e cálculo nas afirmações). Os resultados obtidos por Flávia, quanto aos tipos de prova que os sujeitos de sua pesquisa produziram, encontram-se publicados em sua dissertação de Mestrado: *“O Estudo do Paralelismo no Ensino da Geometria Analítica Plana: do Empírico ao Dedutivo”*.

Vagner relatou ter desenvolvido uma situação de aprendizagem que ajudasse aos alunos na obtenção da prova formal e deu ênfase à elaboração de conjecturas e argumentos, bem como aos procedimentos delineados por eles. Ele colocou as suas expectativas na possibilidade de que os sujeitos de sua pesquisa conseguissem inicialmente encadear as ideias de forma lógica, para que em um momento seguinte pudessem distinguir a hipótese e a tese em proposições fornecidas, finalizando com a construção da prova formal, onde os aspectos dedutivos seriam valorizados. Por sua vez, os resultados obtidos por Vagner com a realização de sua pesquisa, encontram-se publicados em sua dissertação de Mestrado intitulada: *“Um estudo sobre propriedades do paralelogramo, envolvendo o processo de argumentação e prova”*.

Quando abordarmos a temática dos ambientes computacionais, nos apoiamos em alguns estudos de Valente (1993, 1997, 2002) ao nos referirmos às funções do computador em um contexto escolar, como um recurso auxiliar no processo de aprendizagem, proporcionando tanto a passagem de informação ao usuário, como contribuindo para o

processo de construção do conhecimento. No projeto AProvaME, a função do computador esteve mais voltada ao aspecto de contribuir com a construção do conhecimento.

Valente (1993) entende que cada uma das modalidades de *softwares* usados na educação, como os jogos; as modelagens; as simulações; os tutorias; os aplicativos; a programação; e os *softwares* de autoria multimídia, apresentam características que podem auxiliar este processo de construção. Porém, este autor também acredita que o aprender não deve ficar restrito ao *software*, mas sim à qualidade da interação aluno-*software*. Novamente as atenções se voltam à questão da formação do professor, para que este consiga efetivamente integrar estes recursos em seu dia a dia na sala de aula, contribuindo para a melhoria do processo de ensino-aprendizagem.

Ao estudarmos o impacto que o uso dos computadores tem trazido para a Educação Matemática, em especial, no tocante às pesquisas sobre o uso destes recursos no ensino-aprendizagem da prova, com as implicações desta utilização, além de outras questões que merecem atenção, nos apoiamos nos trabalhos de De Villers (1997), Healy e Hoyles (2002); Hoyles e Jones (1998), Pereira (2007) e Pietropaolo (2005), dentre outros citados em nosso trabalho.

Os sujeitos de nossa pesquisa utilizaram em sua situação de aprendizagem, integrado às atividades o Cabri-Géomètre, que é um *software* de geometria dinâmica. Healy e Hoyles (2002) definem um *software* de geometria dinâmica como uma ferramenta, que possibilita aos estudantes construir e experimentar objetos geométricos e as relações entre eles.

Apresentamos o *software* Cabri-Géomètre, fornecemos detalhes de seu surgimento, indicamos as suas características principais e alguns aspectos importantes de sua utilização e citamos algumas pesquisas nas quais este *software* foi utilizado. Em relação aos aspectos mais técnicos deste *software* utilizamos as informações apresentadas em seu manual de utilização (TEXAS, 1997). Outros trabalhos, como os de Baldin e Villagra (2004); Bussi e Mariotti (1999); Healy (2000); Healy e Hoyles (2002); Laborde (1993); e Laborde e Laborde (1995), nos forneceram subsídios teóricos tanto sobre os *softwares* de geometria dinâmica, em geral, como sobre o Cabri-Géomètre, além de questionarem o seu uso e ressaltarem a importância do professor, como mediador do conhecimento.

As atividades elaboradas pelos professores participantes do AProvaME, entre outros objetivos, visaram despertar nos alunos a necessidade de provar, além de procurar levá-los a partir de um empirismo inicial até o nível da prova formal. Os sujeitos de nossa pesquisa acreditavam que os recursos da informática inseridos nas atividades poderiam motivar os alunos, além de servirem como uma ferramenta de visualização na busca de padrões, na identificação de propriedade e no levantamento de conjecturas, podendo auxiliá-los na passagem do empírico ao dedutivo. No decorrer das diversas versões de suas respectivas

situações de aprendizagem, eles refletiram em como poderiam integrar o Cabri-Géomètre nas atividades, de acordo com o entendimento que possuíam na época, em relação a uma efetiva participação deste *software*, no que se referiu aos objetivos do projeto.

Flávia e Vagner, no decorrer do AProvaME, elaboraram muitas versões de suas situações de aprendizagem, a partir das versões iniciais desenvolvidas coletivamente em suas equipes do projeto, até atingirem a última versão, a que foi efetivamente aplicada aos estudantes. A evolução destas diferentes versões, no que se referiu à prova e à integração dos recursos da informática, poderia revelar um processo em andamento, indicando que, talvez, eles estivessem se desenvolvendo profissionalmente.

Observamos que no decorrer destas diferentes versões, eles se preocuparam em inserir nas atividades, momentos em que os alunos pudessem produzir argumentações e formular conjecturas, vistas como habilidades que deveriam ser desenvolvidas, para que em um momento posterior, estes alunos conseguissem construir uma prova. Pudemos verificar que tanto Flávia quanto Vagner valorizaram as argumentações, as justificativas e as conjecturas formuladas pelos sujeitos de suas respectivas pesquisas.

No que se referiu à argumentação e ao desenvolvimento da habilidade de argumentar, buscamos subsídios nos trabalhos de Boavida (2005), Nasser e Tinoco (2001) e Pedemonte (2008), e no tocante à importância das conjecturas matemáticas, bem como a sua formulação, nos baseamos no estudo de Ponte et al. (1998). Não tratamos a argumentação e as conjecturas nos capítulos iniciais, de cunho teórico de nosso trabalho, pois elas não estavam diretamente relacionadas com os objetivos de nossa pesquisa. Contudo, abordamos estas temáticas no momento das análises do estudo, devido a estes termos terem aparecido inúmeras vezes nas falas e nos relatos dos sujeitos de nossa pesquisa.

Em relação à metodologia de pesquisa, a nossa foi caracterizada como sendo qualitativa, na qual foi utilizado o estudo de caso. Como já descrito anteriormente, a investigação incidiu sobre um projeto, o AProvaME, inserido em um programa de formação continuada, o Mestrado Profissional, ambos realizados na Pontifícia Universidade Católica (PUC) de São Paulo. Consistiu na investigação dos percursos realizados por dois professores, que foram os sujeitos de nossa pesquisa, que tiveram os seus casos estudados, analisados e comparados.

Para fundamentarmos metodologicamente a nossa investigação, buscamos subsídios teóricos em Ludke e André (2003) e Ponte (2006a).

De acordo com Ponte (2006a), os estudos de caso podem ter diferentes propósitos, caracterizando-se como exploratórios, descritivos ou analíticos. Classificamos o presente estudo de caso como analítico. Este tipo de estudo de caso procura problematizar o objeto de estudo, buscando construir ou desenvolver uma nova teoria, ou mesmo confrontá-la com

uma teoria já existente. Ainda, segundo este autor, realizamos “estudos de caso múltiplos”, pois investigamos dois sujeitos, dois casos, com o objetivo de conhecermos diferentes realidades que coexistem dentro de um mesmo grupo.

REALIZAÇÃO DA PESQUISA

Conforme indicado anteriormente, a nossa pesquisa ocorreu inserida no contexto do AProvaME. Este projeto iniciou-se em agosto de 2005 e teve duração de 24 meses. Participaram do AProvaME estudantes de diversas escolas públicas e particulares do Estado de São Paulo; seis pesquisadores do programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC, São Paulo; e vinte e sete alunos do Mestrado Profissional, que também eram professores de escolas públicas estaduais. Estes últimos desempenhavam diferentes papéis quando este projeto foi realizado, a saber, alunos do programa de Mestrado Profissional, pesquisadores em sua equipe do AProvaME e docentes nas escolas em que lecionavam.

Em nossa investigação, acompanhamos os sujeitos de nossa pesquisa, os professores Flávia e Vagner, em seus percursos, durante um período de dois anos (2006-2007), no decorrer de toda a Fase 2 do projeto AProvaME.

Para a obtenção das informações, utilizamos como instrumentos, três entrevistas realizadas com os dois sujeitos em três momentos diferentes e marcantes de seus percursos, acrescentados a alguns registros documentais.

A primeira entrevista foi realizada no final do mês de maio de 2006, quando os sujeitos inseridos em suas respectivas equipes do projeto se encontravam em fase de elaboração coletiva da situação de aprendizagem. Onze meses depois, em abril de 2007, foi realizada a segunda entrevista, quando os sujeitos já se encontravam em processo de finalização de suas respectivas situações de aprendizagem, para em seguida iniciarem a aplicação junto aos estudantes. Por fim, a terceira entrevista foi realizada no entre os meses de outubro e novembro de 2007, depois Flávia e Vagner já haviam aplicado as suas situações de aprendizagem, analisado os dados obtidos e elaborado as suas respectivas dissertações de mestrado. Todas as entrevistas foram realizadas na PUC.

Os registros documentais se referiram a todas as diversas versões das situações de aprendizagem de cada um destes sujeitos, a partir das versões iniciais, desenvolvidas durante as reuniões realizadas no contexto do AProvaME, as versões intermediárias concebidas pelos sujeitos, apenas auxiliados pelo orientador e ocasionalmente pelos alunos, até a versão final, além de algumas informações presentes em suas respectivas dissertações de mestrado. Estes dados visaram complementar as informações fornecidas pelas entrevistas, bom como identificar outros aspectos estudados.

A partir das informações obtidas nas três entrevistas e demais registros documentais, identificamos três momentos significativos e marcantes nas trajetórias de cada um dos sujeitos de nossa pesquisa. Organizamos estas informações e dados, nestes três momentos, de acordo com o que identificamos que pertenceria a cada um deles, em relação a seus processos vivenciados.

Em relação às entrevistas, classificamos as informações obtidas em categorias, que estavam relacionadas com as temáticas estudadas, com vistas a tentar responder a questão de pesquisa. No que se referiu às diferentes versões da situação de aprendizagem, procuramos identificar nas atividades, elementos que indicassem uma evolução da compreensão nas áreas da prova, bem como o nível de integração do Cabri-Géomètre, que mostrassem indícios de desenvolvimento profissional nos sujeitos de nossa pesquisa.

PRINCIPAIS RESULTADOS

Flávia e Vagner, apesar de terem cursado as mesmas disciplinas no Mestrado Profissional, participando do AProvaME, elaborou uma situação de aprendizagem que buscava a prova, envolvendo conteúdos de geometria e integrado o Cabri-Géomètre nas atividades, aplicado a alguns estudantes dos ensinos fundamental e médio, eles passaram por processos diferentes no decorrer de seus respectivos percursos. Estes diferentes processos forneceram indícios de desenvolvimentos profissionais diferenciados. Estes puderam ser identificados nas diversas versões da situação de aprendizagem por eles elaboradas, no que se referiu à aprendizagem que tiveram dos temas estudados, das reflexões e investigações que realizaram individualmente, no grupo colaborativo, com seus colegas professores e pesquisadores, bem como com os sujeitos de suas respectivas pesquisas. Os processos por eles vivenciados poderiam resultar em mudanças de concepções, refletindo ou não em suas práticas docentes com maior ou menor intensidade.

Estes diferentes processos vivenciados por Flávia e Vagner ocorreram, em parte, devido às características pessoais de cada um deles, às experiências discente e docente anteriores e ao processo de cada um inserido no contexto do AProvaME, o que determinou diferentes formas de enxergar a prova e de desenvolvê-la junto aos alunos. Porém, no decorrer de seus percursos ambos os sujeitos foram sensibilizados quanto à necessidade de se trabalhar com provas com os alunos, como conteúdo ou como forma de raciocínio.

Por meio da análise de alguns dados obtidos nas reuniões das equipes do AProvaME e nas primeiras entrevistas, verificou-se que Flávia e Vagner inicialmente não se sentiam preparados para trabalhar com provas com seus alunos, tampouco mediante a integração de recursos computacionais. Ambos inicialmente enxergavam a prova, apenas

limitada às demonstrações, ou provas formais, devido às suas formações iniciais, além de acreditarem que estas seriam inacessíveis aos alunos.

Em nossa pesquisa, observamos que embora existam outros modelos e teóricos que procuraram identificar e classificar as etapas no desenvolvimento do pensamento geométrico, os dois sujeitos investigados, juntamente com o seu orientador, optaram por utilizar os estudos de Parzysz (2001), nas etapas de concepção e elaboração das atividades que constituíram as suas respectivas situações de aprendizagem.

Parzysz (2001) propôs um modelo de quadro teórico a ser utilizado no ensino da Geometria, destacando quatro etapas no desenvolvimento do pensamento geométrico, classificadas por ele nos níveis G0, G1, G2 e G3.

Usando este modelo, os sujeitos de nossa pesquisa classificaram as atividades por eles elaboradas nos níveis G0, G1 e G2, a partir dos objetos concretos e validações perceptivas até os objetos teóricos e validações dedutivas. Eles não chegaram em suas sequências didáticas a trabalhar com o nível G3, onde os axiomas seriam completamente explicitados.

Para a elaboração das situações de aprendizagem, em relação à sequência das atividades Flávia e Vagner utilizaram elementos da engenharia didática de Michèle Artigue (1988). Em suas respectivas pesquisas, no que se referiu ao seu planejamento, pudemos encontrar apresentadas em suas respectivas dissertações de mestrado as quatro fases desta metodologia de investigação, a saber: análises preliminares (fase 1), concepção e análise *a priori* das atividades (fase 2), experimentação (fase 3) e análise e posteriori e validação (fase 4).

Flávia e Vagner escolheram, também, outros teóricos e os seus respectivos estudos para fundamentarem as suas respectivas pesquisas. Estas escolhas estiveram de acordo com as opções por eles realizadas, a partir dos estudos por eles efetuados, das reflexões que produziram e do desenvolvimento que tiveram ao elaborarem as suas respectivas situações de aprendizagem, em como introduziram a prova, como encaminharam a sua aplicação, de forma a conseguirem levar os alunos a construírem a prova e em como analisaram os dados obtidos a partir dos sujeitos.

Embora tanto Flávia quanto Vagner tenham identificado as dificuldades que existiam na passagem do empírico ao dedutivo, as suas situações de aprendizagem foram concebidas de forma diferente. A Flávia preocupou-se muito com a questão da passagem abrupta do empírico ao dedutivo, sendo que este fato se refletiu nas diferentes versões de sua situação de aprendizagem. Ela considerou em sua análise em relação aos tipos de prova produzidos pelos sujeitos de sua pesquisa, os níveis de prova que estes conseguiram atingir, levando em consideração o raciocínio por eles elaborado (BALACHEFF, 1987),

enquanto Vagner preocupou-se mais com o fato destes construírem a prova formal, com atividades que envolviam a formalização matemática.

Assim, Flávia classificou as provas desenvolvidas por seus sujeitos, em categorias (provas pragmáticas e provas conceituais), a fim de verificar que tipos de provas estes produziam. Flávia observou, no decorrer da aplicação das atividades e quando analisou os dados obtidos, que para os alunos não existe uma preocupação quanto à validarem as respostas que obtiveram. Assim, ela apontou para a importância de o professor inserir na situação de aprendizagem, momentos em que os alunos necessitem validar os resultados para que possam prosseguir na execução da sequência de atividades.

Por sua vez, o Vagner não se preocupou em classificar os níveis e os tipos de prova que os seus alunos produziram e não utilizou os estudos de Balacheff (1987). Para a análise de resultados ele se baseou nas ideias de Machado (1995), Duval (1995) e Duval e Egret (1989). Os estudos de Machado (1995) forneceram indicações quanto às quatro dimensões do pensamento geométrico, que, para este autor, são a percepção, a representação, a construção e a concepção; o de Duval (1995) tratou da forma de representação da informação; e o de Duval e Egret (1989) abordou sequências lógicas.

Vagner considerou que utilizou a dimensão da “percepção” praticamente em toda a sua pesquisa. Para ele, esta dimensão da “percepção” estaria ligada à observação, sendo que em quase todas as atividades de sua situação de aprendizagem, ele solicitava que os estudantes observassem alguma figura. Ele reconheceu, ao final do processo, que a observação necessariamente não implica percepção, mas a sua intenção era que os alunos percebessem os elementos geométricos que estavam presentes em suas atividades. No tocante à “representação”, em algumas questões ele solicitava que os alunos representassem algumas figuras por meio de um esboço. Caso eles usassem varetas em alguma atividade para representar alguma figura, estariam presentes as dimensões da “representação” e da “construção”. Em relação à dimensão da “concepção” nas atividades, Vagner a entendeu como no sentido dos alunos estarem assimilando (concebendo) conceitos como retas paralelas, ângulos correspondentes, triângulos congruentes. Para ele esta dimensão estaria mais presente nas fases preliminares.

Vagner utilizou o trabalho de Duval (1995), em relação às formas de representação da informação, quando elaborou o jogo de cartas e forneceu uma planilha aos alunos. Nesta planilha os alunos indicariam a sequência de cartas que haviam escolhido (registro escrito) e efetuariam um desenho da proposição (registro figural).

Enquanto procediam à aplicação da situação de aprendizagem aos alunos, Flávia e Vagner constataram que, infelizmente, os alunos foram ensinados no decorrer de suas vidas escolares a confiar em alguns casos particulares e se preocuparam apenas em verificar alguns deles. Assim, para eles, a verificação de alguns casos particulares torna-se para

eles, uma prova plenamente convincente. Os alunos não estão acostumados ao desenvolvimento de provas.

Ao acompanharmos o percurso de Flávia no decorrer do AProvaME e de posse das entrevistas e das diferentes versões da situação de aprendizagem, pudemos encontrar em diversas falas de Flávia e em algumas atividades, elementos que fornecem alguns indícios de que Flávia desenvolveu-se profissionalmente durante o período em que participou de AProvaME, e elaborou a sua dissertação de Mestrado. Ela pôde no decorrer deste período participar de uma prática de grupo, reflexiva, colaborativa e investigativa, que se mostrou catalizadora na promoção de mudanças de concepções e práticas, que se refletiu em seu desenvolvimento profissional.

Em relação ao processo percorrido por Vagner, a partir de seus relatos nas entrevistas e das diversas versões de sua situação de aprendizagem, pudemos verificar que o seu saber foi construído por meio de leituras e do seu contato com o seu orientador e os seus alunos. O seu contato com o grupo colaborativo se deu apenas no decorrer do primeiro semestre de 2006 e que, segundo ele, não foi muito positivo em termos de “fechar os acordos”, para que conseguissem finalizar uma primeira versão da situação de aprendizagem. Verificamos que a partir de sua própria investigação, reflexão e prática, ele procurou modificar as atividades, de modo que ficassem mais acessíveis aos alunos.

Observamos que Vagner apresentou um desenvolvimento profissional mais pessoal. Ele não teve o apoio de um grupo colaborativo, os seus pares, que poderia tê-lo ajudado a refletir sobre estas questões. Assim, ele não vivenciou uma prática de questionamentos, a partir de seus pares. Os estudantes que participaram de sua pesquisa, o ajudaram a pensar sobre algumas pequenas modificações nas atividades, pois eles apontaram as dificuldades que sentiram ao executá-las, além de algumas incongruências que haviam percebido. Porém, estes alunos não tinham conhecimento dos objetivos e da proposta do AProvaME, tampouco conheciam outras abordagens de prova. Dessa forma, não teriam como contribuir efetivamente com mudanças de concepções, que poderiam ter, em parte, propiciado o seu desenvolvimento profissional.

Por fim, verificamos que o processo de mudança nos sujeitos de nossa pesquisa foi gradual e pessoal. Pudemos observar em Vagner o seu apego a concepções que já trazia consigo, sendo que a sua vivência no AProvaME não propiciou a ele que as transformasse por completo.

Acreditamos que, uma vez que o professor tenha modificado a sua concepção em relação à prova, considerando-a como um processo de construção que leva em conta as justificativas, argumentos e conjecturas produzidos pelos alunos, ele passa a enxergar os alunos e o processo de ensino-aprendizagem como um todo de uma forma diferente, levando-o a mudar posturas em sala de aula, refletindo em sua prática docente.

Os estudantes, participantes das investigações conduzidas pelos sujeitos de nossa pesquisa, se beneficiaram em relação ao projeto AProvaME. Aqueles que puderam participar de todas as atividades propostas por Flávia e Vagner, desde a etapa de familiarização com o *software* Cabri-Géomètre, aprenderam e revisaram uma série de conteúdos de geometria; passaram a elaborar argumentações e conjecturas; e assumiram uma atitude mais ativa, ante seu próprio aprendizado; além de compreenderem e passaram a valorizar o processo de construção de uma prova.

RESTRIÇÕES E LIMITAÇÕES DA PESQUISA

A Fase 2 do projeto AProvaME contou com três etapas, que foram efetivamente aplicadas. Porém, em relação ao que havia sido previsto inicialmente no projeto (HEALY, 2005), ao serem efetivamente implementadas no decorrer do projeto, estas etapas sofreram algumas modificações (HEALY; JAHN, 2007) quanto ao que deveria ser realizado em cada uma delas. Elas necessitaram ser adaptadas ao grupo de participantes e ao seu respectivo contexto de atuação. Esta adaptação não foi considerada um problema, ou restrição, na medida em que a metodologia de pesquisa que foi utilizada na Fase 2 foi a do *design-based research* (COBB et al., 2003, apud HEALY; JAHN, 2007), previa a possibilidade de ocorrerem mudanças de percurso no decorrer da pesquisa, dependendo do andamento desta e das necessidades que surgissem a todo momento.

Em relação à 2ª Etapa da Fase 2 do AProvaME, de acordo com o que havia sido proposto no projeto (HEALY, 2005), as situações de aprendizagem elaboradas pelas equipes deveriam ser disponibilizadas no ambiente virtual (Teleduc), com o objetivo de que cada professor-colaborador aplicasse duas atividades, uma de Álgebra e outra de Geometria em uma de suas turmas. Esta etapa seria realizada intergrupos. Após a aplicação da atividade cada grupo deveria elaborar um relatório descritivo da sessão, indicando se os objetivos foram atendidos, as dificuldades encontradas pelos alunos ou professores e reflexões sobre os resultados alcançados.

Conforme o que foi relatado anteriormente, ocorreram adaptações quando estas etapas foram efetivamente aplicadas, em relação ao que havia sido proposto no projeto. Esta 2ª Etapa foi efetivamente realizada, quando ocorreu o compartilhamento das situações de aprendizagem elaboradas entre os cinco grupos. Ela teve por objetivos envolver os professores em um processo de análise e avaliação das atividades, levando a reformulações das mesmas para efetiva aplicação com os alunos em sala de aula. Esta etapa ficou conhecida como a do *design coletivo* (HEALY; JAHN, 2007).

A equipe de Vagner não conseguiu finalizar completamente a situação de aprendizagem proposta para o grupo até o prazo solicitado, o final do 1º semestre de 2006. Ainda parcialmente incompleta, a sua equipe disponibilizou esta versão no Teleduc, para ser avaliada pelos professores na fase do *design coletivo*.

Porém esta situação de aprendizagem não foi avaliada pelos professores-colaboradores no decorrer das diversas reuniões que ocorreram no 2º semestre de 2006. Deu-se prioridade nesta fase à análise e à avaliação das situações de aprendizagem de outros professores, que estavam em processo de finalização de seus respectivos mestrados profissionais. Vagner analisou e comentou cuidadosamente as atividades de alguns de seus colegas, àquelas que foram submetidas à análise em seu grupo de professores. Dessa forma, a situação de aprendizagem, foco da pesquisa de Vagner não foi submetida à análise e à avaliação na etapa do *design coletivo*. A partir de novembro, Vagner prosseguiu sozinho no desenvolvimento das atividades, que seriam aplicadas em sua própria pesquisa, contando apenas com a ajuda de seu orientador e, ocasionalmente, de estudantes, ao efetuarem o teste-piloto.

Cabe neste momento registrarmos uma restrição que se constituiu em uma limitação, para um dos sujeitos de nossa pesquisa.

O projeto AProvaME deveria ter propiciado a Vagner, momentos em que as atividades por ele elaboradas pudessem ser discutidas no grupo colaborativo.

A partir da fase do *design coletivo*, Vagner prosseguiu sozinho nas suas leituras e questionamentos. Observamos pelos seus relatos nas duas últimas entrevistas e pela evolução das atividades em sua situação de aprendizagem, que ele não conseguiu romper com uma concepção e uma prática vigente e não modificou a sua concepção de prova. Muitas vezes, verificamos nas falas de Vagner que ele não distinguia os termos demonstração e prova, usando-os indistintamente. Embora Vagner tenha passado a valorizar as produções dos alunos e o raciocínio por eles desenvolvido, pudemos observar em muitas de suas falas, mesmo na terceira entrevista, a sua preocupação e o seu empenho para que os alunos conseguissem construir a prova formal, a demonstração usando um processo dedutivo e que formalizassem ao final.

Conforme relatado anteriormente, no decorrer de toda a nossa pesquisa acompanhamos cinco professores-colaboradores que nos forneceram muitas informações. Pelo fato de dispormos de uma grande quantidade de dados destes professores e devido às dificuldades em se analisar todo este material, de forma sintética e organizada, optamos em estudar a trajetória de apenas dois deles, que foram os sujeitos de nossa pesquisa. Caso houvesse sido possível analisar a trajetória de todos estes cinco professores, talvez,

tivéssemos mais condições de analisar o percurso destes inseridos no contexto do projeto, de forma a melhor respondermos à questão de pesquisa proposta para este estudo.

Em relação à proposta inicial do projeto, que seria a elaboração de situações de aprendizagem que buscassem a prova, integrando recursos computacionais, acreditamos que esta integração nas atividades elaboradas pelos sujeitos de nossa pesquisa ficou abaixo das expectativas. Eles relataram sentir dificuldades em inserir o Cabri-Géomètre nas atividades e pouco exploraram o seu aspecto relacionado à geometria dinâmica. Observamos que eles se detiveram mais na temática da prova e na elaboração de sequência didática, com o encadeamento das questões. Os professores-colaboradores precisaram entrar em contato com uma nova abordagem e muitas questões novas ao mesmo tempo. Talvez fosse necessário um tempo maior de contato com o Cabri, para que os professores pudessem se familiarizar melhor com este *software*, investigassem novas possibilidades de uso e buscassem desenvolver mais a prática, de forma que conseguissem explorar mais profundamente este recurso.

CONTRIBUIÇÕES PARA A ÁREA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Uma das importantes contribuições deste trabalho foi expor a forma como se desenvolveu um projeto de pesquisa institucional, inserido dentro de um programa de formação continuada, cujo objetivo principal foi explorar a temática do ensino e aprendizagem da prova e que pode ter contribuído para o desenvolvimento de muitos dos professores participantes.

A originalidade deste trabalho reside no fato de ter utilizado uma metodologia que envolveu três aspectos importantes:

- uma investigação sobre uma formação de professores em exercício, que teve como pano de fundo o desenvolvimento da prova matemática e o uso de recursos tecnológicos;
- uma formação continuada de professores, que articulou as dimensões teóricas, conceituais e didáticas, promovida em um contexto de um trabalho coletivo, pontuado por práticas investigativas, reflexivas e colaborativas, que proporcionou entre muitas reflexões, uma que se direcionou para uma análise crítica da prática docente dos professores envolvidos;
- os procedimentos empregados para a análise do percurso dos dois sujeitos, que se revelaram originais, na medida em que as informações e dados obtidos inicialmente foram organizados em momentos considerados significativos para cada um deles, seguidos de uma descrição, análise e síntese dos resultados obtidos.

Nem todos os professores que estavam cursando o Mestrado Profissional, na ocasião em que o AProvaME foi proposto ao grupo, manifestaram interesse em participar. Apenas alguns deles aderiram de forma espontânea ao projeto. Como já apresentado anteriormente, a motivação do AProvaME decorreu em parte devido a um cenário atual, no qual algumas pesquisas indicavam as dificuldades que os alunos tinham em se expressar e apresentar argumentos matemáticos válidos, além de muitas vezes tratarem justificativas empíricas como provas válidas.

Sabemos da importância e do papel da prova na Educação Matemática, que se justifica tanto pelas competências que busca desenvolver nos alunos e nos professores, como pela necessidade cotidiana de encadeamento de ideias e formulação de argumentações e conjecturas. Apesar de sua relevância, devido a concepções de grande parte dos professores, que consideram este assunto inacessível para a maioria dos alunos, além de acreditarem que esta abordagem só poderia ser realizada por meio de um rigor formalista, fez com que a prova fosse deixada de lado no ensino da Matemática, quer seja como conteúdo ou como forma de raciocínio durante muito tempo, principalmente na educação básica. Verificamos que até há algum tempo, esta temática era pouco debatida, tanto por professores, como por formadores de professores, o que resultou em um número de pesquisas reduzido na comunidade de educadores matemáticos no Brasil.

O projeto AProvaME, embora concebido com um objetivo inicial, propiciou um contexto que proporcionou condições para que os professores participantes pudessem se desenvolver profissionalmente.

Em se tratando dos sujeitos de nossa pesquisa, pudemos encontrar nas informações e dados obtidos de Flávia, elementos que forneceram alguns indícios de que ela se desenvolveu profissionalmente durante o período em que participou do projeto AProvaME. Esta participação parece ter influenciado em mudanças de concepções, que sugerem terem se refletido em sua prática docente.

Já em relação ao processo de Vagner, verificamos que o seu percurso foi mais individual, resultando em um desenvolvimento profissional mais pessoal. Ao buscarmos elementos que nos fornecessem indícios deste desenvolvimento, observamos que, embora em algumas de suas falas estivessem presentes algumas ponderações que poderiam indicar mudanças de concepções, ele não as conseguiu transformá-las por completo, conforme podemos observar nas diferentes versões das situações de aprendizagem que, aparentemente, não se refletiu em sua prática docente. Vagner ampliou muito os seus conhecimentos no que se referiu aos conteúdos matemáticos, inseridos na temática do projeto e passou a valorizar o ensino de provas.

IMPLICAÇÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS

Esta investigação mostra o grande alcance que podem assumir projetos em que professores e pesquisadores trabalham juntos em algo que seja relevante para o grupo. A proposta do AProvaME foi a de envolver professores em exercício no planejamento, desenvolvimento e aplicação de situações de aprendizagem, que buscavam a construção da prova, por meio da integração de recursos da informática. Os professores a princípio se sentiram um pouco inseguros, em relação a todas as questões que estavam envolvidas neste processo, além das concepções que já traziam consigo, quanto a abordagem proposta.

À medida que o projeto foi se desenvolvendo, as perspectivas dos professores foram se ampliando, o que possibilitou a eles, além de atingirem o objetivo que foi proposto, a situação de aprendizagem finalizada, que repensassem as suas práticas tanto no que se referiu ao ensino da prova, como levá-los a mudanças de posturas com os alunos em sala de aula.

Este estudo permitiu que pudéssemos nos engajar em um projeto de pesquisa, inserido em um programa de pós-graduação, que, apesar de nosso envolvimento se restringir mais a uma observação participante, pois não colaboramos e nem estivemos presentes em algum processo decisório, nos levou a ampliar os nossos conhecimentos em relação aos conteúdos abordados e à temática da prova e nos possibilitou repensar a nossa própria prática de forma a podermos contribuir em outros momentos com esta área de conhecimento em projetos afins.

Vivemos em uma época em que a todo momento novas questões se levantam, constituindo-se em novos desafios que podem nos ajudar a pensar, a retomar e a reformular a formação e o desenvolvimento profissional de professores. Muitos pesquisadores têm se debruçado sobre estas questões e novas propostas de pesquisa têm surgido, como as que evidenciam a formação de grupos colaborativos virtuais, que desenvolvam práticas investigativas, reflexivas e cooperativas, usando as TIC, que consigam manter a motivação dos professores participantes, promovam o desenvolvimento profissional e possibilitem a que mais professores, mesmo os que vivem em lugares remotos, possam aderir a estas novas realidades.

Embora tenhamos realizado uma investigação aprofundada na temática proposta, muitas outras questões permaneceram em aberto, que podem se constituir em objetos de pesquisas futuras, como:

(1) Em nossa investigação procuramos levantar indícios de desenvolvimento profissional nos sujeitos de nossa pesquisa, enquanto eles estavam participando do projeto AProvaME.

Não pudemos acompanhar estes professores após o encerramento do projeto e do mestrado, de forma a verificar como este desenvolvimento se refletiu em suas práticas docentes e se realmente o projeto propiciou uma mudança nelas.

(2) Embora tenhamos levantado uma quantidade muito grande de dados, pois inicialmente nos propusemos a acompanhar o percurso de cinco professores-colaboradores, as informações relacionadas a três deles, quer sejam as diferentes versões de suas respectivas situações de aprendizagem, as três entrevistas realizadas com cada um deles, bem como as respectivas dissertações de mestrado, não foram analisadas e continuaram em nossa posse. Uma sugestão de uma futura pesquisa seria a análise destes dados e informações, com vistas a responder dentre muitas outras questões que poderiam ser investigadas, qual foi a influência do projeto AProvaME no desenvolvimento profissional destes três outros professores, a saber, os docentes Adriano, Eric e Pedro.

(3) Ao iniciarmos a nossa participação no AProvaME, nosso objetivo consistia em estudar e investigar o processo de “gênese instrumental”. Este processo analisa a transformação de um artefato em um instrumento. De acordo com Rabardel (1995), que foi um dos pesquisadores franceses que desenvolveu esta teoria, um instrumento é diferente de um artefato, pois ele não existe por si mesmo. Por sua vez, o artefato não possui valor instrumental. O instrumento se constitui em uma entidade mesclada, parte artefato e parte esquema cognitivo. Segundo esta teoria, um artefato somente se transformará em instrumento quando ocorrer o processo da gênese instrumental, ou seja, quando o usuário tornar-se capaz de se apropriar do artefato a ponto de integrá-lo em sua atividade.

No decorrer do processo da gênese instrumental, muitas relações precisam se desenvolver, como a instrumentação e a instrumentalização. Para Rabardel (1995), a apropriação é uma palavra que descreve bem este processo. Ela indica as duas direções sobre as quais este processo atua: na direção interna, de si próprio e na direção da realidade externa. Em seu primeiro sentido, a *instrumentação*, a apropriação indica que o artefato necessita ser integrado à estrutura cognitiva do usuário, direcionada a uma representação existente ou uma ação esquematizada que requer uma adaptação. O segundo sentido, a *instrumentalização*, indica que o artefato necessita ser apropriado pelo contexto externo. Propriedades funcionais e finalidades específicas, muitas delas não previstas quando o artefato foi planejado são atribuídas a ele pelo usuário.

A gênese instrumental constitui-se em um processo complexo que necessita de tempo e que busca a integração entre as características do artefato (potencialidades e limitações) e as atividades do usuário, seu conhecimento e seus métodos de trabalho.

Segundo Trouche (2003) o artefato inicialmente é fornecido ao usuário e o instrumento é o que é construído por este.

A nossa ideia inicial quanto ao problema de pesquisa, era investigar como a Fase 2 do AProvaME poderia influenciar o processo da gênese instrumental, nos professores participantes deste projeto. Em razão do andamento de nossa investigação, mudamos o enfoque do estudo da gênese instrumental, para o desenvolvimento profissional. Porém, deixamos a sugestão para aqueles que se interessarem em relação a esta temática, a buscarem subsídios nos trabalhos de Rabardel (1995) e outros pesquisadores, como Vêrrillon e Rabardel (1995), e Trouche (2003), como um campo bastante promissor de pesquisas e estudos.

Finalizando, consideramos que o desenvolvimento profissional de professores deva ser considerado como uma atividade contínua, nunca finalizada, que acontece no decorrer de toda a vida do professor, a partir de sua formação inicial. E cabe tanto à comunidade acadêmica, constituída por pesquisadores e professores, desenvolver um olhar atento em relação a estes novos desafios e perspectivas, bem como assumir a responsabilidade de pesquisar, rever e propor novas formas de melhorar a qualidade da formação dos docentes, como a eles mesmos de tomarem para si o seu processo de desenvolvimento profissional, a sua atuação docente e a sua participação em projetos de inovação curricular.

REFERÊNCIAS

ADLER, P. et al. *The professional development of mathematics teachers*. ICME 10, Dinamarca, 2004.

ANDRADE, J. A. A.; NACARATO, A. M. Tendências didático-pedagógicas no ensino de Geometria: um olhar sobre os trabalhos apresentados nos ENEMs. *Educação matemática em revista*, Recife, ano 11, n. 17, p. 61-70, 2005.

BALACHEFF, N. Aspects of proof in pupil's practice of school mathematics. In: PIMM, D. (Ed.). *Mathematics teachers and children*. London: Hodder and Stoughton, 1988. p. 216-235.

BALDIN, Y. Y.; VILLAGRA, G. A. L. *Atividades com o Cabri-Geómetre II para cursos de Licenciatura em Matemática e Professores do Ensino Fundamental e Médio*. São Carlos: EdUFSCar, 2004.

BOAVIDA, A. M. R. A argumentação na aula de Matemática: Olhares sobre o trabalho do professor. In: SIEM, XVI, 2005, Évora. p. 1-31. Disponível em: <<http://fordis.esse.ips.pt/siem/resumo.asp?id=57>>. Acesso em: 22 de abr. 2009.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. Terceiro e Quarto ciclos do Ensino Fundamental. Brasília: SEF, 1998.

BUSSI, M. B.; MARIOTTI, M. A. Semiotic mediation: From history to the mathematics classroom. *For the learning of Mathematics*, v. 19, n. 2, p. 27-35, 1999.

CHAZAN, D. High school geometry students' justification for their views of empirical evidence and mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics*, v. 24, n. 4, p. 359-387, 1993.

DAY, C. *Developing teachers: The challenges of lifelong learning*. Londres: Falmer, 1999.

DE VILLERS, M. Approaching geometry theorems in contexts: from history and epistemology to cognition, a reaction. In: PME, XXI, 1997. p.196-198.

_____. Papel e funções da demonstração nos trabalhos com o *Sketchpad*. *Educação Matemática*, n. 63, p. 31-36, jun. 2001.

DE VILLERS, M. *Para uma compreensão dos diferentes papéis da demonstração em geometria dinâmica*. Westville: University of Durban, 2002. 13 p.

DUARTE, V. F. *Um estudo sobre propriedades do paralelogramo envolvendo o processo de argumentação e prova*. 2007. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2007.

FERREIRA, A. Um olhar retrospectivo sobre a pesquisa brasileira em formação de professores de matemática. In: FIORENTINI, D. (Org.). *Formação de professores de matemática: Explorando novos caminhos com outros olhares*. Campinas: Mercado das Letras, 2003. p. 19-50.

FERREIRA, A. C. Trabalho colaborativo e desenvolvimento profissional de professores de Matemática: reflexões sobre duas experiências brasileiras. *Quadrante*, Lisboa, v. 15, p. 123-146, 2006.

FIORENTINI, D. Apresentação: Em busca de novos caminhos e de outros olhares na formação de professores de matemática. In: _____. (Org.). *Formação de professores de matemática: Explorando novos caminhos com outros olhares*. Campinas: Mercado das Letras, 2003. p. 7-16.

FIORENTINI, D; NACARATO, A. M. *Cultura, Formação e Desenvolvimento Profissional de Professores*. São Paulo: Editora Musa, 2005. 223 p.

GARCIA, C. M. A formação de professores: centro de atenção e pedra de toque. In: NOVOA, A. *Os professores e a sua formação*. Lisboa: Dom Quixote, 1995.

GUIMARÃES, F. Como se pensa hoje o desenvolvimento do professor? *Quadrante*, Lisboa, v. 15, p. 169-192, 2006.

JAHN, A. P.; HEALY, L.; PITTA COELHO, S. Concepções de professores de Matemática sobre prova e seu ensino: mudanças e contribuições associadas à participação em um projeto de pesquisa. In: REUNIÃO DA ANPEd, 30., 2007, Caxambu. *Anais...Caxambu: ANPEd*, 2007, v. 1., p. 1-18. Disponível em: <<http://www.anped.org.br/reunioes/30ra/trabalhos/GT19-3614--Int.pdf>>. Acesso em: 5 de nov. 2008.

HAJNAL, F. *O estudo do paralelismo no ensino da Geometria Analítica: do empírico ao dedutivo*. 2007. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2007.

HANNA, G. Challenges to the importance of proof. *For the learning of Mathematics*, v. 15, n. 3, p. 42-49, 1995.

HANNA, G.; BARBEAU, E. Proofs as bearers of mathematical knowledge. *ZDM Mathematics Education*. Springer: Published online, FIZ Karlsruhe, v. 40, p. 345-353, 2008.

HANNA, G.; JAHNKE, H. N. Proof and Proving. *International Handbook of Mathematical Education*. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, p. 877-908, 1996.

HEALY, S.V.(L.) Identifying and explaining geometrical relationship: interactions with robust and soft Cabri constructions. In: NAKAHARA, T.; KOYAMA, M. (Eds.). *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education*. Hiroshima: Hiroshima University, v. 1, p. 103-117, 2000.

_____. Argumentação e Prova na Matemática Escolar (AProvaME). *Projeto de pesquisa apresentado ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico (CNPq) pelo Programa de Estudos Pós- Graduação em Educação Matemática (PUC/SP)*, 2005.

_____. A developing agenda for research into digital technologies and Mathematics Education: a view from Brazil. In: ICMI Study Conference: Mathematics Education and Digital Technologies, Rethinking the Terrain, 17., 2006, Hanoi. *Proceeding of the seventeenth ICMI study conference, Technology Revisited*. Hanoi: University of Technology, 2006. v. 2, p. 213-220.

HEALY, S.V.(L.); HOYLES, C. *Justifying and proving in school mathematics*: Technical report on the nationwide survey. Institute of Education, Univ. London, 1998.

_____. A study of proof conception in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*, v. 31, n. 4, p. 396-428, 2000.

_____. Software tools for Geometrical problem solving: potentials and pitfalls. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, v. 6, n. 3, p. 235-256, 2002.

HEALY, L; JAHN, A. P. Argumentação e Prova na Matemática Escolar (AProvaME). *Relatório de pesquisa apresentado ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico (CNPq) pelo Programa de Estudos Pós- Graduação em Educação Matemática (PUC/SP)*, 2007.

HOYLES, C.; JONES, K. Proof in dynamic geometry contexts. In: MAMMANA, C; VILLANI, V. (Eds.) *Perspectives on the teaching of Geometry for the 21st century*, Dordrecht: Kluwer, 1998. p. 121-128.

LABORDE, C. The computer as part of the learning environment: the case of Geometry. In: KEITEL, C.; RUTHVEN, K. (Eds). *Learning from computers: Mathematics education and technology*, Berlin: Springer-Verlag, 1993. p. 48-67.

LABORDE, C.; LABORDE, J. M. What about a learning environment where Euclidian concepts are manipulated with a mouse? In: DiSESSA, A; HOYLES, C; NOSS, R; EDWARDS, L. (Eds). *Computers for Exploratory Learning*, Berlin: Springer-Verlag, 1995. p. 241-261.

LIMA COSTA, T. M. *Da elaboração de um artigo multimídia – AMM à formação de uma comunidade de aprendizagem: um olhar sobre o desenvolvimento profissional*. 2008. 315 p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) — Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2008.

LIN, F.L. An approach for developing well-tested, validated research of mathematics learning and teaching. In: NAKAHARA, T; KOYAMA, M. (Eds.). *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education*. Hiroshima: Hiroshima University, v. 1, p. 84-89, 2000.

LOPES, C. E. *O conhecimento profissional dos professores e suas relações com Estatística e Probabilidade na Educação Infantil*. 2003. Tese (Doutorado em Educação: Educação Matemática) — Faculdade de Educação, Unicamp, Campinas, 2003.

LUDKE, M.; ANDRÉ, M.E.D.A. *Pesquisa em Educação: Abordagens Qualitativas*. São Paulo: EPU, 2003.

MACHADO COSTA, G. L.; FIORENTINI, D. Mudança da cultura docente em um contexto de trabalho colaborativo de introdução das tecnologias de informação e comunicação na prática escolar. *Bolema*, Rio Claro, ano 20, n. 27, p. 1-21, 2007.

MISKULIN, R. G. S. *Concepções teórico-metodológicas sobre a introdução e a utilização de computadores no processo de ensino-aprendizagem da Geometria*. 1999. (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Unicamp, Campinas, 1999. 2v.

MISKULIN, R. G. S. et al. Identificação e análise das dimensões que permeiam a utilização das tecnologias de Informação e Comunicação nas aulas de Matemática no contexto da formação de professores. *Bolema*, Rio Claro, ano 19, p. 103-123, 2006.

NASSER, L; SANT'ANNA, N. *Geometria segundo a teoria de van Hiele*. Projeto Fundão, UFRJ. Rio de Janeiro: UFRJ, 1997.

NASSER, L.; TINOCO, L. *Argumentações e provas no ensino de matemática*. Projeto Fundão, Instituto de Matemática - UFRJ. Rio de Janeiro: UFRJ, 2001. 109 p.

PARZYSZ, B. *Articulation entre perception et déduction dans uns démanche géométrique en PE1*. Colloque. COPIRELEM de Tours, IUFM Orléans-Tours & Equipe DIDIREM – Université Paris – 7, 2001.

PASSOS, C.L.B.; NACARATO, A. M.; FIORENTINI, D.; MISKULIN, R.G.S.; GRANDO, R. C.; MEGID, M. A. B.; FREITAS, M.T.M.; MELO, M. V. Desenvolvimento profissional do professor que ensina matemática: Uma meta-análise de estudos brasileiros. *Quadrante Lisboa*, v. 15, p. 193-219, 2006.

PEDEMONTE, B. Argumentation and algebraic proof. *ZDM Mathematics Education*. Springer: Published online, FIZ Karlsruhe, v. 40, p. 385-400, 2008.

PEREIRA, M. E. *Análise de situações de aprendizagem envolvendo números racionais: uma abordagem para o ensino de argumentações e provas na Matemática Escolar*. 2007. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2007.

PEREZ, G. Formação de Professores de Matemática sob a perspectiva do desenvolvimento profissional. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). *Pesquisa em Educação Matemática: Concepções & Perspectivas*. São Paulo: Editora UNESP, 1999. p. 263-281.

PIETROPAOLO, R. C. (Re) *Significar a demonstração nos currículos da educação básica e da formação de professores de matemática*. 2005. Tese (Doutorado em Educação Matemática: Educação Matemática)- Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2005.

POLETTINI, A. F. F. Análise das experiências vividas determinando o desenvolvimento profissional de Matemática. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). *Pesquisa em Educação Matemática: Concepções & Perspectivas*. São Paulo: Editora UNESP, 1999. p. 247-261.

PONTE, J. P. Teachers' perceived roles of the computer in mathematics education. In: BOOKER, G; COBB, P. (Eds.). *Proceedings of PME XIV*, México, v. 1, p. 183 -190, 1990.

_____. Concepções dos professores de Matemática e processos de formação. In: *Educação Matemática: Temas de investigação*. Lisboa: IIE, p. 185-239, 1992.

Disponível em: <<http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/artigos-por-temas.htm#Concepcoes,%20conhecimento%20profissional%20e%20praticas%20profissionais>>. Acesso em: 04 nov. 2008.

_____. *Perspectivas de desenvolvimento profissional de professores de matemática*. CIEFCUL, Universidade de Lisboa, 1996. Disponível em: <<http://www.spce.org.pt/sem/96JP.pdf>>. Acesso em: 16 jun. 2008.

_____. Da formação ao desenvolvimento profissional. *Actas do ProfMat 98*...Lisboa: APM, 1998. p. 27-44. Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/curso_rio_claro.htm>. Acesso em: 01 jun. 2008.

_____. Tecnologias de informação e comunicação na formação de professores: que desafios? *Revista Iberoamericana de Educación*, Madrid, n. 24, p. 63-90, 2000. Disponível em: <<http://redalyc.uaemex.mx/redalyc/pdf/800/80002404.pdf>>. Acesso em 15 jun. 2008.

PONTE, J. P. Estudos de Caso em Educação Matemática. *Bolema*, Rio Claro (SP), ano 19, n. 25, p. 105-132, 2006a.

_____. Desenvolvimento profissional do professor que ensina matemática: Uma meta-análise de estudos brasileiros. *Quadrante*, Lisboa, Editorial, v. 15, p. 1-2, 2006b.

PONTE, J. P.; FERREIRA, C.; BRUNHEIRA, L.; OLIVEIRA, H.; VARANDAS, J. Investigating mathematical investigations. In: ABRANTES, P.; PORFIRIO, J.; BAIA, M. (Eds.), *Les interactions dans la classe de mathématiques: Proceedings of the CIEAEM 49*. Setúbal, Portugal: ESE de Setúbal, 1998. p. 3-14.

Disponível em: <<http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/artigos-por-temas.htm>>. Acesso em: 06 mai. 2009.

PONTE, J. P. et al. O contributo das tecnologias de informação e comunicação para o desenvolvimento do conhecimento e da identidade profissional. In: FIORENTINI, D. (Org.). *Formação de professores de matemática: explorando novos caminhos com outros olhares*. Campinas: Mercado das Letras, 2003. p. 159-192.

RABARDEL, P. *Les hommes et les technologies*. Paris: Armand Colin, 1995.

REZENDE, J; NASSER, L. Kinds of argumentation used in Geometry. *Atlas do PME*, 18., Lisboa, v. 1, p. 66, 1994.

RIBEIRO, M. J. B.; PONTE, J. P. A formação em novas tecnologias e as concepções e práticas dos professores. *Quadrante*, v. 9, n. 2, p. 3-26, 2000. Disponível em: <<http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/artigos-por-temas.htm#Concepcoes,%20conhecimento%20profissional%20e%20praticas%20profissionais>>. Acesso em: 01 jun. 2008.

SARAIVA, M. J. B. R.; PONTE, J. P. O trabalho colaborativo e o desenvolvimento profissional do professor de Matemática. *Quadrante*, v. 12, n. 2, p. 25-52, 2003. Disponível em: [http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/03-Saraiva-Ponte\(Quadrante\).doc](http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/03-Saraiva-Ponte(Quadrante).doc). Acesso em: 15 jun. 2008.

TEXAS INSTRUMENTS INSTRUCTIONAL COMMUNICATIONS. Guia de utilização para Windows: Cabri, 1997.

THOMPSON, A. Teacher's beliefs and conceptions: a synthesis of the research. In: GROUWS, D. A. (Ed.), *Handbook of research on mathematics learning and teaching*. New York: Macmillan, 1992. p.127 -146.

TROUCHE, L. Managing complexity of human/machine interaction in computerized learning environments: Guiding student's command process through instrumental orchestrations. In: COMPUTER ALGEBRA IN MATHEMATICS EDUCATION (CAME) SYMPOSIUM, 3., 2003, Reims. Proceedings ... Reims: CAME, 2003.

VALENTE, J. A. Análise de diferentes tipos de *software* usados na educação. In: VALENTE, J. A. (org.) *O computador na sociedade do conhecimento*. Campinas: Gráfica Central da UNICAMP, 1993. p. 88-110.

_____. O uso inteligente do computador na educação. *Revista Pátio*, Porto Alegre, ano I, n. 1, p. 19-21, mai. /jul. 1997.

_____. A espiral da aprendizagem e as tecnologias da informação e comunicação: repensando conceitos. In: JOLY, M. C. R. A. *A Tecnologia no ensino: implicações para aprendizagem*. São Paulo: Casa do Psicólogo, 2002. p. 15-37.

VAN HIELE, P. *Structure and Insight*. Orlando, Florida: Academics Press, 1986.

VÉRILLON, P.; RABARDEL, P. Cognition and artefacts: a contribution to the study of thought in relation to instrument activity. *European Journal of Psychology in Education*, v. 9, n. 3, p. 77-101, 1995.

VIEIRA, A T.; ALMEIDA, M. E. B.; ALONSO, M. (Orgs.). *Gestão Educacional e Tecnologia*. São Paulo: Avercamp, 2003.

APÊNDICES

APÊNDICE A

ETAPAS E FASES DO PROJETO APROVAME

As informações apresentadas a seguir, relacionadas ao Projeto AProvaME, foram obtidas a partir do Projeto de Pesquisa (HEALY, 2005) e do Relatório Científico (HEALY, JAHN, 2007) apresentados ao CNPq, respectivamente em 2005 e em julho de 2007.

O Projeto AProvaME foi organizado em duas fases (Fase 1 e Fase 2), divididas em diversas etapas.

Fase 1: No decorrer do 1º semestre de 2005, todos os alunos do Mestrado Profissional foram convidados a fazer parte do Projeto AProvaME, que teve início no 2º semestre deste mesmo ano. Vinte e sete alunos manifestaram interesse neste projeto e iniciaram a sua participação a partir de agosto de 2005. A *Fase 1* foi efetivada no 2º semestre de 2005 e envolveu a realização de um mapeamento de concepções de alunos adolescentes (de 14 a 16 anos) sobre argumentações e provas, bem como um levantamento de experiências e crenças de professores envolvendo o ensino da prova, que serviu para caracterizar o Perfil Inicial do Professor.

O instrumento utilizado para realizar o mapeamento de concepções foi um questionário, baseado em outro desenvolvido por Healy e Hoyles (1998) na Inglaterra e já aplicado na Austrália, França, Israel e Taiwan. Este questionário foi adaptado para o português, pelos participantes do projeto. Os itens deste instrumento visavam avaliar em que medida os alunos aceitavam evidências empíricas como provas, se conseguiam fazer a distinção entre evidências empíricas e argumentos matematicamente válidos, se conseguiam construir argumentos válidos e se compreendiam o domínio de validade de uma prova.

O questionário foi aplicado por todos os professores-colaboradores a 1.998 alunos da 8ª série do Ensino Fundamental e da 1ª série do Ensino Médio, pertencentes a 31 escolas, públicas estaduais e municipais e particulares do Estado de São Paulo. Desta aplicação resultaram 1.998 protocolos. Os dados obtidos foram analisados a fim de permitir

uma avaliação das áreas de compreensão de prova pelos alunos, tanto das que foram trabalhadas nas aulas, como outras que mereceriam uma maior atenção. Os resultados destas análises forneceram um mapa das concepções dos alunos e como estas variaram em relação a fatores individuais e escolares.

Fase 2: Esta fase foi realizada no decorrer de um ano e meio, do início de 2006 a junho de 2007 e teve por objetivo contemplar tanto a aprendizagem como o ensino, que foram os dois eixos de investigação do projeto, na medida em que estabelecem entre si uma grande relação.

A Fase 2 constituiu na elaboração e na avaliação das situações de aprendizagem por cinco equipes, formadas por professores-colaboradores e pesquisadores. As situações de aprendizagem requeriam o desenvolvimento de atividades, as quais deveriam envolver e valorizar a construção de conjeturas e provas em contextos que integrassem recursos digitais.

No que se refere aos dois eixos de investigação do projeto, a elaboração e a avaliação das situações localizaram-se no eixo da aprendizagem, pois levaram em consideração as dificuldades e as limitações na compreensão de provas, que foram identificadas nos resultados obtidos com o mapeamento realizado na Fase 1. No eixo do ensino ficou localizado o professor, colocado nesta posição, devido à sua contribuição na elaboração das situações de aprendizagem e nas modificações destas em ação, no momento em que estas situações foram propostas e efetivadas em sala de aula.

Os professores-colaboradores optaram por utilizar dois tipos de ferramentas computacionais: a planilha eletrônica e um ambiente de geometria dinâmica, devido à sua maior familiaridade com elas, além destas possuírem reconhecido potencial no ensino da prova (HEALY; HOYLES, 2000, 2002). O projeto também possibilitou que os professores selecionassem e utilizassem outras ferramentas que julgassem necessárias e, talvez, mais convenientes para a pesquisa.

Os pesquisadores selecionaram previamente os dez temas a serem abordados no desenvolvimento das atividades, cujos conteúdos pertenciam aos domínios da Álgebra e Geometria dos ensinos fundamental e médio, conforme apresentados no quadro 7:

Ensino Fundamental

Tema 1: Múltiplos e Divisores (inclusive mdc e mmc)

Tema 2: Teorema Fundamental da Aritmética

Tema 3: Congruência, Semelhança e Equivalência

Tema 4: Teorema de Pitágoras

Tema 5: Teorema das retas paralelas interceptadas por uma transversal e Teorema da soma dos ângulos internos de um triângulo

Ensino Médio

Tema 1: Conjuntos numéricos

Tema 2: Progressões Aritméticas e Geométricas (PA e PG)

Tema 3: Funções de 1º e 2º graus

Tema 4: Geometria Espacial (paralelismo e perpendicularismo)

Tema 5: Geometria Analítica (paralelismo e perpendicularismo)

Quadro 7: Temas delineados para a Fase 2.
 Fonte: Healy e Jahn (2007).

A Fase 2 contou com três etapas, que foram aplicadas. Porém em relação ao que havia sido previsto inicialmente no projeto (HEALY, 2005), ao serem efetivamente implementadas no decorrer do AProvaME, estas etapas sofreram algumas modificações (HEALY; JAHN, 2007) quanto ao que deveria ser realizado em cada uma delas. Elas necessitaram ser adaptadas ao grupo de participantes e ao seu respectivo contexto de atuação. A metodologia de pesquisa utilizada na Fase 2 foi a do *design-based research* (COBB et al., 2003, apud HEALY; JAHN, 2007), que previa a possibilidade de ocorrerem mudanças de percurso no decorrer da pesquisa, dependendo do andamento desta e das necessidades que surgissem a todo momento.

A seguir, encontra-se um breve relato das três etapas da Fase 2, em relação a como elas foram previstas (HEALY, 2005) e como foram efetivamente aplicadas (HEALY; JAHN, 2007).

1ª Etapa

Em relação ao que havia sido previsto, por ocasião do projeto, cada uma das equipes de professores (intragrupos) deveria elaborar duas situações de aprendizagem, sendo uma de Álgebra e outra de Geometria, para em seguida aplicá-las e testá-las com um pequeno grupo de alunos (teste-piloto). Ao final, estas situações seriam discutidas e reformuladas em cada um dos grupos. Isto se daria em função da análise do que havia ocorrido na interação aluno-computador durante a realização das atividades, considerando

quais aspectos de prova foram favorecidos e a quais concepções estes aspectos estavam relacionados (HEALY, 2005).

Enquanto esta etapa estava sendo implementada, os pesquisadores observaram que a proposta inicial revelou-se ambiciosa, pois os professores-colaboradores apontaram inúmeras dificuldades para a aplicação das atividades. Como os alunos obtiveram um baixo rendimento no questionário sobre provas, acrescido a pouca familiaridade destes professores com o tema, eles se sentiram temerosos em relação à viabilidade de trabalhar com esta abordagem em sala de aula. Assim, uma nova estratégia foi delineada para esta etapa, que passou a ter por objetivo a concepção dos primeiros protótipos das situações de aprendizagem, sem a necessidade da efetiva aplicação destas com os alunos. As reuniões dos grupos foram presenciais e tiveram periodicidade quinzenal, muitas vezes semanal, dependendo da necessidade e solicitação por parte do grupo. Nestas reuniões os professores-colaboradores, também, propunham a leitura e a discussão de textos e publicações que tratavam de temas como a prova e o processo do *design-based research*.

As atividades, ao serem desenvolvidas em suas diferentes versões, eram disponibilizadas nos Portfólios dos grupos no Teleduc, de forma a constituírem um registro das produções para análise posterior. Estas reuniões foram filmadas e os diálogos entre os participantes gravados, bem como foram coletadas e analisadas as produções escritas e computacionais dos professores e de alguns alunos que participaram de algum teste-piloto. Cada professor-colaborador construiu o seu próprio registro do processo, documentando suas perspectivas sobre o desenvolvimento das situações dos grupos (HEALY; JAHN; 2007).

2ª Etapa

Relativamente ao que havia sido proposto no projeto (HEALY, 2005) as situações de aprendizagem elaboradas pelas equipes deveriam ser disponibilizadas no ambiente virtual (Teleduc), com o objetivo de que cada professor-colaborador aplicasse duas atividades, uma de Álgebra e outra de Geometria, em uma de suas turmas. Esta etapa seria realizada intergrupos. Após a aplicação da atividade, cada grupo deveria elaborar um relatório descritivo da sessão, indicando se os objetivos foram atendidos; as dificuldades encontradas pelos alunos ou professores; e reflexões sobre os resultados alcançados.

Esta etapa foi efetivamente realizada, quando ocorreu o compartilhamento das situações de aprendizagem elaboradas entre os cinco grupos. Ela teve por objetivo envolver os professores em um processo de análise e avaliação das atividades, levando a reformulações destas, para efetiva aplicação com os alunos em sala de aula. A frequência

de encontro dos grupos continuou a ser quinzenal. Ao Teleduc foi atribuído um papel mais importante, tornando-se um meio facilitador na comunicação entre os grupos. Foram abertos os fóruns de discussão, denominados de “Atividades em teste”, que se referiam a cada um dos temas e ao seu conjunto de atividades. O gerenciamento destes fóruns ficou sob a responsabilidade do professor-colaborador, que participou da autoria das atividades em discussão. Nesta etapa, mais uma fase do processo do *design* foi implementada, na medida em que os professores realizavam as atividades propostas pelo professor-autor e compartilhavam as mensagens e discussões nos fóruns, caracterizada pelas interações entre os dois grupos: “grupo-autor” e “grupo-avaliador”. Foram gerados diversos registros, permitindo o acompanhamento da evolução das atividades e dos conhecimentos dos professores em relação aos temas (HEALY; JAHN, 2007).

Observa-se que, nesta 2ª etapa, o que ocorreu realmente foi o compartilhamento das situações de aprendizagem entre os professores-colaboradores, visando à melhoria destas, antes que fossem efetivamente aplicadas com os alunos. Havia sido previsto inicialmente, por ocasião do projeto, que cada professor nesta etapa deveria aplicar duas situações de aprendizagem com os alunos, sendo responsável a seguir pela elaboração de um relatório descritivo desta sessão, o que efetivamente não ocorreu.

3ª Etapa

Em relação ao que havia sido previsto no projeto, os alunos participantes da Fase 2 deveriam responder ao questionário elaborado na Fase 1, para poder se proceder a uma avaliação das situações de aprendizagem. Estas respostas visariam responder em que medida as principais dificuldades apontadas no mapeamento das concepções (Fase 1) foram superadas pelos alunos participantes da Fase 2, e quais aspectos de prova ainda necessitariam ser melhor aprofundadas nas atividades propostas. Estes dados corresponderiam às respostas procuradas em relação ao eixo da aprendizagem (HEALY, 2005).

Porém, o que ocorreu efetivamente nesta etapa foi a experimentação das situações de aprendizagem, que não se deu de forma coletiva, ficando sob a responsabilidade de um professor-colaborador, na forma de seu trabalho individual de finalização do Mestrado Profissional, orientado por um pesquisador. Participaram desta etapa apenas 14 dos 27 professores-colaboradores do AProvaME. Os demais, em outros momentos, já haviam definido o seu trabalho final. Embora a proposta original em relação a esta etapa fosse a reaplicação do questionário da Fase 1, este procedimento não foi realizado (HEALY; JAHN, 2007).

APÊNDICE B

ROTEIRO DA PRIMEIRA ENTREVISTA

Dados do professor

Sexo:

Idade:

Graduação:

Instituição (Pública ou Privada):

Tempo de docência total:

Quando iniciou o mestrado:

Leciona em escola: (particular, prefeitura, estado):

Nível de ensino: Ensino Fundamental (II) ou Ensino Médio

Disciplinas:

1) Você teve alguma disciplina que tratasse do uso das ferramentas da informática em sua formação básica de Matemática? Caso tenha recebido, conte um pouco desta formação.

2) Quais eram as suas ideias, pensamentos (concepções) e conhecimentos em relação à informática, e das possibilidades de sua integração no dia a dia da sala de aula no período de sua graduação?

3) No decorrer de seu curso de formação em Matemática houve a preocupação por parte de seus professores em suas respectivas disciplinas da inserção das provas visando o desenvolvimento do raciocínio dedutivo? Se este fato ocorreu, como as provas eram introduzidas e utilizadas? Como os alunos eram envolvidos de forma a realizarem argumentações e conjecturas?

4) Ao iniciar o seu trabalho nas escolas você chegou a utilizar recursos da informática alguma vez nas suas aulas de Matemática? Como isto foi feito? Você se sentia preparado para usar adequadamente estas ferramentas? Você teve algum curso de capacitação para este uso? Você notou alguma diferença no seu desempenho à medida que você aprendia a usar essa ferramenta? O processo de apropriação destes recursos e a sua efetiva integração na sala de aula levavam quanto tempo?

5) Caso tenha utilizado as ferramentas da informática com os seus alunos, notou alguma diferença em relação à aprendizagem destes? Que aspectos você considera que foram melhorados ou piorados?

6) No seu dia a dia você investiga as diversas possibilidades existentes em ambientes computacionais? Você já pensou, por exemplo, em atribuir a um *software* uma função para a qual ele não foi previamente projetado?

7) A priori você acredita que o computador possa permitir a realização de algumas coisas que o ambiente tradicional não permite? Justifique a sua resposta.

8) Antes de iniciar o Mestrado Profissional, você propunha atividades no seu dia a dia da sala de aula, que envolviam a argumentação e possibilitavam a elaboração de conjeturas e provas por parte de seus alunos?

9) Neste momento em que vocês se encontram realizando o Mestrado Profissional, além de estarem participando do Projeto AProvaME, vocês consideram que ampliaram o seu conhecimento em relação a estas questões? Qual é o conhecimento atual de vocês? O que vocês aprenderam no decorrer do Mestrado em relação à informática? O que vocês pensam atualmente sobre o desenvolvimento de atividades que busquem a prova, tendo a contribuição dos instrumentos computacionais?

10) No momento do desenvolvimento da atividade, onde você tem encontrado a maior dificuldade?

a) no conhecimento do conteúdo matemático a ser abordado;

b) na elaboração da sequência didática para abordar este conteúdo;

c) na reflexão e no desenvolvimento, individual e no grupo colaborativo, das atividades que possibilitem a construção de conjeturas e provas por parte dos alunos?

d) na integração do computador com vistas à prova.

Em seguida, coloque estes itens em ordem crescente de dificuldade e comente sucintamente cada um deles.

11) A seu ver, qual poderia ser a contribuição dos instrumentos computacionais no desenvolvimento das atividades e aplicação junto aos alunos no ensino de argumentação e prova?

12) Você acredita que seria possível a partir de um empirismo inicial, seguir na direção de uma formalização matemática usando os instrumentos computacionais? A seu ver, quais seriam as etapas pelas quais as pessoas passam no decorrer deste processo?

APÊNDICE C

ROTEIRO DA SEGUNDA ENTREVISTA

Dados do professor – situação atual

Idade:

Tempo de docência total:

Leciona em escola: (particular, prefeitura, estado):

Nível de ensino: Ensino Fundamental (II) ou Ensino Médio

Disciplinas:

1) Descreva a versão atual de sua atividade. Você já finalizou a sua atividade? Esta já é a sua versão final? Como se deu este processo de finalização individual de sua atividade?

2) Quanto à versão final/atual de sua atividade, o que você manteve e o que foi modificado em relação às versões iniciais, quando da finalização do *design* coletivo? As maiores mudanças se concentraram em quais aspectos? (escolha do *software*, uso do *software* na atividade, estrutura da atividade, metodologia a ser aplicada com os alunos, resultados esperados?)

3) Como se deu a fase de *design* coletivo? Como você sentiu a contribuição de seus colegas nesta fase? Quais foram as dificuldades encontradas nas fases do *design* coletivo e posteriormente na sua individual?

4) Qual o *software* que você está usando em sua atividade?

Porque você escolheu este *software*? Como você aprendeu a utilizá-lo?

O que você acha deste *software*?

5) Quais são as limitações que você percebe em relação ao conhecimento que vocês têm quanto à prova e/ou uso do *software* nos momentos da elaboração individual da atividade? E na aplicação desta junto a seus alunos?

6) Qual aspecto de prova que você está abordando em sua atividade? Como você espera que o seu aluno atue neste sentido?

7) Você já iniciou a aplicação desta atividade com os seus alunos? Descreva como isto está sendo realizado – número de alunos, horário (fora da grade?), número total de aulas necessárias para o desenvolvimento da atividade, local e como esta atividade é introduzida a eles e como se dá o desenvolvimento desta.

8) Quais são as maiores dificuldades que você tem encontrado na aplicação da atividade? Como os alunos têm recebido esta atividade? Você já obteve alguma resposta dos alunos quanto aos resultados obtidos na atividade? Você tem observado alguma mudança neles? Em quais aspectos? Quais são as maiores dificuldades que você percebe em seus alunos? Era o que você esperava obter? Quais aspectos você acha que foram melhorados e quais que foram piorados?

9) A seu ver quais são as perspectivas e os desafios dos professores ao trabalharem desta forma com os seus alunos?

APÊNDICE D

ROTEIRO DA TERCEIRA ENTREVISTA

Dados do professor – situação atual

Idade:

Tempo de docência total:

Leciona em escola: (particular, prefeitura, estado):

Nível de ensino: Ensino Fundamental (II) ou Ensino Médio

Disciplinas:

1) Descreva a atividade final, a que foi aplicada com os alunos, em termos de estrutura, materiais e *softwares* utilizados, tempo de duração, quantidade de alunos, local, horário (fora da grade?)

2) O que mudou na versão final, em relação às intermediárias?

3) Você precisou fazer algum ajuste na atividade, enquanto a estava aplicando, em função do que estava ocorrendo, com o aluno ou com o equipamento? Houve necessidade de mudar alguma coisa na sequência didática, incluir ou retirar alguma etapa, que pudesse melhorar a resposta do aluno, quer seja em termos de aprendizado ou de motivação?

4) Como se deu a aplicação da atividade com os alunos? Quais as dificuldades que você encontrou nesta etapa? Como os alunos receberam esta atividade? Você observou alguma mudança neles? Em quais aspectos? Quais são as maiores dificuldades que você percebeu em seus alunos? Era o que você esperava obter? Quais aspectos você acha que foram melhorados e quais que foram piorados?

5) Quais são as limitações que você percebeu em relação ao conhecimento que você tinha em relação à prova e/ou uso do *software* no momento da aplicação da atividade junto aos alunos?

6) Qual aspecto de prova que você está abordou em sua atividade? Como foi a resposta do aluno? A atuação do aluno ocorreu da forma que você esperava?

7) No seu ponto de vista, o que significou para você o projeto AProvaME?

Que tipo de influência este projeto propiciou para a sua formação intelectual e na sua prática docente e matemática?

8) Quais são as suas observações e sugestões, para a melhoria deste projeto no caso de outros professores passarem por um processo de formação continuada semelhante ao de vocês?

9) A seu ver quais são as perspectivas e os desafios dos professores ao trabalharem desta forma com os seus alunos?

ANEXO A**FLÁVIA - ESBOÇO 1****Atividade validativa das ferramentas de GA (coeficiente angular, distância entre pontos) como procedimento de prova para paralelismo e perpendicularismo****SEGUNDA ETAPA****A) Construção de um paralelogramo, para análise de paralelismo e perpendicularismo**

O aluno poderá fazer uso das ferramentas reta paralela e perpendicular para a construção da figura, um paralelogramo.

Sugestões para a construção:

Dado um ponto A, traçar uma reta r qualquer que contenha o ponto A.

Determine um outro ponto B fora da reta r e por ele faça passar uma reta s paralela a r .

Trace uma reta t concorrente a reta r e a reta s ;

Trace uma reta v paralela a reta t .

Obter as equações das retas suportes dos lados do paralelogramo;

Movimentar a figura através de seus vértices e analisar atentamente o que ocorre com as equações;

Promover uma análise conjunta do estudo acima definindo o coeficiente angular;

(O professor formalizará; neste momento o coeficiente angular)

Desenhar um paralelogramo no Cabri, tendo escondido as ferramentas: reta paralela e reta perpendicular;

Validar o desenho utilizando os conceitos de GA (onde o aluno deverá utilizar distância entre dois pontos e coeficiente angular).

B) Construção de um quadrado, para análise de paralelismo e perpendicularismo

O aluno poderá fazer uso das ferramentas reta paralela e perpendicular para a construção da figura:

Sugestões para a construção:

Traçar uma reta s ;
 Traçar um segmento de reta AB , sobre a reta s ;
 Traçar uma reta t perpendicular a reta s passado por A ;
 Traçar uma circunferência com centro em A e raio AB ;
 Criar um ponto C de intersecção da circunferência com o segmento AB e um ponto D ;
 Traçar uma reta perpendicular ao segmento AB , passando por C ;
 Traçar uma reta r paralela a reta s , passando pelo ponto D

Obter as equações das retas suportes dos lados do paralelogramo;

Movimentar a figura através de seus vértices e analisar atentamente o que ocorre com as equações;

Promover uma análise conjunta do estudo acima definindo o coeficiente angular;

(O professor formalizará; neste momento o coeficiente angular);

Desenhar um quadrado no Cabri, tendo escondido as ferramentas: reta paralela e reta perpendicular;

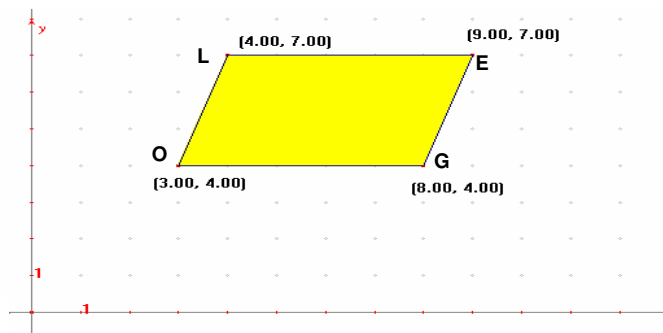
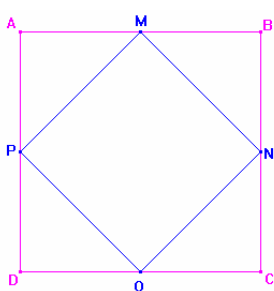
Validar o desenho utilizando os conceitos de GA (onde o aluno deverá utilizar distância entre dois pontos e coeficiente angular).

TERCEIRA ETAPA

Dadas as figuras abaixo, o aluno deverá validar os conceitos obtidos nas duas etapas iniciais provando que:

LEGO é paralelogramo;

o polígono MNOP é um quadrado.



ANEXO B

FLÁVIA - ESBOÇO 2

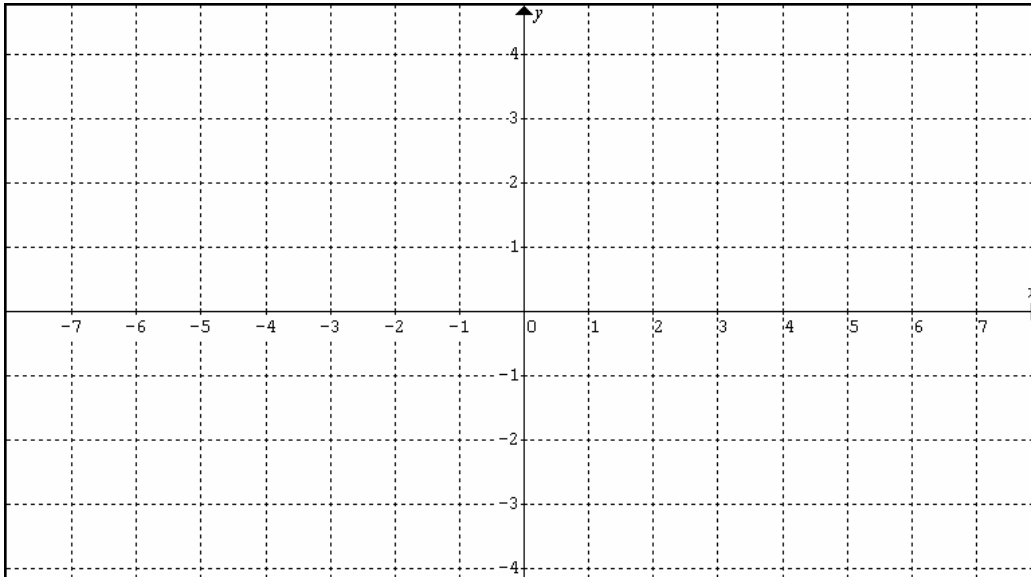
Geometria Analítica - Atividade sobre retas paralelas

Usando o Cabri

01. Desenhar retas paralelas.

- Represente o ponto $P(1, 1)$;
- Desenhe uma reta (a) que passa por $O(0, 0)$ e P .
- Desenhe uma reta (b) paralela a reta (a), passando por $Q(0, 1)$.
- Desenhe outras retas paralelas a reta (a):

$R(0, 2)$ (c), $S(0, 3)$ (d), $T(0, -1)$ (e), $U(0, -2)$ (f) e $V(0, -3)$ (g).

02. Dê a equação de cada reta, $y = ax + b$, e o valor dos coeficientes (a e b).

(a): $y = x$ ($a = 1, b = 0$)
(b):
(c):
(d):
(e):
(f):

(g):

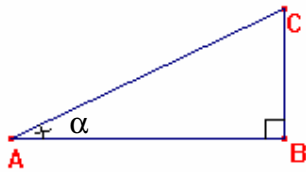
A que conclusão você pode chegar?

Comparando os valores de a em cada equação, podemos notar que eles são Assim, podemos dizer que em retas os coeficientes angulares são E os valores de b são Assim, também, podemos dizer que em retas os coeficientes lineares são

Logo, em retas paralelas os coeficientes são iguais e os coeficientes são

03. Vamos entender o que é o coeficiente angular.

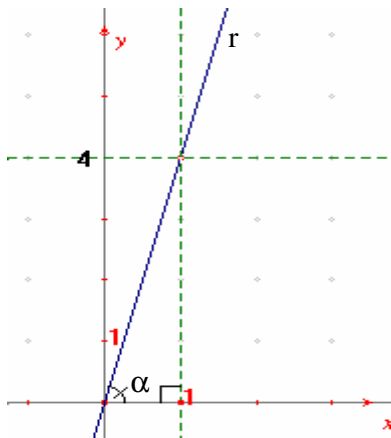
Dado um triângulo retângulo ABC,



Podemos dizer que a tangente do ângulo α é a razão entre o cateto.....e o cateto ao ângulo.
Portanto $\text{tg } \alpha =$

Agora iremos para o plano cartesiano.

04. Dada a figura abaixo determinaremos o coeficiente angular da reta r .



Calcule a tangente de α

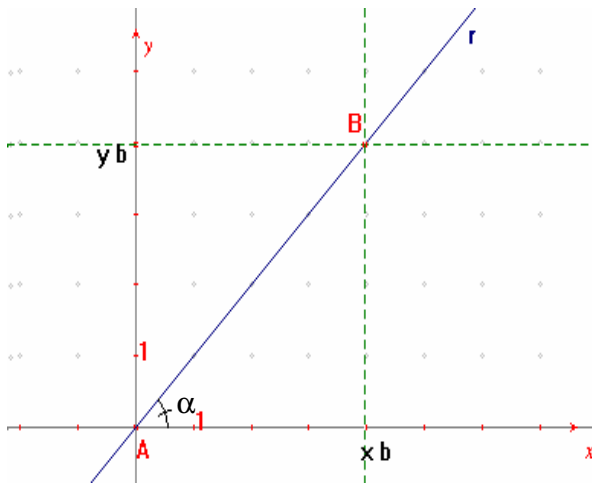
$\text{tg } \alpha =$ _____

Agora peça ao Cabri à equação da reta $r : y =$

Nessa equação o coeficiente angular é.....

Portanto podemos dizer que a $\text{tg } \alpha$ éao coeficiente angular da reta r .

05. Formalize!!!!!!



Na figura acima $\text{tg } \alpha$ é

Na equação da reta $r: y = a x + b$, temos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, então:

(1) $y_A = a x_A + b$

(2) $y_B = \dots\dots\dots$

De (1) e (2) vem:

$y_B - y_A = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots \rightarrow$ (elimine os parênteses)

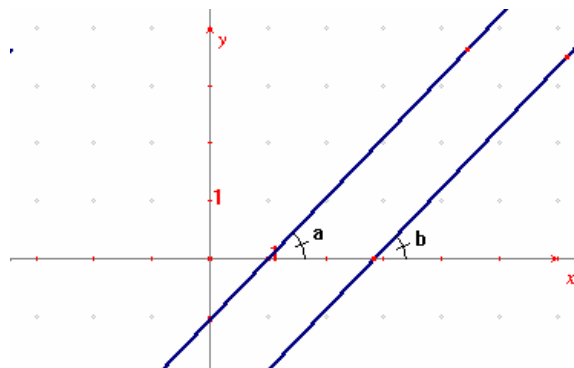
$y_B - y_A = \dots\dots\dots \rightarrow$ (coloque o a em evidência)

$a = \dots\dots\dots$

Conclusão $\text{tg } \alpha$ é à a (coeficiente angular).

06. Usando o Cabri, construir duas retas paralelas (ao movimentar uma reta elas devem continuar paralelas).

Faça um esboço de sua construção e explique sua resposta.

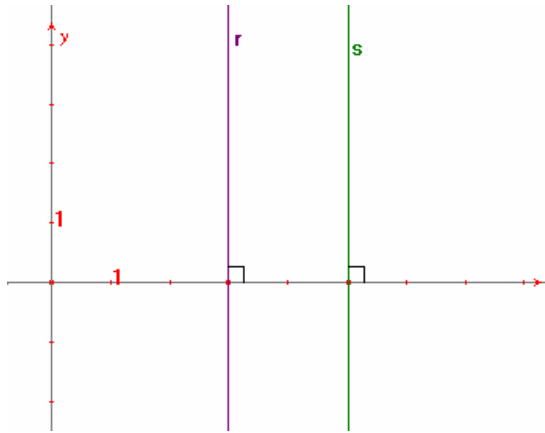


Se x é uma reta transversal às retas r e s , e $a = b$, temos que as retas r e s são

Se x é uma reta transversal às retas r e s , e $r // s$, temos que os ângulos são, então os coeficientes angulares são iguais.

CASOS PARTICULARES

Observe o desenho abaixo:



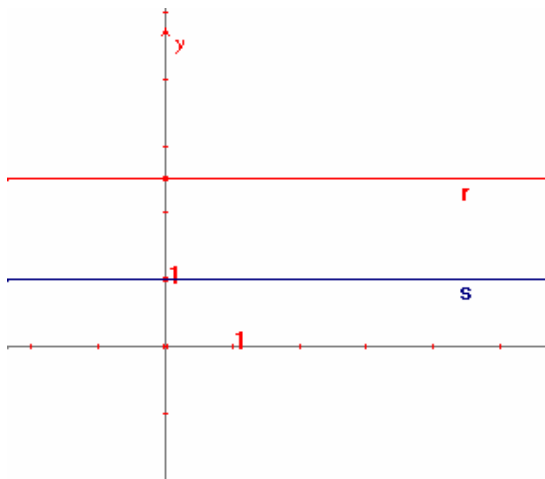
Na reta r, calcule:

$$\operatorname{tg} 90^\circ = \dots\dots\dots$$

Na reta s, calcule:

$$\operatorname{tg} 90^\circ = \dots\dots\dots$$

Portanto, as retas r e s perpendiculares ao , não possuem coeficiente
r e s são retas paralelas.



Na reta r, calcule:

$$\operatorname{tg} 0^\circ = \dots\dots\dots$$

Na reta s, calcule:

$$\operatorname{tg} 0^\circ = \dots\dots\dots$$

Portanto, as retas r e s perpendiculares ao , e os coeficientes angulares são iguais a
r e s são retas paralelas.

08. Retas paralelas têm coeficientes angulares iguais?

() nunca () as vezes () sempre.

Justifique sua resposta.

A que conclusão podemos chegar?

Como o coeficiente de uma reta é igual a formado pela reta com o eixo dos x podemos dizer que duas retas paralelas possuem coeficientes angulares , pois possuem inclinaçõesrelativamente ao eixo dos x.

ANEXO C**FLÁVIA - ESBOÇO 3****Paralelismo*****Primeira etapa:******Atividade 1***

Será oferecido aos alunos, um sólido geométrico na forma de cubo (material não definido), com seus vértices identificados e será pedido: Quantos pares de retas paralelas podem ser determinadas pelos vértices A,B,C,D, E,F,G, e H do cubo.

Atividade 2

Escreva com suas palavras o que é um paralelogramo.

Atividade 3

Utilizando papel milimetrado, construa um paralelogramo descrevendo como você o construiu.

(O professor neste momento deverá dar a definição do paralelogramo e de suas propriedades levando em conta as respostas dos seus alunos).

Segunda etapa:

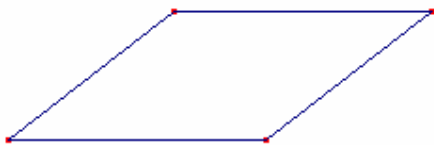
Cabri—Géomètre (atividade 1, 2, 3 e 4)

Atividade 1

(Atividade Exploratória)

Abra o arquivo 1 (Os alunos encontrarão o seguinte enunciado)

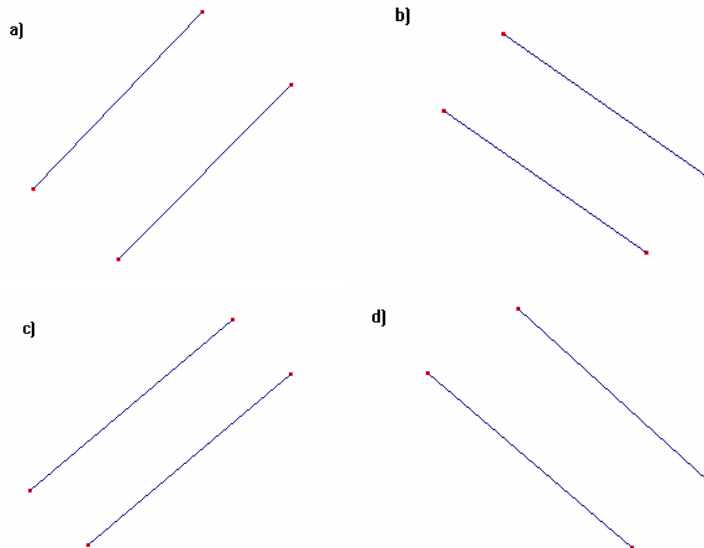
Utilizando apenas as opções distância e ângulo do menu, enuncie as propriedades que você observa, no desenho abaixo. Por fim defina o quadrilátero.



Atividade 2

Abra o arquivo 2 (os alunos encontrarão o seguinte enunciado)

**Verifique nos itens abaixo se as retas são paralelas.
Justifique.
Não esqueça de descrever todos os passos.**



Obs: o aluno poderá utilizar as ferramentas do cabri, porém serão retiradas previamente as ferramentas: _____ paralelas?, inclinação e equação.

Atividade 3

Construa um paralelogramo;

Obtenha a equação das retas suportes dos lados do paralelogramo;

Movimente a figura através de seus vértices e analisar atentamente o que ocorre com as equações;

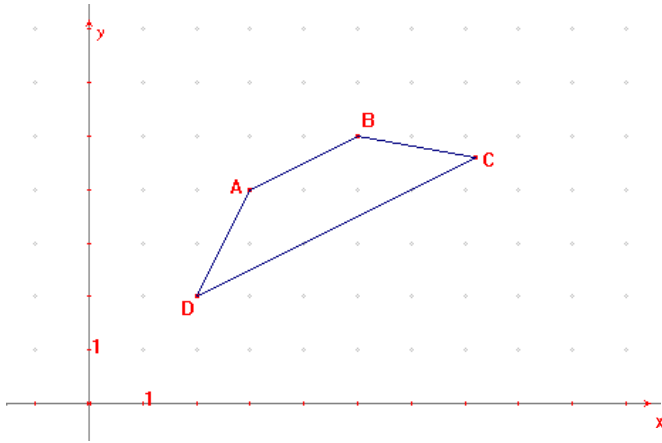
Escreva com suas palavras o que você observa;
(o professor permitirá que os alunos socializem suas observações e fará a institucionalização do termo coeficiente angular)

Enuncie agora uma propriedade básica satisfeita por duas retas paralelas em termos de seus coeficientes angulares.

Atividade 4

Abra o arquivo 3 (os alunos encontrarão o seguinte enunciado)

Que tipo de quadrilátero está representado na figura acima.
Justifique a sua resposta.

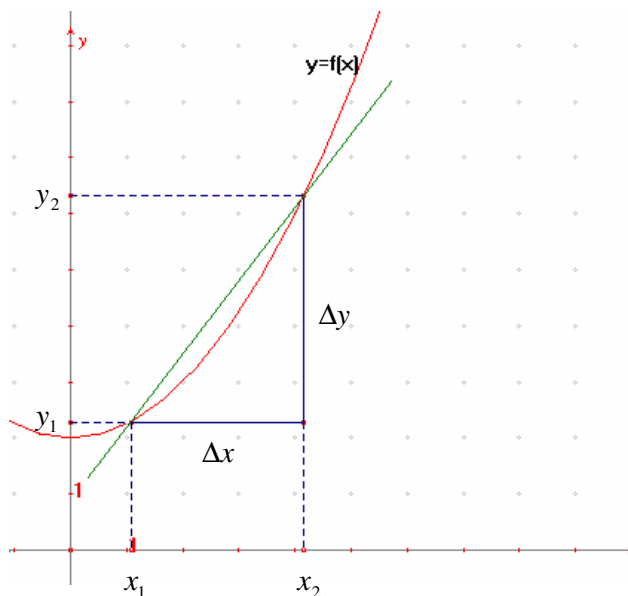


Obs: o aluno poderá utilizar as ferramentas do cabri, porém serão retiradas previamente as ferramentas: _____ paralelas? _____.

Terceira etapa:**Papel e lápis**

Taxa de Variação Média

Definição: Para uma função qualquer $y = f(x)$, chamamos ao número $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ de *taxa de variação média* entre dois pontos x_1 e x_2 :



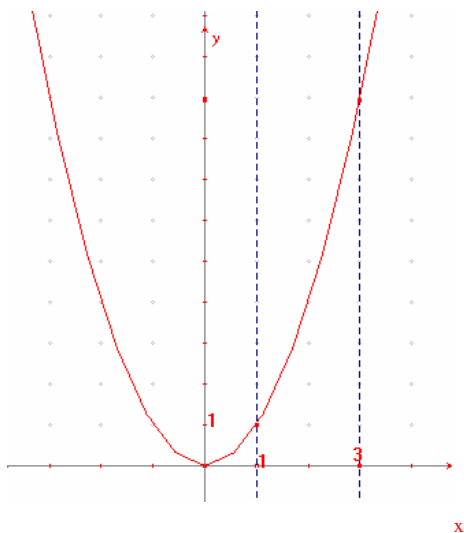
Representando a diferença $x_2 - x_1$ por Δx e $y_2 - y_1$ por Δy , temos: $Tm = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

(Tm : taxa de variação média de $y = f(x)$ entre x_1 e x_2)

A taxa média corresponde, então, à variação de y por unidade de x , em média, entre x_1 e x_2 .

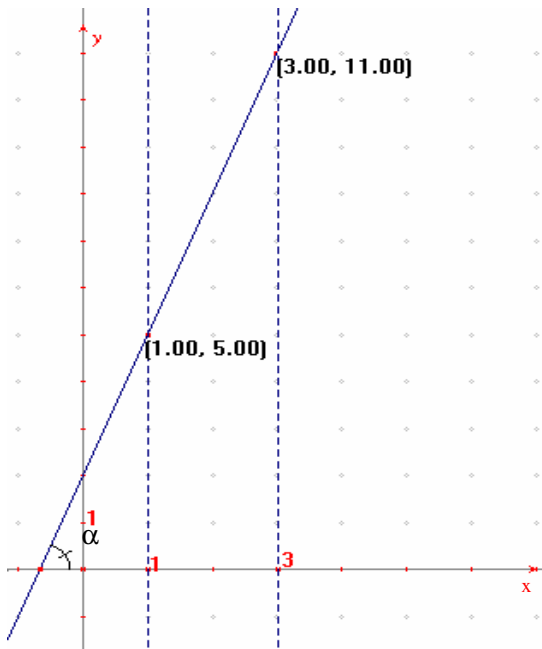
Atividade 1

1a) Dada à figura abaixo, determine a taxa de variação média:



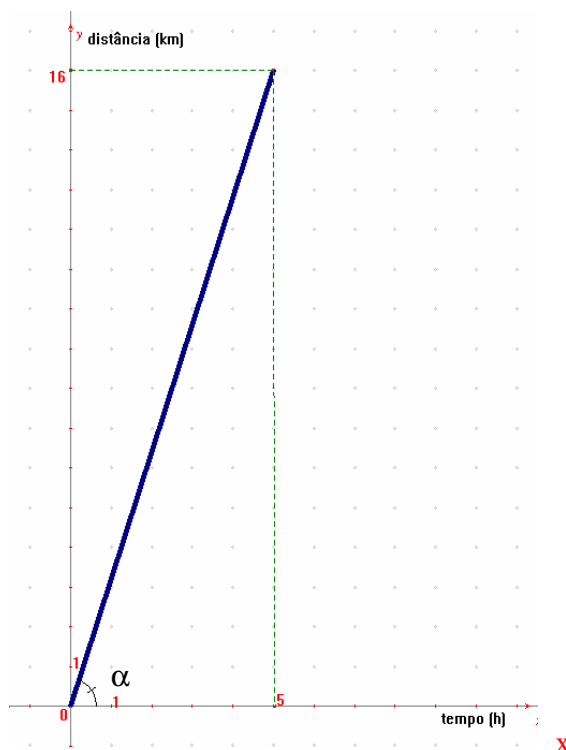
- entre 1 e 3:
- entre 1 e 2:
- entre 1 e 1,5:
- entre 1 e 1,1:

1b) Dada à figura abaixo, determine a taxa de variação média:



- entre 1 e 3:
- entre 1 e 2:
- entre 1 e 1,5:
- entre 1 e 1,1:
- Calcule $\text{tg } \alpha$:

1c) O gráfico abaixo representa o percurso de um carro que sai de São Paulo com destino ao Rio de Janeiro, suponha que o odômetro é zerado no início da viagem. Calcule a taxa de variação média da distância em relação ao tempo, ou seja, a velocidade média do carro entre São Paulo e Guarulhos.



Calcule a tangente do ângulo α .

É possível estabelecer alguma relação entre os itens b e c?

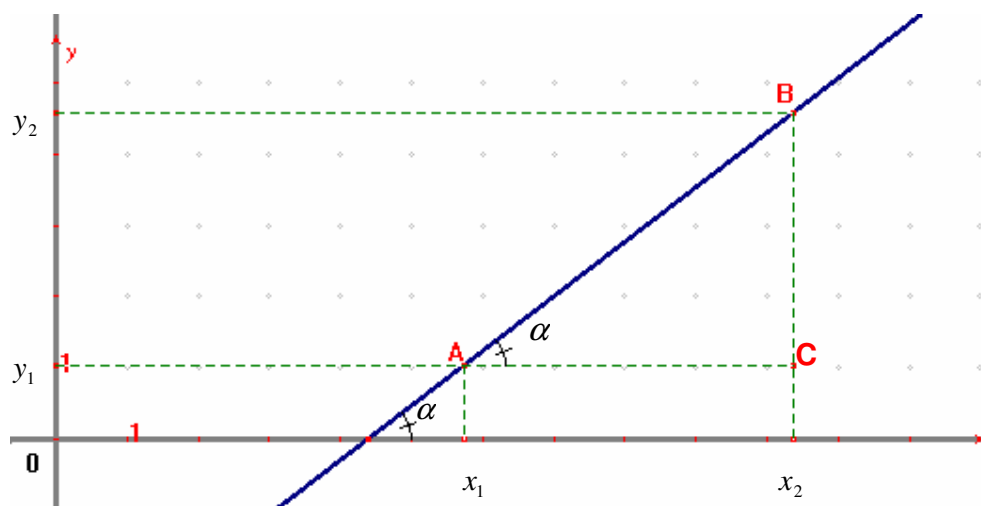
Atividade 2

Examinemos agora o caso da função afim, definida por $y = ax + b$.

Encontre a taxa de variação média entre x_1 e x_2 . Dê uma interpretação para o resultado a que você chegou.

Atividade 3

Dada a figura abaixo:

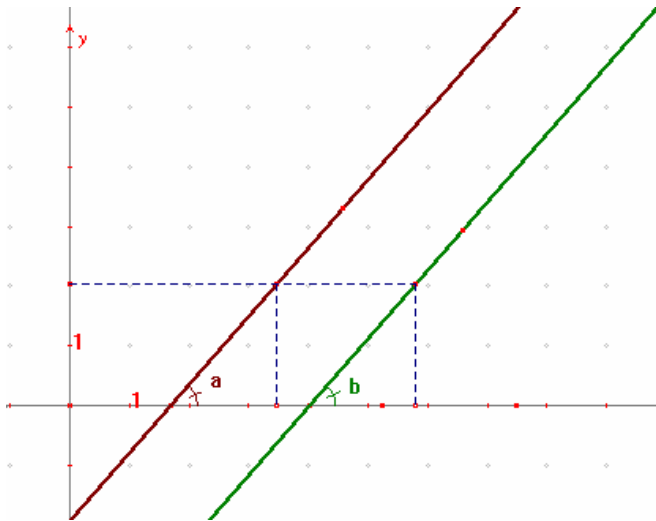


- Encontre a taxa de variação média da função $y = ax + b$, entre x_1 e x_2 ;
- Encontre o valor da tangente do ângulo α no triângulo ABC.

Atividade 4**Cabri—Géomètre (atividade 4)**

Abra o arquivo 4 (os alunos encontrarão o seguinte exercício)

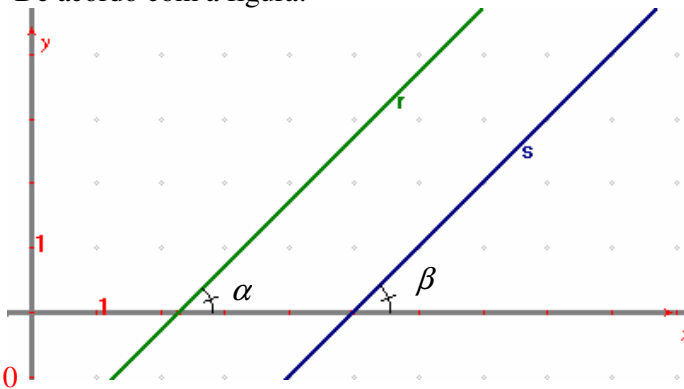
Relacione os ângulos a e b na figura abaixo:



(será suprimido paralelo? e medir ângulos e equação da reta).

Atividade 5**Papel e lápis**

De acordo com a figura:



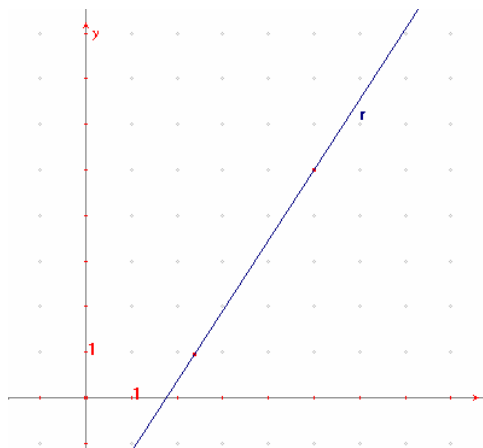
Responda:

Sabendo-se que as retas $r : y = ax + b$ e $s : y = mx + n$ tem o mesmo coeficiente angular demonstre que as retas são paralelas.

Cabri—Géomètre (Atividades 6, 7, 8 e 9)

Atividade 6

Abra o arquivo 5 (os alunos encontrarão o seguinte exercício)



- a) Dada à reta r , construa um triângulo retângulo, sabendo que um cateto é horizontal, o outro cateto é vertical e a hipotenusa está contida na reta r .

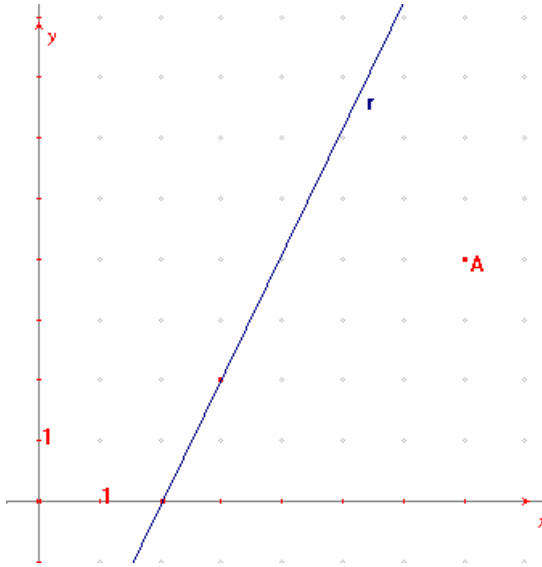
- b) Construa um outro triângulo retângulo de modo que a reta que contém a hipotenusa seja distinta de r e tenha o mesmo coeficiente angular da reta r .

obs: será suprimido paralelo?

Atividade 7

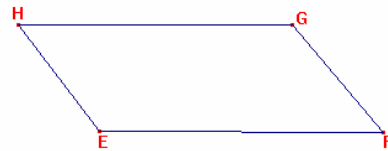
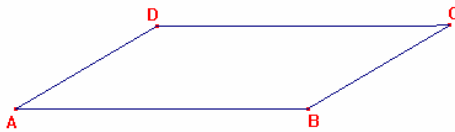
Abra o arquivo 6 (os alunos encontrarão o seguinte exercício)

Dada a reta r e o ponto A . Construa uma reta paralela à reta r passando pelo ponto A .

**Atividade 8**

Abra o arquivo 7 (os alunos encontrarão o seguinte exercício)

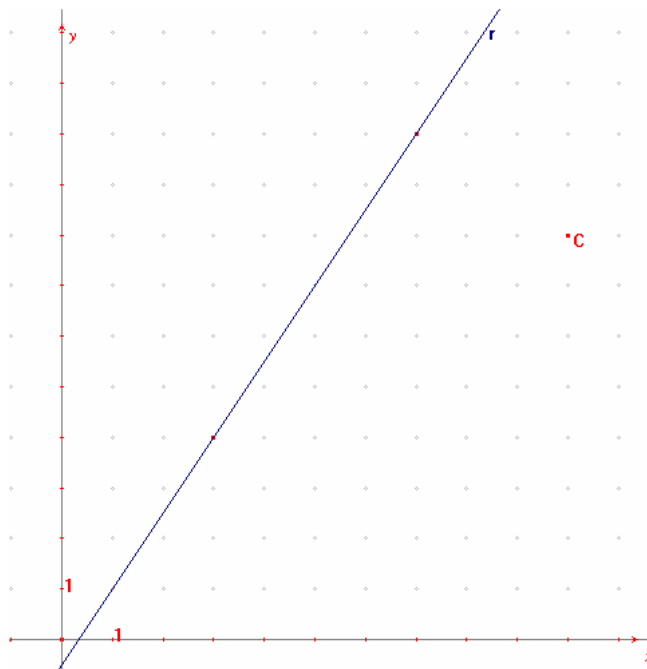
Entre os quadriláteros abaixo um deles é um paralelogramo, determine qual. Justifique a sua resposta.



Atividade 9

Abra o arquivo 8 (os alunos encontrarão o seguinte exercício)

Descreva um método para construir uma reta paralela a r passando por C .



obs: será suprimido equação.

ANEXO D

FLÁVIA - ESBOÇO 4
Atividade sobre Retas Paralelas

01. Usando o Cabri

- a. Represente o ponto P(1, 1);
- b. Construa uma reta (a) que passa por A (0, 0) e P.
- c. Construa uma reta (b) paralela a reta (a), passando por Q(0, 1).
- d. Construa outras retas :
 - reta (c) // (a) passando por R (0,2)
 - reta (d) // (a) passando por S (0,3)
 - reta (e) // (a) passando por T (0,-1)
 - reta (f) // (a) passando por U (0,-2)
 - reta (g) // (a) passando por V (0,-3)

02. Usando a ferramenta “equação” do Cabri determine a equação da reta (a) e veja o que apareceu, repita para as retas (b) e (c).

Obs: as escritas que apareceram são as equações que determinam cada reta, elas tem as seguintes características: uma variável y igual a um número (coeficiente) multiplicando uma variável x somado a um número (coeficiente). Reescrevendo de outra forma e dando nome a ao 1º número (coeficiente) e b ao 2º número (coeficiente) a equação fica:

$$y = ax + b .$$

Anote as equações que apareceram no quadro abaixo:

Nome das retas	Equações das retas na forma $y = ax + b$
(a):	
(b):	
(c):	

03. Compare as três equações pedidas com suas respectivas retas, vendo se consegue estabelecer alguma relação entre os coeficientes de cada equação, os pontos pelos quais a reta passa e ou sua posição.

04. Agora sem usar a ferramenta do Cabri preencha o quadro abaixo, colocando a equação que você supõe ser das retas (d), (e), (f) e (g); só depois use a ferramenta “equação” e confira o resultado.

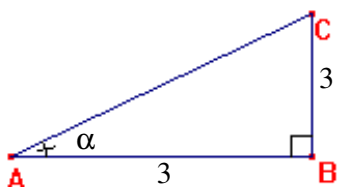
Nome das retas	Equações das retas na forma $y = ax + b$
(d):	
(e):	
(f):	
(g):	

05. Voltando a tela do Cabri com as retas, marque os pontos A (0,0), B (3,0) e C (3,3). Esses três pontos podem formar um triângulo? Em caso afirmativo qual?

O lado maior (hipotenusa) coincide com a reta (a), assim algumas observações que fizemos para esse triângulo pode ser transferido para a reta. Vamos separar esse triângulo na questão abaixo e estudá-lo melhor.

06. Conhecendo um pouco mais sobre o coeficiente angular.

Lembra-se do triângulo ABC visto na questão anterior, nos o representamos logo abaixo:



Podemos dizer que a tangente do ângulo α é a razão entre o cateto..... e o catetoa ele.

Assim, nesse caso $\operatorname{tg} \alpha = \text{---}$

Usando a calculadora do Cabri podemos descobrir qual o ângulo agudo (α) que possui o valor da $\text{tg} = 1$, após descobri-lo volte a reta (a) e meça com a ferramenta “ ângulo” e meça o ângulo $B\hat{A}C$.



Limpe a tela do Cabri, apagando as retas existentes.

07. a) No Cabri, marque os pontos $D(6,2)$, $E(2,0)$ e $F(6,0)$ trace a reta (r) que passa pelos pontos D e E, trace o triângulo DEF e sabendo que $\beta = \widehat{D\hat{E}F}$ calcule sua tangente.

$\text{tg } \beta = \underline{\hspace{2cm}}$.

b) Agora usando a calculadora do Cabri, descubra qual o ângulo agudo que tenha esse valor de tangente, com a ferramenta “ângulo” confira a resposta.

c) Arraste a medida do ângulo para a tela;

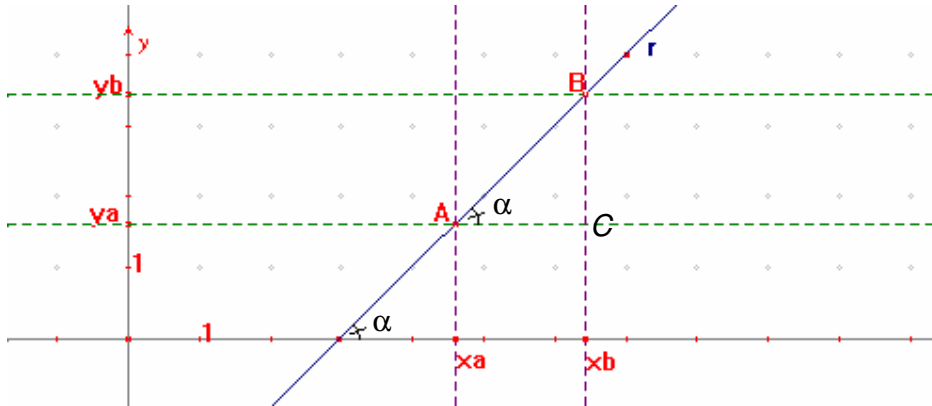
Calcule a tangente deste ângulo e arraste o resultado para a tela;

Peça a equação da reta (r) e arraste o resultado para a tela.

d) Com a ferramenta “ponteiro” arraste o ponto D (6,2) passando por todos os quadrantes observando o que acontece com o ângulo, com sua tangente e com coeficiente angular da equação.

Portanto, podemos dizer que a $\text{tg } \beta$ tem ovalor do coeficiente angular da reta r.

08. Dada a figura abaixo relacione o valor do coeficiente angular da reta $r: y = ax + b$, com o ângulo formado pela reta e o eixo dos x .



- Dica: a) Observando o triângulo ABC, calcule $\text{tg } \alpha$.
 b) Sabendo que neste caso a reta passa pelos pontos A e B, substitua as coordenadas de cada ponto na equação da reta r , e trabalhe com essas duas equações.

09. Retas paralelas têm coeficientes angulares iguais?

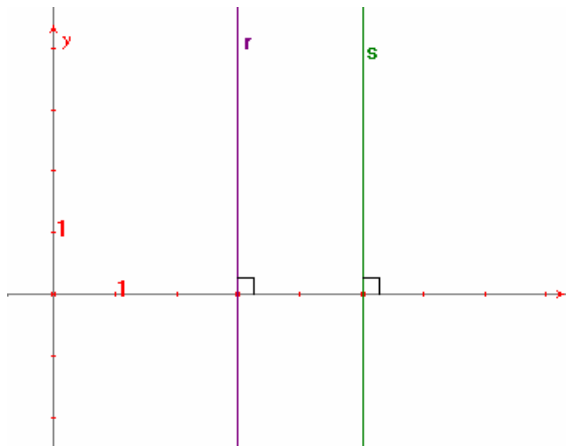
() nunca () as vezes () sempre.

Justifique sua resposta.

CASOS PARTICULARES

Observe os desenhos abaixo:

1º caso:



Na reta r , calcule: $\text{tg } 90^\circ = \dots\dots\dots$

Na reta s , calcule: $\text{tg } 90^\circ = \dots\dots\dots$

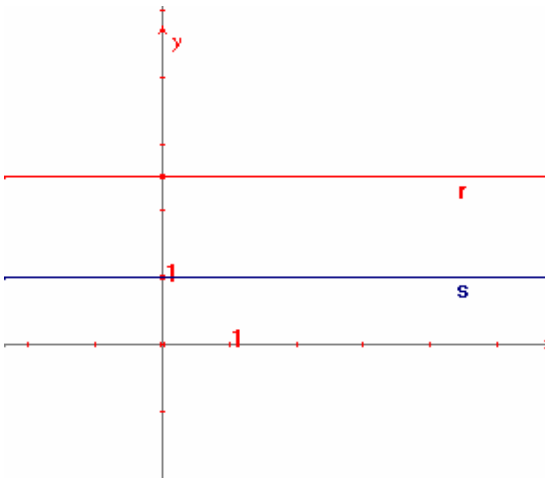
Portanto, as retas r e s paralelas ao eixo dos y não possuem coeficientes angulares e nem coeficientes _____.

10. Duas retas ambas paralelas ao eixo dos y são paralelas ?

() nunca () às vezes () sempre

Justifique sua resposta.

2º Caso:



Na reta r, calcule: $\text{tg } 0^\circ = \dots\dots\dots$

Na reta s, calcule: $\text{tg } 0^\circ = \dots\dots\dots$

Portanto, as retas r e s paralelas ao eixo dos x possuem coeficientes angulares.....

11. Duas retas ambas paralelas ao eixo dos x são paralelas ?

() nunca () as vezes () sempre.

Justifique sua resposta.

ANEXO E

FLÁVIA – VERSÃO V2

1ª etapa: VALIDAÇÕES NO CONCRETO

Esta etapa parte do concreto e de objetos materializados e é formada por três atividades, apresentada da seguinte forma:

Atividade 1: *Você está recebendo um sólido geométrico na forma de cubo. Identifique e responda quantos pares de retas paralelas você pode determinar pelos vértices A, B, C, D, E, F, G e H do cubo.*

Atividade 2: *Escreva com suas palavras o que é um paralelogramo.*

Atividade 3: *Utilizando papel quadriculado, construa um paralelogramo descrevendo e justificando sua construção.*

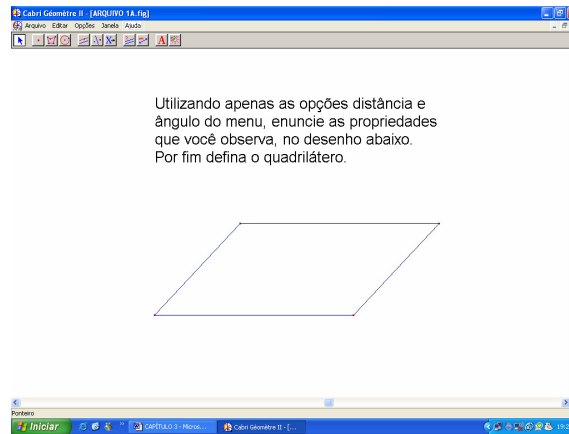
2ª etapa: SOFTWARE CABRI-GÉOMÈTRE

Esta etapa é formada por quatro atividades a serem trabalhadas em ambiente de geometria dinâmica, especificamente o software Cabri-Géomètre, com a exploração e manipulação dos objetos geométricos.

Cada dupla receberá um disquete com três arquivos gravados e uma folha contendo o enunciado das atividades desta etapa.

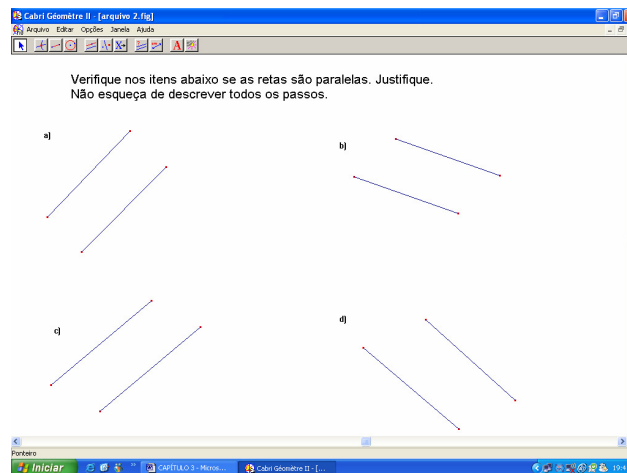
Atividade 1: *Abra o ARQUIVO 1A*

Utilizando apenas as opções distância e ângulo do menu, enuncia as propriedades que você observa, no desenho a seguir. Por fim defina o quadrilátero.



Atividade 2: Abra o ARQUIVO 2A

Verifique nos itens abaixo se as retas são paralelas. Justifique. Não se esqueça de descrever todos os passos. Foi suprimida do menu a ferramenta opção: paralelas?



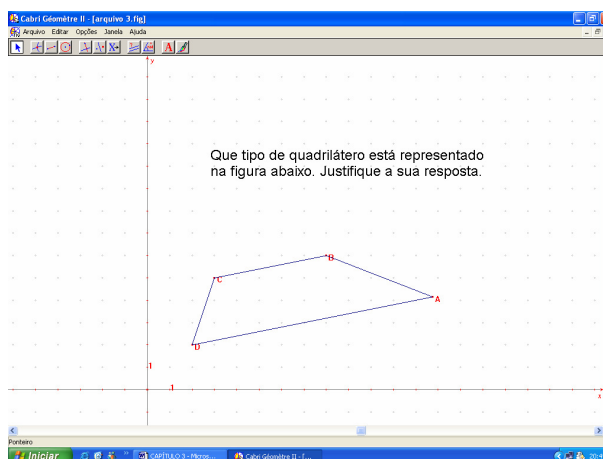
Atividade 3:

- No Cabri-Géomètre selecione no menu novos eixos e defina a grade;
- Construa um paralelogramo;
- Obtenha a equação das retas suportes dos lados do paralelogramo;
- Movimente a figura através de seus vértices e analise atentamente que ocorre com as equações;
- Escreva com suas palavras o que você observa (o professor permitirá que os alunos socializem suas observações e fará a institucionalização do termo coeficiente angular);

- Enuncie agora uma propriedade básica satisfeita por duas retas paralelas em termos de seus coeficientes angulares.

Atividade 4: Abra o ARQUIVO 3A

Que tipo de quadrilátero está representado na figura abaixo. Justifique sua resposta. Foram suprimidas do menu, as ferramentas opções: paralelas? e perpendicular?



3ª etapa: DO EMPÍRICO AO DEDUTIVO

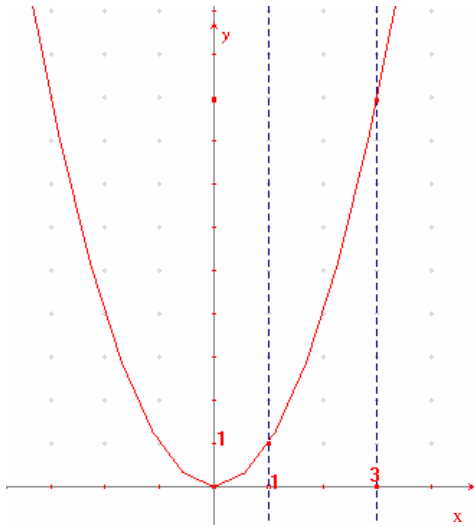
Esta etapa é formada por nove atividades distribuídas da seguinte forma:

- As atividades 1, 2, 3, 4 e 6 serão resolvidas com papel e lápis dispostas e apresentadas uma em cada folha e encadeadas com o objetivo de chegar a uma demonstração;
- As atividades 5, 7, 8 e 9 serão trabalhadas no ambiente de geometria dinâmica, especificamente o software Cabri-Géomètre.

Este bloco inicia-se com a definição da Taxa de Variação Média, pois acreditamos que trabalhar com a TVM facilita à determinação do coeficiente angular.

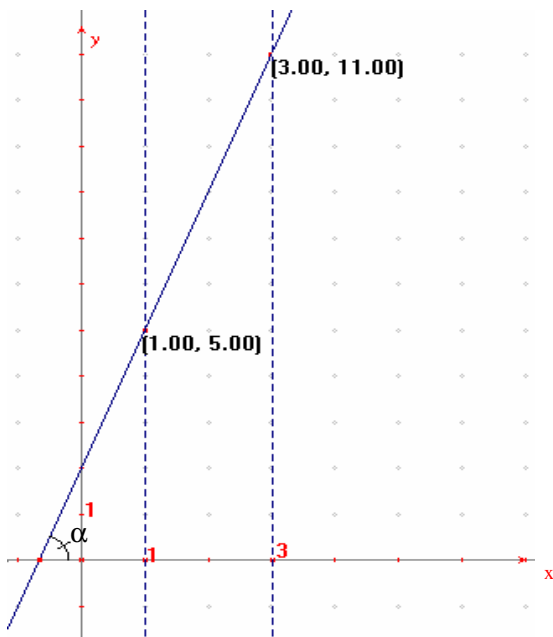
Atividade 1:

1a) Dada à figura seguinte, determine a taxa de variação média:



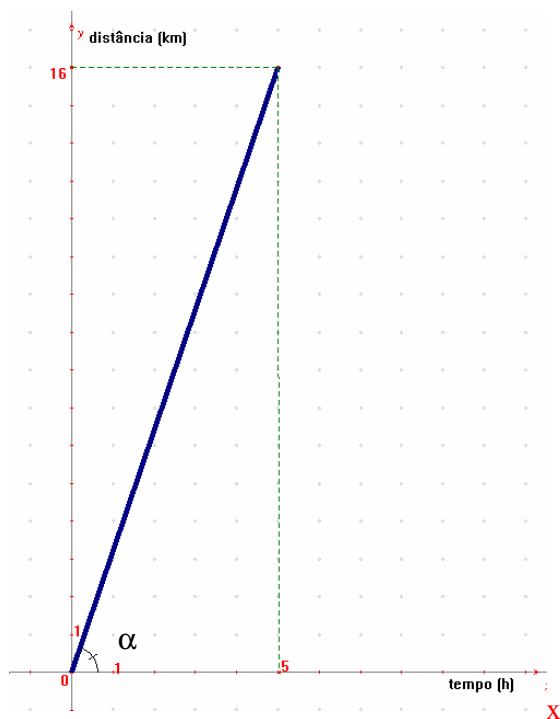
- entre 1 e 3:
- entre 1 e 2:
- entre 1 e 1,5:
- entre 1 e 1,1:

1b) Dada à figura abaixo, determine a taxa de variação média:



- entre 1 e 3:
- entre 1 e 2:
- entre 1 e 1,5:
- entre 1 e 1,1:
- Calcule $\text{tg } \alpha$:

1c) O gráfico a seguir representa o percurso de um carro que sai de São Paulo com destino ao Rio de Janeiro, suponha que o odômetro é zerado no início da viagem. Calcule a taxa de variação média da distância em relação ao tempo, ou seja, a velocidade média do carro entre São Paulo e Guarulhos.



Calcule a tangente do ângulo α .

É possível estabelecer alguma relação entre os itens b e c?

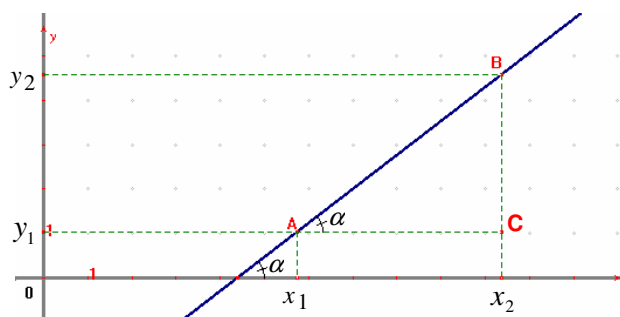
Atividade 2:

Examinemos agora o caso da função afim, definida por $y = ax + b$.

Encontre a taxa de variação média entre x_1 e x_2 . Dê uma interpretação para o resultado a que você chegou.

Atividade 3:

Dada a figura abaixo:



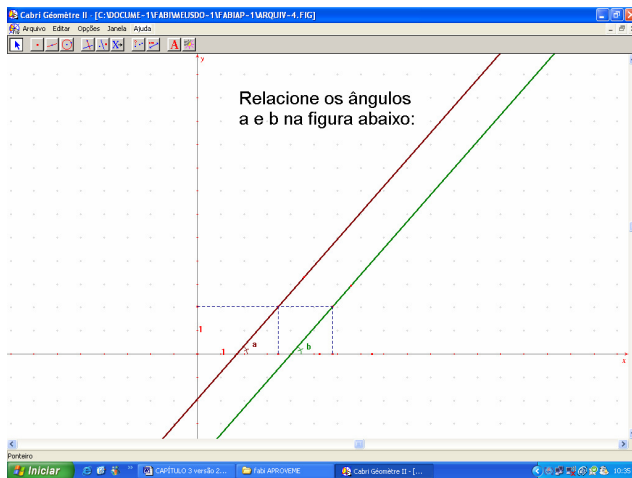
- Encontre a taxa de variação média da função $y = ax + b$, entre x_1 e x_2 ;
- Encontre a tangente do ângulo α no triângulo ABC.
- É possível estabelecer alguma relação nos itens anteriores.

Atividade 4:

Que relação pode ser estabelecida através das atividades 2 e 3.

Atividade 5:

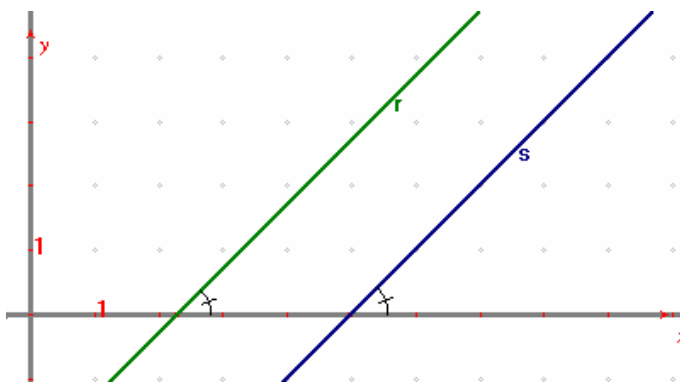
Abra o Arquivo 4A



Nesta atividade, será suprimido, as ferramentas medir ângulos, equação da reta e do oráculo a opção paralelas?

Atividade 6:

Papel e lápis. De acordo com a figura:



Responda:

Sabendo-se que as retas $r : y = ax + b$ e $s : y = mx + n$ tem o mesmo coeficiente angular demonstre que as retas são paralelas.

Atividade 7

Abra o ARQUIVO 5 A

a) Dada à reta r , construa um triângulo retângulo, sabendo que um cateto é horizontal, o outro cateto é vertical e a hipotenusa está contida na reta r .

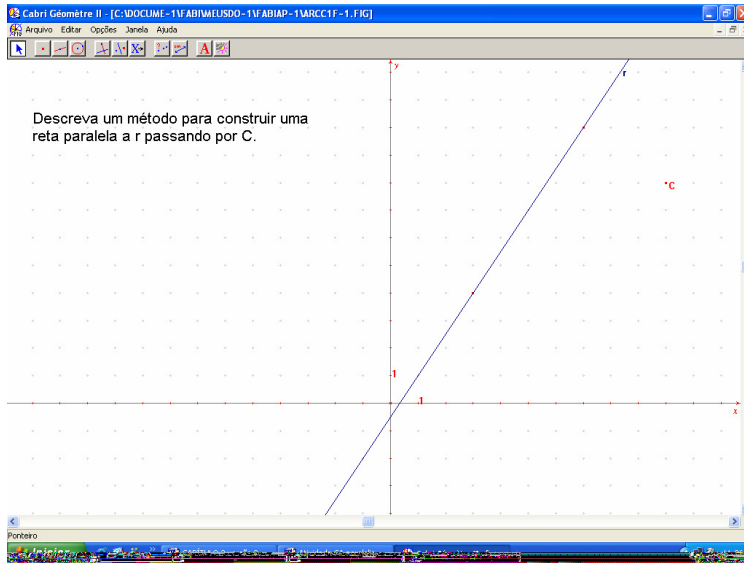
b) Construa um outro triângulo retângulo de modo que a reta que contém a hipotenusa seja distinta de r e tenha o mesmo coeficiente angular da reta r .

Nesta atividade, será suprimido, a ferramenta opção: paralelas?

Atividade 8:

Abra o ARQUIVO 7A

Entre os quadriláteros abaixo um deles é um paralelogramo, determine qual. Justifique a sua resposta.

Atividade 9:

O objetivo dessa atividade finalizadora é que o aluno aplique os conhecimentos adquiridos por toda a sequência.

ANEXO F

FLÁVIA – VERSÃO V3

1ª etapa: VALIDAÇÕES NO CONCRETO

Esta etapa parte do concreto e de objetos materializados e é formada por três atividades, apresentada da seguinte forma:

Atividade 1: *Você está recebendo um sólido geométrico na forma de cubo de vértices A, B, C, D, E, F, G e H. Unindo-se os vértices dois a dois obtém-se retas. Identifique e responda quantos pares dessas retas são paralelas.*

Atividade 2: *Escreva com suas palavras o que é um paralelogramo.*

Atividade 3: *a) Utilizando papel quadriculado, construa um paralelogramo descrevendo sua construção.*

b) Agora sem utilizar papel quadriculado (utilizando folha branca), construa um paralelogramo descrevendo e justificando sua construção.

2ª etapa: SOFTWARE CABRI-GÉOMÈTRE

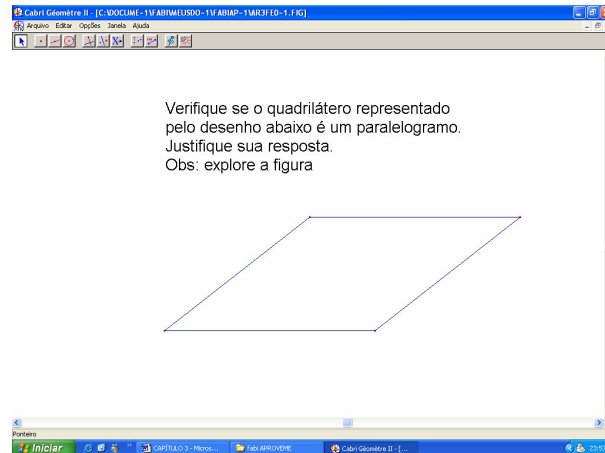
Esta etapa é formada por cinco atividades a serem trabalhadas em ambiente de geometria dinâmica, especificamente o software Cabri-Géomètre, onde o uso dessa ferramenta permitirá ao aluno a observação de generalizações, com a exploração e manipulação dos objetos geométricos.

Cada dupla receberá um disquete com três arquivos gravados e uma folha contendo o enunciado das atividades desta etapa.

Atividade 1: *Abra o ARQUIVO 1A*

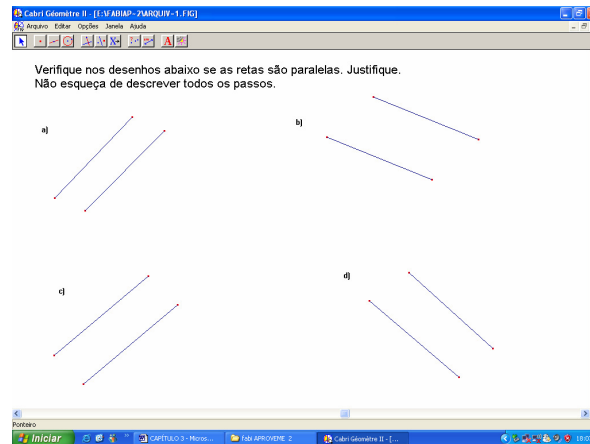
Utilizando apenas as opções distância e ângulo do menu, verifique se o quadrilátero representado pelo desenho abaixo é um paralelogramo. Justifique a sua resposta.

Obs.: explore a figura.



Atividade 2: Abra o ARQUIVO 2A

Verifique nos desenhos abaixo se as retas são paralelas. Justifique. Não se esqueça de descrever todos os passos.



Com o objetivo de graduar a complexidade da atividade de forma que o aluno aplique seus conhecimentos sobre retas paralelas, será supressa do menu, a ferramenta: *paralelas*, um recurso do Cabri que apenas responde a pergunta dizendo se os objetos selecionados são paralelos, ou não.

Atividade 3:

No Cabri selecione no menu novos eixos e defina a grade, a seguir:

- crie uma reta que forme um ângulo agudo com o eixo Ox e obtenha a sua equação via menu;
- calcule a tangente do ângulo formado pelo eixo Ox e a reta;
- relacione a tangente do ângulo com a equação da reta.

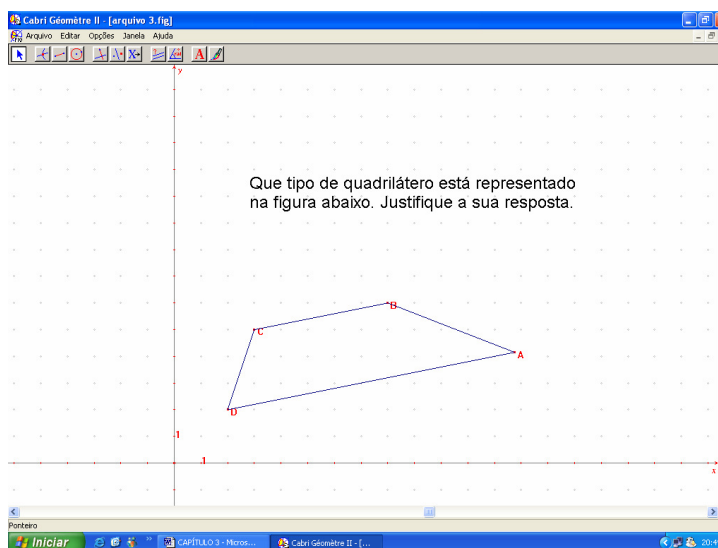
Atividade 4:

No Cabri-Géomètre selecione no menu novos eixos, a seguir:

- Construa um paralelogramo;
- Obtenha a equação das retas suportes dos lados do paralelogramo;
- Movimente a figura através de seus vértices e analise atenciosamente o que ocorre com as equações;
- Escreva com suas palavras o que você observa (o professor permitirá que os alunos socializem suas observações e fará a institucionalização do termo coeficiente angular);
- Enuncie agora uma propriedade básica satisfeita por duas retas paralelas.

Atividade 5: Abra o ARQUIVO 3A

Que tipo de quadrilátero está representado na figura abaixo. Justifique sua resposta.



Para que o objetivo seja alcançado serão supressas do menu as ferramentas: ângulos, paralelas? e perpendiculares?

3ª etapa: DO EMPÍRICO AO DEDUTIVO

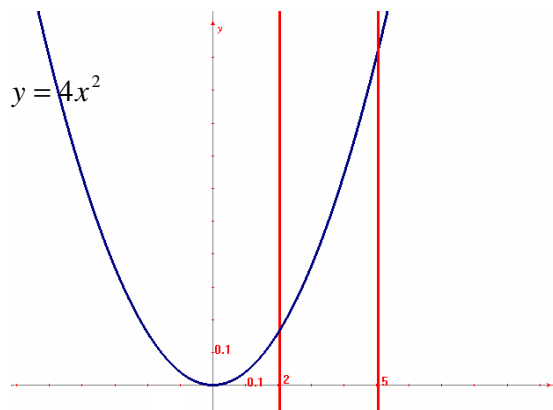
Esta etapa é formada por dez atividades distribuídas da seguinte forma:

- As atividades 1, 2, 3, 4 e 7 serão resolvidas com papel e lápis dispostas e apresentadas uma em cada folha e encadeadas com o objetivo de chegar a uma demonstração;
- As atividades 5, 6, 8, 9 e 10 serão trabalhadas no ambiente de geometria dinâmica, especificamente o software Cabri-Géomètre.

Este bloco trabalhará com a definição da Taxa de Variação Média. Será fornecido a cada dupla após a atividade 1, uma folha com a definição da Taxa de Variação Média.

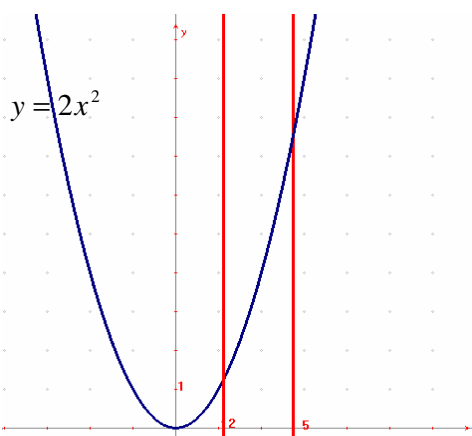
Atividade 1 (Papel e lápis): Observe os gráficos abaixo:

Gráfico 1:



A taxa de variação média de $y = 4x^2$ entre 2 e 5 é $\frac{100 - 16}{3} = \frac{84}{3} = 28$, isto significa que em média, y aumenta 28 unidades para cada unidade que x aumenta.

Gráfico 2:

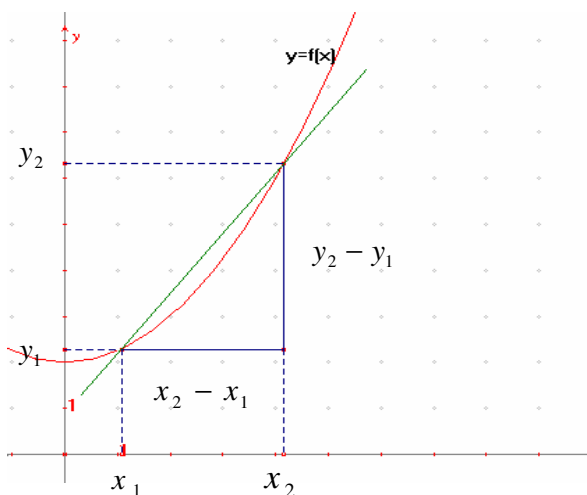


A taxa de variação média de $y = 2x^2$ entre 2 e 5 é $\frac{50-8}{3} = \frac{42}{3} = 14$, isto significa que em média, y aumenta 14 unidades para cada unidade que x aumenta. Portanto o gráfico de $y = 4x^2$ cresce mais rapidamente que o gráfico de $y = 2x^2$ quando x varia de 2 a 5.

Taxa de Variação Média

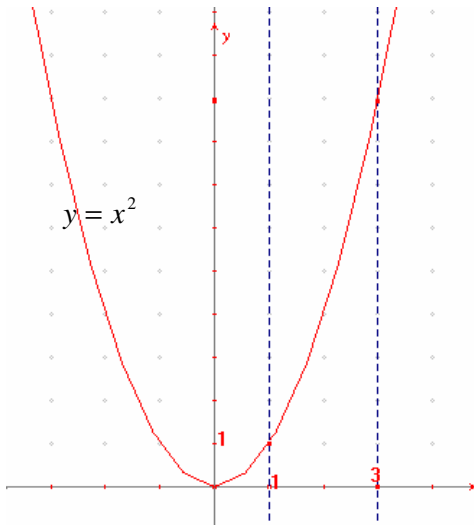
Definição: Para uma função qualquer $y = f(x)$, chamamos ao número $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ de taxa de variação média entre dois pontos x_1 e x_2 (com $x_2 > x_1$).

$$\text{Assim: } Tm = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



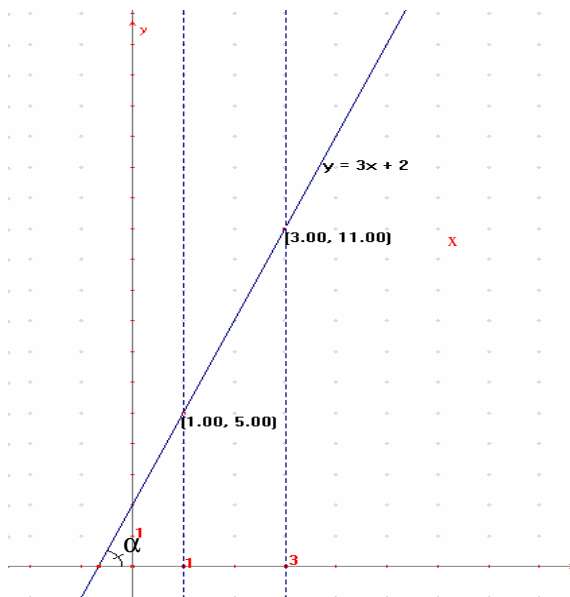
(Tm : taxa de variação média de $y = f(x)$ entre x_1 e x_2)

1a) Dada à figura abaixo, determine a taxa de variação média:



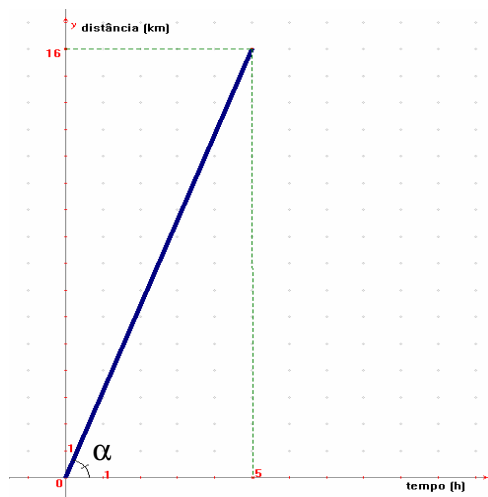
- entre 1 e 3:
- entre 1 e 2:
- entre 1 e 1,5:
- entre 1 e 1,1:

1b) Dada à figura abaixo, determine a taxa de variação média:



- entre 1 e 3:
- entre 1 e 2:
- entre 1 e 1,5:
- entre 1 e 1,1:
- Calcule $\text{tg } \alpha$:

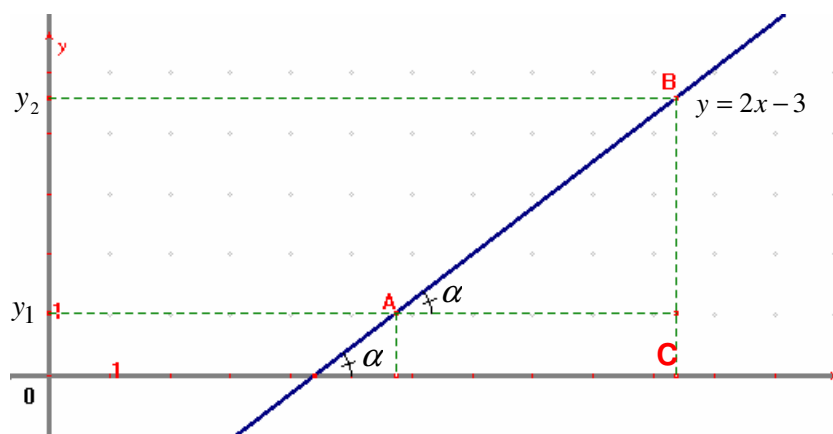
1c) O gráfico abaixo representa o percurso de um carro que sai de São Paulo com destino ao Rio de Janeiro, suponha que o odômetro é zerado no início da viagem.



- Calcule a taxa de variação média da distância em relação ao tempo, ou seja, a velocidade média do carro entre São Paulo e Guarulhos.
- Calcule a tangente do ângulo α .
- É possível estabelecer alguma relação entre os itens acima?

Atividade 2 (Papel e lápis):

Dada a figura abaixo:



- Encontre a taxa de variação média da função $y = 2x - 3$, entre dois pontos quaisquer;
- Encontre a tangente do ângulo formado pela reta e o eixo x .
- É possível estabelecer alguma relação nos itens anteriores.

Atividade 3 (Papel e lápis):

Examinemos agora o caso da função afim, definida por $y = ax + b$.

a) Encontre a taxa de variação média entre 351 e 527. Dê uma interpretação para o resultado a que você chegou.

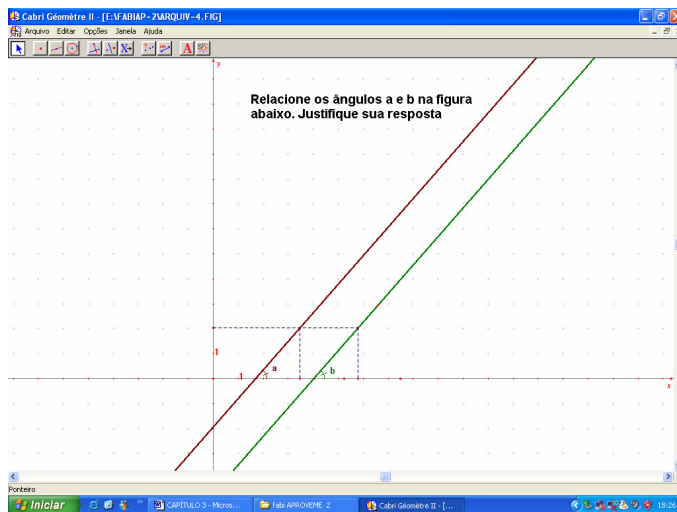
b) Encontre a taxa de variação média entre x_1 e x_2 . Dê uma interpretação para o resultado a que você chegou.

Atividade 4 (Papel e lápis):

Que relação pode ser estabelecida através das atividades 2 e 3.

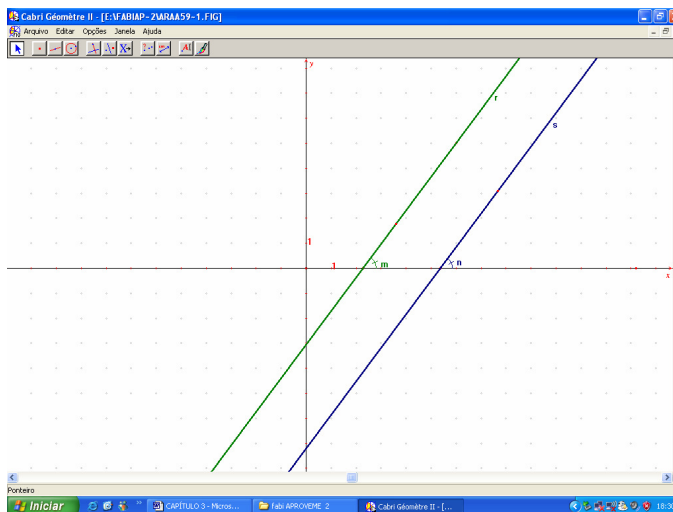
Atividade 5: Abra o ARQUIVO 4A:

Relacione os ângulos a e b na figura abaixo. Justifique sua resposta.



Nesta atividade serão supressas, as ferramentas: medir ângulos, equação da reta e a opção paralelas?

Atividade 6: Abra o ARQUIVO 5A



a) O que se pode afirmar a respeito das retas r e s ? Justifique sua resposta.

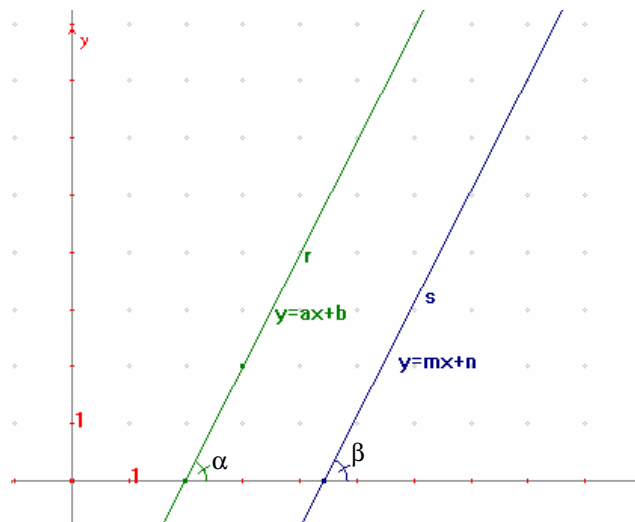
Neste item da atividade, serão supressas, as ferramentas: distância, ângulo e paralelas?

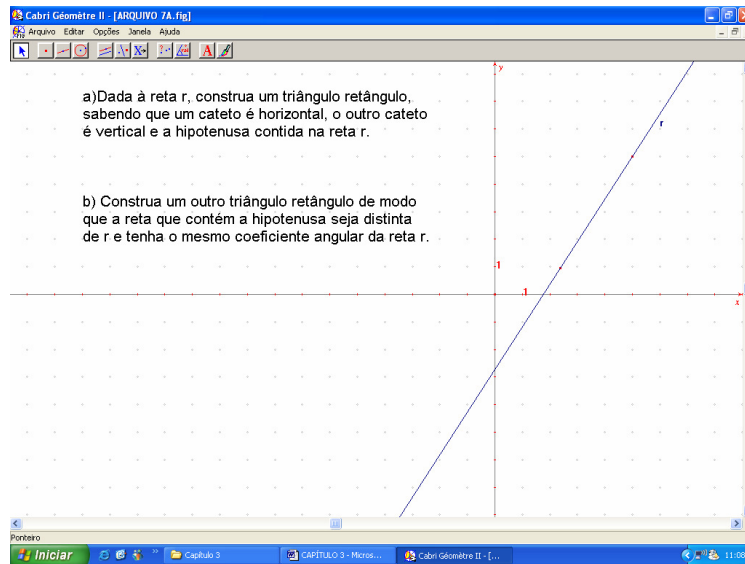
b) O que se pode afirmar a respeito das retas r e s ? Justifique sua resposta.

Só que agora serão supressas as ferramentas equação e paralelas?

Atividade 7 (Papel e lápis):

Como você faria para afirmar que as retas r e s na figura abaixo são paralelas. Justifique sua resposta.

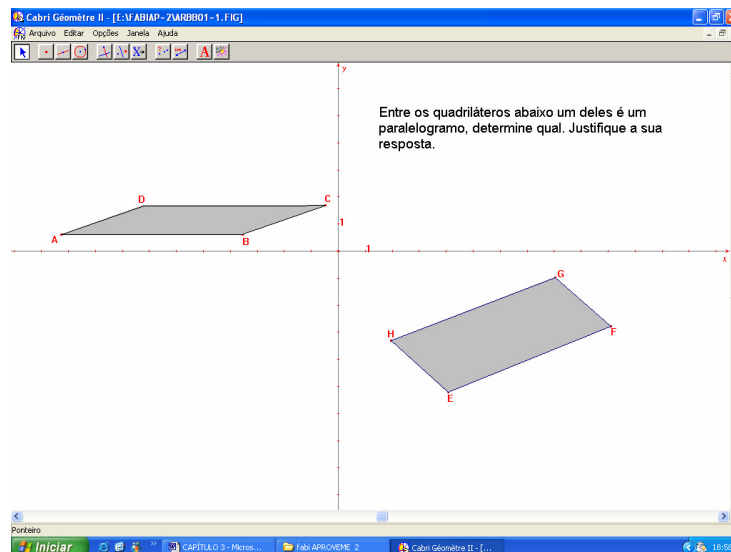


Atividade 8: Abra o ARQUIVO 7A

Serão supressas do menu, as ferramentas: paralela e paralelas?

Atividade 9: Abra o ARQUIVO 8A

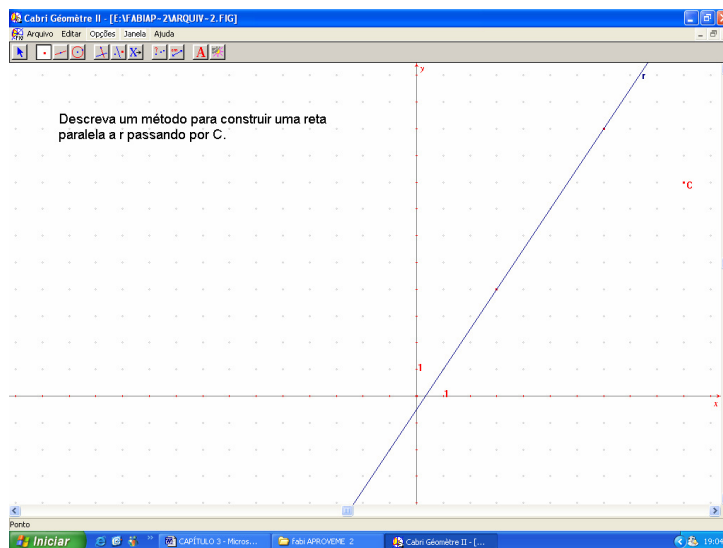
Entre os quadriláteros abaixo um deles é um paralelogramo, determine qual. Justifique a sua resposta.



Serão suprimidas, as ferramentas: distância, ângulo e paralelas?

Atividade 10: Abra o ARQUIVO 9A

Descreva um método para construir uma reta paralela a r passando por C .



Nesta atividade, será supressa, a ferramenta: paralelas.

ANEXO G

VERSÃO DA SITUAÇÃO DE APRENDIZAGEM ELABORADA PELA EQUIPE DE VAGNER DO APROVAME E DISPONIBILIZADA NO TELEDUC

ATIVIDADE QUADRILÁTEROS – FASE I

LEVANTAMENTO DO CONHECIMENTO PRÉVIO DOS ALUNOS

Essa atividade tem por objetivo levantar o conhecimento dos alunos através da manipulação de figuras de geometria dinâmica Cabri e da identificação/verificação de suas propriedades de modo a classificá-las, bem como estabelecer as relações entre elas.

Trata-se de uma fase preparatória para retornar os principais quadriláteros e suas propriedades introduzindo também a nomenclatura correspondente.

- 1) Abra o Arq_I.fig., que contém um quadrilátero qualquer.
- 2) Arraste os vértices e lados do quadrilátero, anotando o seguinte:
 - os elementos que se movimentam;
 - as propriedades do quadrilátero;
 - o seu nome.
- 3) Repita o procedimento para os demais arquivos (Arq II.fig , Arq III.fig, etc.).
Observação: O Arq_II.fig. contém um paralelogramo qualquer, o Arq_III.fig. um losango, o Arq_IV.fig. um retângulo, o Arq_V.fig. um quadrado, o Arq_VI.fig. uma pipa e o Arq_VII.fig. um trapézio.
- 4) Depois de manipular todas as figuras, você observa características comuns entre elas? Quais?

Obs.: Se o aluno preferir, poderá usar a tabela abaixo para as questões 3 e 4.

Complete a tabela com as palavras “SEMPRE”, “ÀS VEZES” e “NUNCA”.

Para os casos “às vezes”, responda: Quando uma observação pode ser feita “às vezes”, o que foi observado pode ser considerado como uma propriedade do quadrilátero?

	Arquivo I	Arquivo II	Arquivo III	Arquivo IV	Arquivo V	Arquivo VI	Arquivo VII
1 par de lados paralelos							
2 pares de lados paralelos							
lados opostos congruentes							
ângulos opostos congruentes							
diagonais cruzando-se em seus pontos médios							
4 lados congruentes							
diagonais perpendiculares							
4 ângulos retos							
diagonais congruentes							
CLASSIFICAÇÃO DO QUADRILÁETRO							

QUADRILÁTEROS – FASE II
IDENTIFICANDO OS CASOS DE CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS

Haverá um arquivo com a figura de um triângulo, feita no Cabri. Além dela, o aluno contará com as ferramentas “Transporte de ângulo” e “Transporte de segmento”. O objetivo é que ele verifique seis casos, segundo sugestões da atividade. Desses seis, apenas quatro serão os casos de congruência. O aluno poderá confirmar se o triângulo construído (usando as duas ferramentas e nas condições propostas) é congruente ao triângulo dado por meio dos recursos do Cabri, em particular arrastando a figura recém-construída e sobrepondo à figura inicial.

- 5) Abra o ARQUIVO II.fig, que contém a figura de um triângulo.
- 6) Usando as ferramentas “Transporte de ângulo” e “Transporte de Segmento”, você deve transportar cada um dos três elementos listados em cada item abaixo de modo a iniciar a construção de um novo triângulo. Após os transportes, termine cada construção. Verifique se o triângulo construído é congruente ao triângulo dado, indicando em cada situação se é: “sempre”, “às vezes” e “nunca”.

a) dois lados e um ângulo compreendido entre eles.

- () sempre () nunca
() às vezes, quando acontecer de

b) dois lados e um ângulo não compreendido entre eles.

- () sempre () nunca
() às vezes, quando acontecer de

c) dois ângulos e um lado.

sempre nunca

às vezes, quando acontecer de

d) três lados.

sempre nunca

às vezes, quando acontecer de

e) três ângulos.

sempre nunca

às vezes, quando acontecer de

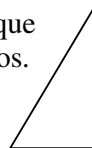
7) A partir do que você observou nos itens anteriores, descreva com quais configurações dos elementos do triângulo inicial, o triângulo construído é sempre congruente a ele.

ATIVIDADES - FASE III

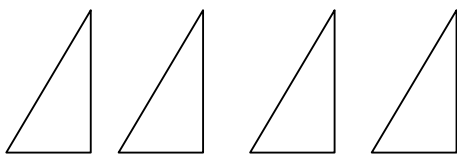
QUADRILÁTEROS A PARTIR DE DIAGONAIS PERPENDICULARES

CONSTRUÇÃO DE QUADRILÁTEROS

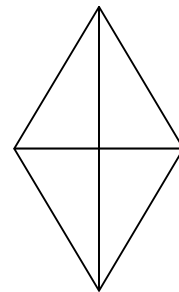
Com a utilização do Cabri, foi dado a Lucas um triângulo retângulo, como o que está ao lado, e perguntado se a partir deste triângulo ele poderia construir quadriláteros.



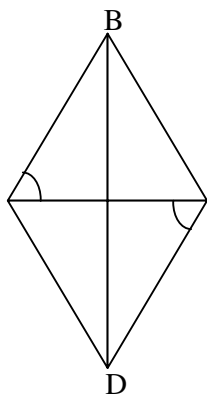
Lucas, usando o transporte de ângulos e o de segmentos, construiu outros três triângulos retângulos.



Com os quatro triângulos e a ferramenta arrastar, Lucas formou a figura ao lado e disse parecer um losango.



Parecer não é o suficiente! Assim, Lucas tentou justificar sua hipótese, denominou os vértices de A, B, C e D, o "centro" de O e procedeu da seguinte forma:



O triângulo ABO é o triângulo inicial, assim Lucas pegou os triângulos ABO e BCO e afirmou: O lado BO é comum aos dois triângulos e como a construção do triângulo BCO foi usando transporte de ângulos e lados, os lados BO para os dois triângulos têm a mesma medida (são congruentes). Os lados AO e OC, também pela construção através do transporte de lados, são congruentes. O ângulo BOC (ângulo reto) foi construído a partir do ângulo AOB, assim esses ângulos são congruentes.

Comparando os elementos correspondentes, Lucas percebeu que tinha dois pares de lados e ângulos entre eles congruentes, assim concluiu que os triângulos ABO e BCO são congruentes e que da mesma forma ele poderia mostrar que os outros dois triângulos também seriam congruentes.

Tendo quatro triângulos congruentes, Lucas pode afirmar que os lados correspondentes, AB, BC, CD e DA são congruentes.

Lucas continuou, como os triângulos ABO e CDO são congruentes então os ângulos BAO e DCO têm a mesma medida e como são ângulos alternos internos então os lados AB e DC são paralelos. Lucas afirma que, da mesma forma, pegando os triângulos BCO e DAO, teremos os lados BC e AD paralelos.

Finalmente, tendo quatros lados congruentes e dois a dois paralelos, Lucas pode afirmar: A figura é um losango. Mas, Lucas não estava satisfeito e deixou as seguintes questões:

"É possível formar outros quadriláteros usando triângulos retângulos? Quais?"

Procure responder às questões, a única condição é que os triângulos sejam retângulos, você pode usar apenas dois triângulos, pode usar quatro triângulos, não sendo todos congruentes, ou pode experimentar outras opções que você desejar, mas em todos os casos, não se esqueça, a *figura não basta parecer*, é preciso justificar qual o quadrilátero obtido.

ANEXO H

VAGNER - ESBOÇO Ideias iniciais – Dissertação

- I - Analisar os pré-requisitos. Antes dela, elaborar análise à priori. } 2 aulas
 II – Efetuar o estudo dos conceitos/definições: elementos básicos. }
 III- Efetuar o estudo dos conceitos/definições: quadriláteros notáveis. } 3 aulas
 - definição de Euclides (seria a dos alunos?) e definição atual
 - identificação de alguns elementos como vértices, lados, diagonais, ângulos, ângulos opostos ...
 - notações por rascunhos (Parzysz)
 IV- Revisão de algumas propriedades: soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo, paralelismo (1 aula)
 V- Atividades do AprovaME – congruência. (2 aulas após familiarizar-se com o Cabri)

VI – PROPRIEDADES DOS QUADRILÁTEROS NOTÁVEIS (por Moise ou por Dolce/Pompeo?)

Com atividades intermediárias...

ATIVIDADES – FASE I :

- 1) Escreva o que você entende por: a) reta b) segmento de reta c) ângulo d) retas paralelas e) retas perpendiculares f) polígono g) quadrilátero h) quadrado i) retângulo j) losango k) trapézio.
- 2) Faça um desenho de cada um dos entes geométricos: a) reta b) segmento de reta c) ângulo d) retas paralelas e) retas perpendiculares f) polígono g) quadrilátero h) quadrado i) retângulo j) losango k) trapézio.

O objetivo das atividades 1 e 2 é verificar até que ponto o aluno tem o conceito de cada ente geométrico.

ATIVIDADES – FASES II E III:

- Ler as definições na teoria dos livros e dicionários (?)
- Estudar as definições/conceitos a partir da exploração do Cabri.

ATIVIDADES – FASE IV: Abordagem tradicional ou com o Cabri

ATIVIDADE – FASE V: Definida pelo grupo 4 (AProvaME)

ATIVIDADES – FASE VI: INTERMEDIÁRIA:

Objetivos: Diminuir a ZDP (Vygotsky) – Servir como subsídio a outros professores – tirar o “trauma” dos alunos (Wallon ?): a priori, digo que eles dirão não conseguir responder as questões...

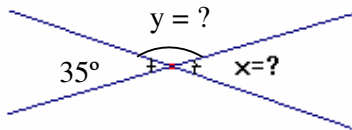
ANEXO I

VAGNER – F11 E F12

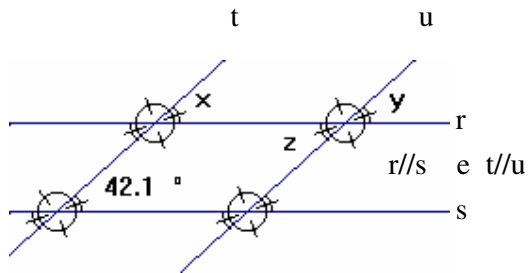
F11

Por gentileza, responda as questões a seguir:

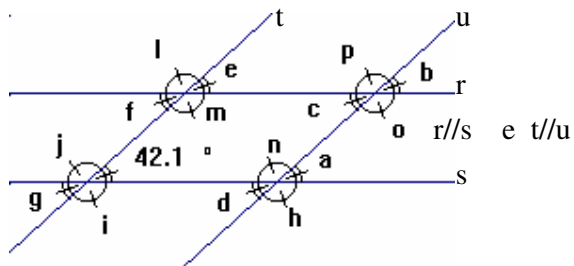
- 1) Observando o desenho abaixo, diga o valor da medida indicada por x e por y , justificando sua resposta:



- 2) Observando o desenho abaixo, diga o valor da medida indicada por x , y e z justificando sua resposta:

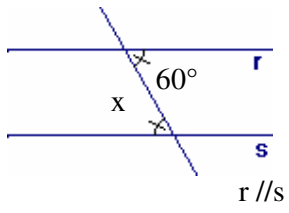


- 3) Observando o desenho abaixo, diga os valores das medidas indicadas:

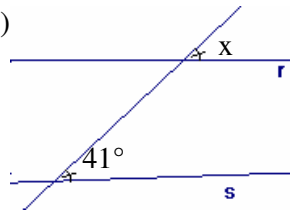


- 4) Observando o desenho abaixo, diga o valor da medida indicada justificando sua resposta:

a)



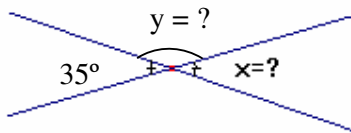
b)



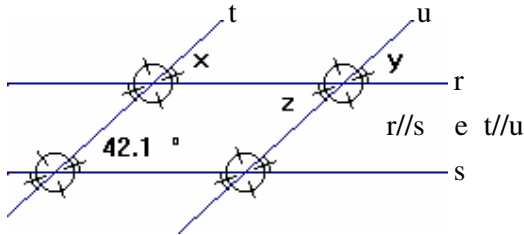
F12

Por gentileza, responda as questões a seguir:

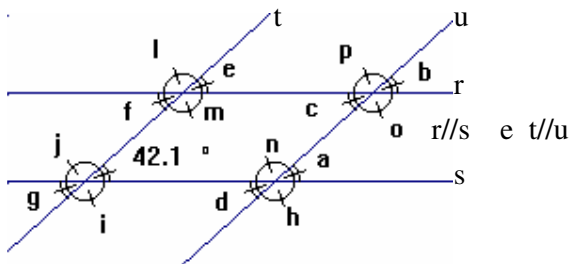
- 1) Observando o desenho abaixo, diga o valor da medida indicada por x e por y , justificando sua resposta:



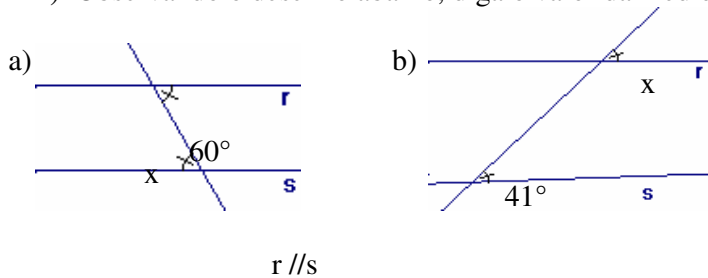
- 2) Observando o desenho abaixo, diga o valor da medida indicada por x , y e z justificando sua resposta:



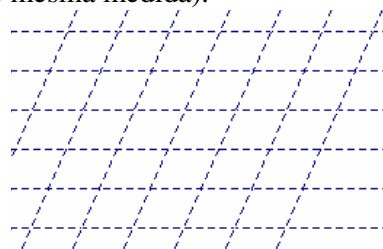
- 3) Observando o desenho abaixo, diga os valores das medidas indicadas:



- 4) Observando o desenho abaixo, diga o valor da medida indicada justificando sua resposta:



- 5) Abaixo você tem uma malha de retas paralelas. Usando-as, desenhe um paralelogramo qualquer. Usando seu desenho explique por que se diz que um paralelogramo tem ângulos opostos congruentes (isto é, de mesma medida).

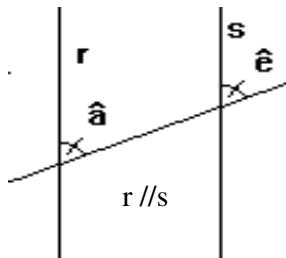


ANEXO J

VAGNER - ATM1 E 1ª ETAPA- PARALELISMO

- 1) No Cabri, desenhe duas retas paralelas cortadas por uma transversal.
- 2) Quantos ângulos você pode observar? _____
- 3) Tire as medidas de todos eles e anote-as aqui (não é necessário anotar duas vezes a mesma medida): _____
- 4) A cada par de ângulos de mesma medida (que não sejam o.p.v e estejam do mesmo lado da reta transversal.), chamamos “ângulos correspondentes”. Faça abaixo um rascunho do desenho que você vê na tela indicando os pares de ângulos correspondentes.
- 5) Usando o ponteiro mude a inclinação das retas desenhadas e repare a variação das medidas dos ângulos correspondentes. O que acontece com elas? Obs.: Se preferir, pinte da mesma cor os ângulos correspondentes do mesmo par antes de movimentar o desenho.

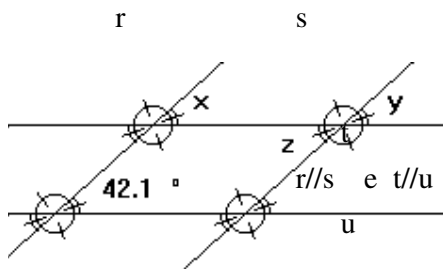
6) Verifique os pares de ângulos abaixo. Eles são correspondentes?



Se a medida do ângulo indicado por \hat{a} for 65° quanto será a medida do ângulo indicado por \hat{e} ? _____

sim ()
 não ()

7) Observando o desenho abaixo, diga o valor das medidas indicadas por x, y e z justificando sua resposta:



x vale _____ porque _____

y vale _____ porque _____

z vale _____ porque _____

8) Se você teve dúvidas no exercício anterior, abra o arquivo P4* no Cabri e meça os ângulos indicados. Verifique se as retas “r” e “s” são paralelas e se os ângulos \hat{a} e \hat{e} são correspondentes. Se você não teve dúvidas no exercício 7 pule essa questão e passe ao exercício 9.

9) Abra o arquivo P2*. Sem movimentar o desenho, responda qual é o valor das medidas indicadas justificando a sua resposta:

\hat{a} mede _____ porque _____

\hat{u} mede _____ porque _____

\hat{e} mede _____ porque _____

\hat{i} mede _____ porque _____

\hat{o} mede _____ porque _____

Tire as medidas dos ângulos de confira as suas respostas. Caso tenha errado alguma faça a correção abaixo indicando o motivo do erro. *Sugestão: verifique se todas as retas de um mesmo feixe são paralelas.*

Ainda no arquivo P2*, é possível saber a medida do ângulo \hat{b} apenas observando o desenho sem medi-lo? Como?

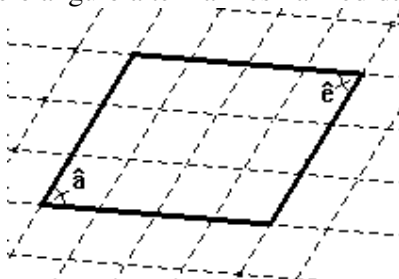
10) Abra o arquivo P3* e indique abaixo quais quadriláteros são paralelogramos.

ABCD () sim () não porque: _____

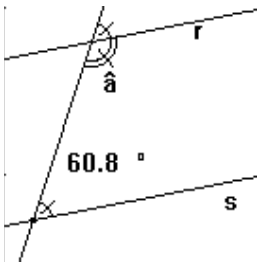
EFGH () sim () não porque: _____

O ângulo $D\hat{A}B$ está marcado. Que cor é essa marca? _____ O ângulo $C\hat{D}A$ está marcado. Que cor é essa marca? _____ Os ângulos $C\hat{D}A$ e $A\hat{B}C$ são chamados “ângulos opostos” do paralelogramo. Assim como os ângulos $B\hat{C}D$ e $D\hat{A}B$.

11) Veja o desenho abaixo. Diz-se que num paralelogramo, os ângulos opostos são congruentes, isto é, os ângulos opostos têm mesma medida. Usando a malha pontilhada de retas paralelas explique porque o ângulo \hat{a} tem a mesma medida que o ângulo \hat{e} .

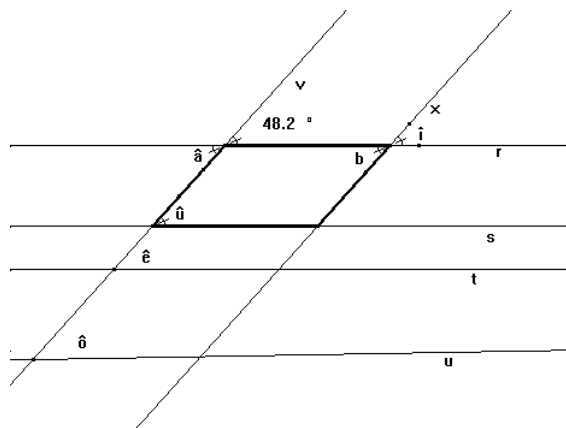


12) Lembrando que um ângulo de “meia-volta” tem 180° como podemos calcular a medida do ângulo \hat{a} da figura abaixo onde as retas “r” e “s” são paralelas:

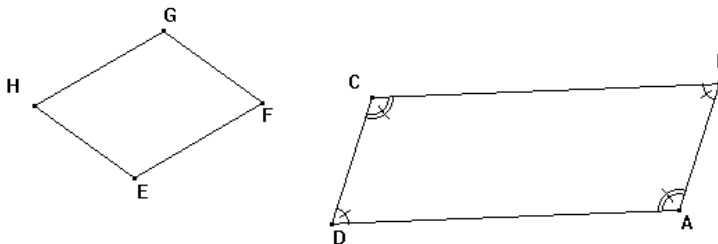


* Os conteúdos dos arquivos P2, P3 e P4 estão especificados seguir:

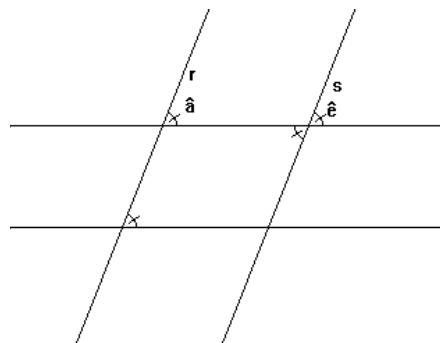
O ARQUIVO P2 NO CABRI



O ARQUIVO P3 NO CABRI



O ARQUIVO P4 NO CABRI



ANEXO L**VAGNER- F21****CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS**

1) Abra os arquivos no Cabri ou use o material que lhe será fornecido para estudar os casos de congruência de triângulos:

USANDO OS ARQUIVOS NO CABRI:

Abra o arquivo C1. Você verá o triângulo ABC e uma reta r.

a) Faça, para a reta, o transporte de um lado do triângulo, de um ângulo adjacente (“vizinho”) a esse lado e do outro lado adjacente a esse ângulo. Trace o novo triângulo e verifique se é congruente ao primeiro.

b) Repita a operação para a reta s porém agora transportando os três ângulos do triângulo ABC.

c) Repita a operação para a reta t porém agora transportando os três lados do triângulo ABC.

Abra o arquivo C2. Você verá o triângulo DEF e uma reta r.

d) Repita a operação usada nos itens a, b, c acima transportando para a reta r, dois lados e um ângulo não compreendido entre eles.

e) Repita a operação para a reta s, porém agora transportando um lado e os dois ângulos adjacentes a ele.

f) Repita a operação para a reta t, porém agora transportando um lado, um ângulo adjacente a ele e o ângulo oposto a esse lado.

Você pode criar outros triângulos e realizar mais transportes de acordo com os itens acima.

Agora, complete a tabela:

Itens e elementos transportados	O triângulo criado ficou congruente ao primeiro?	
	Sim	Não
a) Dois lados e o ângulo compreendido entre eles		
b) Três ângulos		
c) Três lados		
d) Dois lados e um ângulo não compreendido entre eles.		
e) Um lado e dois ângulos adjacentes a ele.		
f) Um lado, um ângulo adjacente a ele e o ângulo oposto a esse lado.		

USANDO O MATERIAL:

Importante: vamos admitir que uma pequena diferença não descaracterize um caso de congruência devido a uma possível imprecisão do material.

a) Tome **dois** pares de **lados congruentes** (dois pares de varetas de mesmo comprimento) e um par de **ângulos congruentes**. Usando um elemento de cada par, comece a montar um triângulo. Ao terminar as construções os triângulos formados são congruentes? ____ Repita a operação para novos pares de lados e ângulos. Nesses casos os triângulos são congruentes:
 sempre às vezes nunca

b) Tome **três** pares de **ângulos congruentes**. Procure medidas de lados que formem triângulos com um ângulo de cada par. Repita a operação para outros pares de ângulos. Nesses casos os triângulos são congruentes:
 sempre às vezes nunca

c) Tome **três** pares de **lados congruentes**. Comece a formar triângulos com um lado de cada par. Repita a operação para outros pares. Nesses casos os triângulos são congruentes:
 sempre às vezes nunca

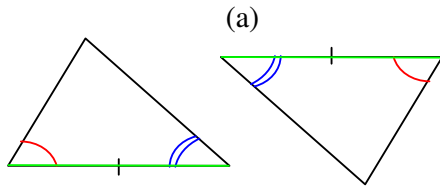
d) Tome **dois** pares de **lados congruentes** e um par de **ângulos congruentes**. Comece a formar triângulos usando um elemento de cada par de modo que o ângulo não seja simultaneamente adjacente aos dois lados (deve ser **oposto ao primeiro lado**). Repita a operação para outros pares. Nesses casos os triângulos são congruentes:
 sempre às vezes nunca

e) Tome um par de **lados congruentes** e **dois** pares de **ângulos congruentes**. Comece a formar triângulos usando um elemento de cada par de modo que o lado seja simultaneamente adjacente aos dois ângulos. Repita a operação para outros pares. Nesses casos os triângulos são congruentes:
 sempre às vezes nunca

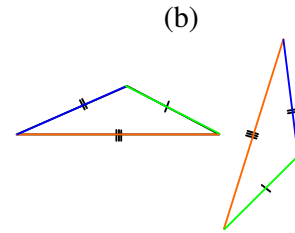
f) Tome um par de lados congruentes e dois pares de ângulos congruentes. Comece a formar triângulos usando um elemento de cada par de modo que o lado seja simultaneamente adjacente aos dois ângulos. Repita a operação para outros pares. Nesses casos os triângulos são congruentes:

() sempre () às vezes () nunca

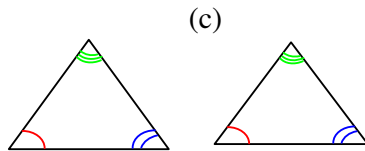
2) Indique quais pares de triângulos abaixo são congruentes.



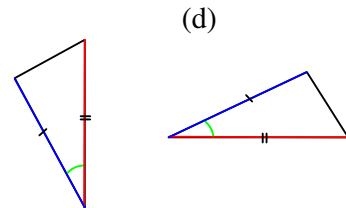
() não
 () sim, porque _____



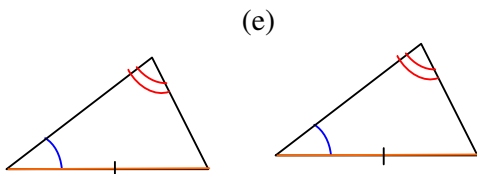
() não
 () sim, porque _____



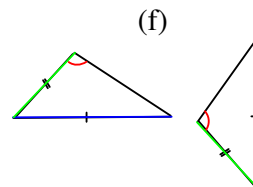
() não
 () sim, porque _____



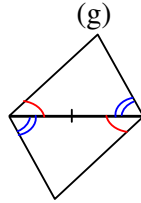
() não
 () sim, porque _____



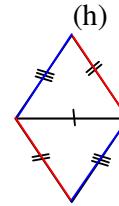
() não
 () sim, porque _____



() não
 () sim, porque _____

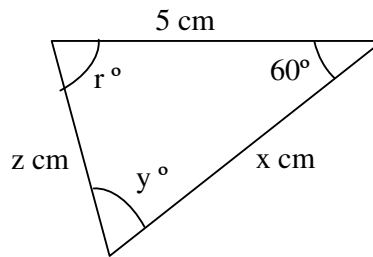
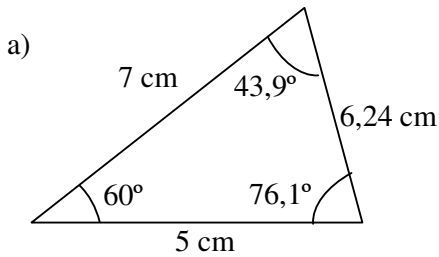


() não
 () sim, porque _____



() não
 () sim, porque _____

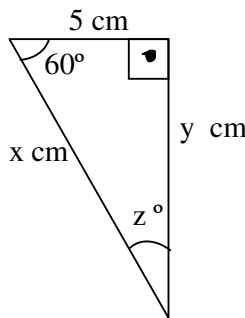
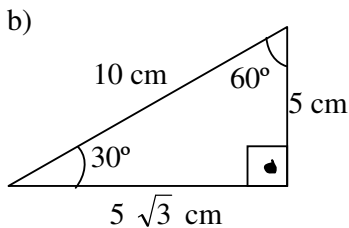
3) Usando esboços:



Os pares de triângulos acima são congruentes?

() não é possível saber a partir dos dados informados.
 () não são congruentes pois _____
 () são congruentes pois _____

Se a medida x for 7cm os triângulos serão congruentes? ____ Se forem, por qual caso? ____
 E nesse caso, como saber se a medida r° é 43,9° ou 76,1°

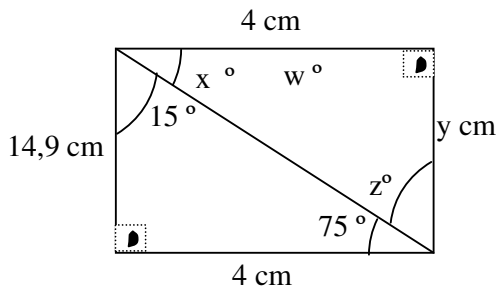


Os pares de triângulos acima são congruentes?

() não é possível saber a partir dos dados informados.
 () não são congruentes pois _____
 () são congruentes pois _____

No caso de os triângulos serem congruentes, é possível saber se a medida x é 10 cm ou $5\sqrt{3}$ cm? Como?

c)



Os pares de triângulos ao lado são congruentes?

não é possível saber a partir dos dados informados.

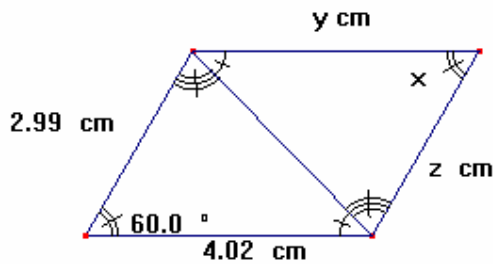
não são congruentes pois _____

são congruentes pois _____

Se a medida y for 14,9 cm, os triângulos serão congruentes? ____ Por qual caso? ____ Nesse caso, como saber se a medida x vale 75° ou 15° ?

Como determinar as medidas dos outros dois ângulos: z° e w° ?

d)



Os pares de triângulos ao lado são congruentes?

não é possível saber a partir dos dados informados.

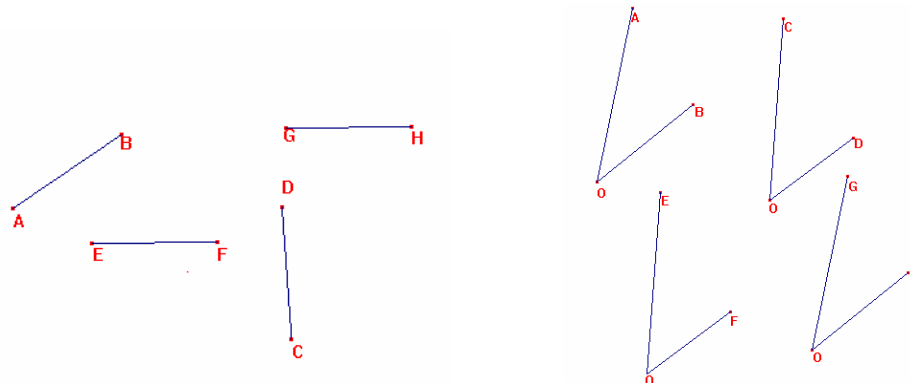
não são congruentes pois _____

são congruentes pois _____

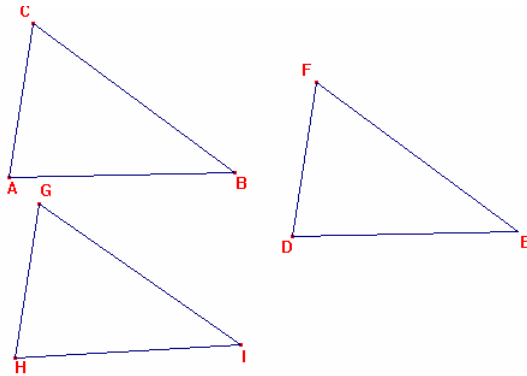
Como saber se y vale 2,99 cm ou 4,02 cm?

* Os conteúdos dos arquivos “C 2” e “Estudando Congruência” estão a seguir:

O ARQUIVO C 2



O ARQUIVO C 2 - continuação



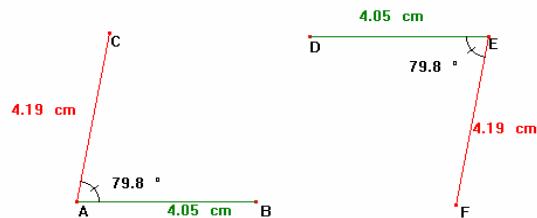
O ARQUIVO “ESTUDANDO CONGRUÊNCIAS”

Esse arquivo é composto por figuras móveis a não ser quanto às medidas dos elementos que estabelecem um caso de congruência. Por exemplo, no caso ALA haverá um lado e dois ângulos a ele adjacentes cujas medidas não podem ser alteradas. Os alunos poderão mudar as outras medidas, mas deverão verificar que por mais variação que ocorra os triângulos serão congruentes.

PRIMEIRO PAR



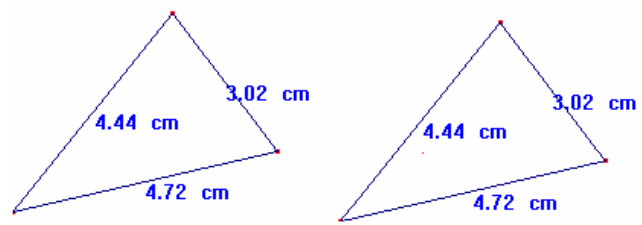
SEGUNDO PAR



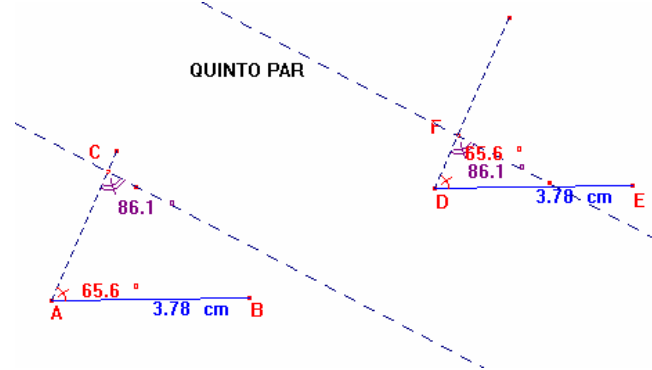
TERCEIRO PAR



QUARTO PAR



QUINTO PAR



ANEXO M

VAGNER - ATMP 2 E 2ª ETAPA - CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS

Podemos definir elementos congruentes como aqueles que têm mesma medida.

a) Abra o arquivo C2* e complete as frases:

O segmento AB é congruente ao segmento _____ e o segmento _____ é congruente ao segmento _____. O ângulo AÔB é congruente ao ângulo _____ e o ângulo _____ é congruente ao ângulo _____.

Um triângulo é congruente a outro se, e somente se,
SEUS LADOS SÃO ORDENADAMENTE CONGRUENTES AOS LADOS DO OUTRO e
SEUS ÂNGULOS SÃO ORDENADAMENTE CONGRUENTES AOS ÂNGULOS DO OUTRO.

b) O triângulo ABC é congruente ao triângulo _____.

Para saber se dois triângulos são congruentes, não precisamos, na verdade, medir todos os seus lados e todos os seus ângulos. Abrindo o arquivo “Estudando Congruências”*, verifique o PRIMEIRO PAR de triângulos. Eles têm, cada um, um lado congruente (azul) e dois ângulos adjacentes a esse lado também congruentes (um preto e outro rosa). Nada sabemos sobre os outros dois lados e sobre o terceiro ângulo. Na sua opinião, se “completarmos” os dois triângulos, eles serão congruentes? _____. Para ver se você acertou trace uma reta passando pelos pontos A e D, uma reta passando pelos pontos B e C. Marque o ponto de intersecção entre elas. Trace outra reta passando pelos pontos E e H e uma pelos pontos F e G. Marque o ponto de intersecção entre elas. Confira se os triângulos formados são congruentes. Sua resposta estava certa? _____

No SEGUNDO PAR de triângulos, temos o lado AB congruente ao lado DE (verdes) pois ambos medem 4,05 cm. Também os pares de lados AC e EF (vermelhos) são congruentes (medem _____ cm cada um). Os ângulos compreendidos entre eles são congruentes e medem _____ cm cada um. Na sua opinião, se completarmos o triângulo, o terceiro lado e os outros dois ângulos também serão congruentes? _____ Para verificar se você acertou. Complete a figura com o terceiro lado de cada triângulo traçando um segmento com extremidades nos pontos C e B e outro com extremidade nos pontos D e F. Confira se os triângulos formados são congruentes. Sua resposta estava certa? _____

Já vimos que:

Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes um lado e os dois ângulos a ele adjacentes, então estes triângulos são congruentes – caso chamado ALA - (nem precisaríamos verificar os outros lados e ângulos).

Se dois triângulos tem ordenadamente congruentes dois lados e o ângulo compreendido, então eles são congruentes – caso chamado LAL - (nem precisaríamos verificar os outros lados e ângulos).

Na sua opinião se dois triângulos tiverem três ângulos de mesma medida, eles serão congruentes, isto é, nem precisaremos medir os três lados?_____ Verifique o terceiro par e confira sua resposta medindo os três lados. Sua resposta estava certa?_____

Se você tiver dois triângulos com os três lados congruentes, eles serão congruentes, isto é, nem precisaremos medir os três ângulos?_____ Verifique o quarto par e confira sua resposta medindo os três ângulos. Sua resposta estava certa?_____

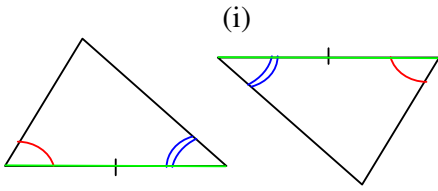
No quinto par temos dois triângulos incompletos: eles têm um lado congruente (azul) e essa medida, que é a mesma nos dois é 3,78 cm. Eles têm apenas um ângulo adjacente congruente (vermelho) cuja medida é $65,6^\circ$. Coloque o ponteiro no ponto C e verifique que ele é móvel. O mesmo ocorre com o ponto F – portanto os lados AC e DF não têm a mesma medida mas seja como for o ângulo que deve ser oposto ao lado de mesma medida (azul) está fixo e será o mesmo nos dois triângulos (medida de $86,1^\circ$ independentemente dos tamanhos dos lados AC e DF).

Temos congruentes um LADO, um ÂNGULO ADJACENTE a esse lado e um ÂNGULO OPOSTO a esse lado. Será que se “fecharmos” os dois triângulos, eles serão congruentes? _____ Experimente fazer isso e confira sua resposta.

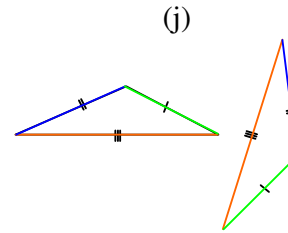
Agora, complete a tabela:

Elementos congruentes em cada triângulo	Os triângulos são congruentes?	
	Sim	Não
a) Dois lados e o ângulo compreendido entre eles (LAL)		
b) Três ângulos (AAA)		
c) Três lados (LLL)		
d) Um lado e dois ângulos adjacentes a ele. (ALA)		
e) Um lado, um ângulo adjacente a ele e o ângulo oposto a esse lado.(LAAo)		

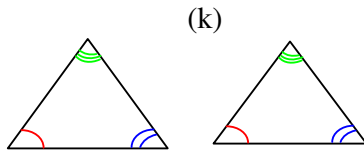
3) Indique quais pares de triângulos abaixo são congruentes.



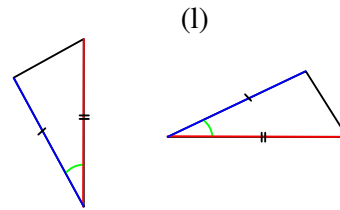
() não
() sim, porque _____



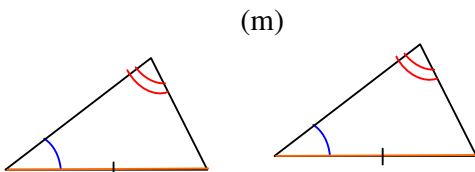
() não
() sim, porque _____



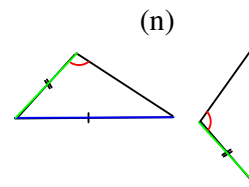
() não
() sim, porque _____



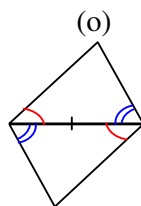
() não
() sim, porque _____



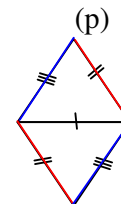
() não
() sim, porque _____



() não
() sim, porque _____

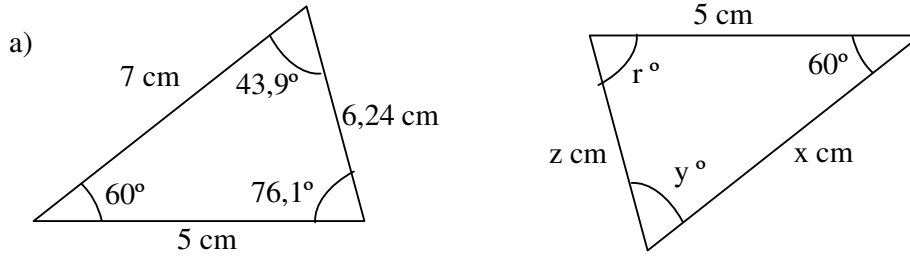


() não
() sim, porque _____



() não
() sim, porque _____

3) Usando esboços:



Os pares de triângulos acima são congruentes?

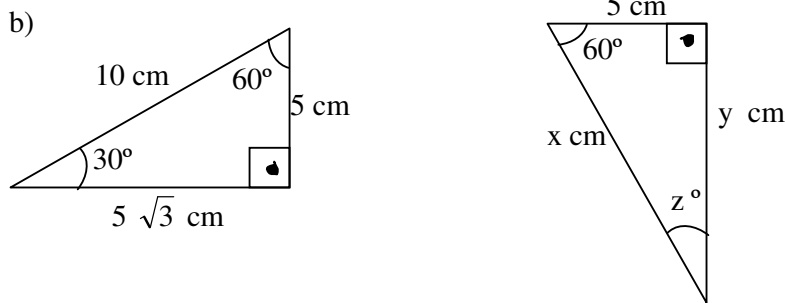
() não é possível saber a partir dos dados informados.

() não são congruentes pois _____

() são congruentes pois _____

Se a medida x for 7cm os triângulos serão congruentes? _____ Se forem, por qual caso? _____

E nesse caso, como saber se a medida r° é 43,9° ou 76,1°



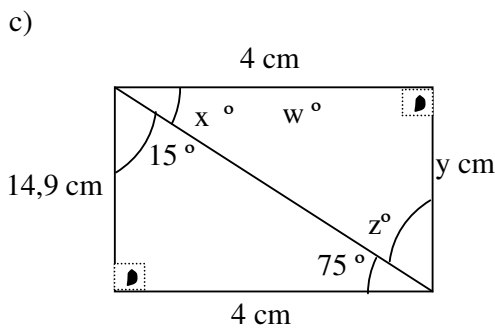
Os pares de triângulos acima são congruentes?

() não é possível saber a partir dos dados informados.

() não são congruentes pois _____

() são congruentes pois _____

No caso de os triângulos serem congruentes, é possível saber se a medida x é 10 cm ou $5\sqrt{3}$ cm? Como?



Os pares de triângulos ao lado são congruentes?

() não é possível saber a partir dos dados informados.

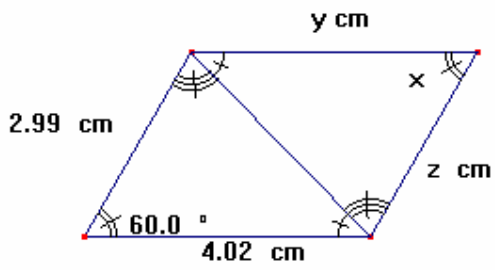
() não são congruentes pois _____

() são congruentes pois _____

Se a medida y for 14,9 cm, os triângulos serão congruentes? _____ Por qual caso? _____ Nesse caso, como saber se a medida x vale 75° ou 15°?

Como determinar as medidas dos outros dois ângulos: z° e w°?

d)



Os pares de triângulos ao lado são congruentes?

() não é possível saber a partir dos dados informados.

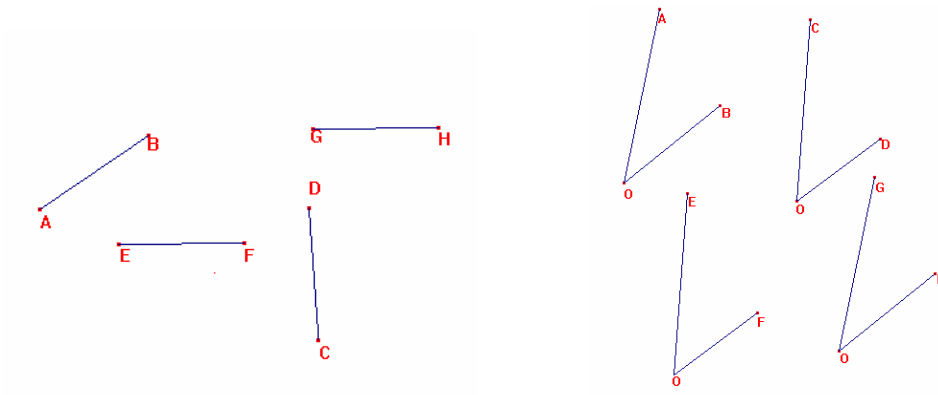
() não são congruentes pois _____

() são congruentes pois _____

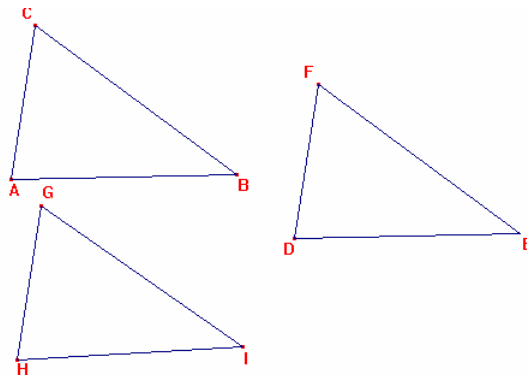
Como saber se y vale 2,99 cm ou 4,02 cm?

* Os conteúdos dos arquivos “C 2” e “Estudando Congruência” estão a seguir:

O ARQUIVO C 2



O ARQUIVO C 2 - continuação



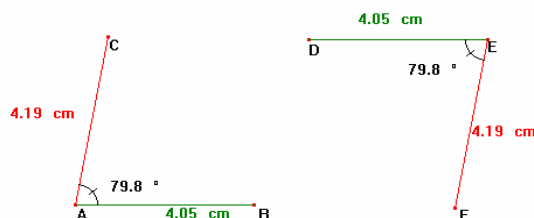
O ARQUIVO “ESTUDANDO CONGRUÊNCIAS”

Esse arquivo é composto por figuras móveis a não ser quanto às medidas dos elementos que estabelecem um caso de congruência. Por exemplo, no caso ALA haverá um lado e dois ângulos a ele adjacentes cujas medidas não podem ser alteradas. Os alunos poderão mudar as outras medidas, mas deverão verificar que por mais variação que ocorra os triângulos serão congruentes.

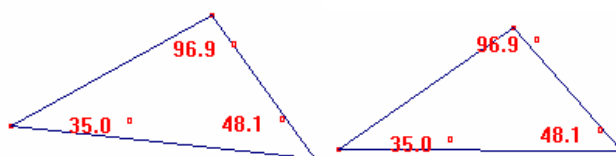
PRIMEIRO PAR



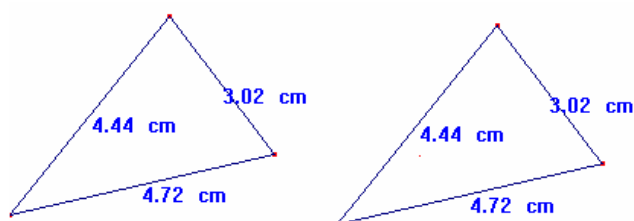
SEGUNDO PAR



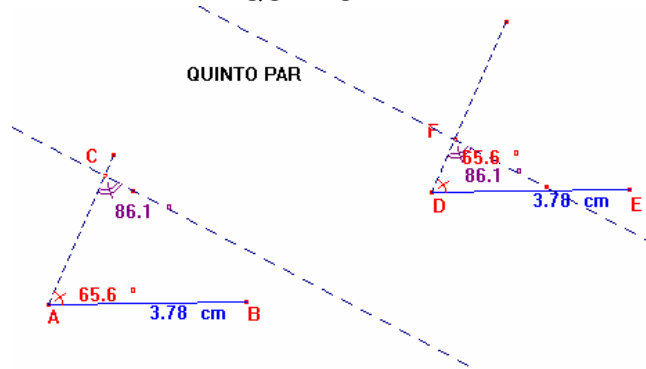
TERCEIRO PAR



QUARTO PAR



QUINTO PAR



ANEXO N

VAGNER – F31, F32, F33 E F34

F31

CONJECTURAS E INTRODUÇÃO À PROVA

Vamos definir **paralelogramo** como o quadrilátero que possui **lados opostos paralelos**.

Usando o material:

0) Tome três varetas e forme um triângulo com elas. Repita a operação para outros ternos de varetas. Tendo em vista as experiências feitas, analise a informação:
 “Três varetas quaisquer sempre formam um triângulo” () Verdadeira () Falsa

1) Tome dois pares de lados (varetas) congruentes e forme com elas um quadrilátero. Verifique se ele é um paralelogramo usando a régua e um esquadro. Repita a operação para outras pares de lados congruentes. Tendo em vista sua experiência, analise a afirmação:
 “Se os lados opostos de um quadrilátero são congruentes, então esse quadrilátero será um paralelogramo. () Verdadeira () Falsa

2) Usando a malha de retas paralelas (folha I) trace quadriláteros de modo que seus lados estejam sempre sobre as retas dessa malha. Tendo em vista sua experiência, analise a afirmação:
 “Se um quadrilátero é um paralelogramo, então seus lados opostos são congruentes dois a dois.” () Verdadeira () Falsa

3) Usando o par de varetas unidas uma à outra por um percevejo em seu ponto médio, verifique se é possível que suas extremidades sempre toquem os pares de retas paralelas da folha II. Tendo em vista sua experiência, analise a afirmação:
 “ Se dois segmentos se interceptam em seus respectivos pontos médios, então suas extremidades são vértices de um paralelogramo. () Verdadeira () Falsa

Usando o Cabri:

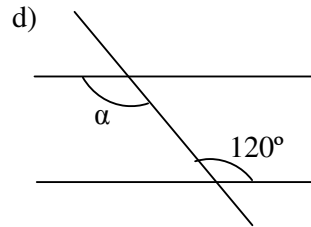
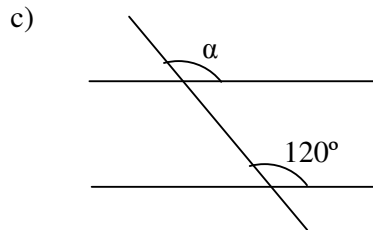
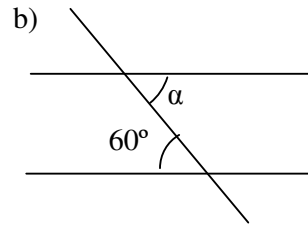
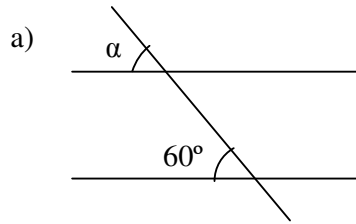
4) Construa um paralelogramo e meça seus ângulos opostos. Repita o procedimento para outros paralelogramos. Tendo em vista sua experiência, analise a afirmação:
 “Se um quadrilátero é paralelogramo então os seus ângulos opostos congruentes”
 () Verdadeira () Falsa

Em sua opinião:

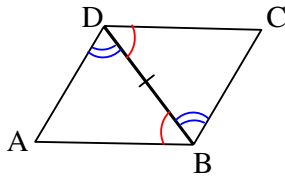
5) “Para termos certeza que uma propriedade é sempre válida basta analisar vários casos onde essa veracidade se verifique.” () Verdadeira () Falsa

INICIAÇÃO ÀS PROVAS

7) Abaixo estão esboçadas duas retas paralelas cortadas por uma transversal. Determine, se possível, a medida do ângulo α e justifique sua resposta.

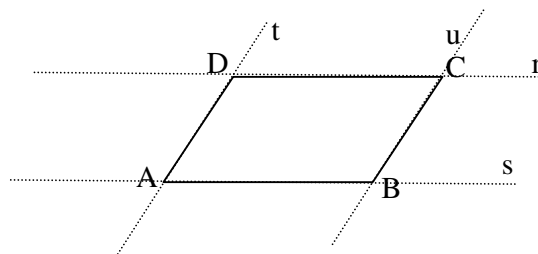


8) Observe o esboço abaixo.



Podemos dizer que temos dois triângulos congruentes? _____
 Se você achar que sim, o qual o caso? _____
 Os dois formam uma figura. Qual? _____
 Se os dois triângulos forem congruentes teremos dois pares de lados desse quadrilátero também congruentes. Quais são esses pares?

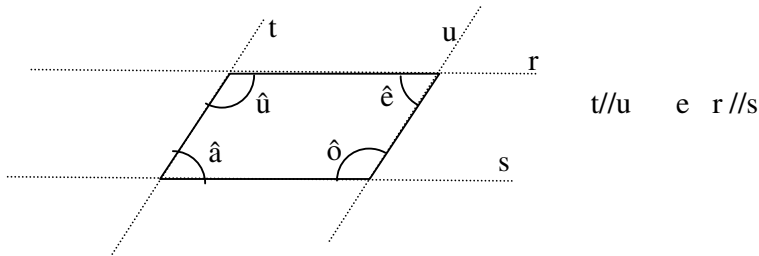
9) Abaixo temos um esboço de um paralelogramo. Você deverá provar que os lados opostos são dois a dois congruentes, isto é $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ e $\overline{AD} \cong \overline{BC}$. Verifique se é possível identificar dois triângulos congruentes. Caso seja possível, diga o caso de congruência.



$t//u$ e $r//s$

Se você encontrou um caso de congruência, deverá justificar a congruência dos elementos necessários. Por exemplo: se o caso encontrado foi ALA deverá explicitar qual é o par de triângulos congruentes, quais são os pares de ângulos congruentes e justificar porque o são bem como o par de lados congruentes (um em cada triângulo).

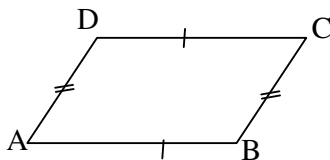
- 10) Abaixo temos o esboço de um paralelogramo. Demonstre que “num paralelogramo os ângulos opostos são congruentes”. Você deve demonstrar que os ângulos de medida \hat{a} e \hat{e} são congruentes, bem como os de medida \hat{u} e \hat{o} . Não é necessário usar congruência de triângulos.



- 11) Vamos usar as afirmações abaixo sem nos preocuparmos com suas demonstrações:

<p style="text-align: center;">$r//s \Rightarrow \hat{a} \equiv \hat{u}$</p> <p>Se duas retas paralelas distintas interceptam uma transversal, então os ângulos alternos são congruentes.</p> <p style="text-align: center;">I</p>	<p style="text-align: center;">$\hat{e} \equiv \hat{u} \Rightarrow r//s$</p> <p>Se duas retas coplanares e uma transversal determinam ângulos alternos congruentes, então essas duas retas são paralelas.</p> <p style="text-align: center;">II</p>
--	---

A partir delas e do esboço abaixo, você deve provar que “se um quadrilátero tem os lados opostos congruentes então ele é um paralelogramo”.



Formalize sua prova. Comece indicando a hipótese, quais são os triângulos congruentes que você usou, qual é o caso de congruência, justificando-o.

F32

CONJECTURAS E INTRODUÇÃO À PROVA

Vamos definir **paralelogramo** como o quadrilátero que possui **lados opostos paralelos**.

Usando o material:

- 1) Tome dois pares de segmentos (varetas) congruentes e forme com eles um quadrilátero. Verifique se ele é um paralelogramo usando a régua e um esquadro. Repita a operação para outros pares de lados congruentes. Tendo em vista a experiência que você acabou de realizar, analise a afirmação:

“Se os lados opostos de um quadrilátero são congruentes, então esse quadrilátero será um paralelogramo”.

Verdadeira sempre Verdadeira às vezes Falsa

- 2) Usando a malha de retas paralelas (folha I) trace quadriláteros de modo que seus lados estejam sempre sobre as retas dessa malha. Meça os lados opostos de cada um deles. Tendo em vista a experiência que você acabou de realizar, analise a afirmação:

“Se um quadrilátero é um paralelogramo, então seus lados opostos são congruentes.”

Verdadeira sempre Verdadeira às vezes Falsa

- 3) Usando o par de varetas unidas uma à outra por um percevejo em seus pontos médios, verifique se é possível que suas extremidades sempre toquem os pares de retas paralelas da folha II. Tendo em vista a experiência que você acabou de realizar, analise a afirmação:

“ Se dois segmentos se interceptam em seus respectivos pontos médios, então suas extremidades são vértices de um paralelogramo.

Verdadeira sempre Verdadeira às vezes Falsa

Usando o Cabri:

- 4) Construa um paralelogramo e meça seus ângulos opostos. Repita o procedimento para outros paralelogramos. Tendo em vista a experiência que você acabou de realizar, analise a afirmação:

“Se um quadrilátero é paralelogramo então os seus ângulos opostos congruentes”

Verdadeira sempre Verdadeira às vezes Falsa

- 5) Tome três varetas e forme um triângulo com elas. Repita a operação para outros ternos de varetas. Tendo em vista as experiências feitas, analise a informação:

“Três varetas quaisquer sempre formam um triângulo”

Verdadeira sempre Verdadeira às vezes Falsa

- 6) Você receberá mais três varetas. Usando-as, deverá montar um triângulo. Levando em consideração o que você fez e respondeu na atividade anterior, em sua opinião:

“Para que uma propriedade seja válida basta analisar vários casos onde essa veracidade se verifique.”

Verdadeira Falsa

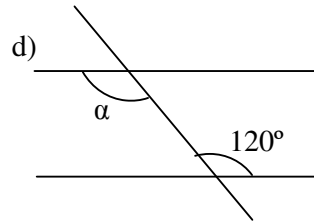
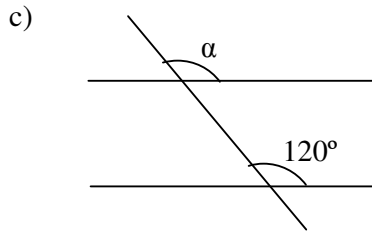
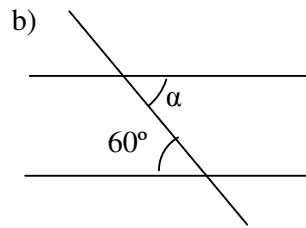
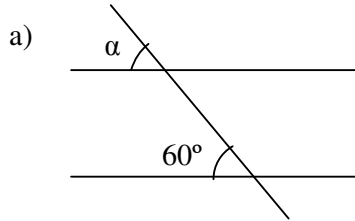
“João verificou que em 50 paralelogramos as diagonais se interceptavam (se cruzavam) nos respectivos pontos médios.”

() ele provou que em todo paralelogramo as diagonais se interceptam em seus pontos médios porque _____

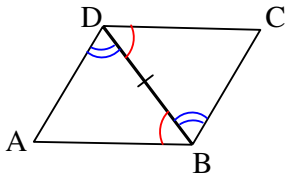
() ele não provou que em todo paralelogramo as diagonais se interceptam em seus pontos médios porque _____

INICIAÇÃO ÀS PROVAS

7) Abaixo estão esboçadas duas retas paralelas cortadas por uma transversal. Determine, se possível, a medida do ângulo α e justifique sua resposta.

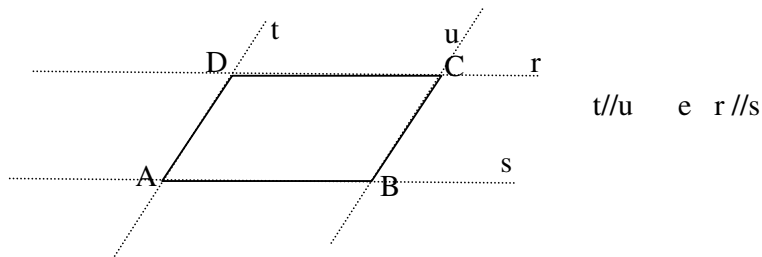


8) Observe o esboço abaixo.



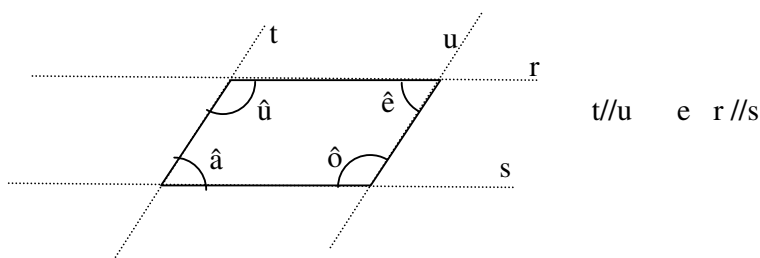
Podemos dizer que temos dois triângulos congruentes? _____
 Se você achar que sim, o qual o caso? _____
 Os dois formam uma figura. Qual? _____
 Se os dois triângulos forem congruentes teremos dois pares de lados desse quadrilátero também congruentes. Quais são esses pares?

9) Abaixo temos um esboço de um paralelogramo. Você deverá provar que os lados opostos são dois a dois congruentes, isto é $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ e $\overline{AD} \cong \overline{BC}$. Verifique se é possível identificar dois triângulos congruentes. Caso seja possível, diga o caso de congruência.



Se você encontrou um caso de congruência, deverá justificar a congruência dos elementos necessários. Por exemplo: se o caso encontrado foi ALA deverá explicitar qual é o par de triângulos congruentes, quais são os pares de ângulos congruentes e justificar porque o são bem como o par de lados congruentes (um em cada triângulo).

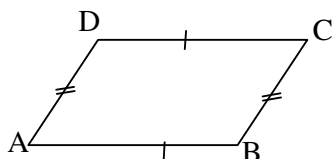
10) Abaixo temos o esboço de um paralelogramo. Demonstre que “num paralelogramo os ângulos opostos são congruentes”. Você deve demonstrar que os ângulos de medida \hat{a} e \hat{e} são congruentes, bem como os de medida \hat{u} e \hat{o} . Não é necessário usar congruência de triângulos.



11) Vamos usar as afirmações abaixo sem nos preocuparmos com suas demonstrações:

<p>I</p> <p>Se duas retas paralelas distintas interceptam uma transversal, então os ângulos alternos são congruentes.</p>	<p>II</p> <p>Se duas retas coplanares e uma transversal determinam ângulos alternos congruentes, então essas duas retas são paralelas.</p>
--	---

A partir delas e do esboço abaixo, você deve provar que “se um quadrilátero tem os lados opostos congruentes então ele é um paralelogramo”.



Formalize sua prova. Comece indicando a hipótese, quais são os triângulos congruentes que você usou, qual é o caso de congruência, justificando-o.

F33 (Teste Piloto)

CONJECTURAS E INTRODUÇÃO À PROVA

Vamos definir **paralelogramo** como o quadrilátero que possui **lados opostos paralelos**.

No arquivo “PARES DE SEGMENTOS CONGRUENTES”:

- 1) Tome dois pares de segmentos congruentes e forme com eles um quadrilátero. Verifique se ele é um paralelogramo. Repita a operação para outros pares de lados congruentes. Tendo em vista a experiência que você acabou de realizar, analise a afirmação:

“Se os lados opostos de um quadrilátero são congruentes, então esse quadrilátero será um paralelogramo”.

Verdadeira sempre Verdadeira às vezes Falsa

- 2) Usando a malha de retas paralelas (arquivo de nome “malha de retas pontilhadas”) trace um quadrilátero de modo que seus lados estejam sempre sobre as retas dessa malha. Meça os lados opostos de cada um deles. Ao selecionar o ponto A ou o ponto B, você pode mudar a distância entre as retas. Ao selecionar a reta r ou s, você pode mudar a inclinação das mesmas. Verifique se, ao fazer isso, como mudam as medidas que você tirou. Tendo em vista a experiência que você acabou de realizar, analise a afirmação:

“Se um quadrilátero é um paralelogramo, então seus lados opostos são congruentes.”

Verdadeira sempre Verdadeira às vezes Falsa

- 3) Usando o arquivo C3, verifique se O é o ponto médio de AB e também de CD. Trace a reta \overline{AD} e a reta \overline{CB} e verifique se elas são paralelas. Faça o mesmo para as retas \overline{AC} e \overline{BD} . Tendo em vista a experiência que você acabou de realizar, analise a afirmação:

“Se dois segmentos se interceptam em seus respectivos pontos médios, então suas extremidades são vértices de um paralelogramo.

Verdadeira sempre Verdadeira às vezes Falsa

- 4) Construa um paralelogramo e meça seus ângulos opostos. Repita o procedimento para outros paralelogramos. Tendo em vista a experiência que você acabou de realizar, analise a afirmação:

“Se um quadrilátero é paralelogramo então os seus ângulos opostos congruentes”

Verdadeira sempre Verdadeira às vezes Falsa

- 5) Tome três varetas e forme um triângulo com elas. Repita a operação para outras três varetas. Tendo em vista as experiências feitas, analise a informação:

“Três varetas quaisquer sempre formam um triângulo”

Verdadeira sempre Verdadeira às vezes Falsa

6) Você receberá mais três varetas. Usando-as, deverá montar um triângulo. Levando em consideração o que você fez e respondeu na atividade anterior, em sua opinião:

“Para que uma propriedade seja válida basta analisar vários casos onde essa veracidade se verifique.”

() Verdadeira () Falsa

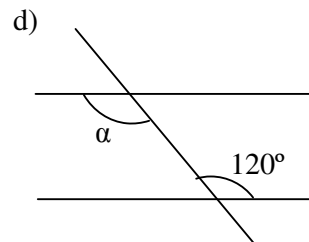
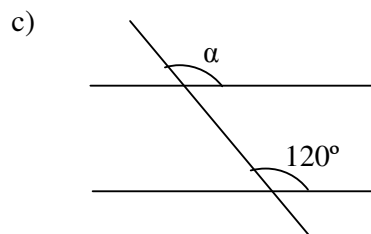
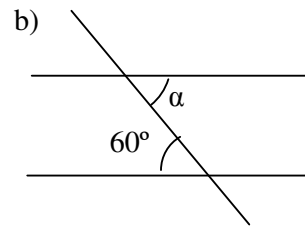
“João verificou que em 50 paralelogramos as diagonais se interceptavam (se cruzavam) nos respectivos pontos médios.”

() ele provou que em todo paralelogramo as diagonais se interceptam em seus pontos médios porque _____

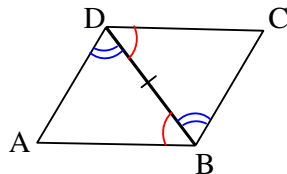
() ele não provou que em todo paralelogramo as diagonais se interceptam em seus pontos médios porque _____

INICIAÇÃO ÀS PROVAS

7) Abaixo estão esboçadas duas retas paralelas cortadas por uma transversal. Determine, se possível, a medida do ângulo α e justifique sua resposta.



8) Observe o esboço abaixo.



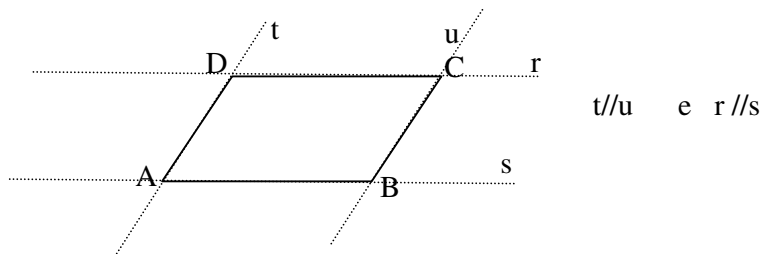
Podemos dizer que temos dois triângulos congruentes? _____

Se você achar que sim, o qual o caso? _____

Os dois formam uma figura. Qual? _____

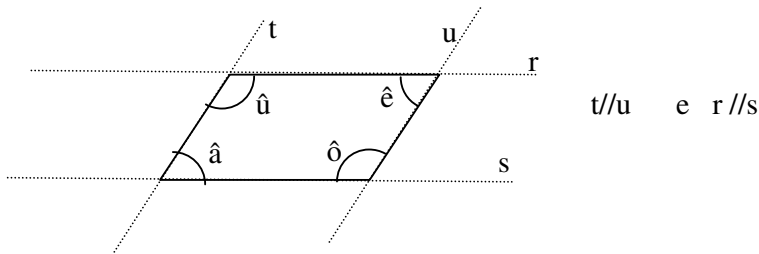
Se os dois triângulos forem congruentes teremos dois pares de lados desse quadrilátero também congruentes. Quais são esses pares?

9) Abaixo temos um esboço de um paralelogramo. Você deverá provar que os lados opostos são dois a dois congruentes, isto é $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ e $\overline{AD} \cong \overline{BC}$. Verifique se é possível identificar dois triângulos congruentes. Caso seja possível, diga o caso de congruência.

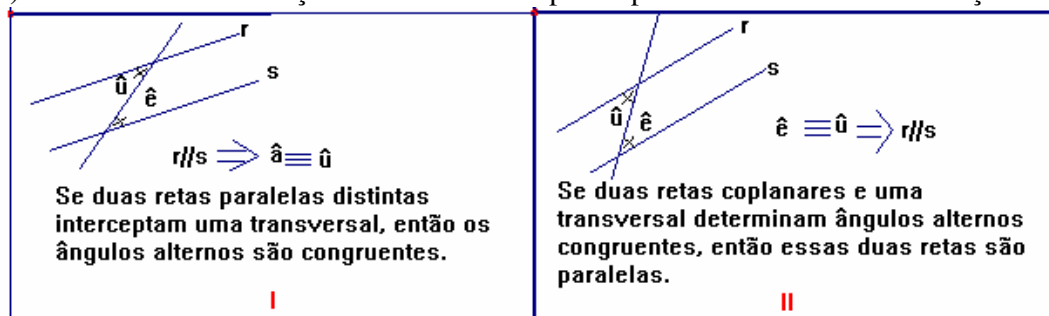


Se você encontrou um caso de congruência, deverá justificar a congruência dos elementos necessários. Por exemplo: se o caso encontrado foi ALA deverá explicitar qual é o par de triângulos congruentes, quais são os pares de ângulos congruentes e justificar porque o são bem como o par de lados congruentes (um em cada triângulo).

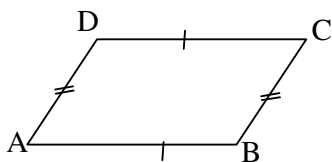
10) Abaixo temos o esboço de um paralelogramo. Demonstre que “num paralelogramo os ângulos opostos são congruentes”. Você deve demonstrar que os ângulos de medida \hat{a} e \hat{e} são congruentes, bem como os de medida \hat{u} e \hat{o} . Não é necessário usar congruência de triângulos.



11) Vamos usar as afirmações abaixo sem nos preocuparmos com suas demonstrações:



A partir delas e do esboço abaixo, você deve provar que “se um quadrilátero tem os lados opostos congruentes então ele é um paralelogramo”.



Formalize sua prova. Comece indicando a hipótese, quais são os triângulos congruentes que você usou, qual é o caso de congruência, justificando-o.

F34

CONJECTURAS E INTRODUÇÃO À PROVA

Vamos definir **paralelogramo** como o quadrilátero que possui **lados opostos paralelos**.

No arquivo “PARES DE SEGMENTOS CONGRUENTES”:

1) a) Tome dois pares de segmentos congruentes e forme com eles um quadrilátero. Você deverá verificar, com as ferramentas do Cabri, se ele é um paralelogramo. Como poderá fazer isso? _____

Repita a operação para outros pares de lados congruentes.

b) Trace um segmento e rotule suas extremidades como A e B. Trace outro segmento qualquer AC (origem em A e extremidade num ponto qualquer a ser rotulado como C). Usando a ferramenta “compasso” você deve transportar esses dois segmentos formando um quadrilátero cujos LADOS OPOSTOS SÃO CONGRUENTES. Verifique, com as ferramentas do Cabri, se ele é um paralelogramo.

Tendo em vista a experiência que você acabou de realizar, analise a afirmação:

“Se os lados opostos de um quadrilátero são congruentes, então esse quadrilátero será um paralelogramo”.

() Verdadeira sempre () Verdadeira às vezes () Falsa

2) Usando a malha de retas paralelas (arquivo de nome “malha de retas pontilhadas”) trace um quadrilátero de modo que seus lados estejam sempre sobre as retas dessa malha. Meça os lados opostos de cada um deles. Ao selecionar o ponto A ou o ponto B, você pode mudar a distância entre as retas. Ao selecionar a reta r ou s, você pode mudar a inclinação das mesmas. Verifique se, ao fazer isso, como mudam as medidas que você tirou. Tendo em vista a experiência que você acabou de realizar, analise a afirmação:

“Se um quadrilátero é um paralelogramo, então seus lados opostos são congruentes.”

() Verdadeira sempre () Verdadeira às vezes () Falsa

3) Usando o arquivo C3, verifique se O é o ponto médio de AB e também de CD. Trace a reta \overline{AD} e a reta \overline{CB} e verifique se elas são paralelas. Faça o mesmo para as retas \overline{AC} e \overline{BD} . Tendo em vista a experiência que você acabou de realizar, analise a afirmação:

“ Se dois segmentos se interceptam em seus respectivos pontos médios, então suas extremidades são vértices de um paralelogramo.

() Verdadeira sempre () Verdadeira às vezes () Falsa

4) Construa um paralelogramo e meça seus ângulos opostos. Repita o procedimento para outros paralelogramos. Tendo em vista a experiência que você acabou de realizar, analise a afirmação:

“Se um quadrilátero é paralelogramo então os seus ângulos opostos congruentes”

() Verdadeira sempre () Verdadeira às vezes () Falsa

5) Tome três varetas e forme um triângulo com elas. Repita a operação para outras três varetas. Tendo em vista as experiências feitas, analise a informação:

“Três varetas quaisquer sempre formam um triângulo”

() Verdadeira sempre () Verdadeira às vezes () Falsa

6) Você receberá mais três varetas. Usando-as, deverá montar um triângulo. Levando em consideração o que você fez e respondeu na atividade anterior, em sua opinião:

“Para que uma propriedade seja válida basta analisar vários casos onde essa veracidade se verifique.”

() Verdadeira () Falsa

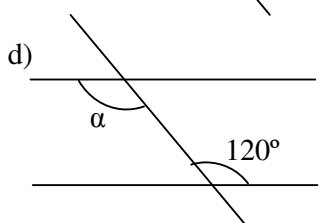
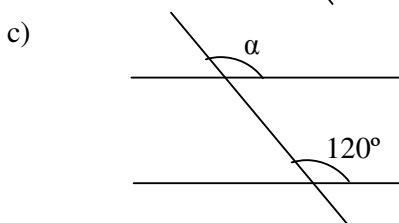
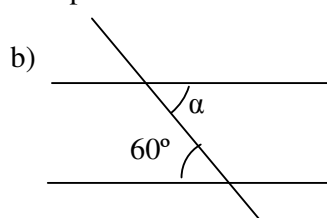
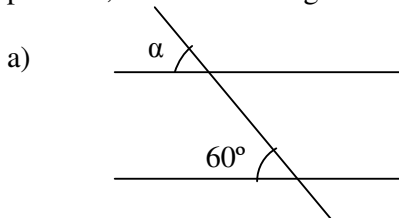
“João verificou que em 50 paralelogramos as diagonais se interceptavam (se cruzavam) nos respectivos pontos médios.”

() ele provou que em todo paralelogramo as diagonais se interceptam em seus pontos médios porque _____

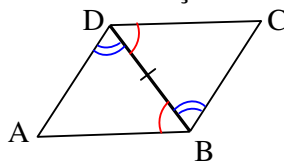
() ele não provou que em todo paralelogramo as diagonais se interceptam em seus pontos médios porque _____

INICIAÇÃO ÀS PROVAS

7) Abaixo estão esboçadas duas retas paralelas cortadas por uma transversal. Determine, se possível, a medida do ângulo α e justifique sua resposta.

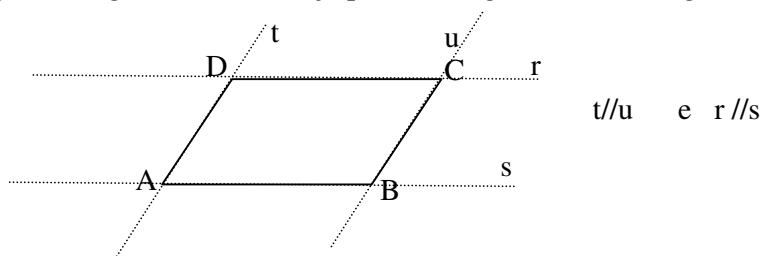


8) Observe o esboço abaixo.



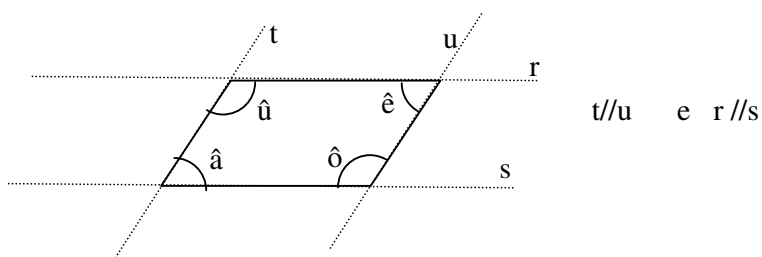
Podemos dizer que temos dois triângulos congruentes? ____ Se você achar que sim, o qual o caso? ____
 Os dois formam uma figura. Qual? ____
 Se os dois triângulos forem congruentes teremos dois pares de lados desse quadrilátero também congruentes. Quais são esses pares?

9) Abaixo temos um esboço de um paralelogramo. Você deverá provar que os lados opostos são dois a dois congruentes, isto é $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ e $\overline{AD} \cong \overline{BC}$. Verifique se é possível identificar dois triângulos congruentes. Caso seja possível, diga o caso de congruência.

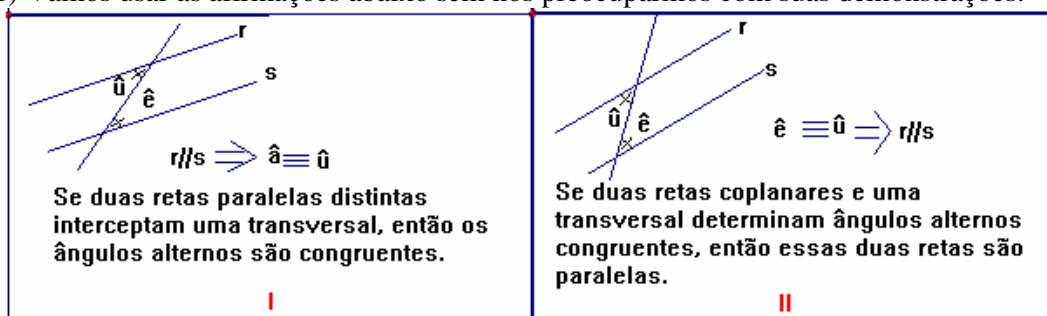


Se você encontrou um caso de congruência, deverá justificar a congruência dos elementos necessários. Por exemplo: se o caso encontrado foi ALA deverá explicitar qual é o par de triângulos congruentes, quais são os pares de ângulos congruentes e justificar porque o são bem como o par de lados congruentes (um em cada triângulo).

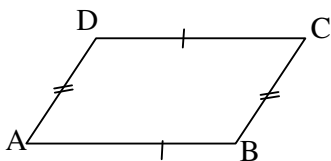
10) Abaixo temos o esboço de um paralelogramo. Demonstre que “num paralelogramo os ângulos opostos são congruentes”. Você deve demonstrar que os ângulos de medida \hat{a} e \hat{e} são congruentes, bem como os de medida \hat{u} e \hat{o} . Não é necessário usar congruência de triângulos.



11) Vamos usar as afirmações abaixo sem nos preocuparmos com suas demonstrações:



A partir delas e do esboço abaixo, você deve provar que “se um quadrilátero tem os lados opostos congruentes então ele é um paralelogramo”.



Formalize sua prova. Comece indicando a hipótese, quais são os triângulos congruentes que você usou, qual é o caso de congruência, justificando-o.

ANEXO O

VAGNER - BLOCO I

CONJECTURAS E INTRODUÇÃO À PROVA

Vamos definir **paralelogramo** como o quadrilátero que possui **lados opostos paralelos**.

Estamos considerando como “tese” uma conclusão que, geralmente é escrita após a expressão “então”.

Estamos considerando “hipótese” como uma condição que contém também pelo menos uma informação a partir da qual se inicia o raciocínio para se obter a tese. Geralmente começa com a expressão “se”.

No arquivo “PARES DE SEGMENTOS CONGRUENTES”:

1) a) Tome dois pares de segmentos congruentes e forme com eles um quadrilátero. Você deverá verificar, com as ferramentas do Cabri, se ele é um paralelogramo. Como poderá fazer isso? _____

Repita a operação para outros pares de segmentos congruentes.

b) Trace um segmento e rotule suas extremidades como A e B. Trace outro segmento qualquer AC (origem em A e extremidade num ponto qualquer a ser rotulado como C). Usando a ferramenta “compasso” você deve transportar esses dois segmentos formando um quadrilátero cujos LADOS OPOSTOS SÃO CONGRUENTES. Verifique, com as ferramentas do Cabri, se ele é um paralelogramo.

Tendo em vista a experiência que você acabou de realizar, analise a afirmação: “Se os lados opostos de um quadrilátero são congruentes, então esse quadrilátero será um paralelogramo”.

() Verdadeira sempre () Verdadeira às vezes () Falsa

Na proposição acima a hipótese é o trecho: _____
_____ e a tese é o trecho _____

2) Usando a malha de retas paralelas (arquivo de nome “malha de retas pontilhadas”) trace um quadrilátero de modo que seus lados estejam sempre sobre as retas dessa malha. Meça os lados opostos de cada um deles. Ao selecionar o ponto A ou o ponto B, você pode mudar a distância entre as retas. Ao selecionar a reta r ou s, você pode mudar a inclinação das mesmas. Verifique se, ao fazer isso, como mudam as medidas que você tirou. Tendo em vista a experiência que você acabou de realizar, analise a afirmação:

“Se um quadrilátero é um paralelogramo, então seus lados opostos são congruentes.”

() Verdadeira sempre () Verdadeira às vezes () Falsa

Na proposição acima a hipótese é o trecho: _____
_____ e a tese é o
trecho _____

3) Usando o arquivo C3, verifique se O é o ponto médio de AB e também de CD. Trace a reta \overline{AD} e a reta \overline{CB} e verifique se elas são paralelas. Faça o mesmo para as retas \overline{AC} e \overline{BD} . Tendo em vista a experiência que você acabou de realizar, analise a afirmação:

“Se dois segmentos se interceptam em seus respectivos pontos médios, então suas extremidades são vértices de um paralelogramo.”

Verdadeira sempre Verdadeira às vezes Falsa

Na proposição acima a hipótese é o trecho: _____
_____ e a tese é o
trecho _____

4) Construa um paralelogramo e meça seus ângulos opostos. Repita o procedimento para outros paralelogramos. Tendo em vista a experiência que você acabou de realizar, analise a afirmação:

“Se um quadrilátero é paralelogramo então os seus ângulos opostos congruentes”

Verdadeira sempre Verdadeira às vezes Falsa

Na proposição acima a hipótese é o trecho: _____
_____ e a tese é o
trecho _____

5) Tome três varetas e forme um triângulo com elas. Repita a operação para outras três varetas. Tendo em vista as experiências feitas, analise a informação:

“Três varetas quaisquer sempre formam um triângulo”

Verdadeira sempre Verdadeira às vezes Falsa

6) Você receberá mais três varetas. Usando-as, deverá montar um triângulo. Levando em consideração o que você fez e respondeu na atividade anterior, em sua opinião:

“Para que uma propriedade seja válida basta analisar vários casos onde essa veracidade se verifique.”

Verdadeira Falsa

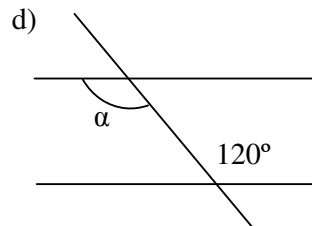
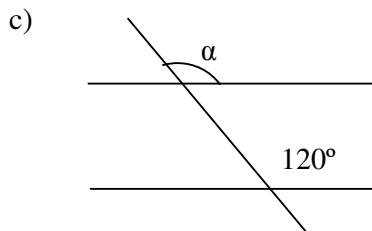
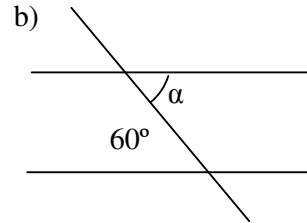
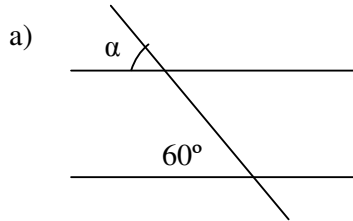
“João verificou que em 50 paralelogramos as diagonais se interceptavam (se cruzavam) nos respectivos pontos médios.”

ele provou que em todo paralelogramo as diagonais se interceptam em seus pontos médios porque _____

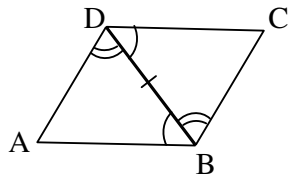
ele não provou que em todo paralelogramo as diagonais se interceptam em seus pontos médios porque _____

INICIAÇÃO ÀS PROVAS

7) Abaixo estão esboçadas duas retas paralelas cortadas por uma transversal. Determine, se possível, a medida do ângulo α e justifique sua resposta.



8) Observe o esboço abaixo.



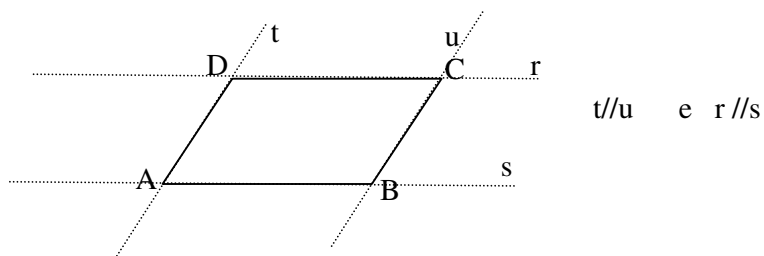
Podemos dizer que temos dois triângulos congruentes? _____

Se você achar que sim, o qual o caso? _____

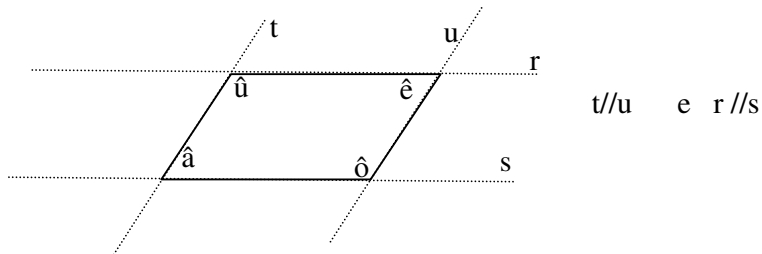
Os dois formam uma figura. Qual? _____

Se os dois triângulos forem congruentes teremos dois pares de lados desse quadrilátero também congruentes. Quais são esses pares?

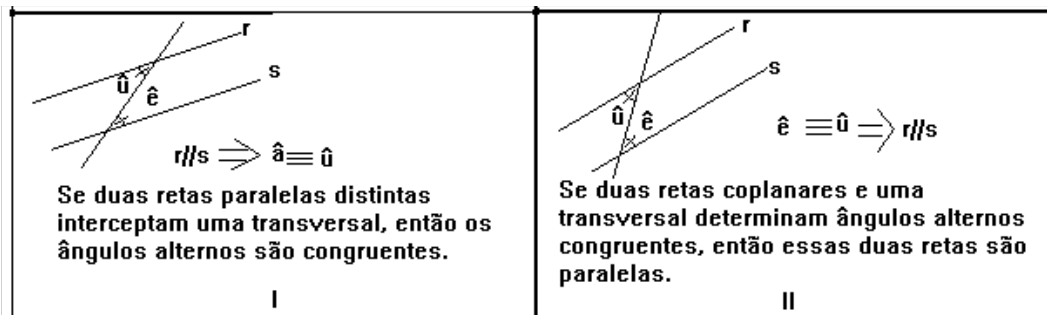
9) Abaixo temos um esboço de um paralelogramo. Você deverá provar que os lados opostos são dois a dois congruentes, isto é $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ e $\overline{AD} \cong \overline{BC}$.



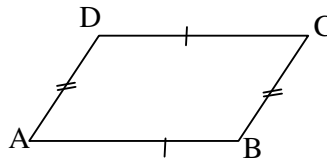
10) Abaixo temos o esboço de um paralelogramo. Demonstre que “num paralelogramo os ângulos opostos são congruentes”. Você deve demonstrar que os ângulos de medida \hat{a} e \hat{e} são congruentes, bem como os de medida \hat{u} e \hat{o} .



11) Vamos usar as afirmações abaixo sem nos preocuparmos com suas demonstrações:



A partir delas e do esboço abaixo, você deve provar que “se um quadrilátero tem os lados opostos congruentes então ele é um paralelogramo”.



ANEXO P

VAGNER - BLOCO II

As cartas indicadas a seguir, elaboradas por Vagner se referem às propriedades dos paralelogramos a serem escolhidas e provadas.

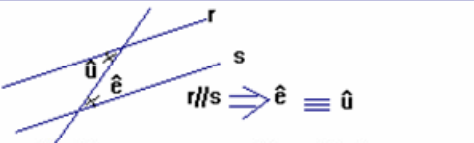
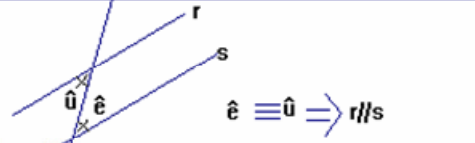
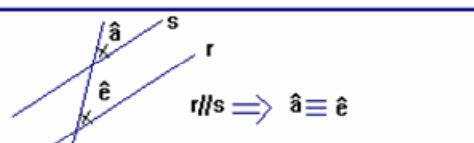
<p style="text-align: center;">PROVA A</p> <p style="text-align: center;">EM TODO PARALELOGRAMO DOIS ÂNGULOS OPOSTOS QUAISQUER SÃO CONGRUENTES.</p>	<p style="text-align: center;">PROVA a</p> <p style="text-align: center;">TODO QUADRILÁTERO QUE TEM OS ÂNGULOS OPOSTOS CONGRUENTES É PARALELOGRAMO.</p>
<p style="text-align: center;">PROVA B</p> <p style="text-align: center;">EM TODO PARALELOGRAMO DOIS LADOS OPOSTOS QUAISQUER SÃO CONGRUENTES.</p>	<p style="text-align: center;">PROVA b</p> <p style="text-align: center;">TODO QUADRILÁTERO QUE TEM LADOS OPOSTOS CONGRUENTES É PARALELOGRAMO.</p>
<p style="text-align: center;">PROVA C</p> <p style="text-align: center;">EM TODO PARALELOGRAMO AS DIAGONAIS INTERCEPTAM-SE NOS RESPECTIVOS PONTOS MÉDIOS.</p>	<p style="text-align: center;">PROVA c</p> <p style="text-align: center;">SE DOIS SEGMENTOS DE RETA INTERCEPTAM-SE NOS RESPECTIVOS PONTOS MÉDIOS, ENTÃO SUAS EXTREMIDADES SÃO VÉRTICES DE UM PARALELOGRAMO.</p>
<p style="text-align: center;">Prova D</p> <p style="text-align: center;">TODO PARALELOGRAMO TEM UM PAR DE LADOS PARALELOS E CONGRUENTES.</p>	<p style="text-align: center;">Prova d</p> <p style="text-align: center;">SE DOIS SEGMENTOS DE RETA SÃO PARALELOS E CONGRUENTES, ENTÃO SUAS EXTREMIDADES SÃO VÉRTICES DE UM PARALELOGRAMO.</p>
<p style="text-align: center;">Prova E</p> <p style="text-align: center;">TODO QUADRILÁTERO QUE TEM ÂNGULOS OPOSTOS CONGRUENTES TEM UM PAR DE LADOS PARALELOS E CONGRUENTES.</p>	<p style="text-align: center;">Prova e</p> <p style="text-align: center;">SE DOIS SEGMENTOS DE RETA SÃO PARALELOS E CONGRUENTES ENTÃO SÃO LADOS DE UM QUADRILÁTERO COM ÂNGULOS OPOSTOS CONGRUENTES.</p>


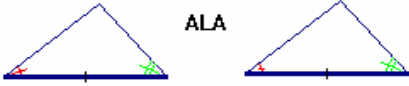

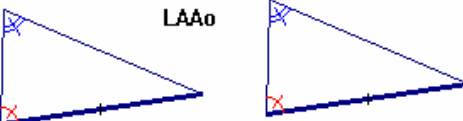
<p style="text-align: center;">Prova D</p> <p>TODO PARALELOGRAMO TEM UM PAR DE LADOS PARALELOS E CONGRUENTES.</p>	<p style="text-align: center;">Prova d</p> <p>SE DOIS SEGMENTOS DE RETA SÃO PARALELOS E CONGRUENTES, ENTÃO SUAS EXTREMIDADES SÃO VÉRTICES DE UM PARALELOGRAMO.</p>
<p style="text-align: center;">Prova E</p> <p>TODO QUADRILÁTERO QUE TEM ÂNGULOS OPOSTOS CONGRUENTES TEM UM PAR DE LADOS PARALELOS E CONGRUENTES.</p>	<p style="text-align: center;">Prova e</p> <p>SE DOIS SEGMENTOS DE RETA SÃO PARALELOS E CONGRUENTES ENTÃO SÃO LADOS DE UM QUADRILÁTERO COM ÂNGULOS OPOSTOS CONGRUENTES.</p>
<p style="text-align: center;">Prova F</p> <p>TODO QUADRILÁTERO QUE TEM ÂNGULOS OPOSTOS CONGRUENTES TEM SUAS DIAGONAIS INTERCEPTANDO-SE NOS RESPECTIVOS PONTOS MÉDIOS.</p>	<p style="text-align: center;">Prova f</p> <p>TODO QUADRILÁTERO EM QUE AS DIAGONAIS INTERCEPTAM-SE NOS RESPECTIVOS PONTOS MÉDIOS TEM ÂNGULOS OPOSTOS CONGRUENTES.</p>
<p style="text-align: center;">Prova G</p> <p>TODO QUADRILÁTERO QUE TEM LADOS OPOSTOS CONGRUENTES TEM UM PAR DE LADOS PARALELOS.</p>	<p style="text-align: center;">Prova g</p> <p>SE DOIS SEGMENTOS DE RETA SÃO PARALELOS E CONGRUENTES ENTÃO SÃO LADOS DE UM QUADRILÁTERO COM LADOS OPOSTOS CONGRUENTES.</p>
<p style="text-align: center;">Prova H</p> <p>TODO QUADRILÁTERO QUE TEM ÂNGULOS OPOSTOS CONGRUENTES TEM LADOS OPOSTOS CONGRUENTES.</p>	<p style="text-align: center;">Prova h</p> <p>TODO QUADRILÁTERO QUE TEM LADOS OPOSTOS CONGRUENTES TEM ÂNGULOS OPOSTOS CONGRUENTES.</p>
<p style="text-align: center;">Prova I</p> <p>SE DOIS SEGMENTOS DE RETA INTERCEPTAM-SE NOS RESPECTIVOS PONTOS MÉDIOS, ENTÃO SUAS EXTREMIDADES SÃO VÉRTICES DE UM QUADRILÁTERO COM LADOS OPOSTOS CONGRUENTES.</p>	<p style="text-align: center;">Prova i</p> <p>TODO QUADRILÁTERO QUE TEM LADOS OPOSTOS CONGRUENTES TEM DIAGONAIS INTERCEPTANDO-SE NOS RESPECTIVOS PONTOS MÉDIOS.</p>

<p>Prova J</p> <p>SE DOIS SEGMENTOS DE RETA INTERCEPTAM-SE NOS RESPECTIVOS PONTOS MÉDIOS, ENTÃO SUAS EXTREMIDADES DETERMINAM SEGMENTOS PARALELOS E CONGRUENTES.</p>	<p>Prova j</p> <p>SE DOIS SEGMENTOS DE RETA SÃO PARALELOS E CONGRUENTES ENTÃO SUAS EXTREMIDADES DETERMINAM SEGMENTOS QUE SE INTERCEPTAM NOS RESPECTIVOS PONTOS MÉDIOS.</p>
--	---




Vagner apontou para o fato de que a um teorema designado por uma letra maiúscula, corresponde o seu recíproco designada pela mesma letra, porém minúscula. Estas cartas totalizam vinte provas, entre provas de teoremas e os seus recíprocos.

As cartas-condição são as seguintes:

 <p>Se duas retas paralelas distintas interceptam uma transversal, então os ângulos alternos são congruentes.</p> <p>I</p>	 <p>Se duas retas coplanares distintas e uma transversal determinam ângulos alternos (ou ângulos correspondentes) congruentes, então essas duas retas são paralelas.</p> <p>II</p>
 <p>Se duas retas paralelas distintas interceptam uma transversal, então os ângulos correspondentes são congruentes</p> <p>III</p>	<p>USO DA DIAGONAL MENOR</p> <p>IV</p>
<p>USO DA DIAGONAL MAIOR</p> <p>V</p>	<p>USO DE UM LADO COMUM A DOIS TRIÂNGULOS</p> <p>VI</p>

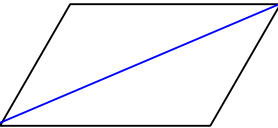
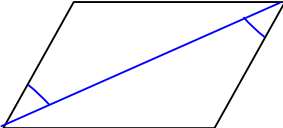
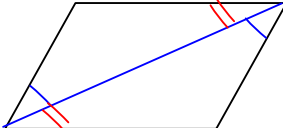
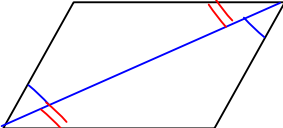
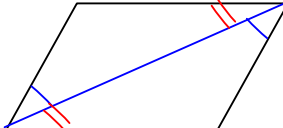
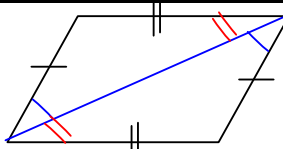
<p>ÂNGULOS OPOSTOS PELO VÉRTICE SÃO CONGRUENTES.</p> <p>VII</p>	<p>LAL</p>  <p>Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes dois lados e o ângulo compreendido, então eles são congruentes.</p> <p>VIII</p>
<p>ALA</p>  <p>"Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes um lado e os dois ângulos a ele adjacentes então estes triângulos são congruentes".</p> <p>IX</p>	<p>LLL</p>  <p>"Se dois triângulos têm ordenadamente três lados congruentes, então eles são congruentes."</p> <p>X</p>
<p>LAAo</p>  <p>"Se dois triângulos têm, ordenadamente congruentes, um lado, um ângulo adjacente e o ângulo oposto a esse lado, então eles são congruentes."</p> <p>XI</p>	<p>A SOMA DAS MEDIDAS DOS ÂNGULOS INTERNOS DE UM QUADRILÁTERO É IGUAL A 360 GRAUS E A DE UM TRIÂNGULO É IGUAL A 180 GRAUS.</p> <p>XII</p>
<p>A MEDIDA DE UM ÂNGULO DE "MEIA VOLTA" É 180 GRAUS.</p> <p>XIII</p>	<p>SE $A = B$ E SE $C = D$ ENTÃO $A + C = B + D$</p> <p>XIV</p>
<p>PODEMOS "PROLONGAR" OU TRAÇAR LADOS DE QUADRILÁTEROS OU DE TRIÂNGULOS.</p> <p>XV</p>	<p>SE $A = B$ E $B = C$ ENTÃO $A = C$</p> <p>XVI</p>
<p>EM FIGURAS CONGRUENTES, ELEMENTOS CORRESPONDENTES TAMBÉM SÃO CONGRUENTES.</p> <p>XVII</p>	<p>SE $A + B = A + C$ ENTÃO $B = C$</p> <p>XVIII</p>

Modelo de planilha a ser preenchida pelos alunos, na qual estes deveriam indicar as cartas usadas na construção de cada uma das provas solicitadas. Ela foi denominada por Vagner de Planilha carta-desenho usada para indicação do registro figural.

<p>Na coluna da esquerda você deve apenas indicar o número das cartas utilizadas e na coluna da direita o desenho que corresponde a essa carta. A cada linha que você avança, deve na coluna da esquerda colocar a nova carta e, na coluna da direita, repetir os desenhos já colocados nas linhas anteriores e acrescentar aquele referente à carta da linha atual. Aconselha-se anotar o que se sabe no primeiro desenho e "onde se quer chegar" no último desenho.</p>		
PASSAGEM	CARTAS UTILIZADAS	DESENHOS
		
		
		

A planilha a seguir indica um exemplo possível de preenchimento fornecido por Vagner em sua dissertação de mestrado, na prova da proposição B ("EM TODO PARALELOGRAMO DOIS LADOS OPOSTOS QUAISQUER SÃO CONGRUENTES")

Na coluna da esquerda você deve apenas indicar o número das cartas utilizadas e na coluna da direita o desenho que corresponde a essa carta. A cada linha que você avança, deve na coluna da esquerda colocar a nova carta e, na coluna da direita, repetir os desenhos já colocados nas linhas anteriores e acrescentar aquele referente à carta da linha atual. Aconselha-se anotar o que se sabe no primeiro desenho e “onde se quer chegar” no último desenho.

PASSAGEM	CARTAS UTILIZADAS	DESENHOS
<i>B</i>	<i>V</i>	
	<i>I</i>	
	<i>I</i>	
	<i>VI</i>	
	<i>IX</i>	
	<i>XVII</i>	

Vagner também representou as vinte provas a serem realizadas em um tabuleiro com cinco regiões denominadas “campos”. Esses campos terão a representação figural ou mista (Duval, 1989) de afirmações que podem, conforme Duval e Egret (1989), ora ser uma hipótese, ora ser uma tese:



Em seguida, Vagner exemplifica:

“Vamos por exemplo tomar o campo I, onde se representa figuralmente um quadrilátero com ângulos opostos congruentes. Tal campo será tese se a prova escolhida for a indicada por “A”: “EM TODO PARALELOGRAMO DOIS ÂNGULOS OPOSTOS QUAISQUER SÃO CONGRUENTES.” E, logicamente, nessa mesma prova, a hipótese terá sua representação figural no campo V. Caso a prova escolhida seja aquela indicada por “a”: “TODO QUADRILÁTERO QUE TEM OS ÂNGULOS OPOSTOS CONGRUENTES É PARALELOGRAMO”, como se pode verificar acima, a representação do campo I será a hipótese e a do campo V será a tese.”