

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO

RENATO MENDES MINEIRO

**ESTUDO DAS TRÊS DIMENSÕES DO PROBLEMA DIDÁTICO DE
INEQUAÇÕES**

DOUTORADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

São Paulo

2019

RENATO MENDES MINEIRO

**ESTUDO DAS TRÊS DIMENSÕES DO PROBLEMA DIDÁTICO DE
INEQUAÇÕES**

Tese apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de **DOUTOR EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA** sob a orientação da Professora Doutora Maria José Ferreira da Silva.

São Paulo
2019

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Tese de Doutorado por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: _____

Data: _____

e-mail: _____

Sistema para Geração Automática de Ficha Catalográfica para Teses e Dissertações com dados fornecidos pelo autor

M664 Mineiro, Renato Mendes
Estudo das três dimensões do problema didático
de inequações / Renato Mendes Mineiro. -- São Paulo:
[s.n.], 2019.
224p ; cm.

Orientador: Maria José Ferreira da Silva.
Tese (Doutorado em Educação:Matemática)-- Pontifícia
Universidade Católica de São Paulo, Programa de
Estudos Pós-Graduados em Educação:Matemática, 2019.

1. Desigualdades. 2. Inequações. 3. Percurso de
Estudo e Pesquisa. 4. Teoria Antropológica do
Didático. I. Silva, Maria José Ferreira da. II.
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo,
Programa de Estudos Pós-Graduados em
Educação:Matemática. III. Título.

CDD

Renato Mendes Mineiro

ESTUDO DAS TRÊS DIMENSÕES DO PROBLEMA DIDÁTICO DE INEQUAÇÕES

Tese apresentada à Banca Examinadora da
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo,
como exigência parcial para obtenção do título
de DOUTOR EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA.

Aprovado em: 02/12/2019.

BANCA EXAMINADORA

Dra. Maria José Ferreira da Silva (Orientadora) – PUC-SP

Dra. Rosa Cecília Gaita Iparraguirre – PUCP

Dra. Talita Carvalho Silva de Almeida – UFPA

Dr. Fumikazu Saito – PUC-SP

Dr. Gabriel Loureiro de Lima – PUC-SP

Agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES pela bolsa cedida – Modelo Taxa - Código de Financiamento 001 - que foi de extrema importância para a realização desta pesquisa.

Esta tese se adere ao projeto internacional *Processos de Ensino e Aprendizagem de Matemática em ambientes tecnológicos*, aprovado pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo – FAPESP – 2013/23228-7 e desenvolvido concomitantemente pelos grupos de pesquisa PEA-MAT da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – Brasil e DIMAT da Pontificia Universidad Católica del Perú

AGRADECIMENTOS

Não se faz um doutorado sozinho. Essa asserção, que pode parecer óbvia em um primeiro momento, se revelou aos poucos para mim.

Ao ingressar no Programa, munido de vontade e de um projeto de pesquisa, pensei que fosse suficiente persistir com determinação e foco no projeto, sem imaginar que o caminho fosse apresentar tantas bifurcações, que a ideia inicial se transformaria em outra, quase nada parecida com a original e que, além de vontade e foco, eu precisaria de orientação, de atenção, de compreensão e de apoio.

Gostaria de agradecer a cada uma das pessoas que de algum modo contribuiu para que eu superasse as dificuldades que se apresentaram nesse caminho, e de forma muito particular e carinhosa, àquelas que cito abaixo.

À Profa. Dra. Maria José Ferreira da Silva, minha orientadora, pela constante dedicação e pela paciência, que soube tão bem aconselhar-me nos momentos mais difíceis da jornada.

Às professoras Profa. Dra. Talita Carvalho Silva de Almeida e Profa. Dra. Cecília Gaita Iparraguirre, e aos professores Prof. Dr. Fumikazu Saito e Prof. Dr. Gabriel Loureiro de Lima, pelas valiosas contribuições na sessão de Qualificação e pela generosidade em compartilhar suas opiniões e considerações.

Aos professores do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP, sempre compromissados e prontos a ajudar.

Aos colegas de estudo, companheiros de ideal, com os quais tive a chance de conversar e debater a respeito de diferentes aspectos da Educação Matemática. Tenho certeza de que vou sentir saudades desses momentos.

À Coordenação de Pessoal do Ensino Superior (CAPES) pelo auxílio financeiro, sem o qual não teria sido possível desenvolver esse trabalho de pesquisa.

Aos meus amigos, e de uma forma muito especial aos meus dois irmãozinhos do coração, Alexandre Gomes da Silva e Silvío Scalisse, pelo constante apoio e encorajamento, que tanto me valeram nos momentos em que eu mais precisava.

Aos amores da minha vida, Rosângela, Mauro e Mariana, que souberam mais uma vez compreender a ausência do esposo e do pai, e que me ensinam todos os dias a ser uma pessoa melhor. É para eles que eu dedico esse trabalho.

MINEIRO, R. M. **Estudo das três dimensões do problema didático de inequações**. 2019. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2019.

RESUMO

Incomodados ao observar falhas de compreensão em tarefas que envolvem a resolução de inequações e a ausência de significado que o tema parece trazer aos alunos, decidimos empreender essa pesquisa, a fim de entender de que modo distintos aspectos ligados às dimensões epistemológica, econômico-institucional e ecológica do problema didático relativo às inequações podem contribuir com o desenvolvimento de um modelo didático de referência como base para a proposição de percursos de estudo e pesquisa para o ensino de desigualdades e inequações na Educação Básica. A fim de alcançar esse objetivo, realizamos uma análise documental, fundamentada nos pressupostos da Teoria Antropológica do Didático (TAD). Apoiando-nos inicialmente no estudo da dimensão epistemológica, que se relaciona ao estudo da gênese e do desenvolvimento do saber matemático associado às inequações, concebemos um modelo epistemológico de referência (MER). Fundamentados por esse modelo, empreendemos um estudo da dimensão econômico-institucional, que se refere ao exame das praxeologias que podem se desenvolver para o estudo das inequações na Educação Básica, em busca das características do modelo epistemológico dominante (MED), ou seja, do modo como o saber associado às inequações é descrito e interpretado nos livros, manuais e diretrizes para a Educação Básica no Brasil e de como os reflexos dessa interpretação, cristalizados em um modelo didático dominante (MDD) se refletem no ensino. A análise desses estudos, desenvolvida por meio do confronto entre o MER e o MED, nos mostrou que a principal razão de ser das inequações na Educação Básica parece resumir-se na aprendizagem de técnicas de resolução, como um fim em si mesmo, sem considerar que na gênese desse saber se observam tarefas ligadas à comparação entre grandezas, à demonstração de propriedades de figuras geométricas, à demonstração de teoremas, à busca por valores aproximados de números irracionais e à determinação do campo de soluções viáveis em problemas de otimização. O estudo da dimensão ecológica, que se relaciona à identificação das condições e restrições que afetam o acesso dos alunos da Educação Básica às inequações nos mostrou que existem restrições em diferentes níveis hierárquicos de codeterminação didática, alguns dos quais modificáveis a partir da posição do professor, como os que se refletem nas suas escolhas didáticas, e outros em níveis superiores, inacessíveis ao professor, mas que podem ser modificados por meio de ações governamentais, como os relacionados às diretrizes curriculares e à formação de professores para o ensino de matemática. Por fim, ao considerar as contribuições advindas dos estudos que realizamos, propusemos um modelo didático de referência, que serviu de base à elaboração de percursos de estudo e pesquisa para o ensino de desigualdades e inequações.

Palavras chave: Desigualdades, Inequações, Percurso de Estudo e Pesquisa, Teoria Antropológica do Didático.

ABSTRACT

Disturbed by observing the misunderstandings in tasks involving the resolution of inequalities and the lack of meaning that the theme seems to bring to the students, we decided to undertake this research in order to understand how different aspects linked to the epistemological, the economic-institutional and the ecological dimensions of the didactic problem related to the inequalities can contribute to the development of a didactic reference model as a basis for proposing study and research paths for teaching inequalities in basic education. In order to achieve this goal, we performed a documentary analysis, based on the assumptions of the Anthropological Theory of the Didactic (ATD). Based initially on the study of the epistemological dimension, which is related to the study of the genesis and development of mathematical knowledge associated with inequalities, we conceived an epistemological reference model (MER). Based on this model, we undertake a study of the economic-institutional dimension, which refers to the examination of praxeologies that can be developed for the study of inequalities in basic education, in search of the characteristics of the dominant epistemological model (MED), that is, the how knowledge associated with inequalities is described and interpreted in books, manuals and guidelines for basic education in Brazil and how the reflexes of this interpretation, crystallized in a dominant didactic model (MDD) are reflected in teaching. The analysis of these studies, developed through the confrontation between MER and MED, showed us that the main reason to the existence of the inequalities in basic education seems to be summed up in learning resolution techniques as an end in itself, without considering that in the genesis of this knowledge are observed tasks related to the comparison between quantities, the demonstration of properties of geometric figures, the demonstration of theorems, the search for approximate values of irrational numbers and the determination of the field of viable solutions in optimization problems. The study of the ecological dimension, which is related to the identification of the conditions and restrictions that affect the access of basic education students to inequalities showed us that there are restrictions in different hierarchical levels of didactic codetermination, some of which can be modified from the teacher's position, such as those reflected in their didactic choices, and others at higher levels, inaccessible to the teacher, but which can be modified through governmental actions, such as those related to curriculum guidelines and teachers formation for mathematics teaching. Finally, considering the contributions from our studies, we proposed a didactic reference model, which was the basis for the elaboration of study and research paths for the teaching of inequalities.

Key words: Inequalities, Study and Research Path, Anthropological Theory of the Didactic.

RESUMEN

Incomodados al observar errores de comprensión en las tareas que implican la resolución de inecuaciones y la ausencia de significado que el tema parece traer a los alumnos, decidimos emprender esta investigación, con el fin de entender de qué modo distintos aspectos conectados a las dimensiones epistemológica, económico-institucional y ecológica del problema didáctico relativo a las inecuaciones pueden contribuir con el desenvolvimiento de un modelo didáctico de referencia como base para la propuesta de recorridos de estudio e investigación para la enseñanza de inecuaciones en la Educación Básica. Para lograr este objetivo, realizamos un análisis documental, basado en los supuestos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD). Apoyándonos inicialmente en el estudio de la dimensión epistemológica, que se relaciona con el estudio de génesis y del desarrollo del saber matemático asociado a las inecuaciones, concebimos un modelo epistemológico de referencia (MER). Fundamentados en este modelo, emprendemos un estudio de la dimensión económico-institucional, que se refiere al examen de las praxeologías que pueden desenvolverse para el estudio de las inecuaciones en la Educación Básica, en busca de las características del modelo epistemológico dominante (MED), o sea, del modo cómo el saber asociado a las inecuaciones es descrito e interpretado en los libros, manuales y directrices para la Educación Básica en Brasil y de cómo los reflejos de esta interpretación, cristalizados en un modelo didáctico dominante (MDD) se reflejan en la enseñanza. El análisis de estos estudios, desarrollado por medio de la confrontación entre el MER y el MED, nos mostró que la principal razón de ser de las inecuaciones en la Educación Básica parece resumirse en el aprendizaje de técnicas de resolución, como un fin en sí mismo, sin considerar que en la génesis de este saber se observan tareas conectadas a la comparación entre grandezas, a la demostración de valores aproximados de números irracionales y a la determinación del campo de soluciones viables en problemas de optimización. El estudio de la dimensión ecológica, que se relaciona con la identificación de las condiciones y restricciones que afectan el acceso de los alumnos de la Educación Básica a las inecuaciones nos mostró que existen restricciones en los diferentes niveles jerárquicos de codeterminación didáctica, algunos de los cuales modificables a partir de la posición del profesor, como los que reflejan en sus elecciones didácticas, y otros en niveles superiores, inaccesibles al profesor, pero que pueden ser modificados por medio de acciones gubernamentales, como los relacionados a las directrices curriculares y a la formación de profesores para la enseñanza de matemáticas. Por último, al considerar las contribuciones derivadas de los estudios que realizamos, propusimos un modelo didáctico de referencia, que sirvió de base en la elaboración de recorridos de estudio e investigación para la enseñanza de inecuaciones.

Palabras clave: Desigualdades, Inecuaciones, Recorridos de Estudio e Investigación, Teoría Antropológica de lo Didáctico.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1. ESCALA DOS NÍVEIS DE CODETERMINAÇÃO DIDÁTICA.....	25
FIGURA 2. QUESTÃO DA PROVA BRASIL DE 2011	44
FIGURA 3. RELAÇÃO ENTRE ASPECTOS EPISTEMOLÓGICOS, ECONÔMICO-INSTITUCIONAIS E ECOLÓGICOS	53
FIGURA 4. COMPONENTES DO MODELO EPISTEMOLÓGICO M_1	59
FIGURA 5. AUXÍLIO À DEMONSTRAÇÃO DA PROPOSIÇÃO 29 - LIVRO I	61
FIGURA 6. AUXÍLIO À DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DA DESIGUALDADE TRIANGULAR.....	63
FIGURA 7. AUXÍLIO À DEMONSTRAÇÃO DA DESIGUALDADE DAS MÉDIAS	64
FIGURA 8. AUXÍLIO À DEMONSTRAÇÃO DA CLASSIFICAÇÃO DAS SECÇÕES CÔNICAS.....	66
FIGURA 9. AUXÍLIO À DEMONSTRAÇÃO DO PROBLEMA DE HERON	68
FIGURA 10. AUXÍLIO À DEMONSTRAÇÃO DO PROBLEMA ISOPERIMÉTRICO	70
FIGURA 11. COMPONENTES DO MODELO EPISTEMOLÓGICO M_2	72
FIGURA 12. AUXÍLIO À DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DE TALES, SUPONDO $BC < BG$	75
FIGURA 13. COMPONENTES DO MODELO EPISTEMOLÓGICO M_3	81
FIGURA 14. UMA DEMONSTRAÇÃO DE PROPORCIONALIDADE CONTÍNUA.....	84
FIGURA 15. SÍMBOLOS PARA REPRESENTAÇÃO DE DESIGUALDADES SUGERIDOS POR HARRIOT	85
FIGURA 16. DEMONSTRAÇÃO DAS DESIGUALDADES ENTRE AS MÉDIAS, POR HARRIOT (1631).....	86
FIGURA 17. MULTIPLICAÇÃO DE TERMOS EM HARRIOT (1631)	86
FIGURA 18. INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DA DESIGUALDADE DE CAUCHY.....	94
FIGURA 19. COMPONENTES DO MODELO EPISTEMOLÓGICO M_4	98
FIGURA 20. UMA REPRESENTAÇÃO DA ÁREA DE SOLUÇÕES VIÁVEIS	110
FIGURA 21. COMPONENTES DO MODELO EPISTEMOLÓGICO M_5	114
FIGURA 22. INTERSECÇÕES ENTRE COMPONENTES DOS MODELOS M_1 , M_2 E M_4	117
FIGURA 23. INTERSECÇÕES ENTRE COMPONENTES DOS MODELOS M_3 E M_5	118
FIGURA 24. DISTINÇÕES ENTRE RAZÕES DE MAIOR E DE MENOR DESIGUALDADE	123
FIGURA 25. UM PROBLEMA PARA A REGRA DA COMPANHIA	124
FIGURA 26. TEOREMA DA DESIGUALDADE TRIANGULAR POR LACROIX.....	125
FIGURA 27. AUXÍLIO À DEMONSTRAÇÃO DE LACROIX (1808)	126
FIGURA 28. DEMONSTRAÇÃO DA DESIGUALDADE ENTRE RETAS OBLÍQUAS E PERPENDICULARES	128
FIGURA 29. EXEMPLO DE DEMONSTRAÇÃO EM THIRÉ (1947)	130
FIGURA 30. DESIGUALDADE ENTRE AS MÉDIAS EM THIRÉ (1947).....	131
FIGURA 31. EXEMPLO DE RESOLUÇÃO DE UM SISTEMA DE INEQUAÇÕES	132
FIGURA 32. DEMONSTRAÇÃO DE OPERAÇÕES COM INEQUAÇÕES.....	134
FIGURA 33. DEMONSTRAÇÃO DA PROPRIEDADE DA ADIÇÃO DE DESIGUALDADES	135
FIGURA 34. RESOLUÇÃO DE INEQUAÇÕES GENÉRICAS DO 2º GRAU.....	136
FIGURA 35. UM ALGORITMO PARA INEQUAÇÕES DO 2º GRAU	137
FIGURA 36. EXERCÍCIO RESOLVIDO: INEQUAÇÃO DO 2º GRAU	138

FIGURA 37. PROPRIEDADES DAS DESIGUALDADES	141
FIGURA 38. RESOLUÇÃO DE INEQUAÇÕES	142
FIGURA 39. APROXIMAÇÃO DA RAIZ QUADRADA DE DOIS	144
FIGURA 40. DESIGUALDADES NA RETA REAL	145
FIGURA 41. INTERVALOS NUMÉRICOS E OPERAÇÕES COM CONJUNTOS EM IEZZI ET AL (2014).....	146
FIGURA 42. INTERVALOS NUMÉRICOS E OPERAÇÕES COM CONJUNTOS EM DANTE (2011)	147
FIGURA 43. INEQUAÇÕES-PRODUTO E INEQUAÇÕES-QUOCIENTE EM DANTE (2014)	148
FIGURA 44. INEQUAÇÕES-PRODUTO E INEQUAÇÕES-QUOCIENTE EM IEZZI ET AL (2014)	149
FIGURA 45. ESTUDO DAS INEQUAÇÕES QUADRÁTICAS EM IEZZI ET AL (2014).....	150
FIGURA 46. UM MODELO PARA A PLANIFICAÇÃO DA SUPERFÍCIE DE UM CUBO	172
FIGURA 47. POSSÍVEIS MODELOS PARA PLANIFICAÇÃO DA SUPERFÍCIE DE UM CUBO	172
FIGURA 48. POSSÍVEIS COMBINAÇÕES ENTRE TIPOS DE PLANIFICAÇÃO E DIMENSÕES DA CARTOLINA.....	173
FIGURA 49. SEMICIRCUNFERÊNCIA DE RAIO $AO = OB$	176
FIGURA 50. SEMICIRCUNFERÊNCIA DE RAIO OD	177
FIGURA 51. UMA REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DE QUANTIDADES MÁXIMAS DE DOCES E SALGADOS	191
FIGURA 52. REPRESENTAÇÃO DA ÁREA DE SOLUÇÕES VIÁVEIS (QUANTIDADE MÁXIMA)	192
FIGURA 53. REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DA ÁREA DE SOLUÇÕES VIÁVEIS	193
FIGURA 54. UMA REPRESENTAÇÃO DOS PONTOS QUE SATISFAZEM A EQUAÇÃO DA RECEITA	195
FIGURA 55. CURVA REPRESENTATIVA DE $f(x)$ E DE $g(x)$.....	197
FIGURA 56. CURVA REPRESENTATIVA DE $-f(x)$	197
FIGURA 57. PONTOS NOTÁVEIS DE $f(x)$ E DE $g(x)$	198
FIGURA 58. PONTOS PARA O ESTUDO DO SINAL DE $h(x)$	199
FIGURA 59. CURVA REPRESENTATIVA DE $h(x)$.....	199

LISTA DE QUADROS

QUADRO 1: DISSERTAÇÕES E TESES CONTENDO PALAVRAS CHAVE “INEQUAÇÃO” OU “INEQUAÇÕES”	31
QUADRO 2. CLASSIFICAÇÃO DAS DISSERTAÇÕES E TESES QUANDO AO ÂMBITO (ENSINO OU APRENDIZAGEM)	33
QUADRO 3. CLASSIFICAÇÃO DAS DISSERTAÇÕES E TESES QUANDO AO MÉTODO DE COLETA DE DADOS.....	33
QUADRO 4. CLASSIFICAÇÃO DAS DISSERTAÇÕES E TESES QUANDO AOS OBJETIVOS	35
QUADRO 5. APROXIMAÇÕES DE $\sqrt{5}$	79
QUADRO 6. UM EXEMPLO DE <i>TABLEAU</i> DO ALGORITMO SIMPLEX	112
QUADRO 7. MODELOS EPISTEMOLÓGICOS ASSOCIADOS AOS CONCEITOS DE DESIGUALDADE E INEQUAÇÃO	116
QUADRO 8. RESUMO DAS CARACTERÍSTICAS DO MED EM ÉPOCAS DISTINTAS.....	151
QUADRO 9. O ESTUDO DE INEQUAÇÕES NAS PROPOSTAS CURRICULARES ESTADUAIS	159
QUADRO 10. UM MAPA DE QUESTÕES PARA A CONSTRUÇÃO DA PLANIFICAÇÃO DA SUPERFÍCIE DE UM CUBO	174
QUADRO 11. UM MAPA DE QUESTÕES PARA A DEMONSTRAÇÃO DE DESIGUALDADE ENTRE DOIS SEGMENTOS	178
QUADRO 12. UM MAPA DE QUESTÕES PARA A DEMONSTRAÇÃO DA DESIGUALDADE ENTRE DOIS QUADRADOS	180
QUADRO 13. UM MAPA DE QUESTÕES PARA DEMONSTRAR A DESIGUALDADE ENTRE UM NÚMERO E SEU QUADRADO	182
QUADRO 14. UM MAPA DE QUESTÕES PARA A DEMONSTRAÇÃO DA DESIGUALDADE DO QUOCIENTE ENTRE DOIS REAIS POSITIVOS ..	184
QUADRO 15. UM MAPA DE QUESTÕES PARA A BUSCA DE UM RETÂNGULO POSSÍVEL	187
QUADRO 16. UMA REPRESENTAÇÃO DE QUANTIDADES MÁXIMAS DE DOCES E SALGADOS.....	190
QUADRO 17. CÁLCULO DA RECEITA PARA DIFERENTES QUANTIDADES DE DOCES E SALGADOS	194
QUADRO 18. UM MAPA DE QUESTÕES PARA A DETERMINAÇÃO DA RECEITA MÁXIMA	196
QUADRO 19. UM MAPA DE QUESTÕES PARA O ESTUDO DO SINAL DE UMA FUNÇÃO	200
QUADRO 20. UM MAPA DE QUESTÕES PARA O DESAFIO DO ARMAZÉM	204
QUADRO 21. UM MAPA DE QUESTÕES PARA A DETERMINAÇÃO DO PREÇO DOS VINHOS.....	207

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	15
2 PROBLEMÁTICA	19
2.1 REFERENCIAL TEÓRICO	19
2.2 REVISÃO DE LITERATURA	31
2.3 JUSTIFICATIVA	42
2.4 DELIMITAÇÃO DO PROBLEMA	49
2.5 METODOLOGIA E PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS.....	54
3 ESTUDO EPISTEMOLÓGICO DAS INEQUAÇÕES	57
3.1 UM ESTUDO A RESPEITO DA GÊNESE E DESENVOLVIMENTO DAS INEQUAÇÕES	57
3.2 O MODELO EPISTEMOLÓGICO DE REFERÊNCIA.....	116
4 ESTUDO ECONÔMICO-INSTITUCIONAL DAS INEQUAÇÕES	121
5 ESTUDO ECOLÓGICO DAS INEQUAÇÕES	155
6 UM MODELO DIDÁTICO DE REFERÊNCIA PARA O ENSINO DE INEQUAÇÕES	167
6.1 CARACTERÍSTICAS DE UM MDR PARA O ENSINO DE INEQUAÇÕES	167
6.2 PERCURSOS DE ESTUDO E PESQUISA PARA O ENSINO DE INEQUAÇÕES	169
6.2.1 UM PERCURSO PARA O 7º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL	170
6.2.2 UM PERCURSO PARA O 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL	175
6.2.3 UM PERCURSO PARA O 1º ANO DO ENSINO MÉDIO	187
6.2.4 UM PERCURSO PARA O 2º ANO DO ENSINO MÉDIO	200
CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	209
REFERÊNCIAS.....	217

1 INTRODUÇÃO

Nosso primeiro contato com as inequações nos remete aos nossos anos finais do Ensino Fundamental, cursados em uma escola pública da periferia da cidade de São Paulo.

Não aventávamos ainda, em tão tenra idade, a possibilidade de que viríamos a desenvolver algum tipo de pesquisa em Educação Matemática, como fazemos agora, passados mais de quarenta anos, mas conseguíamos identificar, ainda que de forma ingênua, dois aspectos antagônicos dos temas e conteúdos que eram abordados nas disciplinas: de um lado as coisas que traziam significado e que nos ajudavam a compreender o mundo e de outro aquelas que pareciam ser exclusivas da escola, distanciadas da realidade, mas que ainda assim, a despeito de sua falta de sentido, precisavam ser estudadas e aprendidas, afinal de contas, seriam retomadas nas avaliações bimestrais.

Nesse contexto, boa parte da matemática, e de forma particular a parte que correspondia ao estudo das inequações, parecia inserir-se no segundo grupo, das coisas que não faziam sentido. Essa impressão foi reforçada logo nas primeiras tarefas envolvendo a resolução de inequações, em que, de acordo com as orientações do professor, “bastava resolver como se fossem equações”, retornando o sinal de desigualdade ao término da resolução.

Sem encontrar razão no que fazíamos, simplesmente fazíamos, mecanicamente, sem compreender na época os efeitos do contrato didático, elencados depois por Brousseau (1997), que atribui ao professor (e não aos alunos) a responsabilidade pela verificação da solução encontrada. A nós, bastava seguir o algoritmo e pronto. Se o resultado levava ou não à incoerência isso não era algo com o que tivéssemos que nos preocupar.

Tempos depois, de uma forma não mais ingênua ao tomar interesse pela pesquisa, fomos em busca de trabalhos que tivessem se debruçado sobre o estudo de inequações e pudemos constatar que tanto os processos associados ao ensino como os que se relacionam à aprendizagem desse tema, representam áreas problemáticas para a Educação Matemática, independentemente do nível escolar e da região.

Verificamos, principalmente, que as pesquisas se concentram em aspectos relacionados às dificuldades que os alunos apresentam ao resolverem inequações, à análise dos seus erros e à elaboração de estratégias para o ensino de inequações, mas parecem não considerar o saber matemático associado às inequações como problemático. Questionam-se os métodos de ensino, questionam-se processos psicológicos associados à aquisição do saber, mas não se questiona o saber em si.

Nesses termos, passamos a nos perguntar de que forma aspectos associados às questões que levaram à gênese e ao desenvolvimento desse saber e aos agentes que interferem em sua transposição para as salas de aula, concorrem no sentido de favorecer, permitir ou dificultar que vivam e se desenvolvam na Educação Básica.

Em consonância com essa inquietação, encontramos apoio no referencial teórico proporcionado pela Teoria Antropológica do Didático (TAD), que considera que toda atividade humana (e de forma particular aquelas que se relacionam à criação, à comunicação e a aquisição de conhecimentos) é composta tanto por ações práticas quanto por justificativas racionais capazes de possibilitar a compreensão dessas práticas no seio de um grupo social, chamado de instituição.

Problemas didáticos de pesquisa eventualmente se desenvolvem a partir de uma formulação inicial ligada às preocupações da prática docente, como sobre “o que ensinar sobre inequações”, “como ensinar inequações” e “porque ensinar inequações”, entretanto, é necessário que se juntem a essa formulação inicial outras dimensões do problema, tais como a dimensão epistemológica (relacionada às questões que demandaram a criação e o desenvolvimento dos saberes relacionados às inequações), a dimensão econômico-institucional (relacionada às organizações matemáticas que se desenvolvem para o estudo de inequações no âmbito de uma instituição) e a dimensão ecológica (relacionada às condições e restrições que afetam o estudo de inequações, de acordo com a instituição considerada).

Ao considerar essa necessidade, delineamos nossa questão de pesquisa a fim de verificar que contribuições podem advir dos estudos epistemológico, econômico-institucional e ecológico para o desenvolvimento de um modelo didático de referência (MDR) que sustente a criação e o desenvolvimento de Percursos de Estudo e Pesquisa (PEP) para o ensino de inequações na Educação Básica.

A fim de alcançar esse objetivo, estruturamos nosso trabalho em seis capítulos, além de um outro, dedicado às considerações finais, sendo o primeiro deles o que corresponde à essa introdução.

No segundo capítulo apresentamos a problemática de nossa pesquisa, que compreende o referencial teórico sobre o qual nos apoiamos, a revisão de literatura, nossas justificativas tanto pessoais como científicas, fundamentadas na revisão bibliográfica, a delimitação do problema, a metodologia e os procedimentos metodológicos que nos permitiram alcançar o objetivo desse trabalho.

No terceiro capítulo apresentamos o estudo epistemológico das desigualdades e das inequações, em que procuramos identificar e compreender quais foram as questões que levaram à gênese e ao desenvolvimento dos saberes associados às inequações, ou em outros termos, qual a razão de ser das inequações em épocas historicamente distintas. Apoiados nos achados e inferências possibilitadas por esse estudo, desenvolvemos um modelo epistemológico de referência (MER).

No quarto capítulo apresentamos um estudo econômico-institucional, fundamentado pela leitura e análise de propostas curriculares, manuais e livros didáticos, atuais e antigos, em que buscamos, a partir de sua confrontação com o MER que desenvolvemos, identificar algumas das características que compõem o modelo epistemológico dominante (MED) e de seu subjacente modelo didático dominante (MDD), que orienta as organizações matemáticas que se desenvolvem para o estudo das inequações na Educação Básica.

No quinto capítulo apresentamos o resultado de nosso estudo ecológico, em que procuramos verificar as condições e restrições, em diferentes níveis hierárquicos de uma escala de codeterminação didática proposta por Chevalard (2001), a fim de verificar se tais condições e restrições podem ser mudadas a partir da posição do professor, ou, nos casos em que isso não seja possível, buscar meios para aceder aos níveis hierarquicamente mais elevados a fim de propor modificações.

No sexto capítulo, fundamentados pelos estudos realizados, apresentamos nosso MDR, que serviu como base para a proposição de PEPs voltados ao ensino de inequações na Educação Básica.

Dedicamos o último capítulo desse trabalho às considerações finais, além de eventuais possibilidades para futuras investigações que a nosso ver podem contribuir com a Educação e de forma particular, com a Educação Matemática.

2 PROBLEMÁTICA

Nesse capítulo apresentaremos o referencial teórico em que nos apoiamos, o resultado do levantamento que fizemos de pesquisas relacionadas às inequações realizadas entre os anos de 1987 e 2017, nossas justificativas pessoais e científicas para a realização desse trabalho, a delimitação do problema, nossa questão de pesquisa, os objetivos da pesquisa e a metodologia utilizada.

2.1 REFERENCIAL TEÓRICO

Na década de 1980, apoiado nos estudos de Piaget sobre a epistemologia genética, Brousseau (1997) desenvolveu a Teoria das Situações Didáticas (TSD), cuja principal hipótese é a de que se aprende por adaptação a um meio (*milieu*) que produz dificuldades, contradições e desequilíbrios, mas que, no entanto, é organizado por um professor (ou por outra pessoa ou conjunto de pessoas que tenham como objetivo desenvolver a aprendizagem) e é munido de intenções didáticas.

Talvez uma das maiores mudanças de perspectiva trazida pela TSD esteja relacionada ao fato de tomar como objeto primário de pesquisa, não o aluno, ou o professor, mas o saber matemático, que até então era visto como não problemático.

Nesse mesmo período, apoiando-se nos pressupostos teóricos da TSD, Chevallard (1982) propôs uma série de estudos relacionados aos processos de transposição didática, em que o foco de investigação se volta para as questões relativas ao desenvolvimento dos conhecimentos matemáticos e em sua transposição para as salas de aula, e não nas restrições e limitações dos sujeitos envolvidos na sua aprendizagem ou no seu ensino. O desenvolvimento dessa abordagem resultou em um programa de pesquisa em Educação Matemática, que tem evoluído desde então, conhecido como Teoria Antropológica do Didático (TAD).

De acordo com a TAD, todas as atividades humanas, tais como andar, falar, ou dirigir um automóvel, e mais notadamente aquelas relacionadas à produção, difusão ou aquisição de conhecimento, que se compõem tanto de práticas colocadas em ação no desenvolvimento de uma tarefa, quanto de justificativas lógicas que tornem compreensíveis essas práticas, desenvolvem-se no seio de um grupo social e estão

sujeitas, além das inerentes dificuldades ligadas à própria execução da atividade, às restrições impostas por esse grupo, que recebe o nome de instituição.

Chevallard, Bosch e Gascón (1997) chamam de “obra” (*oeuvre* em francês, *obra* em espanhol), os frutos de ações e de decisões humanas (ou da ausência dessas) diante das necessidades impostas, em um determinado tempo, a uma determinada sociedade, sob certas restrições e condições. Dessa forma, “obra” pode ser tanto uma “obra de arte” desenvolvida por um artesão em seu atelier, quanto um “saber matemático” desenvolvido por matemáticos em instituições produtoras de saber.

No sentido proposto por Chevallard, Bosch e Gascón (1997), podemos, a título de exemplo, considerar que uma escola é uma obra, que em uma dada época foi construída a partir da decisão de uma pessoa, ou de um grupo de pessoas, com o objetivo de atender às necessidades de ensino da população de um dado povoado. De forma análoga, também podemos dizer que uma fábrica é uma obra, que em algum momento foi criada a partir da decisão de um empresário, ou de alguns empresários, em produzir e vender algum bem necessário a alguém que precisasse desse bem. Uma árvore, ou um acidente geográfico, como uma montanha, são obras que existem, ou porque houve uma decisão humana de mantê-las, ou porque houve ausência de decisão no sentido de removê-las de onde se encontram.

Há que se notar, entretanto, que aqueles que em algum momento tomaram a decisão (ou deixaram de tomar uma decisão) no sentido de que se criasse uma obra, podem deixar de existir com o tempo. Esse fato, por si só, não faz com que as razões de ser de uma obra deixem também de existir, mas não é raro ocorrer que, assim como as pessoas, os motivos que levaram pessoas a decidir pela criação de tal obra, também morram ou desapareçam.

Apenas para reforçar a analogia que estamos propondo, imaginemos que no povoado em que foi erguida a escola que citamos como exemplo em um dos parágrafos anteriores, não existam mais pessoas que precisem aprender, ou melhor ainda, imaginemos que já não exista o dito povoado. Supondo que isso ocorra, um eventual turista que passe pela região, curioso sobre construções antigas e com algum apreço à arquitetura, talvez tenha interesse em visitar a escola, que agora não é mais uma escola, mas um monumento arquitetônico, que merece ser visitado mais por razões estéticas ou históricas, do que pela sua real função como “escola”. Em

outras palavras, a obra “escola”, que agora é um monumento, já não representa resposta às necessidades que desencadearam sua criação.

Se trouxermos essa reflexão para o âmbito das questões ligadas à origem e ao desenvolvimento dos saberes, veremos que algo bastante parecido acontece. Cada um dos saberes matemáticos desenvolveu-se a partir da vontade humana, diante de questões que para serem respondidas demandavam esses saberes. Desse ponto de vista, podemos entendê-los como obras, frutos de decisões de algumas pessoas, que surgiram como respostas às necessidades que se apresentavam, em um determinado tempo, em uma determinada sociedade. Entretanto, o que ocorre com um ou outro saber é que, às vezes, as necessidades deixam de existir, e com isso deixam também de existir as razões de ser desse saber, que de forma análoga ao que ocorre com um ser vivo que, ao não encontrar condições favoráveis à sua existência, desaparece, morre, extingue-se.

Isso não significa que dito saber deixe de fazer parte do currículo escolar da matemática. Eventualmente esse saber é revisitado, não porque responde a questões ainda não resolvidas, mas devido a um tipo de abordagem que Chevallard (2013) chama de “monumentalista”, já que os apresenta como “monumentos” a serem apreciados pelos alunos. São respostas para questões que não existem mais ou que não precisam mais ser respondidas, mas que, ainda assim, continuam fazendo parte do *corpus* a ser estudado.

Algumas razões de ser “envelhecem”, ou extinguem-se com o tempo, e se isso não é percebido, as pessoas continuam fazendo as coisas que faziam quando essas razões ainda eram “vivas”, por inércia, sem que realmente haja sentido em prosseguir dessa forma, sem questionar e sem considerar eventuais mudanças no modo de fazer tais coisas. Para Bosch e Gascón (2014)

[...] a análise das praxeologias é um importante “gesto de pesquisa” em didática a fim de encontrar suas possíveis razões de ser (históricas ou contemporâneas) e estudar as condições que podem fazê-las aparecerem, dando-lhes sentido em diferentes configurações institucionais (Ibid, p.70, tradução nossa).

Nesse sentido, é fundamental que se questione, por exemplo, os motivos que demandam o estudo de inequações na Educação Básica, a fim de verificar se são visitadas como monumentos, ou se existem outras razões para sua permanência nesse nível de ensino. Há que se notar que não se busca “a razão” de ser, mas “uma

das razões” de ser. De acordo com Lucas (2015) “a razão de ser não tem por que ser única, posto que, entre outros motivos, diferentes razões de ser de um mesmo campo podem situar-se em diferentes áreas ou setores da matemática escolar” (Ibid, p.2, tradução nossa).

De acordo com os pressupostos teóricos da TAD, não é suficiente observar as interações que se dão entre alunos, professores e o saber. A pura observação e análise de situações que ocorrem em sala de aula são insuficientes para a compreensão das condições e restrições que se desenvolvem nos processos de ensino e de aprendizagem. Uma unidade mínima de análise deve compreender, além desses processos, todas as instituições que de uma forma ou de outra influenciam a transposição do saber desenvolvido pelos matemáticos em saber a ser ensinado e em saber efetivamente aprendido pelos alunos, passando pela *noosfera*¹ e pela instituição escolar, até que chegue à sala de aula. Bosch e Gascón (2014) apontam que, de acordo com a TAD, não é possível interpretar a matemática escolar sem levar em conta os fenômenos associados aos caminhos pelos quais esse saber se desenvolve e é introduzido nas instituições de ensino.

Mais ainda, é essencial que se questione o saber a ser ensinado, aceito implicitamente pelas instituições de ensino como se não fosse problemático, ou como se fosse “natural”, quando na verdade, não há nada de natural no rol dos conteúdos que compõem um tema da matemática. Teremos a oportunidade de verificar, no capítulo que dedicamos ao estudo econômico-institucional das inequações, que aquilo que se propõe que se estude sob o rótulo de inequação nas propostas curriculares muda de acordo com a época e de acordo com o posicionamento político-pedagógico daqueles que compõem a *noosfera*, contrariando a noção de “naturalidade” amplamente aceita.

Uma primeira formulação de um problema didático de pesquisa pode surgir a partir da consideração do que Gascón (1999) chama de “problema docente”, que se expressa, de forma resumida, pelas inquietações do professor quanto à “o que ensinar”, “como ensinar” e “porque ensinar” um dado conteúdo matemático.

¹ Chevallard (1982) chama, em forma de paródia, de *noosfera* à esfera onde se reúnem os representantes governamentais do sistema de educação, pesquisadores, técnicos, especialistas e professores, entre outros, que definem os saberes que devem ser ensinados e o modo pelo qual esses saberes chegam às salas de aula.

Entretanto, esse problema não pode, por si só, ser considerado como uma dimensão do problema didático devido à sua incompletude. Embora o problema docente esteja presente na formulação inicial de boa parte dos problemas didáticos, nem todo problema didático de investigação tem sua origem ligada a um problema docente.

Nesses termos, conforme defende Gascón (2011), é necessário que se adicione a essa formulação inicial ao menos a dimensão epistemológica para que seja considerado um problema de investigação didática. Isso implica debruçar-se sobre as questões que demandaram a criação e o desenvolvimento de um saber matemático, implica investigar qual é, ou quais são, as razões de ser intrínsecas à gênese desse saber e implica por fim, compreender em distintas épocas históricas, a descrição e a interpretação que se faz desse um saber.

Embora não haja um sistema de referência privilegiado isso não torna menos necessário que o pesquisador se apoie em um referencial relativo, adequado ao problema de investigação para desenvolver suas análises. Na TAD esse referencial recebe o nome de Modelo Epistemológico de Referência (MER), sempre provisório (que a nosso ver também pode ser definido como “sempre em evolução”), sujeito a revisões e modificações e que deve ser explicitado e tomado como parâmetro ao estudar e analisar aspectos do saber matemático em questão, antes que esse saber seja transformado pelos processos de transposição didática em saber a ser ensinado.

Além da dimensão epistemológica, que ocupa uma posição central entre as dimensões, ao condicionar e interferir na análise de outros aspectos do problema didático de investigação, o pesquisador pode considerar outras dimensões, como por exemplo a dimensão econômico-institucional e a dimensão ecológica.

A fim de apresentar a dimensão econômico-institucional, julgamos conveniente em um primeiro momento verificar o significado que comumente se atribui ao termo “economia” e de que forma isso se reflete no contexto da TAD.

Apesar da palavra “economia” nos remeter, na maioria das vezes, à ideia de algo de natureza monetária, ao recorrermos à etimologia, é possível observar que o termo tem uma significação ampla e distinta do sentido que lhe é atribuído pelo senso comum.

A origem da palavra “economia”, está associada à junção das palavras gregas *οἶκος* (*oikos*, que significa casa) e *νόμος* (*nómos*, que significa a norma, a lei, a regra),

se referindo, nesse contexto, às “normas da casa”, ou as leis que regulam a “administração de uma casa” (HOUAISS, 2001). Nesse sentido, a dimensão econômico-institucional inclui as questões ligadas às contingências institucionais, às regras (*nómos*) que afetam o desenvolvimento de atividades ligadas ao estudo da matemática nessas instituições (*oikos*).

De um ponto de vista antropológico, considerar a dimensão econômico-institucional significa investigar como são as organizações matemáticas e as organizações didáticas associadas ao estudo dessas últimas, de acordo com as contingências institucionais. Implica, da mesma forma, despersonalizar a problemática didática, ao considerar que as relações pessoais dos indivíduos com o saber, embora importantes, são subordinadas e em grande parte determinadas pela relação que a instituição à qual pertencem tem com esse saber.

Nesses termos, a busca pelas razões oficiais que justificam o ensino de um dado conteúdo, em uma dada instituição, relaciona-se de forma intrínseca ao modo como esse saber é interpretado nessa instituição, ou seja, a um MED e a um associado MDD, cujos aspectos e características podem ser identificados pela análise de propostas curriculares, livros didáticos e manuais utilizados nessas instituições.

Além das dimensões epistemológica e econômico-institucional, já referidas, o pesquisador pode considerar a dimensão ecológica do problema didático, que abarca as discussões sobre os motivos pelos quais as organizações matemáticas e as organizações didáticas associadas são como são na contingência institucional e sobre as condições necessárias para que essas organizações sejam modificadas.

De acordo com Houaiss (2001), ecologia é a “ciência que estuda as relações dos seres vivos entre si ou com o meio orgânico ou inorgânico no qual vivem”. A TAD se apropriou dessa noção ao considerar os objetos que compõem um saber matemático como entes vivos, em um processo de gênese e desenvolvimento, sujeito tanto a condições que podem favorecer o seu desenvolvimento, como a restrições que podem dificultar, e em alguns casos até mesmo impedir, que um dado saber se mantenha vivo em um instituição considerada.

Algumas dessas condições e restrições, e de forma mais precisa aquelas que se apresentam no âmbito escolar, parecem ser bastante visíveis, quase evidentes, como os saberes prévios de alunos e professores, a qualidade do material didático

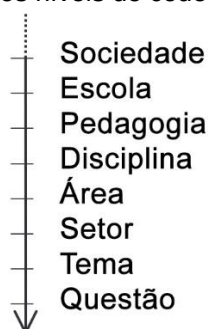
disponível na instituição, o recurso às tecnologias e o tempo designado ao estudo. Entretanto, parte dessas condições e restrições se originam em níveis hierarquicamente acima de onde são observadas, como por exemplo, a escolha e a organização dos temas a serem estudados em cada ano letivo (determinada por diretrizes curriculares governamentais) ou no direcionamento do orçamento previsto para a implementação de laboratórios de informática nas escolas (de competência dos órgãos oficiais).

A fim de possibilitar a investigação de condições e restrições que se encontram além daquelas imediatamente visíveis em sala de aula, Chevallard (2001) propõe uma escala de níveis de codeterminação didática, conforme se observa na Figura 1.

Toda questão que desencadeia um processo de estudo em uma instituição faz parte de um tema, que se insere em um setor, que se insere, por sua vez, em uma área, que pertence a uma disciplina. Se a questão que desencadeou o estudo é matemática, então estamos nos referindo à disciplina matemática e a cada um de seus níveis matemáticos subjacentes.

Os outros níveis, mais acima da disciplina na escala de níveis (sociedade, escola, pedagogia), são chamados na TAD de níveis genéricos ou pedagógicos (no sentido de não-matemáticos), mas que afetam de forma direta a matemática que se estuda e que se aprende na escola. Esse é o motivo pelo qual esses níveis, embora hierarquicamente superiores e distantes da realidade das salas de aula, devem ser tomados como objeto de estudo.

Figura 1. Escala dos níveis de codeterminação didática



Fonte: Chevallard (2001, p. 3, tradução nossa)

Nesse sentido, para que uma questão desencadeie um processo de estudo no âmbito escolar, é necessário percorrer um caminho que começa no topo da escala de codeterminação didática, e verificar se a questão é relevante para a sociedade, para

a escola, e assim consecutivamente. Em cada uma dessas etapas são impostas condições e restrições, que acabam por definir o que se pode e o que não se pode fazer para estudar a questão, ou seja, uma organização matemática em cada um dos níveis (se a questão é da matemática).

Se, por outro lado, a questão a ser respondida não é legitimada pela sociedade, não aparece em situações da matemática e tampouco pode ser relacionada com outras áreas do conhecimento, da matemática ou de fora dela, então se trata de uma questão morta, visto que lhe falta sentido, ou em outros termos, não tem uma razão de ser.

A investigação da forma como o estudo de inequações acontece na Educação Básica nos leva a desviar o olhar para o modo como estão organizadas as atividades que se desenvolvem nesse nível de estudo. De acordo com a abordagem antropológica proposta pela TAD, essa perspectiva é prevista e pode ser explicada a partir da noção de *praxeologia*, que à princípio caracteriza-se por ser “uma unidade básica por meio da qual se pode analisar a ação humana” (CHEVALLARD, 2006, p. 3, tradução nossa). Ao consultar as origens etimológicas do termo *praxeologia*, encontramos tanto a palavra *práxis*, do grego πράξις (ato, ação, prática) quanto a palavra *logos*, do grego λογος (razão, palavra). Sendo assim, podemos entender que uma praxeologia é composta de duas partes: uma associada à prática e outra associada à razão, ou ao discurso que justifica essa prática. Em outras palavras, o que a TAD nos diz é que todas as atividades humanas, ou pelo menos aquelas atividades que podem ser explicadas e que são inteligíveis em uma dada instituição, apoiam-se na noção de praxeologia.

Gascón (2011) aponta a necessidade de que se considerem as duas faces da atividade matemática: o processo de estudo, que compreende a produção, o ensino, a aprendizagem e a divulgação de um saber matemático (o aspecto didático) e o resultado dessas ações, construído ao longo desse processo, ou seja, o saber matemático em si (o aspecto matemático). Ao considerar essa dualidade por meio da noção de praxeologia, temos as praxeologias matemáticas, ou organizações matemáticas (OM), e as praxeologias ou organizações didáticas (OD), associadas às escolhas didáticas por meio das quais se desenvolve a atividade matemática.

Nesse sentido, por exemplo, encontrar o conjunto solução da inequação $5x - 25 \leq 3x - 3$ consiste em uma tarefa que pode ser realizada por alunos da Educação Básica. Para cumprir essa tarefa, eles devem encontrar um *jeito de fazer*, ou seja, uma técnica que lhes permita cumprir a tarefa, como por exemplo, transformar a inequação dada em outra, equivalente, $2x \leq 28$, ou $x \leq 14$.

O componente prático da praxeologia que modela a atividade de resolução de uma inequação, ou de qualquer outra atividade humana, é dessa forma, dividido em duas partes: uma relacionada ao tipo de tarefa a ser realizada e o outro à técnica, que é a ação que se coloca em jogo quando do cumprimento dessa dada tarefa.

Por outro lado, de acordo com a TAD, nas palavras de Chevallard (2006, p.23, tradução nossa), “nenhuma ação humana pode existir sem ser, pelo menos parcialmente, explicada, tornada inteligível, justificada. Independentemente do estilo de raciocínio, essa explicação ou justificativa deve ser desenvolvida”. Isso implica justificar a técnica utilizada, apoiando-se na noção de *tecnologia*, que no sentido etimológico do termo pode ser entendido como o *logos* (o discurso, a razão) que dá sentido à *techne*, do grego τέχνη (técnica, habilidade). Por exemplo, na inequação que usamos acima, a tecnologia (ou discurso tecnológico) que justifica a transformação da inequação original em outra equivalente é a propriedade da monotonia da adição e da multiplicação de números reais, ou seja, à possibilidade de somar o termo $-3x + 25$ em ambos os lados da inequação e de, em seguida, multiplicar ambos os lados da inequação por $\frac{1}{2}$, sem que se altere o sentido da desigualdade.

A tecnologia é legitimada por meio de um discurso, que na TAD chamamos de teoria, que tem como principais funções prover uma base teórica e apoiar o discurso tecnológico. A teoria se comporta em relação à tecnologia da mesma forma que esta última se comporta em relação à técnica, como se disséssemos que “a teoria é a tecnologia da tecnologia”. No exemplo que usamos, a teoria que legitima a tecnologia é aquela associada à álgebra, no que se refere às propriedades das operações internas ao conjunto dos números reais.

Sendo assim, o componente teórico da praxeologia, a exemplo do componente prático, também se divide em duas partes: uma relacionada ao discurso que justifica a técnica (a tecnologia) e outra ao discurso que justifica a tecnologia (a teoria).

Em busca de uma classificação que permita entender as limitações e o alcance das análises feitas a partir de uma dada praxeologia em uma dada instituição, Chevallard (1999) propõe que se faça a distinção de acordo com o âmbito dos tipos de tarefa, das tecnologias e teorias que as compõem. Quando uma praxeologia contém um único tipo de tarefa, ela é chamada de praxeologia *pontual*. Quando uma praxeologia contém um conjunto de praxeologias pontuais, com distintos tipos de tarefa e cujas técnicas são apoiadas por uma tecnologia comum, essa praxeologia é dita *local* e quando uma praxeologia é formada por um conjunto de praxeologias pontuais e locais em torno de uma teoria comum, ela é chamada de praxeologia *regional*.

O que se observa em algumas pesquisas, como as que foram realizadas por Fonseca (2004) e por Lucas (2015), é que praxeologias pontuais (as que consistem de um tipo único de tarefa) normalmente estão associadas à atividades matemáticas rígidas e isoladas, no sentido de que não se articulam nem com outras áreas do conhecimento, nem com outros saberes dentro da própria matemática. A nosso ver, no que se refere às inequações, tão importante quanto verificar que tipos de praxeologia estão presentes na Educação Básica, é verificar que outras, além das praxeologias pontuais, podem encontrar condições para que vivam e se desenvolvam nesse nível de ensino.

A TAD oferece um modelo didático composto de seis dimensões ou momentos didáticos para a análise das praxeologias. Esses momentos não aparecem necessariamente de acordo com uma ordem cronológica ou de forma linear, podendo apresentar-se com diferentes complexidades, não importando a ordem em que se manifestam, ou o tempo que tomam, mas as relações que são estabelecidas entre eles. Os momentos didáticos são divididos em:

- 1) o primeiro encontro com a questão que precisa ser respondida;
- 2) a exploração dos tipos de tarefa e a elaboração de uma técnica que dê conta de desenvolver essa tarefa;
- 3) o trabalho da técnica;
- 4) a busca por uma justificativa teórica;
- 5) a institucionalização;
- 6) a avaliação da tarefa desenvolvida.

Ao observar instituições de ensino atual, pesquisadores como Bosch e Gascón (2010) destacam, como uma das disfunções básicas da atividade matemática escolar, a falta de um dispositivo didático que possibilite o momento de trabalho da técnica, aliada a outras duas importantes disfunções, respectivamente denotadas pela incompletude das *praxeologias* (no sentido em que normalmente restringem-se a tipos únicos de tarefa, levadas a cabo por técnicas únicas) e pelas restrições escolares que impedem o desenvolvimento de alguns dos citados momentos didáticos.

Na análise da situação que se desenvolve a partir da necessidade de resolução de um problema, podemos encontrar um aluno (ou um grupo de alunos), que eventualmente é auxiliado por alguém (um professor, um colega, um grupo de estudo), em busca de uma resposta à questão proposta (encontrar a combinação que seja capaz de trazer a respostas mais apropriadas, levando em conta as restrições). Esses atores (alunos, professores e questão em jogo) compõem então um sistema didático. A análise didática desse sistema requer um aprofundamento, entre outras coisas, no que se refere à investigação das *praxeologias* que alunos e professores colocarão em movimento em busca da solução.

Uma das preocupações apontadas por Barachet, Demichel e Noirfalise (2007) ao referirem-se ao sistema de ensino francês, mas que a nosso ver se aplica igualmente a realidade brasileira, consiste em procurar a solução para a dialética que se estabelece entre duas perspectivas, que por vezes se apresentam como antagônicas, sem que o sejam de fato: de um lado a necessidade de cumprir os conteúdos previstos no programa oficial de ensino e de outro o empenho em evitar que esses conteúdos sejam apresentados *a priori*, de forma desconexa, como respostas a perguntas que ainda não foram feitas ou que não precisam ser respondidas, como monumentos, nos termos expostos por Chevallard (2013).

Ao considerar a amplitude de possibilidades permitida por um PEP, que por vezes pode levar à caminhos que acabam por se distanciar do que é previsto que se estude em um determinado nível, Bosch e Gascón (2010. p. 84, tradução nossa), concordam que,

[...] devido à sua estrutura arborescente, em um PEP, a busca por uma resposta passa pela reconstrução ou consideração de respostas parciais R_i , e por isso, vai além da reconstrução de organizações matemáticas locais. Em consequência, quando o processo de estudo requer a mobilização de respostas pré-estabelecidas R_i , a reconstrução da resposta final requer que se transite por diferentes Atividades de Estudo e Pesquisa.

Nesse sentido, a TAD prevê um outro dispositivo didático para o desenvolvimento e análise de praxeologias, que em seu conjunto recebem o nome de Atividades de Estudo e Pesquisa (AEP), que se inserem em uma dinâmica que vem ao encontro do que é apontado por esses pesquisadores, em que o saber é aprendido na medida em que se torna necessário para encontrar respostas à questão que motivou a atividade, sem que se abandone o programa oficial.

As AEPs abarcam escolhas didáticas que se apoiam não somente em um modelo de interpretação da matemática, como ocorre com um modelo epistemológico, mas em um modelo de conceber o que se entende por ensinar matemática, ou em outros termos, em um modelo didático de referência.

Um esquema básico abrangido por um AEP se inicia com uma pergunta Q , imposta a uma pessoa ou a uma instituição, para a qual é necessário que se busque uma resposta $R^\heartsuit$.

Uma fórmula que sintetiza esse trabalho, e que pode servir de referência para que se investiguem os sistemas didáticos em instituições de ensino é apresentada por Chevallard (2007), por meio de um esquema chamado de “herbartiano”²

$$(S(X, Y; Q) \Rightarrow R^{\diamond}_1, R^{\diamond}_2, \dots, R^{\diamond}_n, O_{n+1}, \dots, O_m) \Rightarrow R^\heartsuit$$

Nessa fórmula temos um sistema didático S , um aluno (ou uma comunidade de estudo) X , que é orientado por um (ou mais) professor Y , em busca de uma resposta $R^\heartsuit$ que atenda à questão geratriz Q .

Ao proceder à sua busca, X e Y apoiam-se em saberes (obras) representados por $O_{n+1}, \dots, O_m$, que servem como ferramentas de trabalho e permitem que se encontrem algumas respostas provisórias $R^{\diamond}_1, R^{\diamond}_2, \dots, R^{\diamond}_n$, antes de efetivamente chegarem à $R^\heartsuit$.

De acordo com Bosch e Gascón (2010, p. 79, tradução nossa),

A principal função didática das AEPs é a de introduzir no núcleo do programa de estudo, de modo explícito e como questão geratriz de si mesmo, a *razão de ser* da organização matemática local que se quer construir a partir do estudo de uma “situação do mundo”. Vale ressaltar que as matemáticas formam parte do mundo e que por isso, uma AEP pode consistir, naturalmente, no estudo de uma situação matemática.

² Referente ao filósofo e pedagogo alemão Johann Friedrich Herbart (1776-1841).

Apoiados no referencial teórico proporcionado pela TAD, e após termos apresentado de forma mais particular algumas das noções associadas às dimensões epistemológica, econômico-institucional e ecológica do problema didático de investigação, à construção do MER, à identificação de características do MED e do subjacente MDD, à noção de praxeologia e de AEPs para o desenvolvimento de praxeologias, apresentamos no próximo tópico o resultado da revisão de literatura que desenvolvemos.

2.2 REVISÃO DE LITERATURA

Ao acessar o Banco de Teses da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) em busca de trabalhos realizados no Brasil e que tivessem como palavras chave os termos “inequação” ou “inequações”, encontramos 110 dissertações de mestrado e 38 teses de doutorado, realizados entre 1987 e 2017. Além de assinalar eventuais pontos que alguns desses trabalhos possam ter em comum com nossa pesquisa, procuramos identificar aspectos que merecem aprofundamentos ainda não desenvolvidos.

Baseando-nos, a princípio, na leitura dos títulos, podemos verificar, conforme ilustramos no Quadro 1, que em 23 dos trabalhos encontrados, o esforço de pesquisa concentrou-se nas questões presentes nos processos de ensino e de aprendizagem de inequações, nas áreas de Educação Matemática, Ensino, Ensino de Ciências e Psicologia Cognitiva, que de acordo com a classificação feita pela CAPES, são reunidas na Área de Avaliação denominada como “Ensino”, sendo 20 dissertações, entre mestrados acadêmicos e profissionalizantes e 3 teses de doutorado.

Quadro 1: Dissertações e teses contendo palavras chave “inequação” ou “inequações”

Área de Avaliação CAPES	Dissertações	Teses
Administração	0	1
Ciência da Computação	7	3
Ciências Ambientais	1	0
Direito	1	0
Educação	1	0
Engenharias	32	23
Ensino	20	3
Matemática / Probabilidade e Estatística	48	8
Total	110	38

Fonte: elaborado pelo autor

Além desses, encontramos uma tese da área de Administração; 10 trabalhos (7 dissertações e 3 teses) de Ciência da Computação; uma dissertação de Ciências Ambientais; uma dissertação da área de Educação; uma de Direito; 55 trabalhos (32 dissertações e 23 teses) que trazem contribuições à área de Engenharia, em sua maioria relacionados à processos de otimização na utilização de algum tipo de recurso; além de 56 trabalhos (48 dissertações e 8 teses) relacionados à Matemática Aplicada e Matemática Pura, na Área de Avaliação Matemática/Probabilidade e Estatística.

Essa diversidade nos mostra uma ampla utilização de inequações em diversas áreas do conhecimento. Isso parece confirmar que o objeto matemático “inequação” está longe de ser objeto de estudo exclusivo daqueles que se dedicam ao desenvolvimento da matemática, ou daqueles que se dedicam ao seu ensino. Mais do que isso, a compreensão de diferentes realidades, dentro e fora da matemática, não seria possível sem a compreensão e recurso às inequações, como se observa nos trabalhos que analisamos.

Por outro lado, ao considerar que nosso interesse em proceder a essa busca foi o de fazer um levantamento dos trabalhos que tratam de problemáticas relacionadas ao ensino e à aprendizagem de inequações, procuramos nos concentrar na leitura dos resumos e considerações dos 23 trabalhos da área de Ensino.

Uma leitura inicial dos títulos dos trabalhos encontrados revelou-nos de imediato uma tese de doutorado escrita por Alvarenga (2013), em que a autora faz um mapeamento da produção acadêmica da área de Educação Matemática, desenvolvida entre 1991 e julho de 2011, voltada ao ensino e à aprendizagem de inequações

Sua busca incluiu a procura por *sites* na internet, acesso à CD-ROMs de eventos nacionais e internacionais da área, periódicos e trabalhos impressos disponíveis em bibliotecas, além de contatos diretos com alguns dos pesquisadores. Essa busca resultou em um inventário de 67 trabalhos, em cinco línguas (português, inglês, espanhol, francês e italiano).

A autora categorizou as produções em três quadros comparativos: o primeiro com dados bibliográficos dos autores, identificação do âmbito quanto ao ensino ou aprendizagem e datas e locais das publicações; o segundo com dados dos objetivos, dos referenciais teóricos e das metodologias utilizadas em cada pesquisa; e o terceiro,

com as conclusões e resultados dos trabalhos. Podemos observar entre as considerações feitas pela autora que o foco de investigação de 58 dos 67 trabalhos analisados esteve voltado aos erros e às dificuldades apresentadas pelos alunos nos processos de interpretação e de resolução de inequações.

Alvarenga (2013, p.238) aponta em suas considerações a insatisfação dos pesquisadores, transparente em seus trabalhos, quanto ao

[...] nítido tratamento puramente algorítmico, que por meio dos educadores, sistema curricular e escolar, privilegia a mecanização das manipulações algébricas e pretere o raciocínio, a oportunidade de entendimento e a ampliação do conhecimento matemático que o tema oferece.

Ao classificar os trabalhos da área de educação que encontramos por meio de critérios similares aos que foram utilizados por Alvarenga (2013)³, quanto ao âmbito relacionado ao ensino ou à aprendizagem, podemos notar que em 10 trabalhos o foco da investigação concentrou-se nos processos de ensino, sendo outros 7 trabalhos com foco nos processos de aprendizagem, além de outros 6 trabalhos sem foco específico quanto a esse aspecto, conforme se observa no Quadro 2.

Quadro 2. Classificação das dissertações e teses quando ao âmbito (ensino ou aprendizagem)

Âmbito	Quantidade
Ensino	10
Aprendizagem	7
Outros	6
Total	23

Fonte: elaborado pelo autor

No que se refere ao método de coleta de dados utilizado pelos pesquisadores, verificamos que em 16 trabalhos isso foi feito por meio de entrevistas e análise de protocolos obtidos a partir de intervenções junto aos sujeitos, ao passo que em 7 trabalhos, os dados foram obtidos por meio de levantamentos bibliográficos ou revisão de literatura, conforme representamos no Quadro 3.

Quadro 3. Classificação das dissertações e teses quando ao método de coleta de dados

Método de coleta de dados	Quantidade
Pesquisas de campo	16
Pesquisas teóricas	7
Total	23

Fonte: elaborado pelo autor

³ [...] a palavra *ensino* sob o ponto de vista do tipo de abordagem do professor, da instituição escolar, à maneira sistematizada de transmissão do conhecimento, enquanto *aprendizagem* equivale à forma como o aprendiz entende, mobiliza os conhecimentos transmitidos" (ALVARENGA, 2013, p. 132)

Ao apoiarmo-nos novamente na organização feita por Alvarenga (2013) quanto ao método de coleta de dados, classificamos os primeiros como “pesquisas de campo”, e os seguintes como “pesquisas teóricas”.

Ao classificarmos os trabalhos quanto aos seus objetivos, procuramos organizá-los em uma das quatro categorias seguintes, que foram igualmente utilizadas por Alvarenga (2013) em seu trabalho.

1) Trabalhos que apresentam e discutem métodos de ensino, ou seja, aqueles em que o autor apresenta alguma estratégia para o ensino de inequações (ou de temas relacionados às inequações) ou trabalhos que, apoiados na observação e análise da prática docente e de materiais didáticos, problematizam estratégias adotadas para o ensino de inequações.

2) Trabalhos que estudam o tipo de abordagem utilizada pelos alunos ao se depararem com situações que envolvam resolução de inequações, ou seja, aqueles em que o foco de investigação se concentra na observação do modo pelo qual alunos resolvem inequações e nos erros e dificuldades apresentadas por esses alunos.

3) Trabalhos que examinam pesquisas e enfoques teóricos, que dito de outra forma, são aqueles em que os autores procuraram fazer levantamento das pesquisas já realizadas sobre o tema inequações, como meta-análises, estados da arte e revisões bibliográficas, além das pesquisas voltadas à reflexão teórica sobre os aspectos epistemológicos, cognitivos e didáticos envolvidos no estudo das inequações.

4) Trabalhos voltados à análise de propostas de mudança no currículo escolar no que se relaciona ao ensino de inequações.

De acordo com essa classificação, conforme apresentado no Quadro 4, elencamos 9 trabalhos entre os que apresentam ou discutem alguma estratégia para o ensino de inequações (ou de temas que, de alguma forma, apresentam alguma relação com essas, como propostas para o ensino de equações, de funções e de sistemas lineares para os anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio). A análise das conclusões e considerações finais dessas pesquisas nos mostra que, de acordo com seus autores, embora sejam consideradas algumas limitações, as estratégias propostas reúnem condições de favorecer a aprendizagem de inequações (ou de temas relacionados).

Quadro 4. Classificação das dissertações e teses quando aos objetivos

Objetivos	Quantidade
Apresentar e discutir uma estratégia de ensino	9
Estudo dos erros e dificuldades dos alunos	8
Examinar pesquisas e enfoques teóricos	6
Analisar direções para o currículo escolar	0
Total	23

Fonte: elaborado pelo autor

Em 8 dos trabalhos a problemática que parece ter servido como norte é aquela ligada às dificuldades de aprendizagem e aos erros cometidos pelos alunos na interpretação e resolução de inequações. Além desses, encontramos outros 6 trabalhos com sínteses da produção científica relacionada ao estudo das inequações.

Observamos nos trabalhos uma particular preocupação quanto às dificuldades de aprendizagem e quanto à busca por estratégias de ensino que possam reunir condições de dirimir essas dificuldades, em detrimento de questionamentos, sobre o “*que*” e “*por que*” ensinar o que chamamos de “inequação”. Note-se que, embora a análise do currículo tenha sido uma das categorias utilizadas por Alvarenga (2013) para classificar seus trabalhos quanto aos objetivos (ela encontrou 2 trabalhos que se enquadravam nessa categoria entre os 67 que pesquisou), em nossa busca não encontramos nenhum trabalho que tratasse de questões relacionadas à análise de direções para o currículo escolar. Essa ausência parece confirmar nossa impressão de que a organização matemática para o estudo de inequações na Educação Básica, tal como é proposta nas diretrizes curriculares, em manuais e em livro didáticos não é vista como problemática pelas pesquisas em educação.

Além de pesquisas feitas em publicações do Brasil, realizamos buscas nos *websites* Google Acadêmico, Microsoft Academic e SciELO, usando como palavras chave as traduções do termo “inequação” em espanhol (*inecuación/desigualdad*), inglês (*inequality*) e francês (*inéquation/inégalité*), em suas formas no singular e no plural. Apesar de termos restringido nossa busca à área da Educação Matemática, encontramos uma diversidade de trabalhos voltados à investigação das desigualdades no sentido social do termo, como no estudo das desigualdades de classes, racial e de gênero e de seus reflexos no modo como professores e alunos desenvolvem atividades matemáticas, que apesar de sua relevância, não foram considerados nessa pesquisa, ao distanciarem-se do escopo de nosso estudo.

A exemplo do que encontramos em publicações nacionais, a filtragem mais apurada da busca nos revelou uma quantidade grande de trabalhos voltados à investigação das dificuldades dos alunos em atividades que envolvem inequações, ao estudo de erros cometidos nessas atividades e em eventuais estratégias de ensino. A nosso ver, entretanto, a observação e análise *stricto sensu* das interações que ocorrem entre alunos, professores e saber, distanciadas das considerações acerca dos fenômenos envolvidos na gênese e no desenvolvimento desse saber, que no caso desse trabalho refere-se às inequações, é insuficiente para a compreensão das restrições e condições que respectivamente limitam ou contribuem com o desenvolvimento dos processos de ensino e de aprendizagem.

Nesse sentido, a despeito dos numerosos trabalhos encontrados, optamos em concentrar nossa atenção naqueles em que se observa a preocupação de seus autores quanto aos aspectos epistemológicos associados às inequações, nas restrições e condições que afetam o estudo de inequações e na investigação dos tipos de tarefa envolvendo inequações propostas aos alunos, suas técnicas e justificativas tecnológico-teóricas, como se notam nos trabalhos de Assude (1997), Boero (1998), Boero e Bazzini (2004), Borello (2007) e Arévalo e Rojas (2015).

Assude (1997) desenvolveu uma pesquisa no sentido de compreender de que forma se organizava o estudo de inequações no primeiro ano do Ensino Secundário francês, que agrega jovens com idades em torno dos 15 anos. De acordo com a autora “o ensino da álgebra elementar deve ter como núcleo organizador a função de modelização, em que os modelos algébricos dão sentido ao estudo de uma situação” (ASSUDE, 1997, p. IX-11, tradução nossa), ou em outros termos, “as razões de ser dos modelos não são apenas formais, mas também funcionais” (ASSUDE, 1997, p. IX-11, tradução nossa), ou seja, as razões de ser são justificadas pelas funções que esses objetos (tais como as inequações) assumem nessas situações.

Apoiada nos pressupostos da TAD, Assude (1997) dá o nome de “técnicas fortes” (*techniques fortes*) aos procedimentos de resolução de inequações que se apoiam em tecnologias disponíveis no nível de ensino considerado. Nesse contexto, os alunos aplicam esses tipos de técnica ao desenvolver tarefas de resolução e sabem os motivos pelos quais elas podem ser utilizadas. Entretanto, há situações em que, devido à complexidade das ferramentas a serem mobilizadas para a resolução de inequações, o discurso tecnológico que justifica a sua utilização pode não estar

presente (não estar “vivo”) no nível de ensino em que as tarefas são propostas. Essas são, de acordo com a pesquisadora, as chamadas “técnicas fracas” (*techniques faibles*). Desse modo, a classificação de técnicas como fortes ou fracas implica ir além da análise da técnica, propriamente dita, mas desviar o olhar em direção ao nível de ensino (instituição) em que as tarefas são propostas, a fim de verificar que tecnologias “vivem” nesse ambiente, por meio de um estudo econômico-institucional.

A exemplo de Assude (1997), que já havia se preocupado em classificar as diferentes técnicas para a resolução de inequações, Boero (1998) propõe o enquadramento da problemática didática e cognitiva associada ao estudo das inequações e procura identificar quais são as técnicas utilizadas por alunos do ensino italiano correspondente ao mesmo nível escolar (alunos entre 14 e 17 anos), além de procurar entender em quais tecnologias essas técnicas se apoiam e quais as razões da introdução e da persistência dessas tecnologias nesse nível de ensino.

De acordo com o estudo feito pelo autor, as técnicas ensinadas na Itália para inequações do tipo $(x - a_1)(x - a_n) > 0$ ou do tipo $\frac{(x-a_1)(x-a_n)}{(x-b_1)(x-b_n)} > 0$ (sendo $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n, x \in \mathbb{R}$, com valor de x desconhecido) consistem, basicamente, na redução à inequações polinomiais do tipo $P(x) > 0$ ou $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$ para aplicar em seguida regras de sinais para a multiplicação e divisão de polinômios. Uma evolução dessa técnica consiste em tratar inequações como funções, para em seguida proceder ao cálculo de suas raízes e ao estudo do sinal dessas funções.

Para Boero (1998, p. X-4, tradução nossa) “em geral, a tecnologia que justifica as técnicas de tratamento de inequações algébricas consiste em transformar um problema que se refere às inequações na gestão de regras simples de álgebra”. O autor vê uma grande limitação quanto à amplitude das técnicas ensinadas que

[...] não se apresentam como soluções diretas ou evidentes nem dentro de aplicações de outras ciências, nem dentro das disciplinas escolares, nem em aplicações profissionais e nem mesmo dentro da matemática feita por matemáticos.

Nesse sentido, o autor levanta alguns questionamentos sobre o que leva essas técnicas a serem tão persistentes dentro do ensino. Será por pura inércia do sistema de ensino? Será porque facilitam o ensino e avaliação por meio da redução da complexidade de resolução de inequações por meio de procedimentos e rotinas lógico-algébricas?

De acordo com o autor, o preço a pagar pode ser resumido em pelo menos duas consequências. A primeira refere-se à falta de capacidade dos estudantes em tratar de inequações que não se encaixam nos padrões, o que pode ser observado em uma sondagem feita pelo autor em 1997, com estudantes universitários de um curso de matemática. No estudo, os alunos eram solicitados a resolver algumas inequações e a justificar os resultados obtidos. Os protocolos mostraram que a porcentagem de justificativas corretas era significativamente menor do que a porcentagem de resoluções corretas, ou seja, boa parte dos alunos limitou-se à aplicação de técnicas de resolução sem saber, contudo, explicitar as razões pelas quais usavam ditas técnicas. Além disso, o estudo mostrou a falta de flexibilidade dos alunos quanto à aplicação de procedimentos lógico-algébricos nos casos em que isso não se dava de forma direta, como por exemplo, na resolução da inequação $x^5 + x < 0$ que teve índice de resoluções corretas em 35% e de justificativas corretas de 22%.

A segunda consequência, de acordo com Boero (1998), consiste na falta de exploração das potencialidades de aprendizagem que o objeto inequação permite, como a exploração dos conceitos de “incógnita” e de “parâmetro” que parecem ser confundidos um com o outro.

Boero e Bazzini (2004) concordam que inequações constituem um importante conceito da matemática, que representam dificuldades para os alunos, mas que, no entanto, têm chamado pouca atenção dos pesquisadores de nossa área. Apoiados em estudos realizados com alunos na Itália e na França, os autores citam que a resolução apoiada em representações gráficas costuma ser pouco usada e que as manipulações algébricas, em muitos casos, são feitas sem considerar que os sinais “<” ou “>” e o sinal “=” não significam a mesma coisa.

Ao debruçar-se sobre esse tema de um ponto de vista didático antropológico, Boero e Bazzini (2004) afirmam que um dos motivos das dificuldades de aprendizagem pode estar ligado ao que se entende sob o rótulo de “inequações” em diferentes propostas curriculares. Na Itália, por exemplo, inequações são vistas como um conteúdo de álgebra elementar, distinguindo-se da geometria analítica e do estudo de funções. Entretanto, mesmo em países cujo currículo aponte o estudo de geometria analítica e funções como parte dos conteúdos de álgebra elementar, os algoritmos relacionados às manipulações algébricas parecem prevalecer. Os autores sublinham

a importância da necessidade de integração entre a análise didático-pedagógica e a análise epistemológica da atividade desenvolvida pelos alunos quando do estudo das inequações, principalmente, ao considerar as diferenças que existem entre os caminhos percorridos pelos estudantes nesse estudo e os caminhos percorridos por matemáticos profissionais, ao debruçarem-se sobre esse mesmo objeto matemático.

A leitura de trabalhos como os de Assude (1997), Boero (1998) e Boero e Bazzini (2004) contribuiu para a nossa compreensão a respeito de que, o que pode ser encapsulado sob o nome “inequação” depende de forma fundamental da instituição à qual voltamos nosso olhar ao investigar esse objeto matemático. Dito de outro modo, o que se rotula como “inequação” depende do “ambiente” (nos referimos às instituições e às restrições presentes nesse ambiente) em que essas “vivem” e do que faz com que elas se mantenham “vivas” (a sua razão de ser). Dessa forma, o objeto “inequação” dos matemáticos, assim como os motivos que os levam a estudar esse assunto, são diferentes do objeto “inequação” do Ensino Superior, ou do objeto “inequação” da Educação Básica.

Borello (2007) procurou investigar as relações entre as convicções de alunos e professores em torno do tema inequação. Seu objetivo foi o de encontrar suportes didáticos e estratégias que fossem capazes de auxiliar o professor nos processos de tomada de decisão diante da complexidade dos problemas que as relações entre aluno e professor podem apresentar.

A pesquisadora se apoiou nos aportes teóricos da socioepistemologia, uma área da epistemologia que permite tratar os processos relativos à produção e difusão dos saberes a partir de uma perspectiva que leva em conta as dimensões epistemológica (relativa às particularidades do saber matemático em foco), cognitiva (relativa aos processos de aprendizagem desenvolvidos pelos alunos) e didática (relativa às características do sistema de ensino).

A partir da leitura e análise de trabalhos que tratam do papel do professor nas dinâmicas de aprendizagem, das crenças e convicções de professores sobre o seu papel no contexto de situações didáticas, no estudo do currículo das principais instituições de ensino mexicanas e de uma entrevista feita com professores de matemática que atuam no *Bachillerato General*, que compreende alunos entre 15 e 18 anos, a autora concluiu que de modo geral a atitude dos alunos ao lidar com inequações consiste na memorização de técnicas que tornem possível resolvê-las,

distanciando-se da discussão sobre as razões que permitem que se use uma ou outra técnica de resolução, além de apresentarem a tendência de confundir inequações com equações e tratá-las da mesma forma.

Para a pesquisadora, em concordância com outros autores citados em seu trabalho, a responsabilidade por esse tipo de atitude dos alunos pode ser atribuída em parte aos professores, que parecem se conformar com essa postura. Por outro lado, a pesquisadora ressalta que as condições e restrições institucionais, que impõe um currículo extenso associado a um tempo relativamente limitado, não favorecem um trabalho de reflexão acerca das justificativas que permitem o uso de uma ou de outra técnica de resolução.

Arévalo e Rojas (2015) apoiaram-se nos aportes teóricos da Teoria do Espaço do Trabalho Matemático (ETM), proposta inicialmente por Houdement e Kuzniak (1999, 2006, apud Arévalo e Rojas, 2015) e mais tarde ampliada por Kuzniak (2011, apud Arévalo e Rojas, 2015), para propor uma estratégia de ensino de inequações para alunos da *enseñanza media* no Chile, que compreende alunos entre 14 e 17 anos.

Nesse estudo, buscaram identificar qual a concepção que os sujeitos da pesquisa têm sobre inequações lineares, quais os tipos de tarefa associadas ao conceito de inequação linear são propostas no nível de ensino considerado e como é o trabalho matemático dos alunos ao lidar com inequações lineares.

De acordo com a ETM, o trabalho matemático é o resultado de um processo progressivo de gênese que permite a articulação interna dos planos cognitivos (contemplado pelos componentes *visualização*, *construção* e *prova*) e epistemológicos (contemplado pelos componentes *representamen*⁴, *artefatos* e *referencial teórico*). Tanto a gênese como as componentes de cada um dos planos são reinterpretadas de acordo com o objeto matemático considerado, podendo ser definidos três tipos de espaço do trabalho matemático:

⁴ Para o filósofo e matemático Charles Sanders Peirce (1839 – 1914), um signo é qualquer coisa que representa alguma coisa para alguém. Nesses termos, signo é um elemento em que se relacionam outros três: o *representamen* (a representação do objeto), o objeto (o que é representado) e o interpretante (o que é interpretado pela mente do intérprete).

- Espaço de trabalho matemático de referência: é o espaço ideal, definido a partir de critérios matemáticos. Normalmente esse espaço é ocupado pelo *expert* epistêmico (comunidade dos matemáticos).
- Espaço de trabalho matemático de idôneo: é o espaço definido em termos didáticos, ou em outros termos, é o espaço em que se dá a reflexão sobre a organização didática. Normalmente quem ocupa esse espaço é o professor.
- Espaço de trabalho matemático pessoal: é o espaço definido a partir da reflexão entre os saberes aprendidos e os que são colocados em prática. Normalmente quem ocupa esse espaço é o aluno.

Sobre a concepção que os alunos têm a respeito do conceito de desigualdade, os autores verificaram que é apenas parcial, no sentido de que se refere a coisas que não são iguais entre si, mas ao serem instados a definir o que significa uma inequação linear, recorrem a apresentação dos procedimentos de resolução, além de não terem bem clara a diferença entre um sistema de inequações e um sistema de equações lineares.

Quanto às tarefas que são propostas e ao trabalho matemático realizado pelos alunos, os autores verificaram que o tratamento algébrico, fundamentalmente procedimental, é privilegiado. Verificaram também que se apresentam deficiências quanto a interpretação dos resultados obtidos após a resolução. De acordo com os autores, a análise dessas deficiências permite inferir falhas no que se refere às justificativas teóricas dos procedimentos de resolução.

Por fim, os autores concluem que a sequência didática que desenvolveram junto aos alunos, ao propor tipos de tarefas que possibilitavam, além do tratamento algébrico, o tratamento funcional por via da representação gráfica, contribuiu para que o espaço de trabalho matemático dos participantes fosse ampliado, ao notar que os alunos passaram a compreender o significado do conjunto solução de sistemas de inequações lineares.

Com exceção de Assude (1997), Boero (1998) e Arévalo e Rojas (2015), não vimos trabalhos que se preocupassem em verificar se as técnicas (o saber fazer) utilizadas na resolução de inequações apoiavam-se em um discurso teórico-tecnológico que fosse capaz de justificar tais técnicas no nível escolar considerado. A

nosso ver, esse aspecto não pode ser ignorado ao se buscar a origem dos motivos que geram as dificuldades de aprendizagem.

Da mesma forma, embora tenhamos encontrado trabalhos que tenham se preocupado com aspectos epistemológicos do saber associado às inequações, como em Borello (2007) e de trabalhos cujo esforço de pesquisa tenha sido no sentido de investigar condições e restrições institucionais que de alguma forma interferem no estudo de inequações em um determinado nível de ensino, como se observa em Boero e Bazzini (2004), não encontramos trabalhos que confrontassem o MED e seus reflexos em um MDD com um modelo de referência, desenvolvido a partir do estudo epistemológico (MER).

Essa constatação nos leva a acreditar que embora se encontre uma diversidade de trabalhos sobre o tema inequações em nossa área, ainda carecemos de trabalhos em que o esforço de pesquisa se concentre em verificar a interação dos aspectos epistemológicos, econômico-institucionais e ecológicos das inequações nas organizações didáticas e matemáticas que se desenvolvem para o estudo de inequações na Educação Básica, como nos propormos no presente trabalho.

No próximo tópico apresentaremos as justificativas e a delimitação do problema sobre o qual nos debruçaremos, em busca de caminhos que possam apontar novas perspectivas para o estudo de inequações na Educação Básica.

2.3 JUSTIFICATIVA

A primeira lembrança que temos de atividades envolvendo resolução de inequações nos remete ao nosso tempo como alunos dos anos finais do 1º grau, em uma escola pública da cidade de São Paulo, atual Ensino Fundamental. De acordo com nosso professor da época, bastava “trocar o sinal de desigualdade pelo sinal de igualdade e resolver como se fosse uma equação”, retornando o sinal de desigualdade após o término dos cálculos.

Embora fosse fácil fazer as manipulações e encontrar a solução correta de algumas inequações (seja lá o que isso significasse), não conseguíamos compreender o motivo pelo qual a mesma técnica funcionava em alguns casos e em outros resultava em erro, como por exemplo na resolução da inequação $5 - x > 3$, que de acordo com

o algoritmo, nos levava ao equivocado resultado $x > 2$. Ora, se ao subtrairmos alguma coisa de 5 ainda resta um valor maior do que 3, como era possível que essa “alguma coisa” fosse maior que 2? Não fazia sentido na época, e evidentemente não faz hoje.

Essa reflexão só foi retomada anos mais tarde, no curso de licenciatura em matemática, nas aulas de metodologia do ensino. Com a orientação de professores que eram também pesquisadores em Educação Matemática, pudemos verificar que, diferentemente do que havíamos aprendido na Educação Básica, não “basta trocar o sinal e resolver como equação”, da mesma forma que não “é só inverter a desigualdade quando se multiplica por -1 ”. A busca por uma prática de ensino que pudesse trazer significado aos alunos nos levou a considerar algumas das especificidades do saber em questão e verificar que as técnicas de resolução de equações não são sempre eficientes na resolução de inequações. Boa parte dos problemas de compreensão a respeito das inequações reside em abordagens que não levam esse fato em consideração.

Logo após o término da licenciatura, já no programa de Mestrado em Educação Matemática, tivemos contato com o trabalho de nossa orientadora de então, que de forma parecida com o que fazemos agora, já havia se debruçado sobre esse mesmo tema (DE SOUZA, 2007, p. 9), com inquietações parecidas com as nossas, ao observar, por exemplo, como alunos universitários do primeiro semestre de um curso de engenharia utilizam a técnica de “multiplicar em cruz” para resolver inequações tais como $\frac{5}{x} < \frac{5}{2}$, obtendo a suposta mas equivocada inequação equivalente $10 < 5x$, ou “extrair a raiz dos dois lados” para resolver inequações do tipo $x^2 \leq 25$, chegando a $x \leq \pm 5$.

Mais tarde, atuando como professores na Educação Básica e nos anos iniciais do Ensino Superior, notamos que a falta de sentido que se apresentava aos nossos alunos em tarefas associadas à resolução de inequações, curiosamente se parecia muito com a que se apresentava a nós mesmos, em nossos anos de Educação Básica, já passado tanto tempo. Isso nos levou a pensar se o problema se deve à abordagem dada pelos professores ao tema, à atitude dos alunos quanto à preferência por recursos procedimentais (basta descobrir como se resolve), ou tratam-se de dificuldades de compreensão inerentes ao próprio saber associado às inequações, de acordo com a concepção brousseauiana de obstáculo epistemológico.

Ao iniciarmos nosso percurso em direção ao doutorado no Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP, incomodados quanto à falta de significado que parece pairar sobre tudo o que é associado às inequações, decidimos nos aprofundar no estudo desse assunto, na expectativa de contribuir para uma melhor compreensão do tema.

Nossa primeira percepção é de que o estudo de inequações é problemático, independentemente da localidade e do nível escolar que se queiram observar. Essa constatação, compartilhada por outros pesquisadores em Educação Matemática, talvez seja mais bem compreendida pela leitura dos três exemplos que mostramos a seguir.

Ao procurar indicativos sobre como os conteúdos associados às inequações têm sido desenvolvidos na Educação Básica, tivemos acesso às respostas dadas pelos alunos a uma das questões da Prova Brasil⁵ de 2011, que ilustramos na Figura 2.

Figura 2. Questão da Prova Brasil de 2011

A figura abaixo mostra uma roldana, na qual em cada um dos pratos há um peso de valor conhecido e esferas de peso x .

Uma expressão matemática que relaciona os pesos nos pratos da roldana é

(A) $3x - 5 < 8 - 2x$.
 (B) $3x - 5 > 8 - 2x$.
 (C) $2x + 8 < 5 + 3x$.
 (D) $2x + 8 > 5 + 3x$.

Fonte: Portal MEC

De acordo com os dados apresentados pelo Ministério da Educação (MEC), menos de 35% dos alunos apontou a alternativa C (a alternativa correta) e

⁵ Prova Brasil é uma avaliação desenvolvida pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP) em larga escala. Tem como objetivo avaliar, por meio de testes padronizados e questionários socioeconômicos, a qualidade de ensino que é oferecida aos estudantes do ensino fundamental no Brasil.

aproximadamente 20% apontaram a alternativa D, ou porque não compreendem o significado dos sinais de desigualdade, ou porque não compreenderam a relação de ordem associada ao fato de que se o prato da esquerda está mais abaixo, então a soma dos pesos dos objetos que estão sobre esse prato é maior do que a soma dos pesos dos objetos que estão sobre o prato da direita, que está um pouco acima. Da mesma forma, aproximadamente 45% dos alunos apontou as alternativas A ou B, sem compreender que os pesos de 5kg e de 8kg devem ser somados aos pesos representados por “ x ”, cujo valor é desconhecido.

Em uma sondagem que fez parte de um projeto de iniciação científica, desenvolvida junto à 110 alunos de 1º ano de cursos superiores de Engenharia Elétrica e de Licenciatura em Matemática, De Souza (2007, p.2) observou, como orientadora do projeto, que para a resolução da inequação $x^2 \leq 25$, “52% dos alunos questionados utilizou procedimentos próprios para equações, obtendo assim três tipos de respostas: $x \leq \pm 5$; ou ainda $x \leq 5$ ou $x \leq -5$ e somente 7% deu a resposta correta”.

Tsamir e Bazzini (2001) mostram que em um estudo realizado com 170 alunos italianos e 148 alunos israelenses, matriculados no Ensino Secundário (*high school*), com idades entre 16 e 17 anos, apenas pouco mais da metade dos alunos (51% entre os italianos e 53% entre os israelenses) conseguiram identificar corretamente que o valor de $x = 0$ é a solução para a inequação $5x^4 \leq 0$.

Como dissemos, esses exemplos parecem mostrar que o estudo de inequações, em qualquer nível de ensino e em qualquer localidade, apresenta problemas e merece ser observado com proximidade por aqueles que se inquietam com as falhas associadas à compreensão desse assunto.

Inequações são utilizadas por profissionais das mais diversas áreas, desde o engenheiro mecânico que procura desenvolver um motor mais potente com o menor consumo de combustível, ao economista, que faz análises em busca do investimento que oferece a maior possibilidade de ganho aliada ao menor risco. Desde o operador logístico, que se debruça sobre o caminho mais curto (ou menos custoso) entre os centros produtores de bens, distribuidores e consumidores finais, ao desenvolvedor de *softwares*, que cria aplicativos para ajudar as pessoas a se locomoverem nas grandes cidades no menor tempo possível.

Entendemos, no entanto, que a compreensão de inequações não deva ser exclusividade dos que ingressam em carreiras acadêmicas específicas, como as carreiras em ciências exatas, mas de qualquer pessoa, independentemente da área que escolha para prosseguir seus estudos, e, até mesmo, daqueles que não irão seguir seus estudos após a Educação Básica.

O que queremos dizer é que todos, em qualquer nível escolar, e notadamente na Educação Básica, têm o direito de aprender inequações. A nosso ver, a competência que se desenvolve a partir dessa aprendizagem, entre outros conteúdos da matemática e de outras áreas do conhecimento, pode permitir ao egresso da Educação Básica uma compreensão mais ampla do mundo à sua volta, como por exemplo, no auxílio à tomada de decisões relacionadas à utilização consciente de recursos restritos ou na gestão eficiente de situações que, para serem resolvidas, demandem comparações entre grandezas. Isso parece apontar um campo aberto de investigação, ainda não explorado, sobre as razões de ser das inequações, ou seja, sobre as questões da Educação Básica que não podem ser respondidas a não ser por meio de inequações. Nesse sentido, defendemos que o estudo de inequações deva ser possibilitado a partir da Educação Básica a todos, independentemente da carreira que venham a seguir no futuro.

Gascón (1999, p. 129) chama de “problema docente”, ou “problema do professor” (uma vez que se origina no processo de ensino) àquele associado à procura de respostas sobre “*o que ensinar*” aos alunos sobre um conteúdo matemático, “*por que ensinar*” e “*como ensinar*” esse conteúdo. A análise dos trabalhos que encontramos no Banco de Teses da Capes, em consonância com a análise feita por Alvarenga (2013), nos mostra que embora haja consenso entre os pesquisadores sobre o fato de que existem falhas quanto à aprendizagem das inequações, em todos os níveis escolares, o esforço das pesquisas tem se concentrado em apenas um dos aspectos levantados por Gascón (1999), ou seja, em “*como ensinar*”, sem que as outras questões sejam tomadas como problemáticas.

Ainda nos referindo aos trabalhos encontrados no Banco de Teses da Capes, parece haver um consenso entre os pesquisadores a respeito do papel que as inequações desempenham na matemática escolar. Conforme nos referimos na revisão de literatura, o que mais se observa são pesquisas que se concentram na análise das técnicas utilizadas pelos alunos na resolução de inequações e nas

considerações acerca dos erros que são gerados a partir da escolha equivocada de técnicas, ou em sua equivocada utilização.

Entretanto, a nosso ver, além das técnicas de resolução, existe pelo menos um outro aspecto associado às inequações que merece ser levado em conta e investigado, que se refere ao seu eventual papel como objeto matemático.

Para diferenciar dois dos possíveis estatutos de um conceito matemático e a dialética que se estabelece entre eles, Douady (1984) desenvolveu a noção de ferramenta e objeto (*dialectique outil-objet*). A pesquisadora argumenta que em sua atividade, matemáticos produzem saberes úteis à resolução dos problemas e situações que lhes são impostas, mas que, no entanto, ao transmitir suas descobertas e criações à comunidade científica, esses saberes precisam ser despersonalizados, descontextualizados temporal e socialmente, adquirindo assim o estatuto de objeto matemático.

Ao nos basearmos na distinção entre os conceitos matemáticos que é proposta por Douady (1984), temos um conceito que assume o papel de ferramenta nas situações em que é utilizado na resolução de um problema ou quando contribui com a formulação de novos conceitos, e acede à posição de objeto ao ser aceito e reconhecido socialmente pela comunidade científica.

Sendo assim, embora não seja uma regra, às vezes um mesmo objeto pode assumir o papel de ferramenta em algumas situações e de objeto em outras, como ocorre, por exemplo, com o conceito de função. Por outro lado, existem conceitos que assumem o estatuto de ferramenta invariavelmente, qualquer que seja o contexto, como o que se observa, por exemplo, com as demonstrações em matemática, com as construções geométricas e com as equações, entre possíveis outras.

Ao desviar o olhar em direção às inequações e ao considerar que, de acordo com Douady (1984, p.10, tradução nossa), “por objeto devemos entender o conceito matemático que valida as ferramentas disponíveis para que o aluno evolua durante a aprendizagem”, intuímos que, ao debruçar-se exclusivamente sobre os processos que se desenvolvem na resolução de inequações, o foco de estudo afasta-se das inequações e concentra-se sobre as propriedades algébricas que tornam válidas as técnicas de resolução, ou seja, o conceito objeto não é a inequação, mas o cálculo algébrico e as propriedades da álgebra que o legitimam.

Nesse sentido, de um modo ainda não contemplado pelas pesquisas que elencamos na revisão de literatura, interessa-nos verificar se as inequações adquirem em algum momento o estatuto de objeto matemático, ou resumem-se a um saber útil, como ferramenta para a resolução de problemas. Mais do que uma curiosidade teórica, acreditamos que a compreensão acerca dos estatutos que o conceito de inequação pode ou não assumir, pode evitar que o estudo desse tema se torne estéril, desconexo, dissociado de outros saberes dentro ou fora da matemática, como um fim em si mesmo.

Por outro lado, autores como Chevallard, Bosch e Gascón (1997), Barquero (2009), Fonseca (2004) e Lucas (2015), entre outros, têm sublinhado a fundamental importância da modelização matemática nos processos que se desenvolvem para o estudo de uma diversidade de saberes matemáticos. De acordo com esses autores, esses processos costumam apresentar os seguintes três aspectos: a utilização de saberes matemáticos já conhecidos, a necessidade de aprendizagem (e eventualmente a necessidade de ensino) de conhecimentos matemáticos ainda não dominados pelos atores e a criação de conhecimentos matemáticos, capazes de gerar novos modelos, inéditos no nível escolar considerado, para o estudo da situação apresentada. Nesse sentido, fazer matemática implica ir além dos processos envolvidos no ensino e na aprendizagem (o segundo aspecto que citamos). A concepção de que a atividade matemática pode ser restrita exclusivamente aos processos de ensino e de aprendizagem dá origem a um fenômeno chamado por Chevallard, Bosch e Gascón (1997, p. 25) de “doença didática” (*enfermedad didáctica*), que consiste em reduzir todo o conhecimento em algo para ser ensinado ou aprendido, desconsiderando as outras funções desse conhecimento, como por exemplo, a de servir de ferramenta para a resolução de problemas, ou a de contribuir para a criação de novas ferramentas que venham a ser utilizadas na solução de problemas.

A despeito dessas considerações sobre os processos de modelização, o que mais observamos nas teses e dissertações analisadas é que as estratégias para o ensino se apoiam quase que exclusivamente na aplicação de inequações em situações e modelos pré-estabelecidos. A nosso ver, algumas das razões de ser do estudo de inequações na Educação Básica podem ser encontradas a partir de atividades de modelização, ou seja, de situações que demandem o desenvolvimento

de modelos matemáticos, fundamentados a partir de inequações, como resposta a problemas originados dentro e fora da matemática. A leitura das teses e dissertações que analisamos nos mostra que, pelo menos em âmbito nacional, faltam pesquisas que tenham se debruçado sobre a modelização como justificativa à aprendizagem de inequações. O estudo das inequações, isolado dos processos de modelagem matemática, parece reforçar a impressão equivocada de que as inequações não tenham outra função, a não ser a de serem ensinadas e aprendidas. Padecemos da doença didática, nos termos em que se referem Chevallard, Bosch e Gascón (1997).

Conforme constatamos em nossa revisão de literatura, faltam estudos que tenham se preocupado em buscar motivos que justifiquem o estudo de inequações na Educação Básica. A nosso ver, essa tarefa implica tomar como foco de investigação o modo como o estudo de inequações apresenta-se organizado, seja nas propostas curriculares, seja nos livros didáticos e manuais adotados para esse nível de ensino. Implica igualmente questionar o saber a ser ensinado, problematizando-o, contrapondo-se à equivocada naturalidade com que os conteúdos curriculares são determinados, e implica ainda, desviar os olhos em direção às instituições de ensino, a fim de compreender como as condições e restrições ali encontradas afetam o desenvolvimento das dinâmicas de ensino e dos processos de aprendizagem de inequações nesse nível.

2.4 DELIMITAÇÃO DO PROBLEMA

Conforme apontamos em nossa justificativa, esse trabalho se origina a partir de uma inquietação, que nasce em nossos anos de Educação Básica e que tem nos acompanhado desde então, que se refere à falta de compreensão e de significado que parece estar presente em tudo o que se relaciona às inequações.

Em nossa prática docente e em nossa trajetória de pesquisa em Educação Matemática essa inquietação parece ter ganhado força, ao ver-se de frente com outro tipo de preocupação, que se abate sobre o professor ao ter que abordar o tema junto aos seus alunos, notadamente ao se questionar sobre o que deve ensinar, porque ensinar e como ensinar inequações.

No entanto, embora esse tipo de preocupação (chamada por Gascón (1999) de *problema docente*) se encontre na formulação inicial de algumas pesquisas em

Educação Matemática, se mostra insuficiente, devido à sua incompletude, para a elaboração de um problema didático, sendo necessário que a ela se adicione pelo menos a dimensão epistemológica do problema didático de pesquisa, além de outras dimensões, como a econômico-institucional e a ecológica.

Nesse sentido, ao adicionar outras dimensões, torna-se necessário que se investigue em que consiste a obra (o objeto de estudo, o saber, que nesse caso corresponde às inequações) que se pretende estudar em uma instituição (que nesse caso, corresponde às instituições de Educação Básica), levando em consideração o modo como é interpretada pelos membros que compõem essa instituição, de acordo com um conjunto de condições e restrições institucionais que afetam o acesso à essa obra por um conjunto de indivíduos (em nosso caso alunos de Educação Básica).

Nessa dinâmica, nos deparamos com pelo menos três dos componentes ligados ao problema didático associado aos processos de ensino e de aprendizagem de inequações, que de acordo com os pressupostos da TAD, são fundamentais:

- A obra, ou em outros termos, o saber associado às inequações e a procura pelas razões que levaram à sua gênese e desenvolvimento.
- As organizações (ou praxeologias) matemáticas e didáticas que se desenvolvem na Educação Básica para o estudo de inequações.
- As condições e restrições que afetam o desenvolvimento dessas praxeologias.

Cada um desses componentes se refere a uma dimensão específica do problema didático relativo às inequações: o saber matemático em questão (a obra) associa-se à dimensão epistemológica; a identificação de características do MED e do subjacente MDD, feita por meio da observação e análise das praxeologias que se desenvolvem no âmbito institucional considerado associa-se à dimensão econômico-institucional; e a investigação das condições e restrições que afetam institucionalmente essas praxeologias associa-se à dimensão ecológica.

Nesses termos, subsidiados pela revisão de literatura que fizemos e incomodados ao verificar que o estudo de inequações, em qualquer nível de ensino e em qualquer localidade, apresenta problemas, definimos a seguinte questão de pesquisa que norteou nosso esforço de investigação:

Que contribuições podem advir dos estudos epistemológico, econômico-institucional e ecológico para o desenvolvimento de um modelo didático de referência que sustente a criação e o desenvolvimento de Percursos de Estudo e Pesquisa voltados ao ensino de inequações na Educação Básica?

Diante dessa questão, podemos definir o nosso objetivo geral, que consistiu em realizar estudos que nos permitissem compreender aspectos ligados às dimensões epistemológica, econômico-institucional e ecológica do problema didático associado às inequações, capazes de contribuir com o desenvolvimento de um MDR como base para a proposição de PEPs voltados ao ensino de inequações na Educação Básica.

Entretanto, ao considerar a amplitude dos estudos que desenvolvemos, julgamos necessário enumerar cinco objetivos específicos, que delimitaram o foco de nossa investigação no sentido de alcançar o objetivo geral e que se relacionam a cada um desses estudos, conforme enumeramos a seguir:

- 1) Identificar os saberes e as razões que, em um dado tempo, tornaram respectivamente possível e necessário o desenvolvimento do conceito de inequação.
- 2) Criar um MER associado às inequações.
- 3) Identificar, por meio da análise das propostas curriculares oficiais, de manuais e de livros didáticos, em que consiste o MED que orienta o estudo de inequações na Educação Básica e o MDD que subjaz a esse modelo epistemológico, avaliando seu alcance e seu limite quanto a possíveis articulações com outros ramos da matemática.
- 4) Identificar que condições e restrições regulam as praxeologias para o estudo de inequações na Educação Básica.
- 5) Propor um MDR, fundamentado pelas possíveis contribuições advindas dos estudos epistemológico, econômico-institucional e ecológico, capaz de nortear a criação de PEPs para o estudo de desigualdades e inequações.

Uma de nossas hipóteses é que as razões de ser do estudo das inequações que são suportadas pelo MED e pelo subjacente MDD na Educação Básica podem já estar ultrapassadas, gastas pelo tempo. De acordo com essa hipótese, o estudo de inequações se dá por meio de busca por respostas a perguntas que já não existem,

ou que já foram respondidas. Esse é um dos motivos pelos quais elencamos entre os objetivos específicos o estudo das propostas curriculares, manuais e livros didáticos utilizados na Educação Básica.

A segunda de nossas hipóteses é que existem questões, não triviais, atuais e vivas, capazes de desencadear PEPs que podem legitimar o estudo de inequações na Educação Básica. A comprovação dessa hipótese está ligada tanto à nossa questão de pesquisa quanto ao quinto dos objetivos específicos que elencamos, ou seja, criar PEPs que possam reunir condições de gerar praxeologias mais completas e conectadas do que praxeologias pontuais.

A terceira de nossas hipóteses é que os saberes contemplados pela álgebra, que podem ser suficientes para o estudo de equações, são insuficientes no sentido de trazer significado ao estudo de inequações. Em outras palavras, gostaríamos de mostrar que ao contrário do que se observa nas propostas curriculares, manuais e livros didáticos, onde tudo parece ser possível de resolver por meio de equações, há situações em que esses saberes se mostram limitados.

A quarta e última de nossas hipóteses é que entre as condições e restrições que se impõem ao estudo das inequações, existem tanto aquelas que podem ser modificadas a partir da posição do professor no âmbito da Educação Básica, como as que são geradas em níveis da escala de codeterminação didática acima do qual se encontra o professor. A se confirmar essa hipótese, cabe-nos investigar caminhos que podem levar tanto à modificação das restrições que são possíveis de serem feitas pelo professor como procurar meios de modificar as que não são, acedendo aos níveis mais elevados da referida escala.

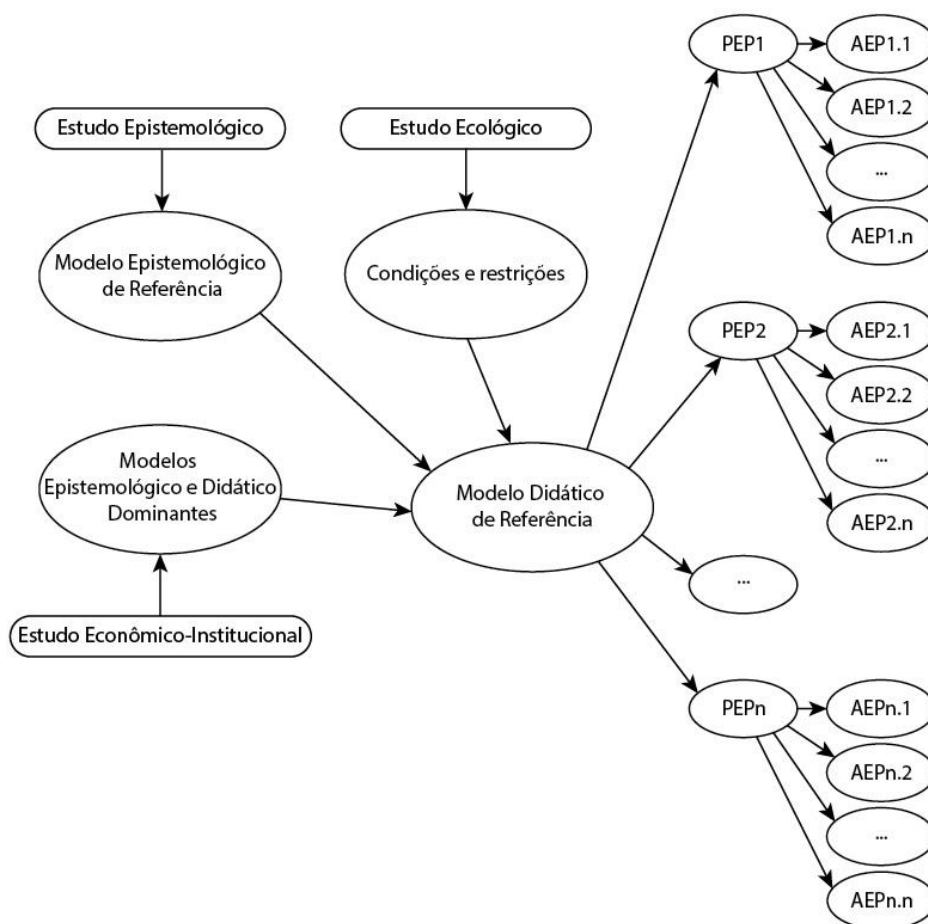
Nesses termos, a partir da constatação possibilitada pela revisão de literatura que fizemos quanto à ausência de trabalhos que houvessem se preocupado em investigar de forma simultânea possíveis contribuições de aspectos epistemológicos, econômico-institucionais e ecológicos para o estudo de inequações na Educação Básica, desenvolvemos:

- Um estudo epistemológico, que nos possibilitou a criação de um MER.
- Um estudo econômico-institucional, por meio do qual identificamos características do MED e do MDD subjacente.

- Um estudo ecológico, que nos permitiu verificar que condições e restrições, em diferentes níveis de codeterminação didática, afetam o acesso dos alunos às inequações.

Conforme representamos no diagrama da Figura 3, o resultado desses estudos contribuiu para a elaboração de um MDR, capaz de fundamentar a criação de PEPs, constituídos por sua vez por AEPs, para o ensino de inequações em diferentes níveis da Educação Básica.

Figura 3. Relação entre aspectos epistemológicos, econômico-institucionais e ecológicos



Fonte: elaborado pelo autor

A fim de mostrar como desenvolveremos nosso trabalho nesse sentido, passamos a apresentar a metodologia e os procedimentos metodológicos que guiaram nossa pesquisa.

2.5 METODOLOGIA E PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Em linguagem comum o termo “pesquisa” normalmente é atribuído à busca por um conhecimento. Ao procurar por uma definição mais formal podemos encontrar os que a definem como “o conjunto de atividades que têm por finalidade a descoberta de novos conhecimentos no domínio científico, literário, artístico etc.” (HOUAISS, 2001). No entanto, ao referir-se à pesquisa como uma atividade acadêmica, surge a necessidade de que o termo seja usado em um sentido técnico, que compreende definir e redefinir problemas, formular hipóteses e propor soluções, coletar, organizar e avaliar dados, fazer deduções e chegar a conclusões, e finalmente, de forma cuidadosa, testar as conclusões como meio de validar as hipóteses formuladas.

Normalmente os tipos de pesquisa são classificados de acordo com os objetivos colocados em jogo para que se responda à questão de pesquisa e quanto ao método utilizado para a coleta de dados. Para Kothari (2004), de acordo com seus objetivos, as pesquisas podem ser classificadas quanto ao tipo em:

- **Pesquisas Qualitativas**, em que os objetivos se referem a fenômenos que envolvem alguma qualidade ou tipificação, ou **Pesquisas Quantitativas**, baseadas na utilização de métricas para estudar fenômenos que podem ser expressos em termos de quantidade.
- **Pesquisas Descritivas**, nos casos em que o objetivo está relacionado à descrição de uma realidade, sem que o pesquisador tenha controle sobre as variáveis do problema; ou **Pesquisas Analíticas**, nas situações em que o pesquisador usa fatos ou informações disponíveis e os analisa, a fim de elaborar a avaliação crítica dos dados coletados.
- **Pesquisas Aplicadas**, em que o objetivo consiste em encontrar uma solução para um problema imediato enfrentado por um grupo de indivíduos ou organização; ou **Pesquisa Fundamental** (ou Pesquisa Básica) em que o esforço de investigação se dá principalmente na observação de generalizações e na busca por uma teoria que explique o fenômeno estudado (como ocorre, por exemplo, com pesquisas em matemática pura).
- **Pesquisa Exploratória**, em que as hipóteses não existem de antemão e são desenvolvidas ao longo do percurso da pesquisa. Nesse tipo de

pesquisa busca-se aprofundar sobre as particularidades de um fenômeno de forma a compreendê-lo melhor; ou **Pesquisa Formalizada**, substancialmente estruturadas e com hipóteses específicas a serem testadas.

Nesses termos, ao tentar situar nossa pesquisa de acordo com essa classificação, entendemos que se trata de uma pesquisa **qualitativa** (ao interessarmos-nos pelos tipos de contribuições advindas dos estudos epistemológico, econômico e ecológico), **analítica** (no sentido em que não apenas descrevemos uma situação, mas a avaliamos de forma crítica), **aplicada** (ao procurar soluções para a falta de significado que parece pairar sobre tudo o que é associado às inequações) e **exploratória** (ao verificar que as hipóteses que levantamos foram desenvolvidas a partir de nossas análises iniciais, e não definidas previamente, e ao procurarmos nos familiarizar com as especificidades do saber relativo às inequações e na forma como condições e restrições institucionais afetam a sua transformação em saber a ser ensinado).

Conforme apontamos ao delimitar nosso problema de pesquisa, um de nossos objetivos específicos consistiu em desenvolver um MER, que por sua vez, tornou indispensável a realização de um estudo epistemológico, em busca dos saberes e das razões que, em um dado tempo, levaram à criação e ao desenvolvimento do conceito de inequação. Esse estudo foi levado a cabo por meio da análise de livros-texto antigos, documentos históricos e livros de história da matemática.

Ao procurarmos identificar aspectos e características do MED que orienta o estudo de inequações na Educação Básica, desenvolvemos um estudo econômico-institucional, tomando como fonte de pesquisa a análise de documentos oficiais que regulam a educação no Brasil, como propostas curriculares nacionais e estaduais, leis, decretos, livros e manuais didáticos.

E finalmente, ao desenvolver o estudo ecológico, recorreremos mais uma vez às propostas curriculares nacionais e estaduais, além de consultas à documentação oficial que regula os cursos de licenciatura em matemática no Brasil, que nos possibilitou identificar que condições e restrições regulam as praxeologias que se desenvolvem para o estudo de inequações na Educação Básica.

Nesses termos, ao considerar que a nossa pesquisa se apoia na leitura e análise de livros e documentos históricos, propostas curriculares, documentos oficiais, livros e manuais didáticos, e que são considerados documentos “quaisquer materiais escritos que possam ser usados como fonte de informação sobre o comportamento humano” (Phillips, 1974, p. 187 apud Lüdke e André, 2013, p. 45), podemos então afirmar que nosso trabalho pode ser classificado como uma **análise documental**.

Guba e Lincoln (1981 apud Lüdke e André, 1986) apontam algumas vantagens quanto ao uso de documentos como fonte de pesquisa, como por exemplo o fato de que os documentos persistem ao longo do tempo, sendo uma fonte rica e estável de informação, que podem trazer evidências que reforçam as afirmações e conclusões do pesquisador, além de permitir a obtenção de dados, até mesmo nos casos em que o acesso ao sujeito é impossível, como no caso de morte.

Quanto às críticas apontadas por esses autores, podemos destacar entre as principais o fato de que os documentos podem consistir em uma amostra não representativa, visto que nem tudo é registrado, além do fato de que a escolha dos documentos pode ser feita de forma arbitrária pelo pesquisador. Nosso argumento, em sentido contrário, é que não definimos o MER (no sentido de único) para a inequações, mas um MER, entre tantos outros possíveis e que podem ser diferentes entre si, dependendo das escolhas feitas pelo pesquisador. Mais ainda, é necessário considerar que os próprios documentos não são neutros, pois refletem valores, crenças, preferências, sentimentos e a ideologia de seus autores. Nesse sentido, a escolha arbitrária feita pelo pesquisador nada mais é do que uma variável a mais, entre tantas outras.

Nos próximos capítulo apresentaremos o resultado de nossa investigação sobre as dimensões epistemológica, econômico-institucional e ecológica do problema didático associado ao estudo das inequações.

3 ESTUDO EPISTEMOLÓGICO DAS INEQUAÇÕES

Nesse capítulo apresentamos o estudo relacionado à gênese e desenvolvimento das inequações, seguido de um MER que desenvolvemos com base nesse estudo.

3.1 UM ESTUDO A RESPEITO DA GÊNESE E DESENVOLVIMENTO DAS INEQUAÇÕES⁶

De um ponto de vista antropológico, ao considerar que toda atividade humana, e de forma particular aquelas ligadas ao desenvolvimento dos saberes matemáticos, pode ser compreendida por meio da noção de praxeologia, procuramos nesse estudo identificar as razões que levaram ao desenvolvimento dos saberes associados às desigualdades e às inequações. Verificamos que, de acordo com época e com as questões que se impunham, existem diferentes formas de interpretar a matemática, ou seja, diferentes modelos epistemológicos, compostos de diferentes tarefas, técnicas, tecnologias e teorias.

Se por um lado um modelo epistemológico comporta um conjunto de praxeologias, organizadas por uma rede de questões e respostas, por outro lado, pode apresentar limitações ou tornar-se obsoleto, ou simplesmente ineficaz, quando a questão, ou as questões, que demandam resposta não podem mais ser respondidas pelas praxeologias que compõem esse modelo. Nesses casos, diante de tarefas que não podem ser resolvidas pelas técnicas já conhecidas, torna-se necessário o desenvolvimento de novas técnicas que desencadeiam por vezes o surgimento de novos modelos epistemológicos, mais adequados às especificidades da situação.

Durante um período de nossa história, numa época em que nossos antepassados ainda não dominavam as técnicas agrícolas e não tinham desenvolvido habilidades necessárias ao manuseio de rebanhos, subsistindo basicamente da caça

⁶ Em alguns idiomas as palavras “desigualdade” e “inequação” são escritas da mesma forma, como por exemplo na língua inglesa (*inequality*). Em nosso trabalho faremos a distinção entre uma e outra e chamaremos de desigualdade às relações de comparação entre duas ou mais grandezas na forma $a > b$ ou $a < b$, e de inequação às desigualdades condicionais, ou seja, àquelas que se verificam apenas para certos valores de uma incógnita, como ocorre por exemplo, quando afirmamos que $a + x > b$, que é válido apenas quando $x > b - a$.

e do extrativismo vegetal, a busca por condições de vida mais favoráveis levava-os a mudarem-se permanentemente de um lugar para outro, carregando a menor quantidade possível de bens a cada mudança, vivendo com o que era estritamente essencial.

Nesse contexto, para efeitos de controle do patrimônio, era suficiente que se distinguísse entre um, dois, três e muitos. De acordo com Kline (1972), embora a matemática como um corpo de conhecimentos organizados em forma de uma disciplina só tenha surgido a partir das contribuições dos gregos no período que se estende do ano 600 a.C. ao ano 300 a.C., é possível observar rudimentos de conceitos matemáticos, como noções elementares de quantidade e de forma, em muitas das civilizações antigas. Evidências arqueológicas indicam que, apesar de fazer isso de uma forma diferente da que fazemos hoje, a mais de 50.000 anos o homem já sabia contar.

Com o passar dos anos, a compreensão da regularidade dos ciclos da natureza (como aqueles associados à sucessão das estações do ano e aos consequentes reflexos dessa sucessão na duração dos dias, na temperatura ambiente e no nível de chuvas) aliada ao domínio de técnicas de cultivo e de manuseio do solo, levou o homem primitivo a procurar um estilo de vida menos sujeito aos riscos que eram impostos pela vida nômade.

As possibilidades de acumulação de posses, inéditas até então, deram origem à novas demandas. O conhecimento que se tinha a respeito dos números (um, dois, três e muitos) tornou-se insuficiente tanto para lidar com a contagem de coleções mais numerosas quanto com a mensuração de extensões de terra, nem sempre possíveis no domínio exclusivo dos números usados para a contagem.

A comparação entre grandezas parece ter surgido de forma simultânea à própria noção de grandeza, muito antes da criação dos símbolos para designar desigualdades. Nesse sentido, tão importante quanto expressar que a quantidade a de elementos de uma coleção era igual à quantidade b de elementos de outra ($a = b$) (como ocorria por exemplo ao relacionar de forma biunívoca a quantidade de objetos de uma coleção com a quantidade de marcas feitas em um pedaço de madeira), ou que tinham quantidade diferentes ($a \neq b$), existiam situações em que se tornava necessário expressar a relação de ordem que existia entre essas quantidades,

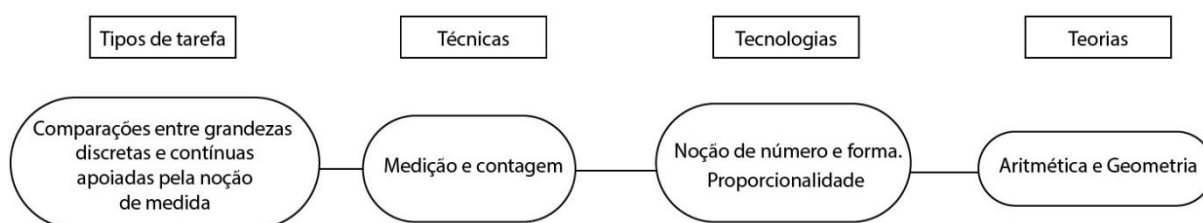
recorrendo às desigualdades por meio da indicação explícita de qual era a coleção que tinha mais elementos e qual a que tinha menos, ou em outros termos, qual era a maior e qual era a menor, nos casos em que não possuíam a mesma quantidade.

A noção de medida, possibilitada pelo estabelecimento de padrões, como por exemplo o cúbito, que era usado pelos egípcios e que correspondia à distância entre o cotovelo e a ponta do dedo médio do faraó, permitiu que nossos antepassados ampliassem as possibilidades de comparação entre grandezas. Além de contar e comparar, agora era possível medir e comparar, como se observa na comparação entre áreas delimitadas por diferentes extensões de terra, entre a capacidade de armazenamento de diferentes recipientes, ou entre massas correspondentes à diferentes quantidades de grãos.

Ao observar essas práticas, que dão sentido e que estão presentes na gênese do saber associado às desigualdades, podemos identificar o desenvolvimento de um primeiro modelo epistemológico, que chamamos de M_1 .

Nesse modelo, conforme a representação da Figura 4, os tipos de tarefa consistem em **comparar e estabelecer em que quantidade ou em que medida uma grandeza pode ser maior (ou menor) que o outra**. Essas tarefas são desenvolvidas por técnicas que se apoiam tanto na **medição** (comparação entre grandezas discretas com recurso aos números racionais) como na **contagem** (comparação entre grandezas discretas com recurso aos números naturais), justificadas tecnologicamente pela noção de **número** e de **forma** e suportadas teoricamente tanto pela **aritmética** como pela **geometria**.

Figura 4. Componentes do modelo epistemológico M_1



Fonte: elaborado pelo autor

Veremos, na sequência desse estudo, que o modelo M_1 se amplia além das demandas iniciais, ao considerar, além das já citadas grandezas discretas, as **grandezas contínuas**, com suporte à **noção de medida** e **proporcionalidade** nos termos propostos por Eudoxo, que buscava por meio da sua Teoria das Proporções,

superar a controversa discussão que se estabeleceu após a descoberta das grandezas incomensuráveis.

Tanto Kline (1972), quanto outros historiadores da matemática, como Eves (2004), Boyer e Merzbach (1991) e Roque (2012), referem-se aos papiros de Rhind⁷, ao papiro de Moscou⁸ e a tábula Plimpton 322⁹ como sendo os mais antigos registros matemáticos encontrados até os dias de hoje.

Além de uma lista com números que correspondem às medidas da hipotenusa e de catetos de diversos triângulos retângulos registrada na tábula Plimpton 322, o que se pode observar nos outros dois documentos são problemas de aritmética, de progressões, de cálculo de volume, de proporção e de geometria, e embora se encontre uma diversidade de problemas chamados de *aha*¹⁰, não existem evidências de problemas que se apoiem em desigualdades, ou de problemas em que se empreenda a busca por intervalos de valores desconhecidos, como ocorre com as inequações.

Em uma busca cronológica pela história da matemática, encontramos nos *Elementos*¹¹ de Euclides o que talvez seja um dos primeiros registros do recurso às desigualdades na comparação entre comprimentos de segmentos de reta, entre medidas de área delimitadas por figuras geométricas, entre medidas de volume de sólidos geométricos e entre ângulos delimitados por retas distintas, como apoio aos processos de demonstração e prova, como por exemplo, o que se observa no 5º postulado do Livro I:

⁷ Também conhecido como papiro de Ahmes, em homenagem ao escriba que o redigiu por volta do ano 1650 a.C.

⁸ Também conhecido como Papiro Golonishev em referência ao seu proprietário Vladimir Golenishchev, foi escrito por volta de 1850 a.C.

⁹ Uma tábula de argila com caracteres cuneiformes escrita aproximadamente entre 1900 a.C. e 1600 a.C., cujo nome (Plimpton 322) indica o número sob o qual está catalogada na coleção do editor norte americano G.A. Plimpton, na Universidade de Columbia.

¹⁰ Em língua egípcia AHA significa “algo” ou uma “quantidade”. Sempre que a solução de um problema demanda a busca por um valor desconhecido, a partir de valores dados, os egípcios costumam chamar esse valor desconhecido de “algo”, ou simplesmente de AHA.

¹¹ Os Elementos de Geometria é um tratado matemático e geométrico formado por 13 livros, escrito por Euclides de Alexandria por volta de 300 a.C.. Consiste na organização e sistematização do conhecimento matemático da época, apresentado em forma de definições, postulados e proposições, considerado por alguns autores como “o mais bem-sucedido texto matemático já escrito” (BOYER e MERZBACH, 1991, p. 100, tradução nossa).

Se uma reta, ao cruzar outras duas retas, faz com que a soma dos ângulos internos de um mesmo lado seja menor do que dois ângulos retos, então essas retas, quando suficientemente prolongadas, irão cruzar-se do mesmo lado em que estão esses dois ângulos. (EUCLIDES, 2007, p. 155, tradução nossa)

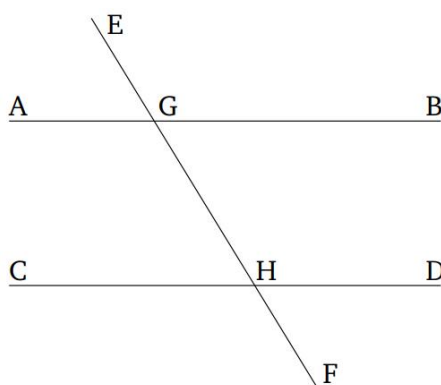
As consequências do recurso à comparação entre a soma de ângulos que se verifica no 5º postulado parecem ficar mais evidentes, por exemplo, ao observar como se desenvolve a demonstração da proposição 29 do Livro I dos *Elementos*, chamado por alguns autores de Teorema das Retas Paralelas, em que se postula que

[...] uma reta ao interceptar duas outras retas paralelas entre si, produz ângulos alternos internos congruentes, ângulos alternos externos congruentes e a soma dos ângulos internos do mesmo lado é igual à dois ângulos retos” (EUCLIDES, 2007, p. 30, tradução nossa)

Uma das principais diferenças entre os métodos de comparação utilizados por Euclides, fundamentados pela geometria sintética (referida por alguns autores como geometria axiomática ou geometria pura), e os que eram usados pelos antigos babilônios e egípcios, refere-se à ausência de fórmulas e de um sistema de referência para medidas. Nessa abordagem, as técnicas para a demonstração consistem no encadeamento lógico de deduções que são construídas passo a passo a partir de premissas básicas (axiomas), em direção à solução.

No exemplo que apresentamos na Figura 5, os ângulos alternos internos $\widehat{AGH}$ e $\widehat{GHD}$ são congruentes, da mesma forma que o são os ângulos alternos $\widehat{EGB}$ e $\widehat{HFD}$. Além disso, ao justapor alguns dos ângulos internos que estão de um mesmo lado da reta EF (como por exemplo os ângulos $\widehat{BGH}$ e $\widehat{GHD}$) é possível verificar que a sua soma é igual à justaposição de dois ângulos retos.

Figura 5. Auxílio à demonstração da Proposição 29 - Livro I



Fonte: EUCLIDES (2007, p. 32)

A demonstração da proposição 29 do Livro I apresentada por Euclides (2007) admite inicialmente o contrário do que se quer provar, ou seja, que os ângulos $\widehat{AGH}$ e $\widehat{GHD}$ não são congruentes, o que implica, nesse caso, que um deve ser maior do que o outro.

Supondo que o maior dentre os dois seja $\widehat{AGH}$, ao somar $\widehat{BGH}$ tanto a $\widehat{AGH}$ como a $\widehat{GHD}$, teríamos que a soma de $\widehat{AGH}$ com $\widehat{BGH}$ seria maior do que a soma de $\widehat{GHD}$ com $\widehat{BGH}$.

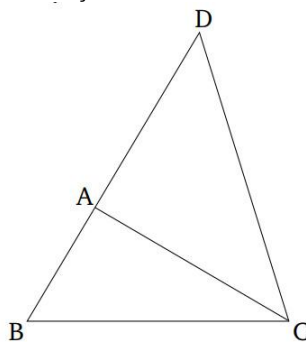
Como a soma de $\widehat{AGH}$ com $\widehat{BGH}$ é igual à dois ângulos retos, teríamos que a soma entre $\widehat{GHD}$ e $\widehat{BGH}$ seria menor do que dois ângulos retos, mas isso não pode ser verdade, pois de acordo com o 5º postulado as retas AB e CD iriam encontrar-se no mesmo lado dos ângulos $\widehat{GHD}$ e $\widehat{BGH}$, o que é absurdo, visto que por definição AB e CD são paralelas.

A demonstração da impossibilidade pode ser feita de modo análogo ao supor que o ângulo $\widehat{GHD}$ seja o maior dentre os ângulos $\widehat{AGH}$ e $\widehat{GHD}$. Sendo assim, a única possibilidade válida é a que afirma que os ângulos alternos internos são congruentes, que no exemplo utilizado implica aceitar que $\widehat{AGH}$ e $\widehat{GHD}$ são congruentes. A demonstração da congruência entre os ângulos $\widehat{EGB}$ e $\widehat{GHD}$ pode ser feita por meio do mesmo raciocínio.

Na proposição 20 do livro I encontramos um outro exemplo, nesse caso relacionado ao estudo da desigualdade entre os comprimentos dos lados de um triângulo, que afirma “para qualquer triângulo a soma do comprimento de dois lados é maior do que o comprimento do lado remanescente, quaisquer que sejam os lados considerados” (EUCLIDES, 2007, p. 23, tradução nossa).

Essa proposição é conhecida atualmente como o Teorema da Desigualdade Triangular e a demonstração apresentada nos *Elementos* consiste inicialmente em, a partir de um dado triângulo ABC (Figura 6), prolongar o lado BA até o ponto D , de forma que o comprimento do segmento AD seja igual ao comprimento do segmento AC .

Figura 6. Auxílio à demonstração do Teorema da Desigualdade Triangular



Fonte: EUCLIDES, 2007, p.23

Como o triângulo ADC é isósceles, temos que o ângulo $\widehat{ADC}$ é congruente ao ângulo $\widehat{ACD}$. O triângulo BCD contém os ângulos $\widehat{BCD}$ e $\widehat{BDC}$, e como o ângulo $\widehat{BCD}$ é maior que o ângulo $\widehat{BDC}$, isso implica que o lado BD é maior que o lado BC . Visto que AD tem mesmo comprimento que AC , então a soma do comprimento dos lados AB e AC (dois dos lados do triângulo considerado) é igual ao comprimento do lado BD , que é maior que BC (o outro lado do triângulo considerado), conforme se queria demonstrar.

Essa relação de desigualdade demonstrada entre o comprimento de um lado (entre o lado BC e a soma dos comprimentos dos lados AB e AC) e os outros dois é válida para os outros lados, ou seja, o comprimento do lado AB é menor que a soma dos comprimentos dos lados AC e BC , da mesma forma que o comprimento do lado AC é menor que a soma dos comprimentos dos lados AB e BC .

Além da desigualdade triangular, uma outra desigualdade recorrente em matemática é a que afirma que a média aritmética de dois ou mais valores é maior ou igual que a média geométrica desses valores, conhecida como desigualdade das médias, ou desigualdade MA-MG.

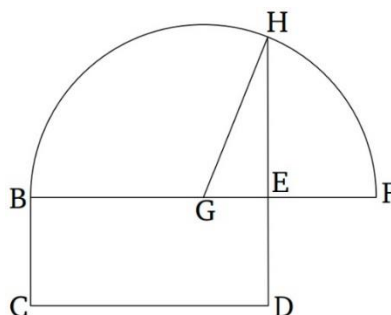
Julgamos curioso, no entanto, observar como Euclides apresenta a prova dessa desigualdade a partir de outro problema, que a princípio não parece relacionado com a desigualdade das médias e que se dá a partir da busca por um quadrado capaz de delimitar a mesma área que um retângulo dado.

A fim de mostrar como a solução é desenvolvida nos *Elementos* (proposição 14 do Livro II), suponhamos inicialmente um retângulo $BCDE$, conforme a Figura 7. O que se busca é um quadrado de mesma área que $BCDE$.

A solução trivial ocorre quando os lados BE e ED têm comprimentos iguais. Nesse caso o retângulo $BCDE$ é um quadrado e a construção está terminada.

Se, no entanto, BE e ED não têm comprimentos de mesma medida é preciso supor que um dos dois seja maior que o outro. A título de exemplo vamos supor que BE seja o maior.

Figura 7. Auxílio à demonstração da desigualdade das médias



Fonte: EUCLIDES, 2007, p.66

Ao prolongar o segmento BE até o ponto F , de forma que EF tenha comprimento igual à ED . Podemos marcar G como o ponto médio entre B e F e traçar uma semicircunferência com centro em G e raio de comprimento BG (ou GF). A intersecção entre a semicircunferência e o prolongamento do segmento DE determina o ponto H na semicircunferência.

De acordo com a proposição 5 desse mesmo livro (Livro II, cuja demonstração vamos omitir a fim de contribuir com a fluência do texto), se um segmento de reta é demarcado em partes iguais e desiguais (como ocorre com o segmento BF , que é demarcado em duas partes iguais pelo ponto G e em duas partes desiguais pelo ponto E), então a medida de área delimitada pelo retângulo que pode ser construído com lados de comprimentos iguais à essas partes (iguais e desiguais) somada à medida da área delimitada pelo quadrado construído com segmento de comprimento igual à diferença entre essas partes, é igual à medida de área delimitada pelo quadrado construído a partir da metade do segmento dado.

Em outros termos, o que essa proposição nos mostra é que a medida de área delimitada pelo retângulo formado com os lados BE e EF (que é a mesma medida de área delimitada pelo retângulo $BCDE$, visto que EF tem mesma medida que ED), somada à medida de área delimitada pelo quadrado com lado de comprimento igual

à diferença entre BE e EF (o quadrado com lado de comprimento EG) é igual à medida de área delimitada pelo quadrado com lado de comprimento BG .

Como BG tem o mesmo comprimento que GH , e como o triângulo EGH é retângulo, podemos recorrer ao Teorema de Pitágoras e verificar que a soma das medidas das áreas delimitadas pelos quadrados construídos a partir dos segmentos GE e EH é igual à área delimitada pelo quadrado de lado GH .

A partir das asserções dos dois últimos parágrafos podemos concluir, por fim, que a área delimitada pelo retângulo $BCDE$ dado é igual à área delimitada pelo quadrado de lado EH , conforme proposto inicialmente.

Vejamos que o segmento GH (que é congruente aos segmentos BG e EF) corresponde ao ponto médio do segmento BF , que em outros termos implica dizer que o comprimento de GH é igual à média da medida dos comprimentos de BE e EF . Em linguagem atual poderíamos escrever essa asserção como $GH = \frac{BE+EF}{2}$.

Embora fosse plausível à época considerar a adição de dois ou mais segmentos, justapondo um ao outro, de forma que a soma das medidas de seus comprimentos fosse igual à medida do comprimento do segmento resultante, não se fazia o mesmo em relação à multiplicação. De acordo com Roque (2012, p. 255), na geometria de tradição euclidiana “o produto de dois segmentos devia ser visto, necessariamente, como um retângulo”. Sendo assim, conforme se demonstrou, o produto entre os segmentos BE e EF corresponde ao quadrado determinado por EH . Em linguagem atual essa relação poderia ser escrita como $EH^2 = BE.EF$, ou ainda $EH = \sqrt{BE.EF}$, ou seja, o comprimento do segmento EH é igual à média geométrica entre a medida de comprimento dos segmentos BE e EF .

Como GH (média aritmética) é a hipotenusa do triângulo retângulo EGH , seu comprimento será sempre maior do que o comprimento do segmento EH (média geométrica), sendo que a condição de igualdade ocorre exclusivamente no caso em que BE tem comprimento igual ao de EF .

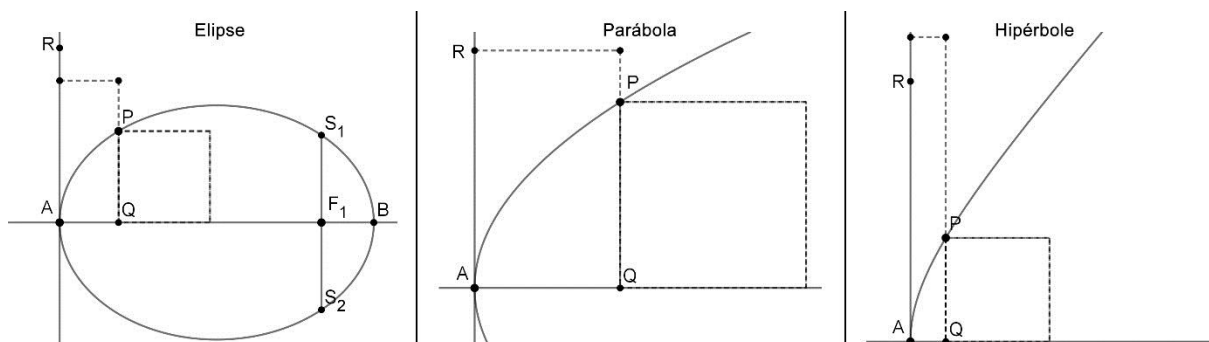
A história nos mostra que as desigualdades foram fundamentais para a definição e designação das secções cônicas (curvas obtidas a partir da intersecção entre uma superfície plana e um cone). De acordo com Boyer e Merzbach (1991), durante mais de um século e meio depois de sua descoberta, as cônicas não tinham

um nome específico e eram designadas de acordo com o cone que era seccionado. Conheciam-se dessa forma as curvas originadas pela secção de um cone acutângulo (*oxitome*), pela secção de um cone retângulo (*orthotome*) e pela secção de um cone obtusângulo (*amblytome*). Apesar de existirem indícios de que o matemático grego Arquimedes de Siracusa (287 a.C. – 212 a.C.) usava a denominação de *parábola* para curva obtida a partir da secção de um cone retângulo por um plano, parece ter sido Apolônio de Perga (262 a.C. - 200 a.C.) quem introduziu em seu tratado sobre as secções cônicas a designação que damos atualmente para essas curvas: a elipse, a hipérbole e a parábola.

Bem antes de Euclides, os primeiros pitagóricos desenvolviam algumas de suas demonstrações por meio de um método conhecido como *aplicação de áreas*. De acordo com esse método, aplicar um retângulo sobre um segmento de reta consistia em apoiar a base do retângulo ao longo do segmento, de forma que um dos vértices da base coincidisse com uma das extremidades do segmento. Nos casos em que o outro vértice da base ficava aquém da outra extremidade do segmento, ou coincidia, ou ultrapassava esse limite, os pitagóricos costumavam dizer que se tratava de *ellipsis* (palavra grega com significado de supressão, falta), ou *parabole* (aproximação, comparação, analogia) ou *hyperbola* (excesso, exagero), respectivamente.

Apolônio tomou emprestada essa terminologia para classificar e designar os diferentes tipos de secções cônicas. Para compreender o método que utilizava, tomemos inicialmente um segmento AB , correspondente ao eixo principal de uma cônica, conforme representamos na Figura 8. Seja P um ponto qualquer da cônica e Q correspondente ao pé da perpendicular ao eixo AB , passando por P .

Figura 8. Auxílio à demonstração da classificação das secções cônicas



Fonte: elaborado pelo autor

Por A , que é um dos vértices da cônica, tracemos uma reta perpendicular a AB e marquemos um segmento de comprimento AR , de mesma medida que o segmento que une os pontos S_1 e S_2 (*latus rectum*¹² da cônica). Ao aplicar ao segmento AR um retângulo com um dos lados AQ e de mesma área que o quadrado de lado PQ , Apolônio observava se o outro vértice do retângulo sobre AR ficava aquém de R , coincidia ou ultrapassava esse ponto, designando em cada um dos casos a curva como elipse, parábola ou hipérbole, respectivamente.

De fato, se recorrermos à geometria analítica, de uma forma que não era possível à época de Apolônio, nos apoiando no sistema de coordenadas cartesianas, de modo que os segmentos AB e AR se sejam construídos respectivamente sobre os eixos x e y , com uma das extremidades na origem do sistema, ao designarmos as coordenadas do ponto P por x e y , teremos, no caso de uma parábola, que $y^2 = lx$, em que l é o comprimento do *latus rectum*. Em outras palavras, isso quer dizer que, em uma parábola, para qualquer valor de x , o quadrado da ordenada sempre corresponderá ao produto entre o valor de x (segmento AQ) e o parâmetro l .

De forma análoga, considerando a e b como números reais, teremos a equação $y^2 = lx - \frac{a^2x^2}{b^2}$ para a elipse e a equação $y^2 = lx + \frac{a^2x^2}{b^2}$ para a hipérbole. Como o produto $\frac{a^2x^2}{b^2}$ será sempre maior ou igual à zero para quaisquer valores não nulos de x , a e b , teremos que $y^2 < lx$ para a elipse e $y^2 > lx$ para a hipérbole, de acordo com o que foi mostrado por Apolônio, ou seja, que o retângulo de lados l (segmento AR) e x (segmento AQ) será sempre maior no caso da elipse, e sempre menor no caso da hipérbole, que o quadrado de y (o quadrado delimitado pelo segmento PQ).

A busca por um caminho mais curto entre dois pontos, ou a busca por formas capazes de abranger a maior área possível com o menor comprimento, como forma de aumentar a eficiência de um recurso vão além da mera comparação entre grandezas. De acordo com Courant e Robbins (1996), algumas propriedades de máximos e de mínimos já eram conhecidas muito tempo antes dos gregos, tais como a que afirma que a menor distância entre dois pontos é um segmento de reta, ou que

¹² O *latus rectum* de uma cônica é definido como a corda perpendicular ao eixo principal que passa por um dos focos da cônica e cujas extremidades pertencem à cônica.

dentre todas as figuras planas fechadas a que compreende a maior área com um comprimento fixo é a circunferência.

Para Courant e Robbins (1996, p. 329, tradução nossa):

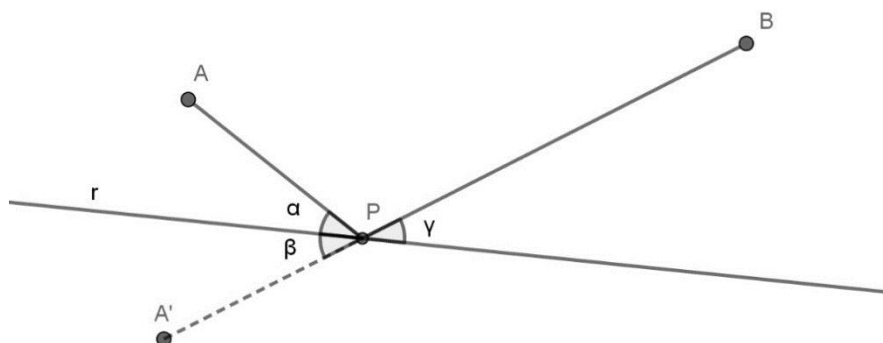
É perfeitamente natural que matemáticos tenham se interessado por questões desse tipo. Na vida diária, problemas de máximos e de mínimos, do “melhor” e do “pior”, surgem constantemente. Muitos problemas de importância prática se apresentam dessa forma. Por exemplo, que forma deve ter um barco para que apresente a menor resistência possível ao navegar? Que recipiente cilíndrico fabricado a partir de uma quantidade dada de material tem o máximo volume?

Um dos problemas clássicos da antiguidade, referenciado nos livros atuais como o Problema de Heron, costuma ser enunciado da seguinte forma: dados dois pontos A e B e uma reta r , que não passa por nenhum desses dois pontos, como determinar um ponto P pertencente à r de forma que a soma das distâncias de A até P e de P até B seja a menor possível.

Tomando como base o princípio aristotélico que diz que “a natureza nada faz do modo mais difícil” (BOYER e MERZBACH, 1991, p. 174, tradução nossa), Heron de Alexandria (10 d.C. - 80 d.C.) mostra, em seu tratado sobre as propriedades elementares dos espelhos, chamado de *Catóptrica*, que a solução do problema está relacionada ao caminho que um feixe de luz perfaz de um ponto à outro, sendo refletido por um espelho.

Se tomarmos o ponto A como um objeto qualquer, o ponto B como o olho de um observador e a reta r como o perfil de um espelho plano, conforme representado na Figura 9 (como se estivéssemos vendo um espelho não de frente, mas de lado), o modo como a imagem de A é refletida no espelho e observada por B se dá de acordo com as propriedades geométricas que determinam o menor caminho entre o ponto A e o ponto B .

Figura 9. Auxílio à demonstração do Problema de Heron



Fonte: elaborado pelo autor

A demonstração envolve considerar um ponto A' , obtido a partir da reflexão ortogonal de A em relação à reta r . A menor distância entre A' e o ponto B corresponde ao segmento de reta $A'B$, que ao intersectar r determina o ponto P . Como a distância entre A e P é igual à distância entre A' e P , temos que a menor distância entre o ponto A e o ponto B , passando por r , corresponde à soma do comprimento dos segmentos AP e BP .

Estudos indicam que propriedades associadas à reflexão da luz sobre uma superfície já eram conhecidas desde os tempos de Euclides, entretanto a formalização dessas propriedades só iria aparecer séculos mais tarde, no tratado de Heron. Uma das consequências de sua demonstração é que como r é bissetriz do ângulo $AP'A'$, os ângulos indicados por α e β na figura são congruentes, da mesma forma que os são os ângulos β e γ , opostos pelo vértice P , dando origem ao que veio ser conhecido mais tarde como a 2ª lei da reflexão. De acordo com essa lei, o ângulo de reflexão (nesse caso γ) é sempre igual ao ângulo de incidência (nesse caso α).

É curioso observar como a resolução do Problema de Heron, que se associa à procura pela distância mínima pode contribuir com a resolução de um outro problema clássico da antiguidade, relacionado à busca pela área máxima que pode ser delimitada por uma figura geométrica.

Conhecido atualmente como problema isoperimétrico, esse problema pode ser resumido como a busca pela curva de comprimento dado que delimita a maior área, dentre todas curvas fechadas simples no plano.

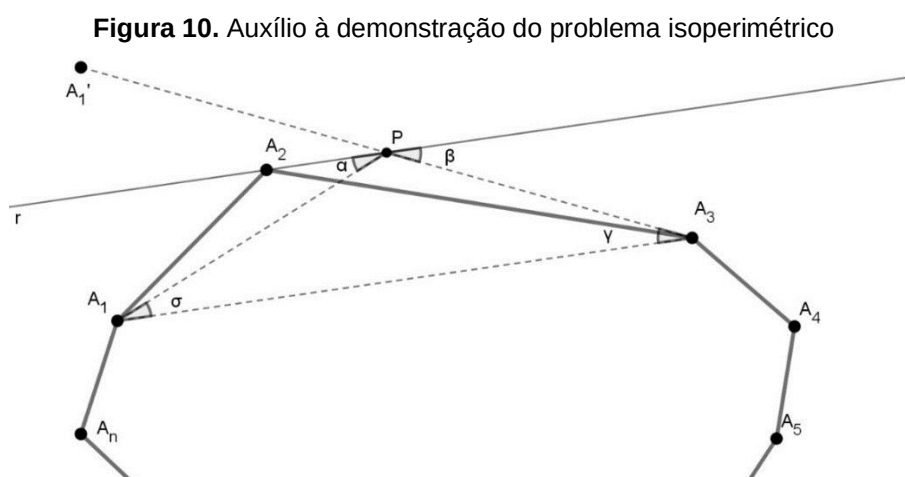
Historiadores da matemática, como Kline (1972), costumam recorrer à lenda romana de Dido para introduzir o problema isoperimétrico. De acordo com essa lenda, a princesa Dido, filha de um rei fenício, sentindo-se ameaçada em sua terra natal por uma disputa de terras que já tinha levado à morte seu marido, decidiu fugir com seus seguidores em busca de um lugar seguro para fundar uma nova cidade. Ao chegar no local em que hoje se situa a Tunísia, Dido negocia a compra das novas terras com o rei local, chamado Jarbas, que concorda com a venda sob a condição de que a extensão máxima de terras a ser negociada não seja maior do que uma área que pudesse ser cercada com a pele de um touro.

Diante da severa limitação, a sagacidade de Dido se revela em dois momentos. No primeiro a princesa e o seus seguidores decidem cortar a pele do touro em finas

tiras e depois emendá-las, uma a uma, formando uma corda comprida, capaz de cercar uma extensão bem maior do que aquela que aparentemente seria possível ao simplesmente estender a pele do touro. No segundo, Dido escolhe uma porção de terra ao longo da costa do mar Mediterrâneo e estende a corda de modo a formar uma semicircunferência, abrangendo assim a maior extensão de terra possível a ser cercada, fundando ali a cidade do Cartago.

A fim de demonstrar que a solução do problema se dá com a construção de uma circunferência, vejamos antes como as conclusões de Heron elencadas no *Catóptrica* nos ajudam a compreender que, dentre todos os polígonos convexos, os que abrangem a maior área com um comprimento dado são os regulares.

Seja o polígono $A_1A_2 \dots A_n$ um polígono de n lados, conforme ilustramos na Figura 10, e uma reta r , passando pelo vértice A_2 , paralela ao segmento que une os vértices A_1 e A_3 . O ponto A'_1 é obtido por meio da reflexão ortogonal do ponto A_1 em relação à r , e o ponto P é obtido por meio da intersecção entre o segmento A'_1A_3 com a reta r .



Fonte: elaborado pelo autor

Ao tomar como base as conclusões de Heron, é possível fazer algumas afirmações sobre essa construção:

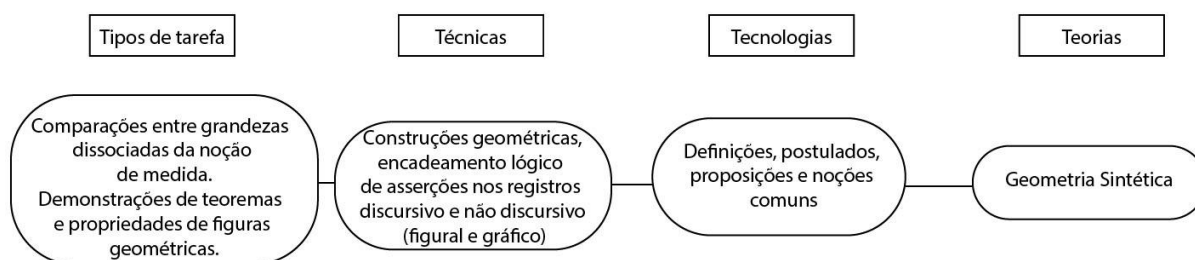
- De acordo com a 2ª lei da reflexão, os ângulos representados na figura por α e β são congruentes; da mesma forma que os são os ângulos σ e γ , alternos aos ângulos α e β , respectivamente.
- Como os ângulos σ e γ são congruentes, o triângulo A_1PA_3 é isósceles, ou seja, os lados A_1P e A_3P têm o mesmo comprimento.

- A menor distância entre o ponto A_1 e A_3 , passando por r é representada pela soma do comprimento dos segmentos A_1P e A_3P .
- Os triângulos $A_1A_2A_3$ e A_1PA_3 delimitam ambos a mesma medida de área, entretanto, o de menor comprimento é o triângulo A_1PA_3 .

Ao seguir esse mesmo raciocínio, considerando os lados A_2A_3 e A_3A_4 , A_3A_4 e A_4A_5 , e assim consecutivamente até $A_{n-2}A_{n-1}$ e $A_{n-1}A_n$, temos que os polígonos que delimitam a maior medida de área com um comprimento dado são aqueles que possuem todos os lados iguais, ou em outras palavras, os polígonos regulares.

Quanto mais aumentamos o número de lados de um polígono regular, mais suas dimensões se aproximam de uma circunferência, e a relação entre a área delimitada e o comprimento da figura pode ser expressa pela inequação $L^2 \geq 4\pi A$, que em outros termos, associa o quadrado do comprimento à área delimitada por essa figura, sendo que a igualdade na inequação ocorre somente no caso em que a figura é uma circunferência.

O que se verifica, ao analisar as praxeologias desenvolvidas nos últimos exemplos e que contêm as características do modelo epistemológico que chamaremos de M_2 , é que tanto nas demonstrações feitas por Euclides, como na classificação das cônicas feita por Apolônio e na resolução do problema isoperimétrico desenvolvida por Heron, a **comparação entre grandezas** (em todos esses casos envolvendo a comparação entre o comprimento de segmentos de reta, entre a medida de área delimitada por figuras geométricas e entre ângulos) se desenvolve a partir de tarefas ligadas à **demonstração de teoremas e de propriedades de figuras geométricas**. Nessas situações, em que as técnicas de contagem e de medição se mostram insuficientes, as tarefas chegam ao seu termo por meio de **construções geométricas**, em um **processo lógico-dedutivo** desenvolvido de forma simultânea nos registros figural e gráfico (por meio de representações gráficas dos entes matemáticos) e no registro discursivo (língua natural), que se inicia a partir de algumas premissas fundamentais, em que cada nova asserção se torna possível a partir de deduções das asserções anteriores e que formam um corpo composto de **definições, postulados, proposições e noções comuns** no âmbito da **geometria sintética**, conforme representado na Figura 11.

Figura 11. Componentes do modelo epistemológico M₂

Fonte: elaborado pelo autor

O emprego dessa técnica pode ser observado nos exemplos que apresentamos, como o que se refere à demonstração da desigualdade triangular. No Livro I (definição 20) dos *Elementos*, Euclides (2007) define triângulo isósceles como sendo aquele que tem apenas dois lados de mesmo comprimento. Um pouco mais à frente, na proposição 5, ele se apoia na noção comum de congruência, que afirma que “as coisas que se ajustam uma à outra são iguais entre si” (EUCLIDES, 2007, p.7, tradução nossa) e demonstra que os ângulos da base de um triângulo isósceles são congruentes. Essa última conclusão (sobre a congruência dos ângulos da base de um triângulo isósceles) é utilizada depois, na proposição 20, que como vimos, se refere à desigualdade triangular.

De forma análoga, ao apoiar-se na técnica de aplicação de área apresentada na proposição 46 e na relação que existe entre os lados de um triângulo retângulo, de acordo com o que é demonstrado na proposição 47 (Teorema de Pitágoras), Euclides (2007) mostra como construir um quadrado de mesma área que um retângulo dado, cujas consequências, como vimos, levam à demonstração da desigualdade entre a média aritmética e a média geométrica.

Como se pode observar nos exemplos, é suficiente ao comparar o comprimento de dois ou mais segmentos (ou ângulos, ou medidas de área), mostrar qual é maior (ou menor) sem que seja necessário estabelecer em que medida ou em que quantidade se dá a desigualdade entre as grandezas consideradas. Isso não significa, entretanto, que o modelo epistemológico das desigualdades que chamamos de **M₁** e que se apoia nas noções de contagem e medida deixe de existir. O que ocorre, de fato, é que os modelos coexistem, cada um relacionado à sua razão de ser, ao que o mantém vivo.

Nesses termos, não é verdade que o surgimento de um novo modelo suplante outro. No próximo exemplo veremos que mesmo após o surgimento das praxeologias

que caracterizam o modelo M_2 , o desenvolvimento das noções de **razão** e **proporção** se apoiam necessariamente na noção de medida, nos moldes do modelo M_1 .

Para os pitagóricos, toda grandeza podia ser associada a um número inteiro, ou a razão entre dois números inteiros. Ao comparar o comprimento de dois segmentos de reta, era de se supor que sempre haveria um terceiro segmento, cujo comprimento “caberia” uma quantidade inteira de vezes no primeiro segmento e uma quantidade inteira de vezes no outro. Essa convicção parece ter ficado abalada com a descoberta das grandezas chamadas “incomensuráveis”, ou seja, aquelas que não podiam ser expressas por meio de números inteiros ou da razão entre eles.

Encontramos no livro V dos *Elementos* as definições que introduzem a Teoria das Proporções, atribuída por historiadores da matemática ao grego Eudoxo de Cnido (? - 370 a.C), que traz em seu núcleo a capacidade de lidar com grandezas de qualquer natureza, não importando se são ou não racionais, o que representava até então um grande obstáculo para os matemáticos gregos.

As quatro primeiras definições (EUCLIDES, 2007, p. 130, tradução nossa) permitem a construção da noção de medida. Não se trata apenas de comparar uma grandeza com outra, mas de definir um meio pelo qual uma grandeza pode ser expressa por meio de sua relação com outra.

Na primeira definição temos que “uma grandeza faz parte de outra, a menor da maior, quando a maior pode ser medida pela menor”. Por se tratar de uma definição, não há demonstração ou prova que a justifique, mas em linguagem moderna, seria o mesmo que dizer que uma grandeza α faz parte de β se essa relação pode ser expressa como $\beta = m\alpha$, sendo m um número positivo.

Na segunda definição vemos que “a grandeza maior é múltipla da menor quando pode ser medida exatamente pela menor”, o que em outras palavras quer dizer que uma grandeza β é múltipla de uma grandeza de mesmo tipo α se a relação entre elas pode ser expressa por $\beta = m\alpha$, sendo m um número inteiro positivo.

A terceira definição introduz o conceito de “razão” ao afirmar que “uma razão é um certo tipo de condição com relação às medidas de duas magnitudes do mesmo tipo”. Em linguagem moderna é comum expressar a razão entre duas grandezas α e β por $\alpha:\beta$.

Na quarta definição, “diz-se que magnitudes têm uma razão entre si se ao serem multiplicadas são capazes de exceder uma à outra” que em linguagem moderna quer dizer que se existe uma razão entre uma grandeza α e uma grandeza β , então existem números m e n inteiros positivos tais que $m\alpha > \beta$ e $n\beta > \alpha$.

Após as definições de medida e de razão entre grandezas apresentadas nas definições de 1 a 4, o terreno parece propício para que seja então apresentada a quinta definição.

Quatro grandezas são ditas estar na mesma razão, a primeira em relação à segunda, e a terceira em relação à quarta quando iguais múltiplos da primeira e da terceira ou são ambos maiores, ou são iguais, ou são ambos menores a iguais múltiplos da segunda e da quarta grandeza, sendo respectivamente tomados na mesma ordem. (EUCLIDES, 2007, p.130, tradução nossa).

É preciso observar como Eudoxo contorna a controversa discussão sobre a incomensurabilidade ao extrapolar a noção de igualdade e apoiar-se nos termos “maior que” e “menor que” ao estabelecer a razão entre grandezas, provendo os fundamentos para a análise matemática dos números reais, que viria a ser desenvolvida séculos depois por Dedekind e Weierstrass.

O que essa definição nos diz é que sendo a razão entre a e b (irracionais ou não) igual à razão entre c e d (irracionais ou não), se multiplicarmos a e c por qualquer inteiro positivo m , e se multiplicarmos b e d por qualquer inteiro positivo n , teremos que a razão entre ma e nb será igual à razão entre mc e nd .

Em notação moderna isso quer dizer que se $a:b :: c:d$ então $ma:nb :: mc:nd$.

Da mesma forma, se a razão entre a e b for maior que a razão entre c e d , teremos que a razão entre ma e nb será maior que a razão entre mc e nd , o que implica afirmar que se $a:b > c:d$ então $ma:nb > mc:nd$, ou ainda, se a razão entre a e b for menor que a razão entre c e d , então a razão entre ma e nb será menor que a razão entre mc e nd , ou seja, se $a:b < c:d$ então $ma:nb < mc:nd$.

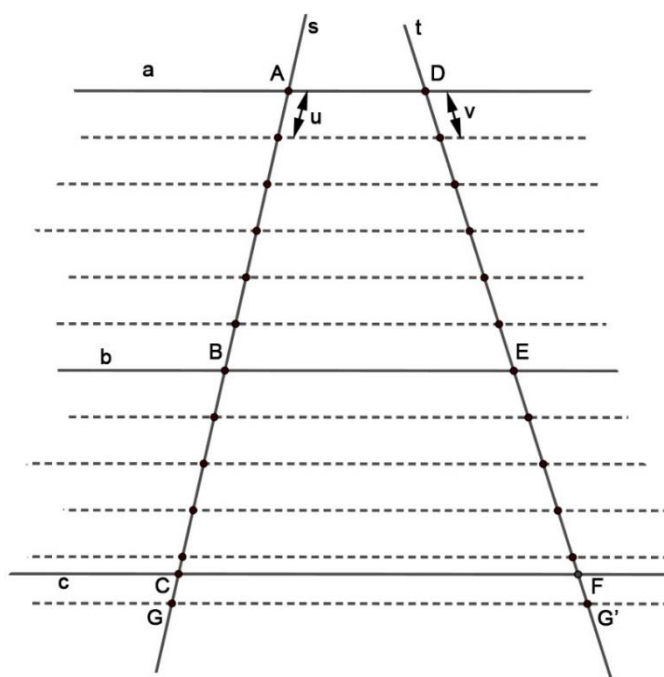
De acordo com o Teorema de Tales, atribuído ao filósofo e matemático grego Tales de Mileto (? - 600 a.C.), quando duas retas transversais cortam um feixe de retas paralelas, as medidas dos segmentos delimitados nas transversais são proporcionais. É curioso observar como esse teorema, demonstrado por outros meios bem antes da época em que viveu Eudoxo, pode, ao mesmo tempo ser demonstrado

pela 5ª definição da teoria das proporções enunciada nos *Elementos*, como contribuir para sua compreensão dessa definição.

Suponhamos, conforme a representação da Figura 12, que as retas a , b e c sejam paralelas e que ao intersectarem s e t , determinem os pontos A , B , C , D , E e F .

Ao dividir o segmento AB em n partes iguais, determinamos um segmento de comprimento u , logo, podemos dizer que o comprimento de AB é igual a n vezes o comprimento u , ou seja, $AB = nu$.

Figura 12. Auxílio à demonstração do Teorema de Tales, supondo $BC < BG$



Fonte: elaborado pelo autor

Ao marcar o segmento BC m vezes, tomando como unidade de medida o comprimento do segmento u , determinamos o ponto G , na extremidade da última marcação, de forma que $BG = mu$.

Em seguida, a partir de cada marcação feita na reta s , traçamos retas paralelas aos segmentos a , b e c , que ao intersectarem a reta t , irão dividir o segmento DE em n partes iguais de medida v , e o segmento EG' em m partes iguais de medida v .

Vemos que como $AB = nu$ e $BG = mu$ então $mAB = mnu$ e $nBG = mnu$, logo $mAB = nBG$.

Da mesma forma, vemos que como $DE = nv$ e $EG' = mv$, então $mDE = mnv$ e $nEG' = mnv$, logo $mDE = nEG'$.

Conclui-se que no caso em que $BC = BG$, ou seja, quando AB e BC podem ser medidos pela mesma unidade (são comensuráveis), temos que quando mAB é igual à nBC , sempre ocorrerá que mDE seja também igual à nEF , ou em linguagem simbólica:

$$mAB = nBC \rightarrow mDE = nEF$$

No caso em que $BG < BC$, temos que $nBG < nBC$, e como $mAB = nBG$, então $mAB < nBC$. Do mesmo modo, teremos $nEG' < nEF$, e como $mDE = nEG'$, então $mDE < nEF$. Nesse caso, conclui-se que:

$$mAB < nBC \rightarrow mDE < nEF$$

De forma análoga, é possível demonstrar o terceiro caso, em que $BG > BC$, e concluir que:

$$mAB > nBC \rightarrow mDE > nEF$$

De uma forma distinta do que ocorre na demonstração da desigualdade triangular, ou na demonstração da desigualdade entre as médias, que são levadas à cabo no âmbito da geometria sintética sem o recurso à noção de medida, de acordo com as características do modelo epistemológico que chamamos de M_2 , a comparação entre grandezas que se observa na demonstração do Teorema de Tales, ao apoiar-se na razão entre o comprimento de segmentos de reta torna imprescindível o recurso à noção de medida, nos termos estabelecidos por Eudoxo e de acordo com as praxeologias que formam o modelo que chamamos de M_1 . Nesse sentido, as tarefas que compõem M_1 podem ser em alguns casos resolvidas por meio de técnicas de contagem (como ocorre ao determinar a quantidade inteira de objetos que faz com que uma coleção de objetos seja maior do que a outra) e em outros (como por exemplo a que se apresenta diante da necessidade de comparar o comprimento de segmentos de reta), desenvolvidas por meio de técnicas se apoiam na medição.

Além das definições que fundamentam a teoria das proporções, atribui-se a Eudoxo o desenvolvimento do Método da Exaustão, considerado como uma resposta da escola platônica (Eudoxo era discípulo de Platão) aos paradoxos de Zenão.

O método admite que uma grandeza pode ser dividida indefinidamente e a proposição que serve de base ao método assegura que se de uma grandeza subtrai-se uma parte não menor do que a sua metade, e se da parte restante subtrai-se uma

parte não menor do que a sua metade, e assim sucessivamente, restará por fim uma grandeza menor do que qualquer outra do mesmo tipo.

Essa ideia, que séculos mais tarde serviria como base para o desenvolvimento de conceito de limite, permitiu que Arquimedes fizesse a estimativa da razão entre o comprimento de uma circunferência e seu diâmetro¹³. Arquimedes sabia que o comprimento de uma circunferência é maior do que o perímetro de um polígono inscrito nessa circunferência, e menor do que o de um polígono circunscrito. Ao supor polígonos regulares de 96 lados, um inscrito e outro circunscrito, conseguiu expressar o valor de π pela desigualdade $\frac{223}{71} < \pi < \frac{220}{70}$.

A aproximação feita por Arquimedes, no entanto, nos parece mais como uma iniciativa própria ao caráter investigativo dos gregos do que uma demanda surgida a partir de necessidades do dia a dia. Sabe-se que para efeitos práticos, os babilônios consideravam 3 como o valor de π . Sabe-se igualmente que em um dos problemas do papiro de Rhind, Ahmes assume que a área de um campo circular com diâmetro de 9 unidades é igual à área de um quadrado com lado de 8 unidades, que corresponde a um valor aproximado de π igual à $3\frac{1}{6}$.

Nesses termos, em que a busca pela exatidão vai além da necessidade prática, a procura por valores aproximados parece ter encontrado nas desigualdades a ferramenta propícia para esse tipo de tarefa. De forma similar ao que acontecia com a busca pelo valor aproximado de π , é possível verificar na antiguidade a mesma atenção quanto ao cálculo de raízes quadradas.

Um dos mais antigos e conhecidos registros desse tipo de cálculo é o que se encontra gravado em caracteres cuneiformes em uma tábua de argila, conhecida como YBC 7289 (*Yale Babylonian Collection*). Embora a data de sua confecção seja imprecisa, estima-se que tenha sido escrita por um aprendiz de escriba entre os séculos II e III a.C. (FOWLER e ROBSON, 1998).

O algoritmo utilizado, conhecido como o Método Babilônico, consiste em considerar um número $a \in \mathbb{R}$, estritamente positivo e a partir de seguidas iterações,

¹³ O uso da letra grega π para designar a razão entre o comprimento da circunferência e seu raio é em grande parte devido a Euler, embora apareça pela primeira vez um ano antes de seu nascimento, em 1706, na *Synopsis Palmariorum Matheseos*, de William Jones. (BOYER e MERZBACH, 1991).

calcular o intervalo aproximado, de forma tão precisa quanto se faça necessário. A fim de mostrar como o algoritmo se desenvolve, apresentamos em notação moderna o cálculo do valor aproximado de $\sqrt{5}$.

Se considerarmos que $a < \sqrt{5}$, teremos $\frac{1}{a} > \frac{1}{\sqrt{5}}$, que implica $\frac{5}{a} > \frac{5}{\sqrt{5}}$, ou seja, $a < \sqrt{5} < \frac{5}{a}$.

Se por outro lado, considerarmos que $a > \sqrt{5}$, teremos $\frac{1}{a} < \frac{1}{\sqrt{5}}$, que implica $\frac{5}{a} < \frac{5}{\sqrt{5}}$, ou seja, $\frac{5}{a} < \sqrt{5} < a$.

O estudo da diferença entre a média $\frac{1}{2}\left(a + \frac{5}{a}\right)$ e $\sqrt{5}$ nos mostra que:

$$\frac{1}{2}\left(a + \frac{5}{a}\right) - \sqrt{5} = \frac{1}{2}\left(a + \frac{5}{a} - 2\sqrt{5}\right) = \frac{1}{2a}(a^2 + 5 - 2a\sqrt{5})$$

Como $(a^2 + 5 - 2a\sqrt{5}) = (a - \sqrt{5})^2$, então o produto $\frac{1}{2a}(a - \sqrt{5})^2$ será sempre positivo, ou seja, que $\frac{1}{2}\left(a + \frac{5}{a}\right) > \sqrt{5}$.

Se partirmos de $a = 1$, podemos estabelecer a seguinte aproximação de $\sqrt{5}$:

$$1 < \sqrt{5} < \frac{1}{2}\left(1 + \frac{5}{1}\right), \text{ que equivale à } 1 < \sqrt{5} < 3.$$

Por outro lado, como meio de estabelecer uma aproximação mais precisa, se adotarmos um valor de a , tal que $a > \sqrt{5}$, como $a = 3$, teremos que $\frac{5}{a} = \frac{5}{3}$, ou seja, que $\frac{5}{3} < \sqrt{5} < 3$. Um novo cálculo da média entre $\frac{5}{3}$ e 3 nos leva a um intervalo ainda mais preciso: $\frac{5}{3} < \sqrt{5} < \frac{7}{3}$.

Ao repetir a iteração por algumas vezes, podemos estabelecer intervalos cada vez mais próximos de $\sqrt{5}$, como se observa no Quadro 5.

A preocupação em encontrar aproximações de valores de raízes quadradas também pode ser observada em antigos documentos encontrados nos países orientais, como nos revela um dos mais importantes trabalhos na história da matemática da China (BOYER e MERZBACH, 1991), chamado de *Jiuzhang suanshu*, que em uma tradução livre significa “Os Nove Capítulos sobre a arte matemática”. As questões apresentadas no livro, que reúne procedimentos de resolução de problemas aritméticos, algébricos e geométricos, concentram-se sobre temas relacionados à

administração da cidade, à agrimensura, à cobrança de impostos e à determinação dos salários de servidores públicos de acordo com a função desempenhada.

Quadro 5. Aproximações de $\sqrt{5}$

a	$\frac{5}{a}$	Média entre a e $\frac{5}{a}$	Aproximação
1	5	3	$1 < \sqrt{5} < 3$
3	$\frac{5}{3}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{5}{3} < \sqrt{5} < \frac{7}{3}$
$\frac{7}{3}$	$\frac{15}{7}$	$\frac{47}{21}$	$\frac{15}{7} < \sqrt{5} < \frac{47}{21}$
$\frac{47}{21}$	$\frac{105}{47}$	$\frac{2207}{987}$	$\frac{105}{47} < \sqrt{5} < \frac{2207}{987}$
$\frac{2207}{987}$	$\frac{4935}{2207}$	$\frac{4870847}{2178309}$	$\frac{4935}{2207} < \sqrt{5} < \frac{4870847}{2178309}$

Fonte: elaborado pelo autor

Embora não haja consenso entre os especialistas, a compilação dos nove capítulos parece ter sido concluída por volta do Século I a.C., porém apenas os 5 primeiros resistiram à passagem do tempo. O original chinês do que se conhece hoje em dia como *Os Nove Capítulos* tomou por base esses 5 primeiros capítulos além de uma diversidade de citações de uma enciclopédia chinesa do Século XV (VOGEL, 1968).

No capítulo 4 encontram-se 5 problemas que se referem ao cálculo do comprimento dos lados de um terreno quadrado conhecendo-se a sua área, que implica, em outros termos, fazer o cálculo da raiz quadrada do número que corresponde à medida da área. Embora os problemas apresentados no livro levem sempre ao encontro de números inteiros ($\sqrt{55225} = 235$, $\sqrt{25281} = 159$ ou $\sqrt{71824} = 268$, que correspondem respectivamente aos problemas 12, 13 e 14), o método apresentado para o cálculo apoia-se nas noções de desigualdade e mostra-se eficiente até mesmo para aproximações de raízes quadradas irracionais.

Vejamos, em linguagem atual, como o método descrito nos *Nove Capítulos* pode ser utilizado, por exemplo, para o cálculo aproximado de $\sqrt{23}$. Suponhamos $n = \sqrt{23}$, de tal forma que n seja composto pela soma de um número conhecido a e outro número b desconhecido, sendo ambos $a \geq 0$ e $b \geq 0$, de tal forma que $n^2 = (a + b)^2 = 23$.

Ao tomarmos $a = 4$ (levamos em consideração para essa escolha o fato de que $4^2 < 23 < 5^2$) chegamos a $(4 + b)^2 = 23$, ou seja:

$$16 + 8b + b^2 = 23$$

$$b(8 + b) = 7$$

Uma das soluções da equação do segundo grau pode ser obtida pelo quociente $8 + b = \frac{7}{b}$, que nos leva à inequação $8 \leq \frac{7}{b}$, ou $b \leq \frac{7}{8}$, visto que $b \geq 0$.

Outra solução pode ser obtida pelo quociente $b = \frac{7}{8+b}$, que nos leva à $b \geq \frac{7}{8+\frac{7}{8}}$ visto que $b \leq \frac{7}{8}$.

Sendo assim, temos que o intervalo que compreende o valor n correspondente à $\sqrt{23}$ é tal que $4 + \frac{7}{8+\frac{7}{8}} \leq n \leq 4 + \frac{7}{8}$, ou $\frac{47}{10} \leq n \leq \frac{49}{10}$, se considerarmos a aproximação na casa dos décimos.

O procedimento pode ser repetido quantas vezes se queira, até que se alcance um intervalo, de acordo com a necessidade, suficientemente próximo do valor procurado. Por exemplo, uma segunda iteração do algoritmo, tomando $a = \frac{47}{10}$ nos leva à um valor ainda mais preciso, no intervalo $\frac{4795}{1000} \leq n \leq \frac{4796}{1000}$, se considerarmos a aproximação na casa dos milésimos.

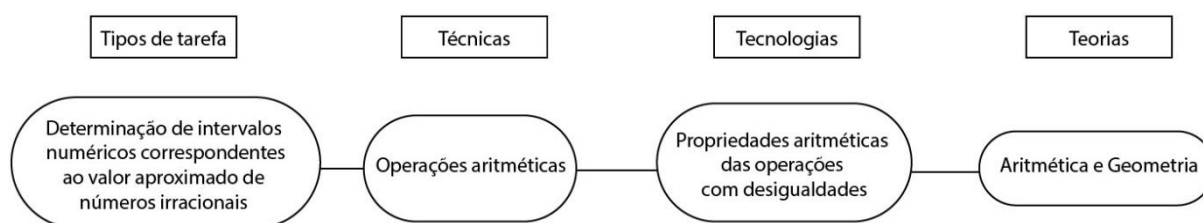
De uma forma distinta dos modelos epistemológicos identificados anteriormente, em que os tipos de tarefa se pautavam pela comparação entre duas ou mais grandezas, apoiados ou não na noção de medida e que compõem os modelos que chamamos respectivamente de M_1 e M_2 , o que vemos nos últimos exemplos é a busca por valores aproximados de números irracionais correspondentes à relação entre grandezas.

Isso se observa, como vimos, no caso da procura pelo valor de π , que expressa a relação entre o comprimento e o diâmetro de uma circunferência, ou no cálculo aproximado da raiz quadrada da medida de área delimitada por um quadrado, que se relaciona com a medida de comprimento dos lados desse quadrado.

Nesse novo modelo epistemológico, que chamaremos de M_3 , conforme representamos na Figura 13, os tipos de tarefa são caracterizados pela noção de

intervalo numérico e pela necessidade de **aproximação** (a nosso ver mais ligada às contingências internas da matemática do que demandada por questões práticas). As técnicas de resolução apoiam-se em **operações aritméticas** usadas tanto para o cálculo da medida de área de figuras planas (no caso da aproximação do valor de π) como dos valores aproximados das raízes irracionais, justificadas tecnologicamente pelas **propriedades aritméticas das operações com desigualdades**, como a que permite que se somem termos semelhantes à ambos os lados da expressão (propriedade da monotonia da adição) ou que ambos os lados sejam multiplicados por termos semelhantes não negativos (propriedade da monotonia parcial da multiplicação), sem que se altere o seu sentido.

Figura 13. Componentes do modelo epistemológico M_3



Fonte: elaborado pelo autor

À exceção das desigualdades clássicas, mais notadamente a desigualdade triangular, a desigualdade das médias e a desigualdade isoperimétrica, além de tentativas de aproximação como as que apresentamos, muito pouco se observa do recurso às desigualdades na antiguidade (FINK, 2000). Esse hiato persistiu até o surgimento das primeiras noções de álgebra, que após ter sido desenvolvida pelos árabes, chegara finalmente à Europa.

Amparado por esses novos saberes e favorecido pelo uso da notação simbólica introduzida por Diofanto, o matemático francês Pierre de Fermat (1601 - 1665) aprimora um método que já era conhecido desde os tempos de Euclides para a resolução de equações diofantinas e lhe dá o nome de *Méthode de Descente Infinie*, ou “Método da Descida Infinita”, como tem sido traduzido por autores da língua portuguesa.

Ao apoiar-se em propriedades algébricas associadas às desigualdades, o método se baseia na redução ao absurdo¹⁴ ao utilizar números inteiros cada vez

¹⁴ Redução ao absurdo é um tipo de argumentação lógica na qual se assume que uma ou mais hipóteses são verdadeiras, a partir das quais se chega à uma consequência impossível (absurda). De acordo com o princípio lógico de não contradição, a hipótese original não pode ser verdadeira e falsa

menores a cada iteração que é feita, conduzindo a um resultado impossível na medida em que se avança na “descida”. Em Boyer e Merzbach (1991) podemos verificar a utilização desse método na demonstração de que $\sqrt{3}$ não pode ser expresso como a razão entre dois números inteiros.

Inicialmente, admitamos de forma contrária ao que se quer provar, que $\sqrt{3} = \frac{a_1}{b_1}$, tal que a_1 e b_1 sejam números inteiros positivos e $a_1 > b_1$.

É sabido que:

$$(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1) = 2$$

Portanto,

$$\sqrt{3} + 1 = \frac{2}{\sqrt{3} - 1}$$

$$\sqrt{3} = \frac{2}{\sqrt{3} - 1} - 1 = \frac{2 - (\sqrt{3} - 1)}{\sqrt{3} - 1} = \frac{3 - \sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1}$$

Substituindo $\sqrt{3} = \frac{a_1}{b_1}$ no termo à direita do sinal de igualdade, temos:

$$\sqrt{3} = \frac{3 - \frac{a_1}{b_1}}{\frac{a_1}{b_1} - 1} = \frac{\frac{3b_1 - a_1}{b_1}}{\frac{a_1 - b_1}{b_1}} = \frac{3b_1 - a_1}{a_1 - b_1}$$

Como $1 < \sqrt{3} < 2$, e como $a_1 > b_1$, para que $\sqrt{3}$ seja racional é necessário que tanto $3b_1 - a_1$ como $a_1 - b_1$ sejam inteiros positivos e que $3b_1 - a_1 > a_1 - b_1$.

Se substituirmos $3b_1 - a_1 = a_2$ e $a_1 - b_1 = b_2$, tal que $a_2 > b_2$, podemos continuar o raciocínio e reescrever a equação $\sqrt{3} = \frac{a_1}{b_1}$ como $\sqrt{3} = \frac{a_2}{b_2}$.

Esse processo pode ser repetido indefinidamente, nos levando a supostos números inteiros a_n e b_n cada vez menores a cada iteração, sem nunca encontrá-los efetivamente, negando o que foi admitido inicialmente, ou seja, negando que exista qualquer possibilidade de que $\sqrt{3}$ possa ser escrita como a razão entre dois números inteiros.

ao mesmo tempo, e como a assunção de sua validade se reduz em um absurdo, conclui-se que só pode ser falsa.

Já com pleno domínio das operações algébricas, Newton (1642 - 1727) parece ter sido um dos primeiros, depois de Fermat, a utilizar as noções de desigualdade para apresentar e demonstrar teoremas. Isso pode ser observado tanto no *Método das fluxões e séries infinitas* (que viria a se tornar uma de suas principais obras, estabelecendo os fundamentos do que conhecemos hoje como o cálculo diferencial e integral) quanto em uma outra obra, chamada de *Arithmetica Universalis*, baseada nas notas de aulas ministradas por Newton em Cambridge e que compreende fundamentos de álgebra, métodos de extração de raízes e resolução de equações.

Nessa última obra encontramos uma proposição que viria a ser conhecida como “desigualdade de Newton”, relacionada aos coeficientes de funções elementares simétricas. A fim de contribuir com um exemplo a respeito de que se entende por funções elementares simétricas, suponhamos inicialmente uma expressão que represente o produto entre diferentes binômios.

$$(x + a_1)(x + a_2)(x + a_3) \dots (x + a_n)$$

Ao desenvolver a multiplicação entre os diferentes termos é possível verificar que cada um dos coeficientes p pode ser obtido a partir de operações de adição e de multiplicação das raízes $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$, conforme as regras abaixo:

$$p_1 = a_1 + a_2 + a_3 \dots + a_n$$

$$p_2 = a_1a_2 + a_1a_3 + \dots + a_{n-1}a_n$$

$$p_3 = a_1a_2a_3 + a_1a_2a_4 + a_1a_2a_5 \dots + a_{n-2}a_{n-1}a_n$$

$$p_n = a_1a_2a_3 \dots a_n$$

Essa propriedade permite então que se reescreva o polinômio $(x + a_1)(x + a_2)(x + a_3) \dots (x + a_n)$ por meios dos coeficientes $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ da seguinte forma:

$$x^n + p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + p_3x^{n-3} \dots p_n$$

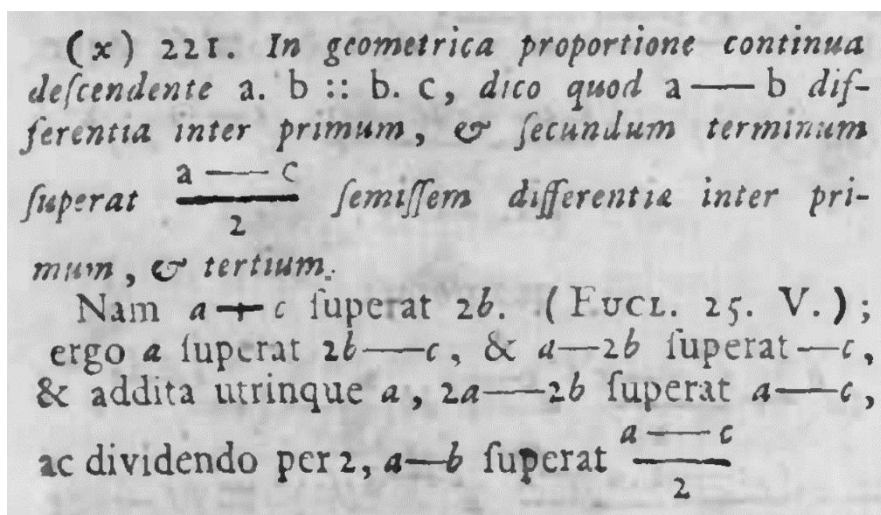
O que Newton mostrou é que dado um número inteiro r , tal que $1 < r < n$, ao tomar três coeficientes em sequência, o produto entre os coeficientes extremos será sempre menor do que o quadrado do coeficiente central, que em linguagem atual pode ser expresso por $(p_{r-1})(p_{r+1}) < p_r^2$, a menos que todas as raízes $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ do polinômio sejam iguais.

Anos depois, a partir das conclusões de Newton, o escocês Colin Maclaurin (1698 - 1746) observou que $p_1 > \sqrt{p_2} > \sqrt[3]{p_3} > \sqrt[4]{p_4} > \dots > \sqrt[n]{p_n}$. Essa relação entre os coeficientes ficou conhecida como “desigualdade de Maclaurin” e a relação entre os extremos da sequência se relaciona à já conhecida desigualdade entre as médias.

Embora não usasse os símbolos que são conhecidos hoje para designar “maior que” e “menor que” é possível verificar que Newton se apoiava amplamente nas propriedades das desigualdades na demonstração de teoremas.

Conforme se observa na reprodução da Figura 14, Newton (1761) usa a expressão latina “*superat*” para indicar que o termo enunciado antes é maior do que o que é citado depois (em outras passagens usa igualmente “*major quam*” para indicar “maior que” e “*minor quam*” para designar “menor que”).

Figura 14. Uma demonstração de proporcionalidade contínua



Fonte: Newton (1761, p. 87)

Nesse exemplo, Newton (1761) mostra que em uma proporção geométrica contínua¹⁵ decrescente, $a : b :: b : c$, a diferença entre o primeiro e o segundo termo $a - b$ é maior que (*superat*) a semidiferença entre o primeiro e o último termo $\frac{a - c}{2}$.

De acordo com a demonstração apresentada, como $a + c$ é maior que $2b$ (a proposição 25 do Livro V dos *Elementos* assegura isso), então a é maior que $2b - c$. Da mesma forma, temos que $a - 2b$ é maior que $-c$. Ao somar a em ambos os lados

¹⁵ Proporção contínua é aquela que se observa nos casos em que os meios de uma proporção são iguais. Afirmar que pp, pq e qq estão em proporção contínua significa que $pp : pq :: pq : qq$.

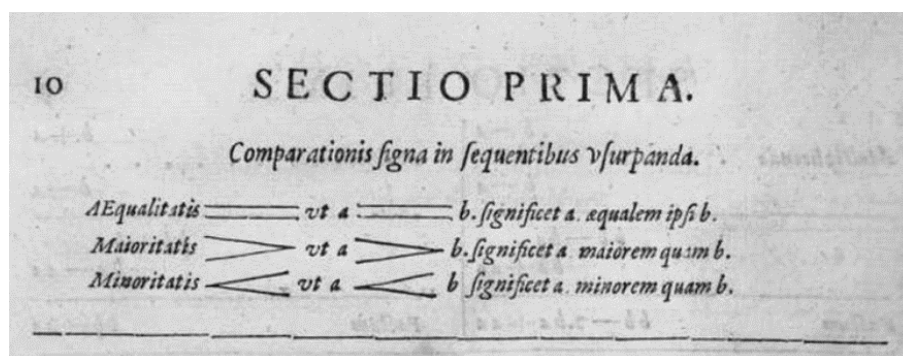
temos que $2a - 2b$ é maior que $a - c$, e finalmente, ao dividir ambos os lados por dois, vemos que $a - b$ é maior que $\frac{a-c}{2}$.

O uso da linguagem algébrica é relativamente recente na história da matemática. De acordo com Roque (2012), considera-se que a primeira ocorrência da utilização de símbolos para representar expressões aritméticas tenha ocorrido no século III a.C, na *Arithmetica* de Diofanto, que parece ter sido o pioneiro no caminho rumo a notação algébrica, por meio de uma linguagem simbólica baseada em técnicas estenográficas, com abreviações para a incógnita, para potências da incógnita até a de expoente seis, para operações de adição e subtração e para a igualdade.

Entretanto, a notação moderna para a representação dos sinais que designam “maior que” e “menor que” surgiu bem depois, no livro *Artis analyticae praxis*, do astrônomo e matemático inglês Thomas Harriot (1560 - 1621), conforme se observa na Figura 15. De acordo com Seltman e Goulding (2007), responsáveis pela tradução da referida obra para o inglês moderno, a álgebra apresentada por Harriot foi a primeira a ser totalmente expressa em notação simbólica, por meio do uso de letras e sinais de operação.

Embora esses símbolos não tenham sido adotados de forma imediata pelos matemáticos contemporâneos de Harriot (como Newton, que usava os termos “*major quam*” e “*minor quam*”), é possível observar que em 1655, John Wallis, o primeiro a definir as cônicas como curvas correspondentes à equações do segundo grau em x e em y , já usava a notação proposta por Harriot para designar desigualdades em seu tratado *De Sectionibus Conicis*.

Figura 15. Símbolos para representação de desigualdades sugeridos por Harriot



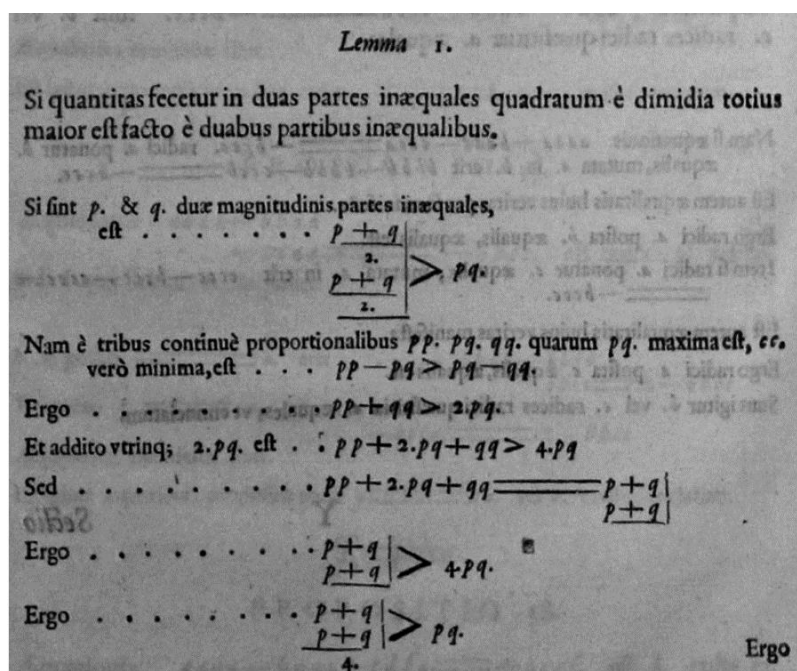
Fonte: Harriot (1631, p. 10)

Para criar os símbolos que representam as desigualdades, Harriot apoiou-se na notação utilizada para o símbolo da igualdade, proposta por Robert Recorde (1510

- 1558), representado por dois segmentos de reta, paralelos e de mesmo comprimento. Recorde justificou sua escolha ao afirmar que “não pode haver duas coisas mais iguais” (Eves, 2004, p.301) do que dois segmentos de retas paralelos.

A desigualdade entre as médias, já referida anteriormente nos trabalhos de Euclides e Heron reaparece na obra de Harriot, por meio da abordagem algébrica, no Lema 1 da quinta seção. Apesar de não afirmar que se trata da demonstração da desigualdade entre as médias, Harriot afirma que se uma quantidade é dividida em duas partes desiguais, o quadrado da metade do total é maior do que o produto entre as duas partes desiguais.

Figura 16. Demonstração das desigualdades entre as médias, por Harriot (1631)



Fonte: Harriot (1631, p. 78)

Como se observa na Figura 16, Harriot (1631) representava a multiplicação entre dois termos sobrepondo um ao outro, delimitando-os por meio de um traço vertical à esquerda e um traço horizontal abaixo dos termos, como representamos na Figura 17, que corresponde em notação atual à desigualdade $\left(\frac{p+q}{2}\right)^2 > pq$.

Figura 17. Multiplicação de termos em Harriot (1631)

$$\left| \begin{array}{c} \frac{p+q}{2} \\ \frac{p+q}{2} \end{array} \right| > pq$$

Fonte: Harriot (1631, p. 78)

A demonstração do lema apoia-se no fato de que se três quantidades pp , pq e qq estão em proporção contínua, de modo que pp seja a maior e qq a menor, então é verdade que $pp - pq > pq - qq$.

Logo:

$$pp + qq > 2pq$$

Ao somar $2pq$ em ambos os lados da desigualdade, temos

$$pp + 2pq + qq > 4pq$$

Como $pp + 2pq + qq$ corresponde à $(p + q)^2$, podemos reescrever a inequação como:

$$(p + q)^2 > 4pq$$

$$\frac{(p + q)^2}{4} > pq$$

E finalmente por $\left(\frac{p+q}{2}\right)^2 > pq$, conforme se queria demonstrar.

Ao considerarmos que $\frac{p+q}{2}$ corresponde à média aritmética entre dois números, e que $\sqrt{pq}$ corresponde à média geométrica desses mesmos números, ao extrair a raiz quadrada dos dois termos, a desigualdade apresentada por Harriot pode ser reescrita para representar a desigualdade entre essas médias, ou seja, $\frac{p+q}{2} > \sqrt{pq}$, sempre que p e q forem diferentes um do outro.

De um ponto de vista epistemológico, que em outros termos implica debruçar-se sobre as questões que interagem na gênese de um saber, julgamos necessário procurar compreender como os saberes associados à noção de função se desenvolvem e de que forma o seu desenvolvimento interfere nas praxeologias associadas às desigualdades e às inequações.

Ao investigar o contexto histórico que antecede o desenvolvimento do conceito de função é possível observar uma Europa mergulhada em crises e que encontra na navegação a solução tanto para a exploração de novas rotas comerciais com os países do oriente como um recurso para expandir seu território em terras de além-mar. Nesse sentido, saber calcular com precisão o movimento dos astros, muito além de mera curiosidade científica, consistia em um problema prático e urgente frente à

necessidade de navegar a distâncias cada vez mais longas e cada vez mais distantes da costa.

O modelo de movimento elíptico dos planetas em torno do Sol, proposto por Kepler, aproximava-se mais da realidade do que o que era defendido por Copérnico (que considerava as órbitas circulares), mas ainda assim não pode ser considerado absolutamente correto, a menos que as influências mútuas entre os astros se restringissem apenas ao Sol e a um único planeta no espaço. A teoria heliocêntrica, defendida tanto por Kepler quanto por Galileu contribuiu para a compreensão de alguns fenômenos ligados à diferença que se observa entre o movimento dos planetas e das estrelas, mas ainda assim, não conseguia explicar por que os objetos não se desprendiam da Terra em direção ao Sol, que de acordo com essa nova concepção, ocupava o centro do universo.

De acordo com Kline (1972), há uma relação intrínseca entre as questões ligadas ao movimento dos corpos e o desenvolvimento do conceito de função.

As regularidades que se observam em alguns tipos de movimento parecem ter chamado a atenção de Galileu, seja ao estudar as relações entre o caminho percorrido por um pêndulo, o período de oscilação e a extensão do fio que o sustenta, seja ao buscar as conexões entre o alcance máximo que se pode obter com o lançamento de um projétil, seu percurso, sua altura e sua velocidade.

Galileu tratava essas relações com base no conceito de proporcionalidade. Isso pode ser observado por exemplo, ao afirmar que a relação entre a capacidade de dois cilindros retos de mesma superfície, sem considerar a base, é inversamente proporcional à altura dos cilindros (existe uma razão entre a capacidade e altura dos cilindros de mesma superfície, de forma que quanto maior a altura, menor a capacidade do cilindro).

A física que se sucedeu aos estudos de Galileu passou a considerar grandezas dependentes de outras, que eram variáveis, como por exemplo, ao estabelecer a razão entre o espaço descrito por um corpo que cai a partir do repouso e o intervalo de tempo que o objeto leva para percorrer esse espaço, concluindo que o primeiro (o espaço) é proporcional ao quadrado do segundo (o intervalo de tempo).

Nesse contexto, as equações, tidas como um método analítico para que se encontrasse um valor incógnito passaram a apresentar a relação entre duas ou mais

grandezas distintas, de forma que a variação em uma delas ocasionasse variações nas outras.

De acordo com Roque (2012, p. 299), a primeira definição formal de função do modo como conhecemos hoje em dia foi dada por Johan Bernoulli, ao expressar “quantidades formadas a partir de quantidades indeterminadas e constantes”. Em um artigo de 1718 para a Academia de Ciências de Paris, Bernoulli usou a letra grega φ para dar nome a uma função, escrevendo o argumento sem os parênteses: φx .

Euler, discípulo de Bernoulli, define uma quantidade variável como uma quantidade indeterminada que pode receber qualquer valor, sejam números inteiros, racionais, fracionários, transcendentos, irracionais ou imaginários, além do próprio zero. Nessa perspectiva, uma função seria composta de um valor constante e de uma quantidade variável, combinados por meio da aplicação de uma quantidade indefinida de operações algébricas de soma, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação. Os estudos de Bernoulli e de Euler se diferenciavam. Enquanto o primeiro parecia privilegiar a análise apoiada na geometria, o segundo restringia-se à análise pura, dispensando os recursos geométricos.

Para Euler, a continuidade estava relacionada à invariabilidade da função, ou seja, uma função que admitisse uma expressão analítica diferente para diferentes intervalos do domínio era considerada descontínua. Essa concepção está ligada principalmente à definição de função pela fórmula. Em outras palavras, de acordo com esse entendimento, se há mais de uma fórmula para definir a função, então ela é descontínua.

Existem funções que do ponto de vista defendido por Euler deveriam ser consideradas descontínuas, embora as consideremos atualmente como contínuas, ao levar em conta a definição atual de continuidade, que considera uma função descontínua em um dado intervalo se os limites laterais da função para um valor de x nesse intervalo são diferentes um do outro, ou se o limite da função para esse valor de x (no caso em que os limites laterais são iguais) é diferente do valor da função nesse ponto.

De uma perspectiva histórica, ao analisar o desenvolvimento da ciência, e particularmente da matemática, durante os séculos XVI e XVII, podemos destacar, além do desenvolvimento da noção de função, o ressurgimento do método analítico,

de uma forma distinta daquela feita pelos gregos, que era estreitamente ligada à geometria. Talvez a diferença mais importante entre a abordagem dos gregos e a que se nota no século XVII, que tem François Viète (1540 - 1603) como um de seus precursores, tenha sido promover a aproximação entre o método analítico e a álgebra.

Viète, influenciado por traduções de Pappus e de Diofanto, define a análise como “a suposição daquilo que procuramos como se estivesse concedido, para chegar a uma verdade procurada por meio das consequências” e distingue-a da síntese que “é a suposição de uma coisa concedida para chegar ao conhecimento daquilo que procuramos por meio das consequências” (VIÈTE, 1588 apud ROQUE, 2012, p.236). Nesse contexto, quantidades e grandezas desconhecidas passaram a ser tratadas de forma algébrica, sendo substituídas por símbolos que eram operados matematicamente como se fossem valores conhecidos.

Já nos idos do Século XVIII a revolução francesa provocaria mudanças no sistema de ensino, com consequências à forma de se fazer matemática. Os ideais de racionalidade eram valorizados e dessa forma, tanto a matemática como a química ganharam destaque. A burguesia em ascensão promoveu a criação de escolas dedicadas principalmente à formação de engenheiros, como por exemplo a *École Polytechnique*, ao perceber que o conhecimento poderia contribuir com a expansão industrial. O método analítico é instituído predominantemente nessas novas escolas, em oposição ao método sintético, pouco acessível a maioria dos alunos. As produções começam a atingir públicos mais vastos. Observa-se a partir dessa época uma preocupação em relação à transparência do caminho percorrido pelo matemático em sua busca, de forma mais compreensível do que a que era apresentada pelos gregos, provocando o triunfo do método analítico sobre o sintético.

Ao final do século XVIII, o desenvolvimento da análise transformou o modo sobre como se investigavam as questões da física e de sua relação com a matemática. Percebeu-se aos poucos que vários fenômenos físicos poderiam ser descritos a partir de equações. A explicação matemática, possibilitada pela resolução dessas equações, dispensava a explicação física do fenômeno. A impossibilidade de demonstrar as causas da gravitação levou Newton a afirmar que não inventaria hipóteses (*hypotesis non fingo*). Ele argumentava que não vale a pena pesquisar a causa da gravitação, mas perceber que a gravitação, como uma lei, pode auxiliar na explicação de outros fenômenos. Isso, por si só, já bastava. Em outras palavras, abre-

se mão do *porquê* os fenômenos acontecem para concentrar-se no estudo de *como* acontecem. Nesse contexto, a matemática e a física passaram a ser as maiores responsáveis pelo estudo dos fenômenos. A experimentação servia apenas para a busca de contraexemplos que fossem capazes de negar a teoria. A explicação era dada pelo novo modo de fazer matemática.

Uma das mudanças que se notam nesse novo cenário é que algumas demonstrações, que eram até então desenvolvidas a contento no campo da geometria, passaram a se apoiar nos recursos algébricos e nas possibilidades advindas da geometria analítica e da noção de função para ir além do que era possibilitado pela via sintética.

Isso pode ser observado, por exemplo, na demonstração da desigualdade entre as médias aritmética e geométrica, que como vimos é desenvolvida por Euclides (2007) com apoio na geometria sintética, mas que apresenta limitações nos casos em que a quantidade de elementos considerados é maior do que dois. Quase dois séculos depois de Harriot ter introduzido os símbolos de desigualdade nos moldes que conhecemos atualmente, Cauchy (1821) se apoiaria no método da indução reversa para apresentar uma nova demonstração para a desigualdade entre as médias, para uma quantidade qualquer de termos. Nesse processo, ao considerar inicialmente apenas as médias entre dois números, parte-se do que se quer provar (nesse caso, que a média aritmética entre dois números é sempre maior do que a média geométrica) até que se chegue a uma premissa válida, independentemente dos valores que os dois números possam ter.

De acordo com a demonstração apresentada por Cauchy (1821), dados dois números positivos A e B , teremos sempre $\sqrt{AB} < \frac{A+B}{2}$, ou de forma equivalente, $AB < \left(\frac{A+B}{2}\right)^2$.

Ao considerar que $\left(\frac{A-B}{2}\right)^2$ é sempre positivo, quaisquer que sejam dos valores de A e de B , e como $AB = \left(\frac{A+B}{2}\right)^2 - \left(\frac{A-B}{2}\right)^2$, teremos então que:

$$AB = \left(\frac{A+B}{2}\right)^2 - \left(\frac{A-B}{2}\right)^2 < \left(\frac{A+B}{2}\right)^2$$

Ora, como a expressão $\left(\frac{A+B}{2}\right)^2 - \left(\frac{A-B}{2}\right)^2 < \left(\frac{A+B}{2}\right)^2$ é sempre verdadeira para quaisquer valores de A e B sempre que $A \neq B$, e como isso advém das premissas anteriores, prova-se, por meio desse método, que a primeira premissa é verdadeira.

Esse mesmo raciocínio leva à demonstração da desigualdade entre as médias de 4 números, 8 números, enfim, 2^m números, para valores inteiros de $m \geq 1$, ou seja:

$$ABCD < \left(\frac{A+B}{2}\right)^2 \left(\frac{C+D}{2}\right)^2 < \left(\frac{A+B+C+D}{4}\right)^4$$

Da mesma forma que:

$$ABCDEFGH < \left(\frac{A+B+C+D}{4}\right)^4 \left(\frac{E+F+G+H}{4}\right)^4 < \left(\frac{A+B+\dots+G+H}{8}\right)^8$$

Ou que:

$$ABCD \dots < \left(\frac{A+B+C+D \dots}{2^m}\right)^{2^m}$$

Para demonstrar a desigualdade entre n números, supondo que n não seja um termo da progressão geométrica 2, 4, 8, 16, etc. (visto que essa situação já foi demonstrada), e que 2^m seja maior que n , Cauchy (1821) propõe que se considere a média aritmética entre n números distintos como K , sendo:

$$K = \frac{A+B+C+D+\dots}{n}$$

Ao retomar a já demonstrada fórmula $ABCD \dots < \left(\frac{A+B+C+D \dots}{2^m}\right)^{2^m}$ e supor que os últimos $2^m - n$ fatores sejam todos iguais à K , teremos:

$$ABCD \dots K^{2^m-n} < \left(\frac{A+B+C+D \dots + (2^m - n)K}{2^m}\right)^{2^m}$$

Que nos leva a: $ABCD \dots K^{2^m-n} < K^{2^m}$

E por consequência à: $ABCD \dots < K^n = \left(\frac{A+B+C+D+\dots}{n}\right)^n$

Demonstrando assim, a relação entre a média aritmética e a média geométrica, de acordo com a seguinte desigualdade.

$$\frac{A + B + C + D + \dots}{n} > \sqrt[n]{ABCD \dots}$$

Além da demonstração entre as médias, Cauchy costuma ser lembrado por uma desigualdade que leva o seu nome¹⁶, que é recorrente em diferentes contextos da matemática, como por exemplo no estudo de séries infinitas, no cálculo integral, como ferramenta de integração de produtos e em probabilidade, com aplicações no estudo econométrico de variância e de covariância.

De acordo com essa desigualdade, ao supormos valores reais de $a_1, a_2, \dots, a_n$, e de $b_1, b_2, \dots, b_n$, teremos a seguinte relação entre eles:

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2$$

De uma forma distinta dos antigos, cujas técnicas se apoiavam nos processos de construção geométrica, o desenvolvimento da álgebra e a utilização do método analítico aliado ao sistema de coordenadas desenvolvido por Fermat e Descartes tornou possível que alguns problemas, cuja solução até então era restrita à geometria, pudessem ser resolvidos pela combinação entre o método analítico e os recursos algébricos. Nessa nova abordagem, por exemplo, o produto de dois segmentos lineares pode ser compreendido como um terceiro segmento linear, resultante da multiplicação, e não necessariamente como a medida da área compreendida por um retângulo, como na concepção euclidiana. Esse modo era inovador, ao ultrapassar a natureza das grandezas e tratá-las todas, no final das contas, como números.

Para Beckenbach e Bellman (1961a, p. 64, tradução nossa), é muito comum que a importância que é atribuída a um teorema só se mostre quando esse teorema é interpretado por uma teoria mais avançada, embora seu significado esteja sempre presente. De acordo com os autores, é importante que seja assim. Não fosse por isso, “a matemática poderia degenerar em uma coleção de formalismos sem relação e em truques de salão”. Nesse sentido, é curioso notar, por exemplo, como a interpretação

¹⁶ Desigualdade de Cauchy, chamada em alguns livros de “desigualdade da Cauchy - Schwarz” ou desigualdade de “Cauchy – Bunyakovsky – Schwarz”).

algébrica da desigualdade de Cauchy parece ter um significado mais amplo ao ser demonstrada por meio do recurso à geometria analítica.

A fim de apresentar um exemplo concreto, consideremos a versão bidimensional da desigualdade de Cauchy, para os números reais a, b, c e d :

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geq (ac + bd)^2$$

Suponhamos o triângulo OPQ mostrado na Figura 18, de modo que as coordenadas de seus vértices sejam $O(0,0)$, $P(a,b)$, $Q(c,d)$ e que o ângulo $Q\hat{O}P$ seja designado por θ .

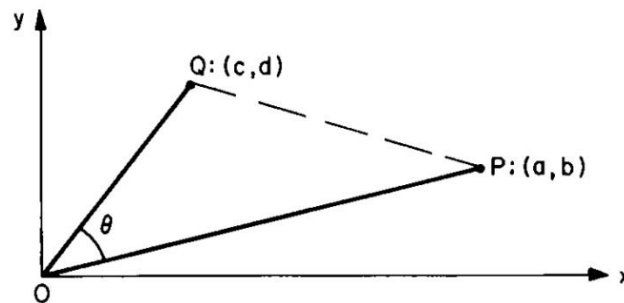
Os comprimentos dos segmentos OP , OQ e PQ são dados respectivamente por:

$$OP = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$OQ = \sqrt{c^2 + d^2}$$

$$PQ = \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2}$$

Figura 18. Interpretação geométrica da Desigualdade de Cauchy



Fonte: Beckenbach e Bellman (1961a, p. 64)

De acordo com a lei dos cossenos, temos:

$$PQ^2 = OP^2 + OQ^2 - 2 \cdot OP \cdot OQ \cdot \cos\theta$$

Ou seja,

$$\cos\theta = \frac{PQ^2 - OP^2 - OQ^2}{-2 \cdot OP \cdot OQ}$$

Ao substituir as coordenadas dos pontos, temos:

$$\cos\theta = \frac{[(a - c)^2 + (b - d)^2] - (a^2 + b^2) - (c^2 + d^2)}{-2\sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{c^2 + d^2}}$$

Que ao ser desenvolvida e simplificada por meio de eliminações, nos leva a:

$$\cos\theta = \frac{ac + bd}{\sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{c^2 + d^2}}$$

Como $\cos\theta$ pode assumir valores entre -1 e 1 , temos que $0 \leq \cos^2\theta \leq 1$, e ao elevar ambos os lados da equação ao quadrado, teremos:

$$\cos^2\theta = \frac{(ac + bd)^2}{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} \leq 1$$

Para que o resultado da divisão seja um valor no intervalo $[0,1]$, é necessário que o denominador seja maior que o numerador, o que nos leva a comprovar a desigualdade de Cauchy, ou seja, $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geq (ac + bd)^2$.

Hardy, Littlewood e Polya (1934) parecem ter sido os primeiros a desenvolver um estudo sistemático exclusivamente sobre desigualdades, compilando boa parte do conhecimento que se tinha sobre o assunto até as três primeiras décadas do século passado.

Em seu prefácio os autores apontam que

Questões históricas e bibliográficas são particularmente problemáticas em um assunto como as desigualdades, que têm aplicações em todas as partes da matemática, mas que nunca haviam sido desenvolvidas de forma sistemática. Muitas vezes é realmente difícil traçar a origem de uma desigualdade familiar. É bastante provável que apareça primeiro como auxílio em alguma proposição, muitas vezes sem declaração explícita, ou em um livro de memórias sobre geometria ou astronomia descoberto muitos anos depois por diversos autores diferentes. (HARDY, LITTLEWOOD e POLYA, 1934, p. v, tradução nossa)

A obra é organizada em dez capítulos e abrange desde utilizações mais familiares, como aquelas relacionadas às desigualdades das médias, até aplicações em áreas avançadas da matemática pura e aplicada, notadamente em cálculo diferencial e integral, em análise numérica e na teoria dos números.

Vejamos, a título de exemplo, como os autores se apoiam em um dos teoremas do cálculo para demonstrar desigualdades.

O Teorema do Valor Médio estabelece uma importante relação entre uma função e a sua derivada. De acordo com esse teorema, se uma função e sua derivada são contínuas em um dado intervalo, digamos $[a, b]$, então existe algum valor c compreendido entre a e b para o qual a taxa instantânea de variação (a derivada da função) é igual à taxa média de variação entre a e b .

Em notação atual, é o mesmo que dizer que existe um valor c , pertencente ao intervalo (a, b) , para o qual $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Dentre as consequências do teorema, algumas serão particularmente úteis na resolução de problemas, conforme as desigualdades e a igualdade elencadas a seguir:

Se $f'(c) > 0$, então $f(a) > f(b)$, que equivale a afirmar que $f(a) - f(b) > 0$, ou seja, que a função é crescente no ponto c .

De forma análoga, se $f'(c) < 0$, então $f(a) < f(b)$, ou seja, $f(a) - f(b) < 0$, que equivale a dizer que a função é decrescente no ponto c .

Se $f'(c) = 0$, então $f(a) = f(b)$, ou seja, a função é constante no ponto c .

Hardy, Littlewood e Polya (1934) se apoiam nesse teorema e em suas consequências para demonstrar algumas desigualdades recorrentes em matemática como, por exemplo, a que afirma que $e^x > 1 + x$, para qualquer valor de $x > 0$.

Suponhamos uma função g , tal que $g(x) = e^x - (1 + x)$. Para provarmos que $e^x > 1 + x$ é verdadeira para qualquer valor de x no intervalo considerado, é suficiente provar que $g(x)$ é positiva nesse intervalo.

Sabemos que $g(0) = e^0 - (1 + 0) = 0$, além do que $g'(x) = e^x - 1$ é sempre positiva, visto que $e^x > 1$, para qualquer valor de $x > 0$.

Nós sabemos que se $g'(x) > 0$ em um intervalo então a função é crescente nesse intervalo, e podemos concluir que $g(x) > g(0)$ para $x > 0$, o que em outros termos implicar afirmar que $e^x - (1 + x) > 0$, ou seja $e^x > 1 + x$ para todo $x > 0$, conforme se queria demonstrar.

Conforme apontamos na revisão de literatura, ao buscarmos trabalhos realizados no Brasil e que tivessem como palavras chave os termos “inequação” ou “inequações” encontramos 48 dissertações de mestrado, além de 8 teses de doutorado relacionadas à pesquisa em matemática pura e matemática aplicada. Ao estendermos a busca por esse tipo de trabalho em publicações internacionais verificamos que existem pelo menos três revistas científicas¹⁷, além de uma série de

¹⁷ *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics* (JIPAM) fundado e coordenado pelos membros do *Research Group in Mathematical Inequalities and Applications* (RGMIA), que reúne

outras publicações e artigos, dedicados à divulgação de trabalhos voltados à utilização das desigualdades em processos de demonstração e prova em matemática pura e aplicada.

Para Fink (2000, p.119, tradução nossa) “a história das desigualdades já está escrita”. Ao afirmar isso o autor se refere às iniciativas de matemáticos que, a exemplo de Hardy, Littlewood e Polya (1934), concentraram seus esforços na compilação dos saberes referentes às desigualdades acessíveis em seu tempo, como ocorre nos trabalhos de Beckenbach e Bellman (1961a e 1961b), e na obra mais recente de Mitrinović (1970).

Além desses, ao analisar como as desigualdades aparecem nas obras de Fermat, Newton, Harriot, Cauchy, Maclaurin, como se observa nos exemplos que apresentamos, e em outros diferentes trabalhos, como nas demonstrações da Desigualdade de Boole no campo da Teoria das Probabilidades, da Desigualdade de Bernoulli no campo da Análise Real, da Desigualdade de Minkowski no campo da Álgebra Linear e da Desigualdade de Hölder em Análise Funcional, apenas para citar algumas, conseguimos identificar um novo modelo epistemológico, distinto dos anteriores, que chamaremos de M_4 .

Conforme representamos na Figura 19, nesse modelo, os tipos de tarefa são caracterizados pela **demonstração de teoremas** em áreas da matemática distintas da geometria, desenvolvidas por meio de técnicas que se apoiam no **encadeamento lógico de proposições** dentro do registro discursivo, por meio da notação algébrica, suportadas tecnologicamente por **propriedades e teoremas** advindos de diferentes

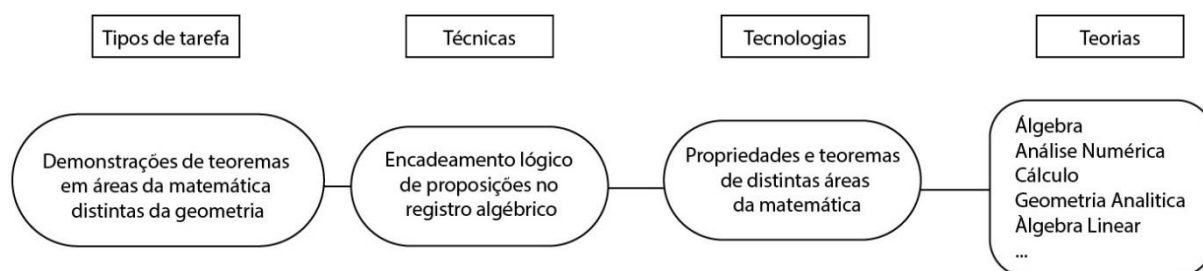
pesquisadores em matemática da Victoria University of Technology, de Melbourne, Austrália. Com uma média de 4 edições anuais, o primeiro volume da revista foi publicado em 1999 e o décimo e último volume data de 2009.

Journal of Mathematical Inequalities (JMI), editado por pesquisadores da Universidade de Zagreb, Croácia, apresenta artigos e relatos de pesquisas de diversas áreas de matemática pura e aplicada associados às inequações e às suas aplicações em distintas áreas da ciência, como por exemplo na análise numérica, em estatística, em probabilidade e na teoria da informação. Com uma média de 4 edições anuais, continua ativo até hoje. Seu primeiro volume é de 2007.

Journal of Inequalities and Applications (JIA), é um fórum de discussão multidisciplinar em matemática, com ênfase às aplicações de inequações. O corpo editorial principal é formado por pesquisadores das Universidades de Kingsville (Texas) e de Seattle (Washington), nos Estados Unidos, além de um membro da Academia de Ciências e Artes da Sérvia. Com uma edição anual, o jornal continua ativo e pode ser acessado por meio do portal *Springer Open*. Sua primeira edição data de 2005.

áreas, como **álgebra**, **análise numérica**, **cálculo**, **geometria analítica** e **álgebra linear**, entre outros.

Figura 19. Componentes do modelo epistemológico M_4



Fonte: elaborado pelo autor

Em um estudo histórico sobre a origem das equações e das inequações, Bagni (2005, p. 5, tradução nossa) pondera que “matemáticos normalmente expressam os problemas a serem solucionados por meio de equações e as condições para a resolução por meio de inequações”. Em outros termos, em diversos contextos sociais e culturais, o principal objetivo consiste na “solução prática” do problema (um valor que resolva o problema), que é, nesses contextos, mais importante do que a determinação de um abstrato e eventual “campo de possibilidades” (um intervalo de valores).

Nesse sentido, vale ressaltar que apesar de encontrarmos uma diversidade de aplicações das desigualdades, conforme nos referimos ao identificar as características dos modelos M_1 , M_2 , M_3 e M_4 , praticamente não se encontram nas obras de referência tipos de tarefa relacionados à busca por valores desconhecidos (ou intervalos desconhecidos de valores), a exemplo do que ocorre nos processos de resolução de inequações.

Por outro lado, ao empreender uma busca pela história da matemática (HEATH, 1910) é possível identificar a utilização de inequações (no sentido de busca por um intervalo desconhecido de valores) na *Arithmetica* de Diofanto, como por exemplo a que se observa para a resolução de uma equação quadrática.

O problema é enunciado na forma de uma epigrama e é o único dentre os 189 problemas presentes no *Arithmetica* que não é apresentado de forma puramente abstrata, ao lidar com preços e quantidades de medidas de vinho.

Um homem compra um certo número de medidas de vinhos e paga 8 dracmas cada por algumas e 5 dracmas cada pelas demais. Ele paga ao todo um número quadrado de dracmas, que ao ser adicionado a 60 resulta em um quadrado de lado igual à quantidade total de medidas de vinho compradas. Encontre quantas medidas o homem comprou, e a que preço. (DIOFANTO apud HEATH, p.224, tradução nossa).

A solução apresentada por Diofanto, transcrita por Heath (1910) em linguagem moderna, propõe inicialmente a adoção de uma incógnita (x) correspondente ao número total de medidas. Isso implica que $x^2 - 60$ será o preço total pago, que é igual a um quadrado perfeito, digamos, $(x - m)^2$.

Temos ainda que $\frac{1}{5}$ do valor total pago pelas medidas que custaram 5 dracmas¹⁸, somado a $\frac{1}{8}$ do valor total pago pelas medidas que custaram 8 dracmas, deve ser igual à x .

Dessa forma, $x > \frac{1}{8}(x^2 - 60)$, e simultaneamente, $x < \frac{1}{5}(x^2 - 60)$, o que nos leva à inequação $5x < x^2 - 60 < 8x$, que expressa, de fato, que como nem todas unidades custaram 5 dracmas (algumas custaram mais do que isso), o preço total deve ser maior do que a quantidade total de medidas multiplicada por 5, e de forma análoga, como nem todas as unidades custaram 8 dracmas (algumas custaram menos do que isso), o preço total deve ser menor do que a quantidade total de medidas multiplicada por 8.

Como $x^2 > 5x + 60$, então x^2 deve ser igual a $5x$ somado a algum número maior do que 60, ou seja, x não pode ser menor do que 11. Da mesma forma, como $x^2 < 8x + 60$, então x^2 deve ser igual a $8x$ somado a um número menor do que 60, ou seja, x não pode ser maior do que 12, ou seja, $11 < x < 12$.

Como o preço total pago ($x^2 - 60$) é igual à ao quadrado $(x - m)^2$, temos que $x = \frac{m^2 + 60}{2m}$.

Como $11 < x < 12$, teremos que $22m < m^2 + 60 < 24m$.

Nesse sentido, teremos que $22m = m^2$ somado a um número menor do que 60, ou seja, m deve ser um número maior que 19. Analogamente, teremos que $24m = m^2$ somado a um número maior do que 60, ou seja, m deve ser um número menor que 21, que resulta na inequação $19 < m < 21$.

Ao adotar $m = 20$, isso nos leva a $x^2 - 60 = (x - 20)^2$, e consequentemente a $x = \frac{23}{2} = 11\frac{1}{2}$, que corresponde à quantidade de medidas de vinho compradas.

¹⁸ Dracma era a unidade monetária da Grécia antiga.

Para calcular o valor total pago, basta substituir o valor de x na fórmula $(x - 20)^2 = \left(11\frac{1}{2} - 20\right)^2 = 72\frac{1}{4}$ dracmas.

Para descobrir as quantidades de medidas compradas devemos dividir $72\frac{1}{4}$ em duas partes, tal que $\frac{1}{5}$ de uma das partes somado à $\frac{1}{8}$ da outra devem resultar no número total de medidas compradas, ou seja, $11\frac{1}{2}$.

Se chamarmos uma das partes de $5z$, teremos que $\frac{1}{8}$ da segunda parte será igual à $11\frac{1}{2} - z$, ou seja, a segunda parte é igual à $92 - 8z$.

Ora, como a soma das duas partes é igual à $72\frac{1}{4}$, teremos que $5z + 92 - 8z = 72\frac{1}{4}$, o que nos leva à $z = \frac{79}{12}$ (medidas que custaram 5 dracmas) e a $\frac{59}{12}$ medidas que custaram 8 dracmas.

De forma similar ao que encontramos em Diofanto, podemos observar que Cauchy (1821) se apoia na desigualdade entre as médias e em trabalhos anteriores de Newton, relacionado aos coeficientes reais de expressões polinomiais, e propõe um método para que estime o valor aproximado das raízes de equações polinomiais de grau três.

A fim de compreender como o método se desenvolve, consideremos inicialmente que todos os termos de um polinômio, exceto um deles ($A_s x^{m-s}$), tenham o mesmo sinal, de forma que a equação tenha a seguinte forma:

$$x^m + A_1 x^{m-1} + \dots + A_{s-1} x^{m-s+1} + A_{s+1} x^{m-s-1} + \dots + A_{m-1} x + A_m = A_s x^{m-s}$$

Se considerarmos como n o número de termos que não se reduzem à zero no lado esquerdo da equação, e como $A_s x^{m-s}$ é igual à soma de todos esses n termos, teremos que $\frac{A_s x^{m-s}}{n}$ corresponde à média aritmética entre esses termos.

Se chamarmos de Bx^μ a média geométrica entre esses termos, qualquer valor real e positivo de x que satisfaça a equação dada deverá também satisfazer a condição estabelecida pela desigualdade entre as médias, ou seja:

$$\frac{A_s x^{m-s}}{n} > Bx^\mu$$

Que implica:

$$A_s x^{m-s} > n B x^\mu$$

Para mostrar uma aplicação, Cauchy (1821) propõe que se considere a equação particular $x^m - A_1 x^{m-1} - A_2 x^{m-2} - \dots - A_{m-1} x - A_m = 0$, em que m representa um número inteiro positivo qualquer e $A_1, A_2, \dots, A_{m-1}, A_m$ valores positivos ou nulos.

Como o membro à esquerda do sinal de igual é negativo para $x = 0$ e positivo para grandes valores de x , a equação admite pelo menos uma raiz real positiva, além de poder ser reescrita como:

$$\frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \dots + \frac{A_{m-1}}{x^{m-1}} + \frac{A_m}{x^m} = 1$$

Enquanto o membro à direita do sinal de igualdade permanece inalterado, os termos do membro à esquerda diminuem de forma constante para valores positivos e crescentes de x , o que significa que a equação admite uma única raiz real positiva.

Suponhamos a essa raiz positiva e A o maior dos valores $A_1, A_2, \dots, A_{m-1}, A_m$. Se designarmos a média aritmética entre esses valores pela notação $M(A_1, A_2, \dots, A_{m-1}, A_m)$ e se tomarmos $x = a$, teremos então que a equação particular dada pode ser escrita como:

$$a^m - A_1 a^{m-1} - A_2 a^{m-2} - \dots - A_{m-1} a - A_m = 0$$

Ao isolarmos a^m em um dos lados da equação, teremos:

$$a^m = A_1 a^{m-1} + A_2 a^{m-2} + \dots + A_{m-1} a + A_m$$

E logo:

$$a^m = M(A_1, A_2, \dots, A_{m-1}, A_m)(a^{m-1} + a^{m-2} + \dots + a + 1)$$

A soma dos m termos da progressão geométrica $a^{m-1} + a^{m-2} + \dots + a + 1$ pode ser escrita como $\frac{a^m - 1}{a - 1}$, logo, a equação pode ser reescrita como:

$$a^m = M(A_1, A_2, \dots, A_{m-1}, A_m) \frac{a^m - 1}{a - 1}$$

Como por hipótese A é o maior dos valores de $A_1, A_2, \dots, A_{m-1}, A_m$, teremos:

$$a^m = M(A_1, A_2, \dots, A_{m-1}, A_m) \left(\frac{a^m - 1}{a - 1} \right) < A \left(\frac{a^m - 1}{a - 1} \right)$$

E conseqüentemente:

$$a^m < A \left(\frac{a^m - 1}{a - 1} \right)$$

$$a - 1 < A \left(\frac{a^m - 1}{a^m} \right) < A$$

$$a < A + 1$$

O que, em resumo, significa que a raiz positiva da equação dada como exemplo estará compreendida entre 0 e $A + 1$ (entre 0 e o maior coeficiente somado à 1).

Por outro lado, se designarmos respectivamente por $A_r a^{m-r}$ e $A_s a^{m-s}$ o menor e o maior termos do polinômio $A_1 a^{m-1} + A_2 a^{m-2} + \dots + A_{m-1} a + A_m$ e para $n \leq m$ o número dos termos que são diferentes de zero, fica evidente que

$$a^m > n A_r a^{m-r}$$

$$a^m < n A_s a^{m-s}$$

E conseqüentemente:

$$a > (n A_r)^{\frac{1}{r}}$$

$$a < (n A_m)^{\frac{1}{m}}$$

Ou seja, a raiz do polinômio estará compreendida entre o maior e o menor dos números $nA, (nA_2)^{\frac{1}{2}}, (nA_3)^{\frac{1}{3}}, \dots, (nA_m)^{\frac{1}{m}}$.

A fim de mostrar como esses teoremas e conclusões podem ser utilizados para a solução de equações, Cauchy (1821) apresenta como exemplo o cálculo aproximado da raiz da seguinte equação polinomial de grau 3.

$$x^3 - 2x - 5 = 0.$$

Essa equação pode ser reescrita como

$$x^3 = 2x + 5$$

Como o número de termos à direita do sinal de igualdade é igual à dois ($n = 2$), seu menor coeficiente é 2 e o maior é 5, temos que a raiz positiva da equação deve se situar no intervalo compreendido entre $(nA_2)^{\frac{1}{2}} = (2.2)^{\frac{1}{2}} = 2$ e $(nA_3)^{\frac{1}{3}} = (2.5)^{\frac{1}{3}} \cong 2,15$.

Ao considerar que x^3 é igual à soma dos dois termos $2x$ e 5 , temos que a média aritmética entre esses termos é igual à $\frac{x^3}{2}$ e que a média geométrica é igual à $\sqrt{2x \cdot 5}$. Nesse sentido, além de satisfazer a equação $x^3 = 2x + 5$, a raiz positiva deve satisfazer a condição que se estabelece a partir da desigualdade entre as médias, ou seja:

$$\frac{x^3}{2} > \sqrt{2x \cdot 5}$$

Que ao ser desenvolvida nos leva ao intervalo $x > \sqrt[5]{40} \cong 2,09$.

Ou seja, o valor aproximado de x que satisfaz a equação encontra-se no intervalo $2,09 < x < 2,15$.

Na língua portuguesa parece haver uma convenção quanto ao significado que se atribui aos termos “desigualdade” e “inequação”. Em Houaiss (2001), desigualdade corresponde à “expressão em que se comparam duas quantidades desiguais” e inequação à “desigualdade entre duas expressões matemáticas, cujo objetivo é determinar os valores das variáveis que satisfazem a desigualdade”. Imenes e Lellis (1999, p.166) por sua vez, se referem à inequação como “sentença matemática na qual aparece um sinal de desigualdade ($<$, $>$, $\geq$ ou $\leq$) e uma ou mais variáveis ou incógnitas. [...] Resolver uma inequação é encontrar os possíveis valores da variável que tornam a desigualdade verdadeira”.

Entretanto, conforme apontamos na introdução desse estudo, o que se observa em algumas línguas, como por exemplo em inglês, é que o mesmo termo utilizado para designar as desigualdades (*inequality*) no sentido de comparação entre grandezas, é utilizado como referência às inequações, no sentido de busca por um intervalo incógnito de valores, ao passo que o termo “*inequation*”, de mesma raiz etimológica que o termo “inequação”, corresponde, na língua inglesa, ao antônimo de equação.

Ao consultar o dicionário *online* MathWord¹⁹, vemos que enquanto a igualdade $A = B$ assegura que os termos à esquerda e à direita da expressão são iguais, em

¹⁹ MathWorld é um dicionário *online* de termos matemáticos criado pelo físico e astrônomo norte-americano Eric W. Weisstein na década de 1990. A iniciativa é apoiada e financiada pela Wolfram Research Inc. (criadora do *software* de álgebra computacional Mathematica), pela National Science Foundation dos Estados Unidos e pela Universidade de Illinois em Urbana-Champaign.

uma inequação (*inequation*), representada por exemplo por $A \neq B$, o que se afirma é que os termos não são iguais.

Nesse mesmo sentido, encontramos em Lewis (1918, p.166, tradução nossa), as Leis Fundamentais da Teoria das Inequações (*Fundamental Laws of the Theory of Inequations*), que em sua introdução estabelece que “a negação do que é reconhecido como símbolo de afirmação, que em álgebra se representa por $=$ deve ser coerentemente simbolizado pelo sinal $\neq$ ”, o que significa que o contrário de uma igualdade entre duas grandezas quaisquer a e b é representado por uma inequação, tal que $a \neq b$, que equivale afirmar que a equação $a = b$ é falsa.

As premissas que justificam e que servem para demonstrar as inequações no sentido apresentado por Lewis (1918) baseiam-se no princípio lógico chamado *modus tollens* (do latim, “modo que nega por negação”) em sua forma mais simples, ou seja, se uma dada premissa P é verdadeira e isso garante que uma outra premissa Q também seja verdadeira, o fato de Q ser falso, implica necessariamente que P é falso²⁰.

A partir dessa compreensão sobre o significado de inequações, Lewis (1918) elenca cinco das principais implicações lógicas:

(1) Se $a = b$ então $c = d$, implica igualmente que se $c \neq d$, então $a \neq b$.

(2) Se $a = b$, então $c = d$ e $h = k$, implica igualmente que se $c \neq d$ ou se $h \neq k$, então $a \neq b$.

(3) Se $a = b$ e simultaneamente $c = d$, então $h = k$, implica igualmente que se $a = b$ e $h \neq k$, então $c \neq d$, da mesma forma que se $c = d$ e $h \neq k$, então $a \neq b$.

(4) Se $a = b$ é equivalente a $c = d$, então $a \neq b$ também é equivalente a $c \neq d$.

(5) Se $a = b$ é equivalente ao conjunto $c = d, h = k, \dots$, implica igualmente que se $a \neq b$, então ou $c \neq d$, ou $h \neq k$, Isso não exclui a possibilidade de que as premissas $c \neq d, h \neq k, \dots$, sejam todas verdadeiras.

²⁰ Em linguagem simbólica, $(P \rightarrow Q) \wedge \sim Q \Rightarrow \sim P$

Além das implicações lógicas, são enunciados alguns teoremas elementares com propriedades das operações com inequações, como por exemplo, o que afirma que se $ac \neq bc$, então $a \neq b$.

A demonstração é desenvolvida de forma simples. Como $ac \neq bc$ equivale à $ac - bc \neq 0$, ao colocarmos c em evidência, temos que $c(a - b) \neq 0$, que só pode ser uma expressão verdadeira se tanto c quanto $a - b$ forem diferentes de zero, ou seja, é necessário (além de que $c \neq 0$) que $a \neq b$.

Algumas propriedades de equivalência de equações se aplicam às inequações, como por exemplo a que afirma que se $a = b$, então teremos sempre que a soma $-ab + a(-b) = 0$, da mesma forma que se $a \neq b$, então $-ab + a(-b) \neq 0$.

Entretanto, nem todas as propriedades de operação que se utilizam para a resolução de uma equação são aplicáveis à resolução de inequações, no sentido apresentado por Lewis (1918).

Para citar um exemplo, suponhamos a equação $ax^2 - bx = 0$ em que x é a incógnita. Ao colocar x em evidência no lado esquerdo do sinal de igualdade temos $x(ax - b) = 0$, que é verdadeira em duas situações: tanto quando $x = 0$ como quando $x = \frac{b}{a}$.

Por outro lado, ao resolvermos a inequação $ax^2 - bx \neq 0$, é possível verificar que a solução é encontrada apenas no caso em que, $x \neq 0$ e $x \neq \frac{b}{a}$, simultaneamente.

A análise das praxeologias que se desenvolvem nas situações apresentadas nos últimos exemplos, conforme se observa nos trabalhos de Diofanto, Cauchy e Lewis, reforça nossa impressão de que as inequações parecem estar, de forma pragmática, mais associadas à atividade matemática colocada em jogo na resolução de problemas do que como objetos de conhecimento em si. Em outras palavras, o que queremos dizer é que ao observar a gênese do saber associado às inequações, verificamos que, ao passo em que as desigualdades são discerníveis, teorizadas, discutidas e justificadas, as inequações são observáveis nos processos de resolução, no suporte a algoritmos, ou no contexto dos livros didáticos, já na condição de saber a ser ensinado.

Nesse sentido, as inequações são encontradas na literatura principalmente na resolução de questões práticas, como o que se observa, por exemplo, em Korovkin

(1975), que ao fazer o estudo de séries numéricas, se apoia nas inequações para o cálculo aproximado do limite de uma soma.

A fim de apresentar um exemplo da técnica utilizada, suponhamos inicialmente que x corresponda à soma da seguinte sequência numérica:

$$x = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Ao fazermos o cálculo aproximado de cada um dos termos, com tolerância na casa dos décimos, Korovkin (1975) se apoia nas noções de desigualdade entre dois números e afirma que:

$$1 \leq 1 \leq 1$$

$$0,7 \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \leq 0,8$$

$$0,5 \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \leq 0,6$$

$$0,5 \leq \frac{1}{\sqrt{4}} \leq 0,5$$

$$0,4 \leq \frac{1}{\sqrt{5}} \leq 0,5$$

Como o valor procurado se encontra entre a soma dos valores arredondados para menos e arredondados para mais, temos que:

$$1 + 0,7 + 0,5 + 0,5 + 0,4 \leq x \leq 1 + 0,8 + 0,6 + 0,5 + 0,5$$

$$3,1 \leq x \leq 3,4$$

Em problemas com quantidades de termos maiores, torna-se praticamente impossível utilizar a mesma técnica, entretanto, ainda assim a solução se dá por meio da utilização de inequações, como se pode observar no próximo exemplo.

Suponhamos que se procure pelo valor aproximado de um número y , tal que

$$y = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{1000000}}$$

.A técnica apresentada em Korovkin (1975) admite inicialmente que:

$$\sqrt{n+1} > \sqrt{n} > \sqrt{n-1}$$

E conseqüentemente que:

$$\sqrt{n+1} + \sqrt{n} > 2\sqrt{n} > \sqrt{n-1} + \sqrt{n}$$

Isso leva a:

$$\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n-1} + \sqrt{n}}$$

Ao multiplicarmos todos os termos da desigualdade por 2, teremos:

$$\frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{2}{\sqrt{n-1} + \sqrt{n}}$$

Entretanto, o termo mais à esquerda da inequação pode ser reescrito como:

$$\frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \cdot \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})}{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})} = \frac{2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})}{(\sqrt{n+1})^2 - (\sqrt{n})^2} = 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n}$$

De forma similar podemos reescrever o termo mais à direita como:

$$\frac{2}{\sqrt{n-1} + \sqrt{n}} \cdot \frac{(\sqrt{n-1} - \sqrt{n})}{(\sqrt{n-1} - \sqrt{n})} = \frac{2(\sqrt{n-1} - \sqrt{n})}{(\sqrt{n-1})^2 - (\sqrt{n})^2} = -2\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n}$$

O que nos leva a:

$$2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1}$$

Supondo que $n = 2, 3, 4, \dots, n$, teríamos:

$$\text{Para } n = 2 \quad 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2} < \frac{1}{\sqrt{2}} < 2\sqrt{2} - 2$$

$$\text{Para } n = 3 \quad 2\sqrt{4} - 2\sqrt{3} < \frac{1}{\sqrt{3}} < 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2}$$

$$\text{Para } n = 4 \quad 2\sqrt{5} - 2\sqrt{4} < \frac{1}{\sqrt{4}} < 2\sqrt{4} - 2\sqrt{3}$$

...

$$\text{Para } n \quad 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1}$$

Ao somarmos membro a membro essas desigualdades, teremos:

$$2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{2} < \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 2$$

Somando 1 em todos os membros da inequação, teremos:

$$2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{2} + 1 < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 1$$

Ao considerar que $\sqrt{n+1} > \sqrt{n}$ e que $(-2\sqrt{2}) > -3$, podemos substituir esses termos ($\sqrt{n+1}$ por $\sqrt{n}$, e $(-2\sqrt{2})$ por -3) no membro mais à esquerda sem prejuízo ao sentido da desigualdade.

$$2\sqrt{n} - 3 + 1 < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 1$$

$$2\sqrt{n} - 2 < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 1$$

Que nos leva a:

$$2\sqrt{n} - 2 < y < 2\sqrt{n} - 1$$

Voltando à questão inicial, podemos facilmente calcular o valor aproximado de y , substituindo n por 1000000.

$$2\sqrt{1000000} - 2 < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{1000000}} < 2\sqrt{1000000} - 1$$

$$2.1000 - 2 < y < 2.1000 - 1$$

Chegando finalmente ao intervalo procurado: $1998 < y < 1999$.

Até os idos dos anos 1940 imaginava-se que sistemas de inequações seriam sempre objeto de interesse puramente matemático, entretanto isso parece mudar com o desenvolvimento de um novo ramo da matemática aplicada, a programação linear, com importantes aplicações em áreas como administração, economia e logística, entre outras.

Ao observar as dinâmicas que se estabelecem nas relações comerciais, é natural que as partes envolvidas normalmente busquem, dentro de um campo de possibilidades, a solução menos custosa, ou de forma análoga, aquela que representa o melhor proveito, a que seja mais lucrativa. Isso acontece o tempo todo, como por exemplo quando comparamos os preços que dois mercados concorrentes cobram por seus produtos, ou ao buscarmos melhores salários, ou ainda, ao definirmos o valor de algo que colocamos à venda.

Problemas de programação linear são, dessa forma, problemas de otimização, compostos por variáveis de decisão (as incógnitas a serem determinadas pela solução do problema) por restrições (relacionadas às limitações do sistema que se está modelizando) e por uma função objetivo (a função matemática que modela a relação entre a grandeza que se quer otimizar com as variáveis de decisão), de tal modo que tanto a função objetivo como as restrições, sejam todas lineares.

A demanda por inequações em problemas de programação linear se apresenta diante da necessidade de encontrar um campo viável de soluções. Nos casos em que o sistema pode ser modelizado por meio de duas ou três variáveis de decisão, um dos caminhos para a determinação do campo de soluções viáveis apoia-se no sistema de coordenadas cartesianas bidimensional (no caso de duas variáveis) ou tridimensional (no caso de três variáveis).

A fim de apresentar um exemplo, suponhamos que a modelização de uma situação de otimização nos leve à função $f(x) = rx + sy + t$, em que x e y são as duas variáveis de decisão e que r , s e t são números reais.

Suponhamos ainda que as restrições impostas à situação possam ser modelizadas por meio do seguinte sistema de inequações:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 \geq 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 \geq 0 \\ \dots \\ a_mx + b_my + c_m \geq 0 \end{cases}$$

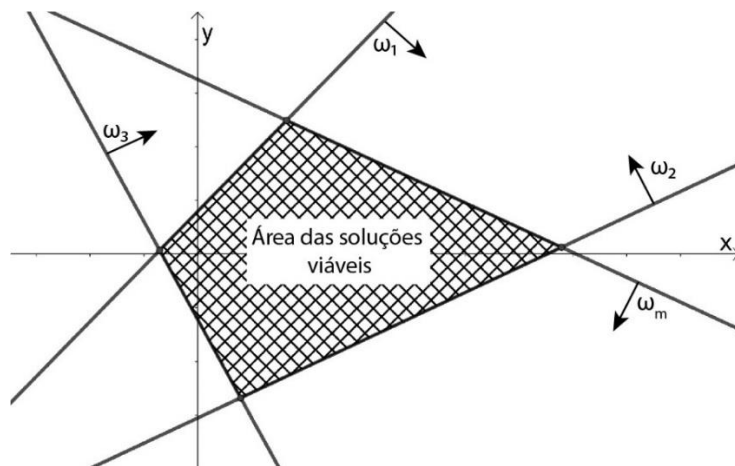
Cada uma das inequações do sistema determina um semiplano no sistema de coordenadas, formado pelos pontos que a satisfazem. Suponhamos que a primeira inequação do sistema determine o semiplano ω_1 , que a segunda determine o semiplano ω_2 , e assim consecutivamente, até a *emésima* inequação, que determina o semiplano ω_m , conforme representação feita na Figura 20, em que as setas indicam em qual lado da reta encontra-se o semiplano que atende a inequação.

Os pontos do plano que satisfazem não apenas uma, mas todas as inequações formam um polígono²¹ convexo, correspondente à intersecção entre os semiplanos

²¹ Diferentemente da definição normalmente utilizada em geometria, que considera o polígono como uma linha fechada composta de segmentos de retas, é comum encontrar nos livros que tratam de programação linear esse termo associado não apenas ao contorno, mas ao conjunto de todos os pontos do plano que são delimitados pelo polígono, ou seja, que pertençam tanto ao contorno como aqueles que se encontram no interior da figura.

considerados, que recebe o nome de área de soluções viáveis. O que se afirma, nesse sentido, é que as coordenadas x e y de qualquer um dos pontos que formam a área de soluções viáveis podem ser utilizadas como valores das variáveis de decisão, visto que atendem à todas às restrições inicialmente impostas.

Figura 20. Uma representação da área de soluções viáveis



Fonte: elaborado pelo autor

A busca pela solução ótima requer que se verifique, dentre as soluções viáveis, qual é a que contribui para que o valor da função objetivo $f(x)$ seja o maior possível nos problemas de maximização (ao tratar, por exemplo, de situações envolvendo lucro, receita e ganhos no geral), ou analogamente, o que contribui para que seja o menor possível nos problemas de minimização (ao tratar, por exemplo, de situações envolvendo custos ou perdas).

Ao levar em conta algumas asserções que podem ser feitas a respeito de sistemas lineares, como a que afirma que em um sistema linear de duas variáveis a função objetivo é representada por uma reta, que a intersecção entre os pontos da reta representativa da função objetivo e a área de soluções viáveis representa um conjunto de soluções, e finalmente que para qualquer ponto interno do polígono, sempre será possível traçar retas paralelas à reta representativa da função objetivo, cujos pontos têm coordenadas que podem tanto contribuir para aumentar como para diminuir o valor da função objetivo, conclui-se que não é possível que a solução ótima seja obtida pela escolha de um ponto interno à área de soluções.

Sendo assim, a busca pela solução ótima nos leva a identificar as coordenadas dos pontos que se encontram nos vértices do polígono que delimita a área de soluções

viáveis, para em seguida, simular os valores da função objetivo em cada um desses pontos.

A técnica de resolução que se apoia na noção de eixos coordenados, justificada pelo bloco tecnológico-teórico da geometria analítica, pode ser desenvolvida em sistema que envolvam até no máximo três variáveis de decisão. Nesses casos, as restrições serão representadas por inequações com até três variáveis, cada uma das quais determinando um semiespaço (e não um semiplano, como no caso de duas variáveis). O campo das soluções viáveis será, nesse caso, representado pelos pontos internos da região convexa e poliédrica correspondente à intersecção entre os diferentes semiespaços. De forma análoga ao que se observa nos sistemas com duas variáveis, a solução ótima pode ser encontrada pela simulação da função objetivo para cada um dos valores das coordenadas dos vértices da região poliédrica.

É comum encontrar situações que podem ser resolvidas por meio da programação linear, mas que ao serem modelizadas resultam em um número grande de variáveis de decisão, que se refletem, conseqüentemente, em um número grande de cálculos, e é fácil verificar que o recurso à geometria analítica para os sistemas compostos por mais de três variáveis apresenta limitações.

Durante a Segunda Guerra Mundial, ao deparar-se com situações que envolviam decisões acerca da utilização eficaz de recursos, como aquelas relacionadas à logística das tropas, à distribuição de suprimentos nos campos de batalha e ao planejamento de produção de armamentos, entre outras, o governo dos Estados Unidos convocou uma equipe de cientistas, sob a liderança do matemático George B. Dantzig, a fim de que estudassem meios de obter o melhor desempenho possível em cada uma dessas áreas, levando em conta as restrições, que em tempos de guerra, não eram poucas.

Um dos frutos do esforço de pesquisa dos cientistas, concluído em 1947, resultou em um algoritmo ao qual deram o nome de *Simplex*, que se apoia em técnicas de programação linear, no âmbito da álgebra linear, e que permite, a partir de um número finito de iterações, alcançar a solução ótima em problemas de maximização e de minimização, respeitando as restrições impostas pela situação, que são traduzidas em um primeiro momento, em inequações, e que são transformadas, a partir da inclusão de uma “variável de folga”, em equações.

A fim de apresentar um exemplo, imaginemos que se queira maximizar a função objetivo $f(x) = rx_1 + sx_2 + \dots + tx_n$, sujeito a uma série de restrições, como as que estão representadas pelo sistema de inequações seguinte:

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \leq c \\ b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_nx_n \leq d \end{cases}$$

Como o lado esquerdo das inequações é menor do que o lado direito, podemos adicionar do lado esquerdo, respectivamente na primeira e na segunda inequação, as variáveis de folga x_{F1} e x_{F2} , ambas não negativas, a fim de ambos os lados se igualem, transformando o sistema de inequações em um sistema de equações:

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n + x_{F1} = c \\ b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_nx_n + x_{F2} = d \end{cases}$$

No decorrer do algoritmo, tanto a função objetivo como o sistema de equações que se refere às restrições são convertidos em um sistema matricial, conforme o sistema abaixo:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} f(x) + \begin{bmatrix} -r \\ a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} -s \\ a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} x_2 + \dots + \begin{bmatrix} -t \\ a_n \\ b_n \end{bmatrix} x_n + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_{F1} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_{F2} = \begin{bmatrix} 0 \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

As transformações lineares necessárias à resolução são feitas em um quadro que recebe o nome de *tableau*, que contém em sua primeira linha a identificação de cada uma das variáveis em jogo e nas linhas seguintes os coeficientes da função objetivo e do sistema de equações, conforme o exemplo do Quadro 6:

Quadro 6. Um exemplo de *tableau* do algoritmo Simplex

$f(x)$	x_1	x_2	$\dots$	x_n	x_{F1}	x_{F2}	
1	$-r$	$-s$	$\dots$	$-t$	0	0	0
0	a_1	a_2	$\dots$	a_n	1	0	c
0	b_1	b_2	$\dots$	b_3	0	1	d

Fonte: elaborado pelo autor

A partir de uma solução básica inicial, que pode não corresponder à solução ótima (de fato normalmente não corresponde) é feita uma quantidade finita de iterações, com substituição das variáveis que compõem o sistema, até que se alcance o melhor valor da função objetivo, respeitando as restrições inicialmente impostas.

Após o término da guerra, técnicas de programação linear, como as que são desenvolvidas por meio do algoritmo *Simplex*, passaram a chamar a atenção de outros setores, não necessariamente ligados à questões bélicas, em diversos campos de atuação, como no controle de estoques, nas operações de transporte e no planejamento de produção, entre outros.

Nos dias atuais é comum que as empresas recorram à recursos computacionais em busca de soluções capazes de contribuir com a maior lucratividade nos negócios. Entretanto, julgamos importante ressaltar que apesar da capacidade de processamento dos computadores e de sua eficiência na realização de simulações, grande parte dos *softwares* atuais (como por exemplo o *Solver*, um complemento da planilha eletrônica *Excel* desenvolvido pela Microsoft Corporation) se apoiam no algoritmo criado pela equipe de Dantzig.

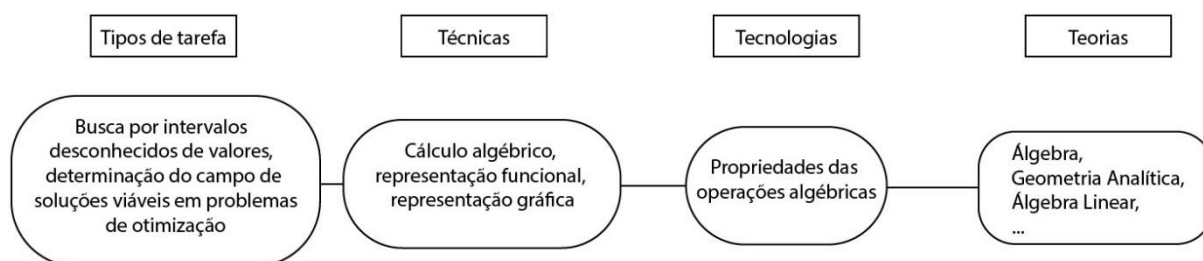
À despeito da diferença entre as abordagens, sejam as que se apoiam na representação gráfica da área de soluções viáveis, sejam as que se apoiam em algoritmos de transformação linear, é preciso ressaltar o papel fundamental que as inequações têm nessas dinâmicas, ao traduzir em linguagem matemática, as restrições que esses tipos de problema podem apresentar.

Ao analisar as praxeologias que se desenvolvem a partir dos últimos exemplos apresentados, nosso estudo mostra que as inequações se desenvolvem a partir da noção de desigualdade condicional, ou seja, de desigualdades que são válidas para um determinado intervalo de valores.

Em um primeiro momento, como se observa em Heath (1910) que se refere à *Arithmetica* de Diofanto, e algum tempo depois, quando as primeiras noções da álgebra desenvolvida pelos árabes chegam à Europa, como se constata nos trabalhos de Newton (1761) e em Cauchy (1821), as inequações parecem servir principalmente à determinação de valores aproximados das raízes de alguns tipos de equações e mais recentemente, como **justificativa tecnológica a algoritmos** em situações práticas, como se nota, por exemplo, em Korovkin (1975), e na **determinação do campo de soluções viáveis** em problemas de otimização, levadas à cabo por técnicas de **programação linear**, que se apoiam tanto na **geometria analítica** como na **álgebra linear**, como se observa, por exemplo, no algoritmo desenvolvido por Dantzig.

Nesse sentido, conforme representamos na Figura 21, é possível identificar características de um novo modelo epistemológico, que chamaremos de M_5 e que se distingue dos anteriores pelos tipos de tarefa, que consistem na **busca por intervalos desconhecidos de valores** que fazem com que uma desigualdade condicional se torne verdadeira, por meio de técnicas de **resolução de inequações**, desenvolvidas tanto no registro algébrico (discursivo, ao tratar-se de uma linguagem simbólica) quanto no registro gráfico (como ocorre nas técnicas que se apoiam na representação gráfica de funções), justificadas tecnologicamente pelas **propriedades das operações algébricas**, principalmente no campo da **álgebra**, da **geometria analítica** e da **álgebra linear**.

Figura 21. Componentes do modelo epistemológico M_5



Fonte: elaborado pelo autor

Conforme nos referimos no capítulo que dedicamos à delimitação do problema de pesquisa, o primeiro de nossos objetivos específicos consiste em identificar os saberes e as razões que, em um dado tempo, tornaram respectivamente possível e necessário o desenvolvimento do conceito de inequação.

Ao término desse estudo epistemológico, nos parece razoável afirmar que as desigualdades têm sua origem e desenvolvimento ligados tanto a situações práticas, relacionadas à necessidade de comparação entre grandezas, discretas e contínuas, como a processos internos da própria matemática, como se observa na demonstração de propriedades de figuras geométricas, na demonstração de teoremas e na busca por valores aproximados de números irracionais.

O conceito de inequação, no sentido da busca por intervalos desconhecidos de valores, desenvolve-se como consequência dos saberes associados às desigualdades, a partir da noção de intervalo numérico e desigualdade condicional, que resulta, em outros termos, na busca por um intervalo numérico que torne verdadeira uma desigualdade condicional.

Essa leitura reforça nossa impressão, já apontada na justificativa desse trabalho, de que os saberes relativos às desigualdades, ao serem reconhecidos e aceitos pela comunidade científica ganham o estatuto de objeto matemático (nos termos estabelecidos por Douady (1984) ao diferenciar a dialética que se estabelece entre os possíveis estatutos de um saber), ao passo que as inequações, que surgem como uma consequência das desigualdades, têm seu principal papel ligado à resolução de problemas, com o estatuto de ferramenta matemática.

Algumas das razões de ser das inequações, ligadas inicialmente à justificativas tecnológicas na utilização de algoritmos (como o que se observa por exemplo nos trabalhos de Diofanto, que se apoia nas inequações para resolver equações polinomiais), se traduzem atualmente na determinação do campo de soluções viáveis ao tratar das restrições que se apresentam em problemas de otimização.

Não estamos afirmando que a solução de problemas de otimização se dê por meio das inequações, visto que nesses problemas a busca se dá por um valor ótimo, e não por um intervalo de valores. O que queremos dizer é que ao modelizar esses tipos de problema, o método recorrente de representação das restrições apoia-s conceito de inequação.

Ao considerar essa e todas as outras situações apresentadas, com base nesse estudo epistemológico, apresentamos a seguir a construção de nosso MER.

3.2 O MODELO EPISTEMOLÓGICO DE REFERÊNCIA

De acordo com o estudo realizado identificamos cinco distintos modelos epistemológicos específicos, que farão parte do nosso MER, de acordo com a síntese apresentada no Quadro 7, em que se elencam as características de cada um dos componentes do bloco prático (tipos de tarefa e técnicas de resolução) e do bloco tecnológico-teórico que legitimam os procedimentos de resolução.

Quadro 7. Modelos epistemológicos associados aos conceitos de desigualdade e inequação

Modelo	Tipos de tarefa	Técnicas	Tecnologias	Teorias
M_1	Comparação entre grandezas, apoiadas pela noção de medida.	Medição e contagem.	Noção de número e forma, proporcionalidade.	Aritmética e geometria.
M_2	Comparação entre grandezas dissociadas da noção de medida. Demonstração de teoremas e propriedades de figuras geométricas.	Construções geométricas, encadeamento lógico de asserções dentro do registro discursivo (língua natural) e figural e gráfico (representação gráfica dos entes matemáticos).	Definições, postulados, proposições e noções comuns.	Geometria sintética.
M_3	Busca por intervalos numéricos correspondentes ao valor aproximado de números irracionais.	Operações aritméticas.	Propriedades aritméticas das operações com desigualdades.	Aritmética e geometria.
M_4	Demonstração de Teoremas em áreas da matemática distintas da Geometria.	Encadeamento lógico de proposições dentro do registro discursivo (notação algébrica).	Propriedades e teoremas de distintas áreas da matemática.	Álgebra, análise numérica, cálculo, geometria analítica e álgebra linear, entre outras.
M_5	Busca por intervalos de valores desconhecidos. Determinação do campo de soluções viáveis em problemas de otimização.	Cálculo algébrico, representação funcional e representação gráfica.	Propriedades algébricas.	Álgebra, geometria analítica, álgebra linear.

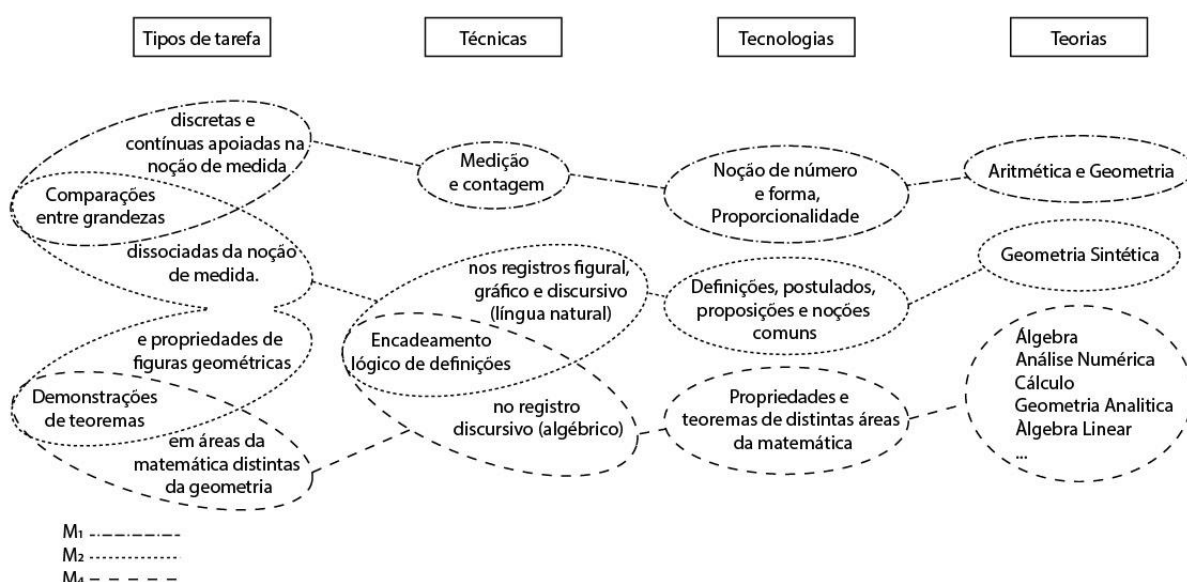
Fonte: elaborado pelo autor

Ao buscar as relações entre os cinco diferentes modelos epistemológicos específicos que identificamos, é possível notar intersecções, que em algumas se apresentam quanto ao tipo de tarefas e, em outras, quanto às técnicas de resolução

das tarefas, ou quanto às tecnologias e teorias que justificam a parte prática das praxeologias, conforme o diagrama da Figura 22.

Isso se observa, por exemplo, nos tipos de tarefa relacionados às comparações entre grandezas que compõem os modelos M_1 e M_2 . Em M_1 as comparações são feitas por meio da medição e da contagem, ao passo que em M_2 as comparações se prestam principalmente como auxílio à demonstração de teoremas da geometria sintética e de propriedades de figuras geométricas, dissociadas na noção de medida e sem o uso de coordenadas..

Figura 22. Intersecções entre componentes dos modelos M_1 , M_2 e M_4



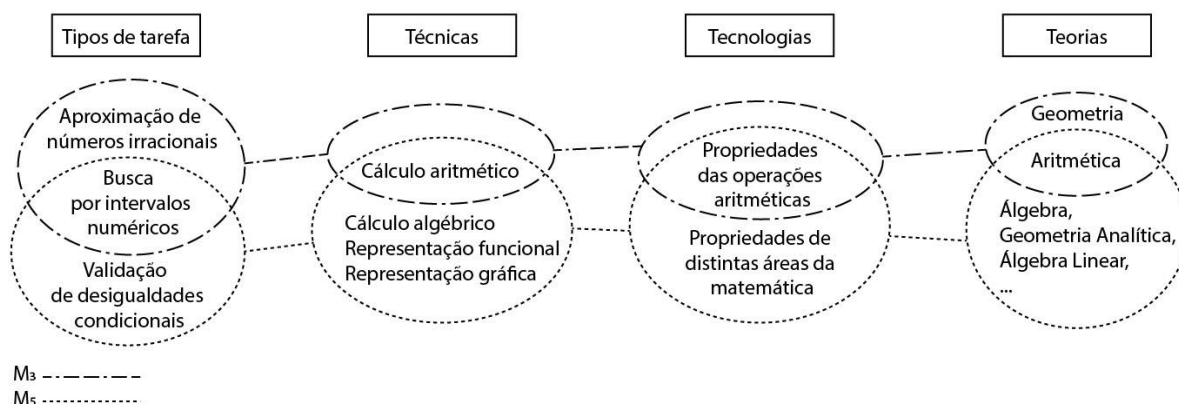
Fonte: elaborado pelo autor.

De forma análoga, é possível observar que os tipos de tarefa relacionados à demonstração de teoremas são comuns aos modelos M_2 e M_4 . Em M_2 as demonstrações são desenvolvidas por meio de construções geométricas e pelo encadeamento lógico de definições, postulados, proposições e noções comuns no âmbito da geometria sintética, ao passo que em M_4 os teoremas referem-se à distintas áreas da matemática, que também são demonstrados por meio do encadeamento lógico de premissas, mas que nesse caso, fazem parte de outras áreas, como da álgebra e da análise, entre outras.

Ao comparar os modelos M_3 e M_5 , verificamos tipos de tarefas associadas à busca por intervalos numéricos coexistem nos dois modelos, conforme o diagrama da Figura 23. Entretanto, o que se observa em M_3 é que a necessidade de aproximação de números irracionais se apoia no conceito de intervalo numérico, que é possibilitada

por sua vez, pelo próprio conceito de desigualdade. Por outro lado, o que vê em M_5 são as inequações propriamente ditas, no sentido da busca por um intervalo de valores incógnito que torne verdadeira uma desigualdade condicional.

Figura 23. Intersecções entre componentes dos modelos M_3 e M_5



Fonte: elaborado pelo autor.

A noção de que alguns tipos de tarefa sejam melhor desenvolvidas em um modelo do que em outro nos parece coerente e bastante clara, diante das limitações práticas e tecnológico-teóricas que um modelo pode apresentar. Isso não implica, no entanto, que um modelo deva surgir a partir das limitações de outro, da mesma forma que o surgimento de um novo modelo não anula o anterior. Eles simplesmente coexistem, cada qual identificado pelas praxeologias que o caracteriza, de acordo com os tipos de tarefas demandadas, técnicas e justificativas tecnológico-teóricas.

Vejamos por exemplo, que o modelo M_2 , que tem Euclides como uma de suas principais referências, não surge a partir de limitações do modelo M_1 . O que se observa, de fato, é que Euclides se apoia em algumas premissas básicas (um ponto é aquilo que não tem dimensão, uma reta é aquilo que só tem comprimento, etc.) para formalizar os saberes que já existiam e que eram usados para fins práticos. Muito tempo antes de Pitágoras e de Euclides, a tábua Plimpton 322, já trazia uma lista com medidas de lados de triângulos retângulos, de acordo com o que viria a ser formalizado séculos depois como o Teorema de Pitágoras.

Nesses termos, não se verifica que M_2 (caracterizado pelo aporte teórico da geometria sintética a partir de definições, postulados, proposições e noções comuns) tem sua gênese ligada às limitações de M_1 (que se caracteriza pela comparação entre grandezas por meio da medição e contagem), e tampouco que seu surgimento (de M_2) implique o desaparecimento das praxeologias que caracterizam M_1 . O que se

verifica é que tipos de tarefa distintos demandam modelos epistemológicos distintos, mais adequados ao desenvolvimento das tarefas.

Tomando como base o nosso MER, passamos a apresentar o resultado do estudo econômico-institucional que realizamos, em que procuramos descobrir como as desigualdades e as inequações são interpretadas na Educação Básica, que em outros termos, implica identificar quais são as características do MED e do MDD subjacente para o estudo das desigualdades e das inequações na Educação Básica.

4 ESTUDO ECONÔMICO-INSTITUCIONAL DAS INEQUAÇÕES

Ao considerar que o terceiro de nossos objetivos específicos, já elencado na delimitação do problema de pesquisa, relaciona-se à investigação das características que compõem o MED que orienta o estudo de inequações na Educação Básica e ao MDD subjacente, avaliando o alcance e o limite desses modelos quanto à possíveis articulações com outros ramos da matemática, empreendemos um estudo que compreendeu a leitura e análise de algumas das propostas curriculares do Brasil, além de manuais e livros didáticos, atuais e antigos, conforme apresentamos a seguir.

De acordo com Valente (2002), ao investigar as origens das práticas escolares no Brasil é necessário considerar os 200 anos em que os colégios jesuítas eram praticamente a única referência nesse sentido. No entanto, apesar dessa hegemonia, não se observa qualquer influência desses colégios no que se refere à matemática que viria a ser estudada séculos depois nos primeiros colégios públicos do país.

O que se verifica, de fato, é que esse papel foi ocupado pelas escolas militares que se estabeleceram no Brasil a partir do século XVII, tanto pela Academia Real dos Guardas-Marinha, fundada em Lisboa no ano de 1779 e trazida pela corte portuguesa em 1808, quanto pela Academia Real Militar, criada em 1810, já em solo brasileiro.

A Academia Real dos Guardas-Marinha tinha como objetivo a formação prática de praças especiais, uma espécie de suboficial militar, um profissional do mar, para atuar nos quadros da Marinha de Guerra. O curso tinha a duração de três anos e aceitava alunos a partir dos 12 anos de idade. Por sua vez, a Academia Real Militar, fundada nos moldes da *École Polytechnique* francesa, aceitava alunos a partir dos 15 anos de idade e tinha como objetivo não só a formação de oficiais militares, mas também de geógrafos, topógrafos e engenheiros que pudessem trabalhar em obras de infraestrutura para a cidade.

O que se percebe no período que antecede a criação das primeiras escolas públicas no Brasil é que o tipo de formação que se propunha na Academia Real Militar vai aos poucos tomando a forma de um curso superior, ao passo que o que era ensinado na Academia Real dos Guardas-Marinha vai se transformando no que viria a ser o Ensino Secundário.

Antes dessas escolas não havia uma organização dos conteúdos a serem estudados, tampouco um programa de ensino. Sendo assim, os distintos objetivos de formação de cada uma dessas escolas acabam por desencadear a divisão entre o que deveria ser considerado como matemática elementar, a ser estudada por meio de aplicações práticas na Academia Real dos Guardas-Marinha, e o que deveria ser considerado como matemática superior (como por exemplo a introdução da disciplina de cálculo diferencial e integral) entre os conteúdos a serem estudados na Academia Real Militar.

Entre os livros utilizados na época, Valente (2002) destaca os Elementos de Aritmética de Bézout, os Elementos de Geometria e os Elementos de Álgebra, esses dois últimos de Lacroix.

Em sua versão original, Bézout (1784) era utilizado nas escolas militares francesas, vindo a se tornar um *best seller* mundial, a partir das traduções que se fizeram para as diversas línguas, como a que foi encomendada pela coroa portuguesa em 1784.

Voltado principalmente à temas da matemática elementar, o livro trata das quatro operações fundamentais, de frações, de números complexos²², de técnicas de extração da raiz quadrada e da raiz cúbica, de proporções e regra de três, das progressões aritméticas e geométricas e, ao final, de logaritmos.

Ao tratar das propriedades das razões, proporções e progressões, Bezóut (1784, p.157) apresenta a definição de razão como “a grandeza relativa que resulta da comparação entre duas quantidades”, feita de dois modos: aritmeticamente, quando se procura saber “quanto uma delas excede, ou é excedida da outra” ou geometricamente, quando se procura “conhecer quantas vezes uma contém, ou é contida na outra”.

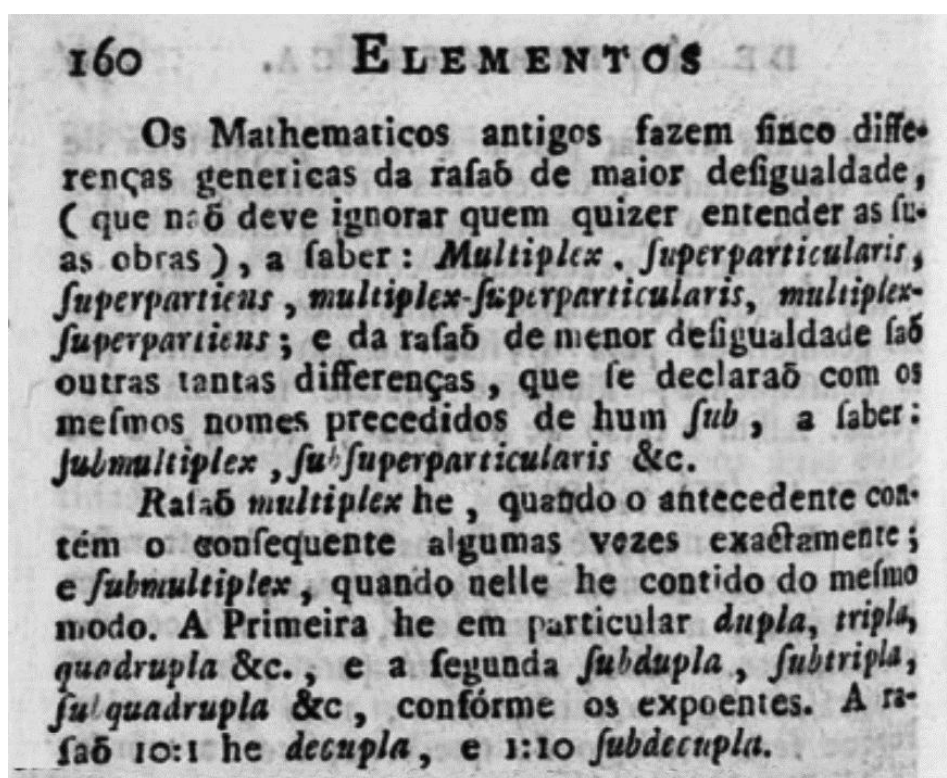
Após expor o significado dos termos “antecedente” e “consequente” em uma razão, o autor as classifica em “razão de igualdade e desigualdade, conforme consta

²² No contexto em que nos referimos, números complexos correspondem aos números que expressam múltiplos e submúltiplos de unidades de medida, como por exemplo, $32^{lb}15^s7^d$ que corresponde à 32 libras, 15 soldos e 7 dinheiros, unidades monetárias do então sistema francês.

de termos iguais ou desiguais”, chamando de “maior desigualdade quando o antecedente é maior que o conseqüente, e de menor desigualdade quando é menor”.

Dando continuidade às definições, conforme reproduzimos na Figura 24, Bézout (1784) apresenta as distinções que se fazem entre as razões de maior desigualdade: “*multiplex, superparticularis, superpartiens, multiplex-superparticularis* e *multiplex-superpartiens*”, e as de menor desigualdade, que “se declaram com os mesmos nomes precedidos de um *sub*, a saber *submultiplex, subsuperparticularis*” e assim por diante.

Figura 24. Distinções entre razões de maior e de menor desigualdade



Fonte: Bézout (1784, p. 160)

Por *multiplex* entende-se a razão de maior desigualdade cujo antecedente contém o conseqüente um número inteiro de vezes. De forma análoga, *submultiplex* é a razão de menor desigualdade cujo conseqüente contém o antecedente um número inteiro de vezes.

Por *superparticularis* entende-se a razão de maior desigualdade em que o antecedente contém uma vez o conseqüente e, além disso, uma *parte alíquota*²³

²³ Ao afirmar que o antecedente da razão 3:2 contém uma vez o conseqüente e mais uma *parte alíquota* o autor quer dizer que o resto da divisão do primeiro pelo segundo é igual a 1. Nos casos em que o resto da divisão excede 1, como ocorre por exemplo na razão 5:3, teremos duas partes alíquota

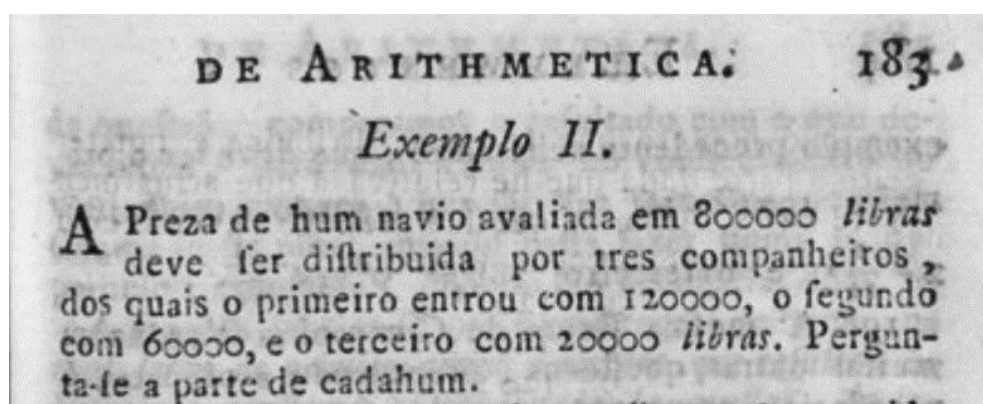
deste, como 3:2. A designação correspondente para razões de menor desigualdade é chamada de *subsuperparticularis* como ocorre, por exemplo, com a razão 2:3.

Por *superpartiens* são classificadas as razões em que o antecedente contém o conseqüente uma vez e, além disso, algumas partes alíquotas, como ocorre com a razão 5:3 e por *subsuperpartiens* as razões em que o conseqüente contém o antecedente uma vez e, além disso, algumas partes alíquotas como ocorre com a razão 3:5.

A classificação *multiplex-superparticularis* é dada às razões em que o antecedente contém algumas vezes o conseqüente e, além disso, uma parte alíquota, como ocorre com 7:3 e finalmente, a classificação *multiplex-superpartiens* é dada às razões em que o antecedente contém algumas vezes o conseqüente e, além disso algumas partes alíquotas, como em 8:3. As designações *submultiplex-superparticularis* e *submultiplex-superpartiens* são utilizadas, de forma análoga, para designar as razões de menor desigualdade.

O autor retoma esses saberes mais à frente no livro, ao mostrar que a razão geométrica entre duas grandezas será a mesma, sempre que os termos que formam essa razão forem ambos multiplicados ou divididos por uma mesma quantidade, apresentando ao aluno uma primeira noção de proporcionalidade, que terá utilização prática em algumas situações, como a que reproduzimos na Figura 25.

Figura 25. Um problema para a Regra da Companhia



Fonte: Bézout, 1784, p. 183.

Nesse exemplo, a situação é resolvida com apoio do que Bézout (1784, p. 181) chama de Regra da Companhia, ao afirmar que “[...] esta regra tomou o nome de

(o resto da divisão do antecedente pelo conseqüente é igual à 2) e nesse caso (em que as partes alíquota são maiores do que 1) a razão recebe o nome de *superpartiens*.

Companhias de Negócio, nas quais tem grande uso, quando se trata de repartir pelos companheiros o ganho ou a perda conforme as entradas de cada um”.

Além dos Elementos de Aritmética de Bézout, que como dissemos, era mais voltado às aplicações práticas, o ensino da matemática que se praticava nas escolas militares parece ter encontrado nas traduções dos Elementos de Geometria e dos Elementos de Álgebra, ambos de Lacroix, dois modelos ideais para o ensino de geometria e de álgebra, tanto do que viria a ser estudado como matemática elementar no âmbito da Academia Real dos Guardas-Marinha, como matemática superior, na Academia Real Militar.

De acordo com Valente (2002), ao referir-se aos Elementos de Geometria de Lacroix, é possível observar que o autor não escreve uma geometria inovadora, mas procura encontrar um equilíbrio entre o rigor e a aceitação de verdades evidentes. Isso pode ser observado, por exemplo, ao compararmos o nível de rigor que se aplica à demonstração do Teorema da Desigualdade Triangular desenvolvida por Euclides (apresentada na p. 62 de nosso Estudo Epistemológico) com a que é apresentada por Lacroix (1808), reproduzida na Figura 26. Ao referir-se a um triângulo ABC , o autor justifica que como a menor distância entre os vértices A e B é igual ao comprimento do segmento de reta que une esses pontos, conclui-se que esse lado será sempre menor do que a soma dos comprimentos dos outros dois lados AC e BC .

Figura 26. Teorema da Desigualdade Triangular por Lacroix

15. Remarques. Puisque la ligne droite AB , est le plus court chemin pour aller du point A au point B , il s'ensuit que la somme des deux autres côtés AC et BC du triangle ABC , surpasse AB ; et l'on verra de même que la somme de deux côtés quelconques d'un triangle surpasse toujours le troisième.

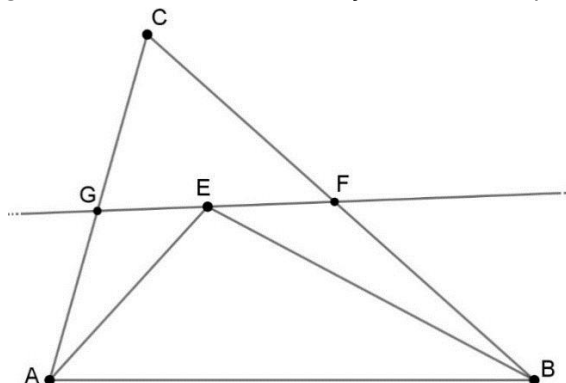
Fonte: Lacroix (1808, p. 9)

Lacroix (1808) prossegue com a argumentação, a fim de demonstrar que a soma dos comprimentos dos lados de um triângulo AEB , inscrito em um triângulo ABC , conforme representado na Figura 27, será sempre menor que a soma dos comprimentos dos lados desse último.

Supondo que o ponto E pertença à uma reta GF , que intersecta ao mesmo tempo os lados AC e BC , teremos, pela desigualdade triangular, que $GF < GC + CF$,

e pela mesma razão, $AE < AG + GE$ e $EB < EF + FB$. Ao somar termo a termo essas duas desigualdades teremos que $AE + EB < AG + GE + EF + FB$.

Figura 27. Auxílio à demonstração de Lacroix (1808)



Fonte: Lacroix (1808, p. 209)²⁴

Como a soma dos comprimentos dos lados AE e EB é menor que o comprimento da linha poligonal $AGFB$, é também, em consequência disso, menor do que a soma dos comprimentos dos lados AC e CB .

Para Valente (2002), os Elementos de Álgebra de Lacroix foram a grande referência para o ensino dessa disciplina no Brasil. A obra é dividida entre conteúdos que vão das noções preliminares da passagem da aritmética para a álgebra, passando pela resolução de equações de 1º e 2º grau, até chegar, quase ao final do livro, na apresentação de técnicas de resolução de equações numéricas de graus maiores do que dois por meio de aproximação, apoiado na noção de intervalo numérico e na resolução de inequações, nos mesmos moldes propostos por Cauchy (1821), conforme mostramos em nosso Estudo Epistemológico (p. 100).

Ao analisar essas três obras, Bézout (1784), Lacroix (1808) e Lacroix (1838), que como Valente (2002) afirma, foram as primeiras referências em direção à organização dos conteúdos matemáticos a serem estudados nas escolas brasileiras, conseguimos identificar características de pelo menos três dos cinco modelos epistemológicos específicos apontados em nosso MER.

²⁴ Temos optado, sempre que possível, por colocar as figuras originais dos livros consultados, entretanto, a reprodução dessa figura estava comprometida na versão que tivemos acesso. Esse foi o motivo pelo qual tivemos que redesenhá-la.

Identificamos o modelo M_1 ao verificar como Bézout (1784) se utiliza da noção de desigualdade ao comparar grandezas com apoio à noção de medida como um meio para classificar diferentes tipos de razão no campo da aritmética.

Identificamos o modelo M_2 a partir da análise das praxeologias que se desenvolvem em Lacroix (1808), que se utiliza da comparação entre grandezas, de forma dissociada da noção de medida para demonstrar propriedades geométricas do triângulo, como se observa, por exemplo, em sua demonstração da desigualdade triangular e da desigualdade entre os comprimentos dos lados de um triângulo inscrito em outro, e os comprimentos dos lados desse último.

Identificamos, finalmente, aspectos do modelo M_5 de nosso MER, ao observar como Lacroix (1838) se apoia na noção de intervalo numérico, de desigualdade e na resolução de inequações, para encontrar raízes de equações numéricas por aproximação.

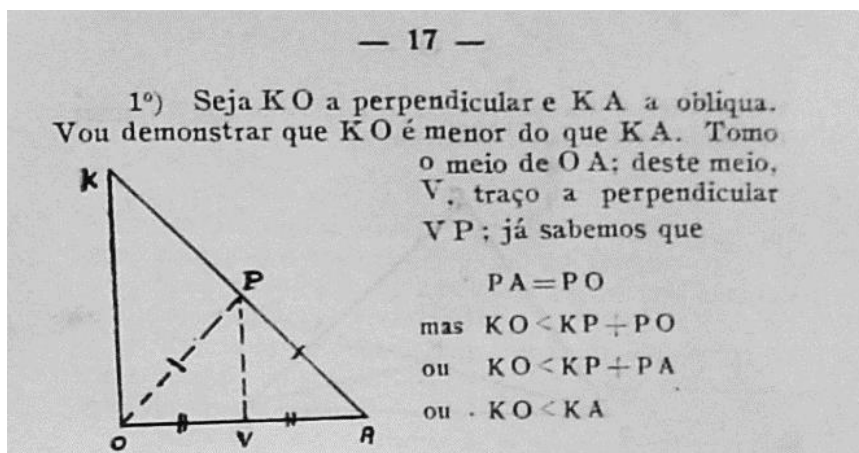
De acordo com Castro (1992 apud VALENTE, 2002), as primeiras obras didáticas brasileiras começam a surgir por volta de 1830, na forma de compêndios, com vistas aos exames de admissão das escolas preparatórias, liceus e colégios. Nesse sentido, apesar da substituição das traduções francesas de livros didáticos por livros nacionais, pouco se verifica em termos de mudança de abordagem, visto que os autores nacionais foram, eles próprios, formados em escolas em que as traduções francesas eram referência para o ensino. Nas palavras de Valente (2002, p. 128)

Os primeiros autores de livros didáticos destinados às escolas nascentes de primeiras letras e liceus orientam-se, como se viu, por Bézout e por Lacroix. Simples é a explicação: mestres que foram da Academia de Marinha onde Bézout era o autor adotado; ou professores da Academia Militar Real, onde dominavam as obras de Lacroix, natural era que sofressem, para a escrita de seus textos didáticos a influência desses autores.

A procura por livros didáticos de autores brasileiros desse período nos levou aos Apontamentos de Geometria (ABREU, 1921) que era utilizado pelos alunos do Colégio Pedro II, no Rio de Janeiro. Assim como em Lacroix (1808), é possível observar na obra o recurso às desigualdades dissociadas da noção de medida para demonstrar propriedades geométricas (características do modelo M_2), além do equilíbrio entre o rigor e a aceitação de evidências, sem maiores justificativas.

Isso é visto, por exemplo, na demonstração apresentada pelo autor de que, de todas as retas que passam por um ponto fora de uma reta dada, a que tem o menor comprimento é a perpendicular, conforme representado na Figura 28.

Figura 28. Demonstração da desigualdade entre retas oblíquas e perpendiculares



Fonte: Abreu (1921, p. 17)

Ao tomar um ponto médio V entre os pontos O e A , o autor afirma que $PA = PO$ e representa isso na figura por meio de um pequeno traço desenhado sobre os segmentos PA e PO , mas toma isso como evidente, sem mostrar que isso se deve ao fato de que os triângulos APV e OPV são congruentes, visto que possuem dois lados congruentes ($OV \equiv VA$), dois ângulos congruentes ($\angle OVP \equiv \angle AVP$) e um lado em comum (PV).

Da mesma forma, toma-se como evidente o fato de que $KO < KP + PO$, sem referência à justificativa possibilitada pela desigualdade triangular, concluindo, ao final, que $KO < KA$.

Em síntese, ao investigar as características do MED do período que se estende da vinda da coroa portuguesa para o Brasil, em 1808, até idos de 1930, com a primeira grande reforma do ensino brasileiros, sobre a qual faremos referência nos próximos parágrafos, conseguimos identificar entre as obras consultadas as características que compõem os modelos específicos M_1 , M_2 e M_5 de nosso MER.

Das primeiras escolas militares, até o surgimento dos primeiros liceus e universidades, até idos de 1920, o Ensino Secundário brasileiro reunia as características do que conhecemos hoje como um curso preparatório, cujo principal objetivo era o de mediar o acesso de estudantes às universidades. Alunos oriundos de famílias abastadas preferiam pagar preceptores a frequentar as aulas de forma

regular e recorriam às instituições de Ensino Secundário apenas para a realização de provas de ingresso no Ensino Superior, uma vez que a frequência nesses cursos não era obrigatória.

É nesse cenário que surge a Reforma Francisco Campos, em 1932, que ficou assim conhecida em homenagem ao então Ministro do recém-criado Ministério da Educação e Saúde (MES), no primeiro governo de Getúlio Vargas. Foi a primeira reforma de abrangência nacional com o objetivo de regularizar o Ensino Secundário, a exemplo do que algumas iniciativas regionais já haviam tentado na década de 1920, como as reformas estaduais propostas por Sampaio Dória (São Paulo), Lourenço Filho (Pernambuco), Anísio Teixeira (Bahia), Francisco Campos e Mário Casassanta (Minas Gerais) e por Fernando de Azevedo (Rio de Janeiro), entre outras.

Ao expor os motivos que levaram à decretação da Reforma, o ministro Francisco Campos argumenta em defesa da transformação do Ensino Secundário em um curso de formação, distanciando-o de seu caráter exclusivamente preparatório, ao afirmar que

[...] a finalidade do ensino secundário é, de fato, mais ampla do que a que se costuma atribuir-lhe. Via de regra, o ensino secundário tem sido considerado entre nós como um simples instrumento de preparação dos candidatos ao ensino superior, desprezando-se, assim, a sua função eminentemente educativa que consiste, precisamente, no desenvolvimento das faculdades de apreciação, de juízo, de critério, essenciais a todos os ramos da atividade humana, e, particularmente, no treino da inteligência em colocar os problemas nos seus termos exatos e procurar as suas soluções adequadas (CAMPOS, 1933, p.3).

A Reforma Francisco Campos trouxe mudanças com relação à duração do curso secundário, que passou a ser de sete anos, divididos em dois ciclos: o curso secundário fundamental, para alunos dos 11 aos 16 anos de idade (5 anos de duração) e o curso secundário complementar, obrigatório para os que pretendiam acessar o curso superior, dos 17 ao 19 anos de idade (2 anos de duração) e subdividido em especialidades que dependiam da carreira superior almejada pelo aluno²⁵. A disciplina de matemática passou a corresponder à junção das disciplinas de aritmética, geometria e álgebra, que até então eram ensinadas separadamente.

²⁵ O curso complementar dividia-se em três blocos de especialidades: 1) Curso pré-jurídico, destinado aos candidatos aos cursos de Direito, 2) Curso pré-médico, para candidatos aos cursos de Medicina, Farmácia e Odontologia e 3) Curso pré-politécnico, para os candidatos aos cursos de Engenharia e Arquitetura (Brasil, 1932).

A análise de livros utilizados nesse período nos permite verificar que o primeiro contato dos alunos com inequações se dava quando estavam com idade próxima dos 15 anos, ao cursarem os anos finais do Ensino Secundário, entre os conteúdos previstos no currículo de álgebra.

Entre os autores da época, é preciso destacar Cecil Thiré, professor do Colégio Pedro II, entre os que assumiram as orientações apresentadas pela Reforma Francisco Campos, juntamente com Euclides Roxo e Mello e Souza (MIGUEL e MIORIM, 2019).

Em um de seus livros, destinado aos alunos do 4º ano (THIRÉ, 1947), verificamos que após elencar as propriedades relativas à adição e multiplicação de desigualdades, o autor apresenta alguns exercícios resolvidos, como por exemplo, a demonstração algébrica de que a média aritmética entre dois números diferentes é maior que a média geométrica, conforme a reprodução na Figura 29.

No exercício de número 91 a tarefa consiste em demonstrar que $a^2 + b^2 > 2ab$ para dois números quaisquer, designados por a e b , desde que sejam diferentes.

Figura 29. Exemplo de demonstração em Thiré (1947)

91. — Sendo a diferente de b , demonstrar que

$$a^2 + b^2 > 2ab$$

Como a é diferente de b , o quadrado de $a - b$ é maior do que zero. Tem-se:

$$(a - b)^2 > 0$$

ou

$$a^2 - 2ab + b^2 > 0$$

Transpondo $-2ab$:

$$a^2 + b^2 > 2ab$$

Fonte: Thiré (1947, p. 51)

No exercício de número 92 a tarefa consiste em demonstrar que a média aritmética entre dois números quaisquer é sempre maior que a média geométrica entre esses números, desde que eles sejam diferentes.

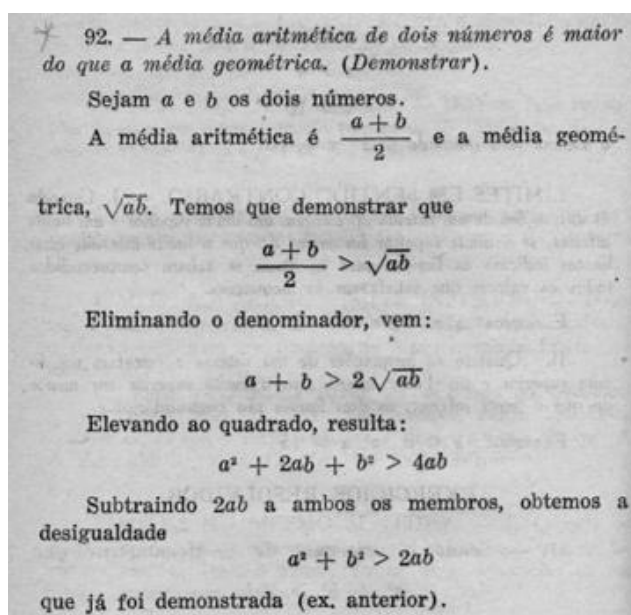
Tanto em um caso como no outro, a técnica utilizada na realização das tarefas apoia-se nas propriedades algébricas das operações de adição e multiplicação de desigualdades e na regra de sinais da multiplicação.

Por exemplo, ao afirmar que $(a - b)^2 > 0$, sempre que $a \neq b$, o autor apoia-se no fato de que a expressão $(a - b)$ tem o mesmo sinal que a expressão $(a - b)$, por

óbvio, já que são iguais. Sendo assim, independentemente dos valores de a e b , desde que $a \neq b$, de acordo com a regra de sinais da multiplicação, o seu produto sempre resultará em um número de valor positivo.

Da mesma forma, ao “eliminar o denominador” da expressão $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$ a técnica apoia-se na propriedade que garante que ao multiplicar ambos os lados de uma desigualdade por um número positivo, o sentido da desigualdade se mantém, ou seja, $2 \left(\frac{a+b}{2} \right) > 2\sqrt{ab}$, que nos leva a $a + b > 2\sqrt{ab}$.

Figura 30. Desigualdade entre as médias em Thiré (1947)



Fonte: Thiré (1947, p. 51)

Ao comparar a praxeologia que se desenvolve a partir do exercício proposto por Thiré (1947) é possível identificar características do modelo epistemológico que chamamos de M_4 em nosso MER, notadamente ao verificar que o tipo de tarefa relaciona-se à demonstração de uma propriedade algébrica e na forma como o autor utiliza o encadeamento lógico de proposições para concluir a tarefa, como por exemplo, ao afirmar que $(a - b)^2 > 0$, sempre que $a \neq b$, e um pouco mais à frente se apoiar nessa asserção para mostrar que $a^2 + b^2 > 2ab$.

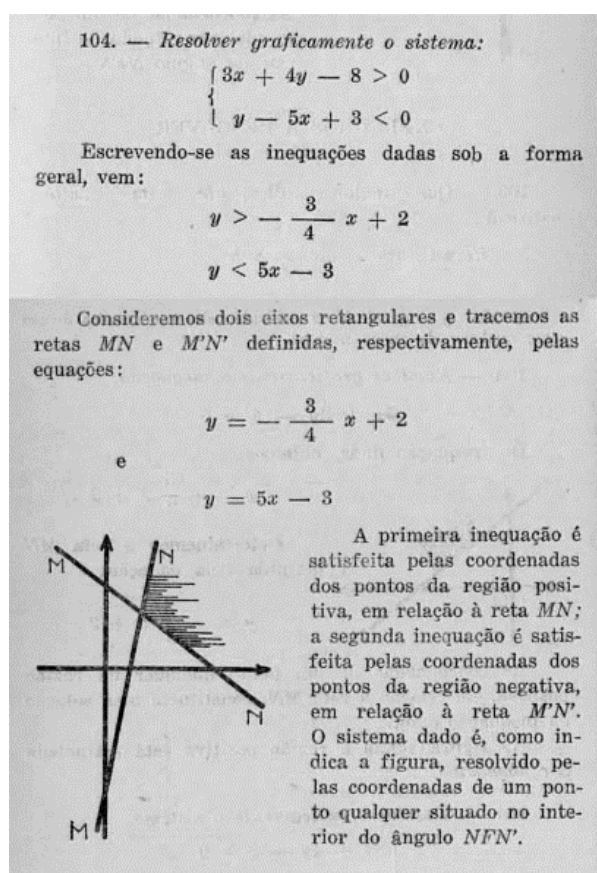
Em consonância com o que Assude (1997) chamaria mais tarde de Técnica Algébrica (TA)²⁶ é possível observar que a os processos de cálculo algébrico são por si só suficientes para concluir a demonstração.

²⁶ Ao classificar distintas técnicas e justificativas tecnológico-teóricas empregadas na resolução de inequações, Assude (1997) chama de Técnica Algébrica (TA), a técnica que consiste em resolver

Em um outro exemplo, do mesmo livro (THIRÉ, 1947, p.61), reproduzido na Figura 31, podemos observar que a tarefa consiste na resolução de um sistema de inequações, ou em outros termos, na busca por um intervalo de valores que torne não apenas uma, mas ambas as desigualdades condicionais verdadeiras, a exemplo do que se verifica no M_5 de nosso MER.

Nesse caso, a técnica proposta consiste, inicialmente, em proceder a manipulações algébricas, que permitem transformar as inequações $\begin{cases} 3x + 4y - 8 > 0 \\ y - 5x + 3 < 0 \end{cases}$ em inequações equivalentes $\begin{cases} y > -\frac{3x}{4} + 2 \\ y < 5x - 3 \end{cases}$.

Figura 31. Exemplo de resolução de um sistema de inequações



Fonte: Thiré (1947, p. 61)

Para encontrar a solução, o autor apoia-se no fato de que as retas correspondentes às equações $y = -\frac{3x}{4} + 2$ e $y = 5x - 3$ delimitam dois semiplanos

inequações por meio de processos de manipulação algébrica, justificados, por sua vez, pelas propriedades algébricas das operações com desigualdades, que permitem, por exemplo, que se adicione termos semelhantes em ambos os lados da desigualdade, ou que se multipliquem ambos os lados por termos semelhantes não negativos, sem que seja alterado o sentido do sinal da desigualdade. Em alguns tipos de inequação, esses processos são, por si só, suficientes para a resolução.

cada uma, além dos próprios pontos que pertencem às retas, para em seguida, determinar a intersecção dos semiplanos que atendem às inequações do sistema e que corresponde, nesse caso, à região das soluções viáveis.

Diferentemente do exemplo anterior, que envolvia a demonstração da desigualdade entre as médias, a observação da praxeologia que se desenvolve nesse exemplo nos mostra que o autor utiliza um tipo de técnica que mais tarde seria classificado por Assude (1997) como Técnica Funcional Gráfica (TFG)²⁷, que envolve, além do cálculo algébrico, usado na transformação das inequações iniciais em outras duas, equivalentes, as possibilidades permitidas pela geometria analítica para representar os pontos que atendem às inequações no plano coordenado.

Além de Thiré (1947), em que, como vimos, se observam características dos modelos específicos M_4 e M_5 , consultamos alguns livros de geometria desse período, como Freire (1937) e Roxo *et al* (1944), utilizados respectivamente em escolas de Ensino Primário e secundário, em busca de praxeologias que se desenvolvessem de acordo com as características do modelo M_2 .

Ao analisar essas obras, pudemos notar principalmente a ausência da abordagem axiomática e das demonstrações de propriedades das figuras geométricas (como as que caracterizam o modelo M_2), em nome de uma geometria mais prática, pragmática, em que os tipos de tarefa se voltam principalmente ao cálculo de medidas de comprimento, de área e de volume de figuras planas e espaciais.

Em resumo, no período compreendido pela vigência da Reforma Francisco Campos, dos idos de 1930 até aproximadamente 1940, identificamos entre os livros consultados características dos modelos M_4 e M_5 de nosso MER.

Com a promulgação da Lei Orgânica do Ensino Secundário de 1942, conhecida como Reforma Capanema em homenagem ao então ministro da Educação, Gustavo Capanema, estabeleceu-se uma nova organização do Ensino Secundário de âmbito nacional. Os egressos do Ensino Primário passaram a ter pela frente o curso ginásial de quatro anos, seguido do curso colegial, de três anos, com duas opções: curso clássico (voltado às letras e humanidades) e curso científico (voltado ao estudo de ciências e matemática). O Ensino Normal, voltado à formação de docentes para a

²⁷ Assude (1997) chama de Técnica Funcional Gráfica (TFG), a técnica que consiste em construir a representação gráfica da função (ou das funções), para em seguida dividir o plano em três regiões distintas para cada uma delas: os pontos em que $f(x) = 0$, os pontos em que $f(x) < 0$ e os pontos em que $f(x) > 0$, analisando a intersecção das áreas das funções dadas como meio de encontrar o conjunto das possíveis soluções da inequação.

Educação Básica seria regulamentado mais tarde, em 1946, por meio de um decreto para alteração da Lei Orgânica do Ensino (PALMA FILHO, 2005).

Entre os *best-sellers* da época, pela quantidade de exemplares que venderam, podemos destacar os livros escritos por Ary Quintella, Osvaldo Sangiorgi e Algacyr Maeder, para citar alguns dos mais importantes. Ao analisar algumas dessas obras, como por exemplo Sangiorgi (1963) e Quintella (1965), é possível observar que o estudo de desigualdades, de inequações de 1º grau e de sistemas de inequações com uma incógnita passa a ser desenvolvido no 2º ano do curso ginasial, no âmbito do estudo de equações de 1º grau.

A abordagem proposta por Quintella (1965), conforme se observa na Figura 32, consiste inicialmente na apresentação de cada uma das propriedades e das operações com desigualdades, para em seguida discorrer sobre alguns tipos de desigualdades que são verdadeiras apenas para determinados valores atribuídos às incógnitas (desigualdades condicionais ou inequações).

Figura 32. Demonstração de operações com inequações

III) Multiplicando-se ou dividindo-se, pelo mesmo número, diferente de zero, os dois membros de uma desigualdade, resulta uma desigualdade do mesmo sentido, se o número fôr positivo, e de sentido contrário, se ele fôr negativo.

Seja a desigualdade: $a > b$
 donde se deduz, por definição,
 $a - b > 0$

Sendo $a - b$ um número positivo, sua multiplicação, por um número positivo, dará ainda produto positivo, e, por um número negativo, dá-lo-á negativo, assim, tem-se:

para m positivo: $am - bm > 0$
 para m negativo: $am - bm < 0$

Resulta, portanto:

para m positivo: $am > bm$
 para m negativo: $am < bm$

Da mesma forma será demonstrada a propriedade para as desigualdades com o sinal $<$, também, em relação à divisão.

Fonte: Quintella (1965, p. 119)

Nesse primeiro momento, ao apresentar as propriedades das operações com desigualdades, encontramos características do modelo M_4 do MER, ao observar como o autor demonstra que se $a > b$, então $a - b$ será sempre um número positivo, e que o produto entre $a - b$ e um número positivo m mantém-se positivo, mas que passa a ser negativo caso m seja negativo.

Nesse segundo caso, teríamos que $ma - mb < 0$, ou seja, que $ma < mb$, justificando tecnologicamente, no âmbito da álgebra, a técnica de manipulação que faz com que o sinal da desigualdade se mantenha quando todos os termos são multiplicados por um número positivo e se inverte quando são multiplicados por um número negativo.

Em outra parte do livro, Quintella (1965) apresenta, entre outras, a propriedade que garante que a desigualdade resultante da adição termo a termo de desigualdades que tenham o mesmo sentido, mantem o mesmo sentido que as desigualdades que foram somadas, conforme se observa na Figura 33.

Figura 33. Demonstração da propriedade da adição de desigualdades

11. Operações com as desigualdades.

1.ª) Adição. *Adicionando-se, membro a membro, desigualdades do mesmo sentido, resulta uma desigualdade do mesmo sentido.*

Sejam as desigualdades: $a > b$
 $c > d$

donde se conclui: $a - b > 0$
 $c - d > 0$

Como a soma de números positivos é positiva, tem-se:

$$(a - b) + (c - d) > 0$$

ou $a + c - b - d > 0$

ou, ainda: $(a + c) - (b + d) > 0$

donde, finalmente $a + c > b + d$

O raciocínio é análogo para as desigualdades com o sinal $<$.

OBSERVAÇÃO. Quando as desigualdades dadas têm sentidos contrários, o resultado da adição, membro a membro, não tem sentido fixo, podendo mesmo ser uma igualdade. Não é, pois, permitido adicionar desigualdades de sentidos opostos.

Fonte: Quintella (1965, p. 120)

Da mesma forma que o exemplo anterior, observamos características do modelo M_4 , seja quanto ao tipo de tarefa, que consiste na demonstração da propriedade citada, seja quanto à técnica, que se desenvolve por meio de manipulações algébricas justificadas pelas propriedades da álgebra, ao mostrar que a desigualdade $a > b$ é equivalente à $a - b > 0$, da mesma forma que $c > d$ é equivalente à $c - d > 0$. Como nessa nova configuração o termo à esquerda é positivo em ambas as desigualdades, e como a adição de números positivos resulta sempre em um número positivo, pode se afirmar que $a - b + c - d > 0$ e conseqüentemente que $a + c > b + d$.

Após a demonstração dessa e de outras propriedades de operações com desigualdades, o autor apresenta exemplos e exercícios envolvendo resolução de inequações no sentido de busca pelo intervalo que torna a desigualdade condicional verdadeira, conforme se observa no modelo M_5 do MER, envolvendo sistemas de inequações com uma única incógnita, inequações produto e inequações quociente, que são resolvidas por meio de técnicas justificadas pelas propriedades das operações que foram demonstradas, no âmbito da álgebra.

O estudo das inequações, não como ferramenta, mas como objeto de estudo em si, será retomado no 1º ano do curso colegial, com as inequações de 2º grau, de forma simultânea ao estudo das equações do 2º grau, como se observa tanto em Carvalho (1943) como em Maeder (1946), que introduzem o estudo genérico das inequações do tipo $ax^2 + bx + c > 0$ ou $ax^2 + bx + c < 0$ pela análise simultânea do coeficiente a e do determinante $b^2 - 4ac$, ou seja, pelo estudo do sinal do trinômio de 2º grau, que na obra analisada se dá na unidade que antecede o estudo das inequações.

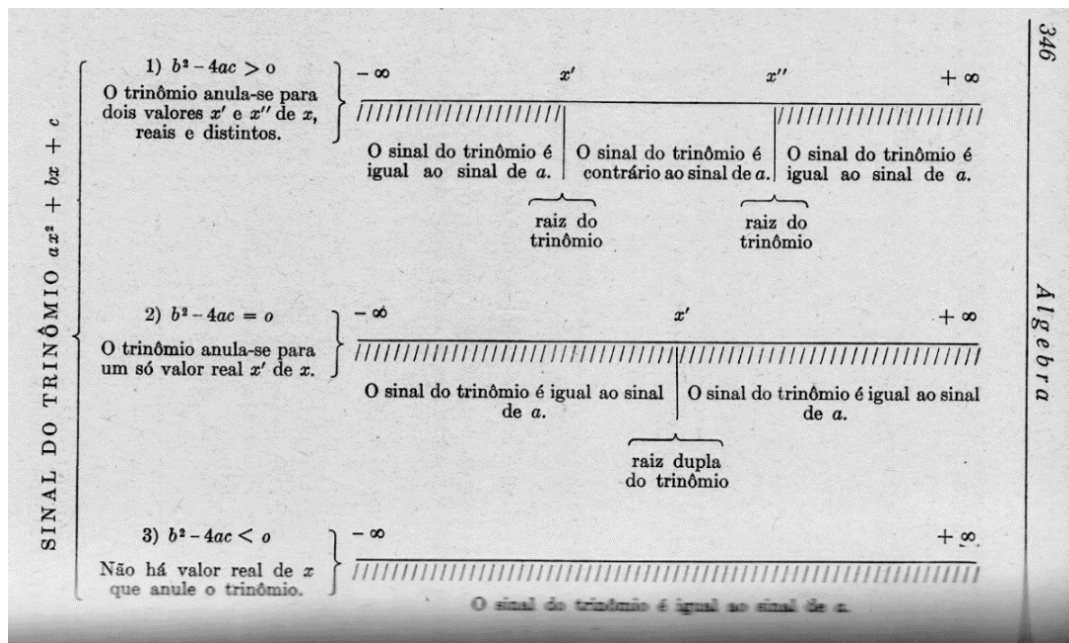
A título de exemplo, reproduzimos parte da explicação apresentada pelo autor na Figura 34, que se refere à resolução de inequações do tipo $ax^2 + bx + c > 0$.

Figura 34. Resolução de inequações genéricas do 2º grau

263. Resolução. — A resolução de uma inequação do 2.º grau com uma incógnita consiste na determinação dos valores entre os quais esta pode variar para que se verifique a relação de desigualdade indicada por aquelas. Funda-se tal procedimento no estudo feito no capítulo precedente sobre a variação de sinal do trinômio do 2.º grau. Consideremos, pois, separadamente as inequações de cada um dos tipos acima mencionados. a) Resolver a inequação $ax^2 + bx + c > 0.$ Devemos notar que se apresentam três casos: $b^2 - 4ac > 0$ $b^2 - 4ac = 0$ $b^2 - 4ac < 0.$ I. No primeiro caso, sendo $b^2 - 4ac > 0,$ a inequação $ax^2 + bx + c > 0$, em a qual $a > 0$, se verifica para todos os valores de x não compreendidos entre as raízes, os quais tornam positivo o valor numérico do trinômio. Representando por x' e x'' as raízes do trinômio e admitindo sempre $x' < x''$, dizemos que a inequação dada, quando $b^2 - 4ac > 0$, é satisfeita para $x < x'$ $x > x''.$ II. Admitindo, agora, $b^2 - 4ac = 0,$ a inequação $ax^2 + bx + c > 0$, se verifica para qualquer valor de x diferente da raiz dupla do trinômio.	Dizemos, então, que a inequação dada, quando $b^2 - 4ac = 0$, é satisfeita para $x \neq x'.$ III. Supondo $b^2 - 4ac < 0$, a inequação $ax^2 + bx + c > 0$ será satisfeita para qualquer valor de x, uma vez que, para $a > 0$ e $b^2 - 4ac < 0$, o valor numérico do trinômio é positivo. b) Resolver a inequação $ax^2 + bx + c < 0.$ Consideremos dois casos: $b^2 - 4ac > 0$ $b^2 - 4ac \leq 0.$ I. No primeiro caso, sendo $b^2 - 4ac > 0,$ a inequação $ax^2 + bx + c < 0$ somente se verifica para os valores de x compreendidos entre as raízes, pois apenas esses valores tornam negativo o valor numérico do trinômio. Assim, quando $b^2 - 4ac > 0$, a inequação considerada é satisfeita para $x' < x < x''.$ II. Admitindo, agora $b^2 - 4ac \leq 0,$ a inequação $ax^2 + bx + c < 0$ não tem solução, por isso que, para $b^2 - 4ac \leq 0$, não há valor real de x que torne negativo o valor numérico do primeiro membro da inequação $ax^2 + bx + c < 0.$
---	--

Essa mesma abordagem é observada em Carvalho (1943, p. 346), em um resumo ilustrado do estudo do sinal do trinômio (Figura 35).

Figura 35. Um algoritmo para inequações do 2º grau



Fonte: Carvalho (1943, p.346)

Em ambos os livros a técnica apresentada pelos autores pode ser resumida em forma de um algoritmo que se apoia nos seguintes passos:

- Verifica-se o tipo de inequação (se $ax^2 + bx + c > 0$ ou $ax^2 + bx + c < 0$);
- Verifica-se o sinal do determinante $b^2 - 4ac$;
- Determinam-se, quando possível, as raízes reais do trinômio;
- Verifica-se o sinal do coeficiente a ;

e) De acordo com o tipo de inequação, com o sinal do determinante $b^2 - 4ac$ e com o sinal do coeficiente a “ajusta-se” a solução. Em outros termos, se chamarmos de x ao intervalo que corresponde à solução, e de x' e x'' as raízes do trinômio, de tal forma que $x' < x''$, há que se decidir por uma das seguintes possibilidades:

$$S = \{x < x' \text{ ou } x > x''\} \text{ ou } S = \{x' < x < x''\} \text{ ou } S = \{x \neq x'\} \cup \{x \neq x'\} \text{ ou } S = \{x\} \text{ ou } S = \emptyset$$

Podemos observar, nesse primeiro momento, características do modelo M_4 , ao analisar a praxeologia que se desenvolve a partir da tarefa de construção do algoritmo que leva à resolução de inequações do 2º grau, em que a técnica, desenvolvida a

partir do encadeamento lógico de asserções, é legitimadas pelas propriedades da álgebra e da geometria analítica.

Em um segundo momento, conforme se pode observar na Figura 36, o que se verifica é uma praxeologia que compõe o modelo M_5 do MER, diante da tarefa que é encontrar a solução de uma inequação de 2º grau específica, não mais genérica.

Figura 36. Exercício resolvido: inequação do 2º grau

264. Exercícios. — 1.º Resolver a inequação

$$x^2 - 5x + 6 > 0.$$

Tendo em vista que a inequação dada é da forma

$$ax^2 + bx + c > 0,$$

verifiquemos a natureza das raízes do trinômio respectivo:

$$b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \times 6 = 25 - 24 = 1.$$

Como se tem

$$b^2 - 4ac > 0,$$

segue-se que são reais e desiguais as raízes do trinômio.

Para obter as raízes, façamos

$$x^2 - 5x + 6 = 0.$$

Resolvendo a equação acima, encontramos

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \times 6}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2},$$

ou, separando as raízes

$$\left| \begin{array}{l} x' = \frac{5+1}{2} = 3 \\ x'' = \frac{5-1}{2} = 2. \end{array} \right.$$

Como é positivo o primeiro membro da inequação considerada, devemos tomar

$$x < 2 \quad \text{ou} \quad x > 3.$$

Fonte: Maeder (1946, p. 240)

Como a inequação é do tipo $ax^2 + bx + c > 0$, com coeficiente $a > 0$, e com determinante $b^2 - 4ac > 0$, o intervalo que corresponde à solução compreende tanto os valores de x menores que o valor da menor das raízes como os valores de x que são maiores que o valor da maior das raízes, ou seja $S = \{x < x' \text{ ou } x > x''\}$, que no exemplo corresponde à $S = \{x < 2 \text{ ou } x > 3\}$.

O que verificamos, ao analisar esses últimos exemplos, é que o algoritmo de resolução criado no modelo M_4 serve de justificativa tecnológica para uma técnica de resolução que se desenvolve no modelo M_5 .

Essa constatação reforça nossa impressão, já defendida durante o estudo epistemológico, de que modos distintos de interpretação da matemática, que se refletem em também distintos modelos epistemológicos, podem surgir a partir de limitações que se apresentam em um modelo prévio, mas que ainda assim, não suplantam e nem substituem o modelo anterior. O que se observa, de fato, como ocorre no caso desse último exemplo, é que os modelos coexistem e algumas vezes seus componentes intersectam-se.

Em resumo, o que pudemos observar ao analisar alguns dos principais livros didáticos utilizados no período pós Reforma Capanema, aproximadamente de 1940 até idos de 1970, como Maeder (1946), Carvalho (1943) e Quintella (1965), é que o MED que se verifica nos livros analisados, a exemplo do período anterior, continua sendo composto, basicamente, por modelos com as características dos modelos M_4 e M_5 do MER.

Em dezembro de 1961 foi promulgada a primeira Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, que entre suas principais características regulamenta a existência do Conselho Federal de Educação e dos Conselhos Estaduais de Educação, além de tornar obrigatória a matrícula de crianças com idade a partir dos sete anos no Ensino Primário de quatro anos (BRASIL, 1961). Essa organização irá se manter até o início da década de 1970, com a promulgação da Lei 5692/71, sancionada pelo Congresso Nacional e aprovada pelo então Presidente da República, Emílio Garrastazu Médici, que entre suas principais características trazia a concepção de um núcleo comum para o currículo de 1º e 2º graus e uma parte diversificada em função das particularidades locais de cada uma das regiões e unidades federativas, além de tornar obrigatória a matrícula de crianças com idade entre 7 e 14 anos no ensino de 1º grau, da 1ª à 8ª série (BRASIL, 1971).

No cenário internacional, durante o pós-guerra, pode ser observado um crescente interesse da comunidade acadêmica quanto às questões envolvidas no ensino da matemática e o consequente surgimento de grupos de pesquisa voltados à investigação dos processos de ensino e de aprendizagem da matemática escolar. Os currículos são questionados e novas estratégias de ensino são propostas. É nesse contexto que se desenvolve, em âmbito mundial, o Movimento da Matemática Moderna (MMM), trazendo uma proposta de renovação curricular baseada na

construção do “edifício matemático” a partir de estruturas algébricas associadas às definições de grupos, anéis e corpos, entre outros.

O MMM chega ao Brasil na década de 1960, em boa parte, trazido por Osvaldo Sangiorgi, que após ter realizado um estágio na Universidade do Kansas, EUA, de junho a agosto de 1960, passa a integrar uma comissão da Secretaria de Educação do Estado de São Paulo voltada à reestruturação do ensino da matemática nas escolas estaduais. Essa iniciativa, assim como a criação do Grupo de Estudos do Ensino da Matemática (GEEM) de São Paulo, também liderado por Sangiorgi, parecem ir ao encontro da proposta de descentralização prevista na LDB de 1961, ao criar os Conselhos Estaduais de Educação (VALENTE, 2008).

Em 1964 surgem as primeiras publicações de Sangiorgi para o ensino da matemática moderna no ginásio, em que se observam, além de uma clara diferença de abordagem em relação às publicações anteriores (o livro incluía no prefácio uma carta destinada aos alunos, além de uma edição especial voltada aos professores, com coleções de estratégias e resolução dos exercícios), uma nova diagramação, com uso de figuras, tipos e tamanhos de letras, inclusão de cores, fotografias e desenhos.

Diferentemente das reformas Francisco Campos e Capanema, o MMM não consistiu em um decreto por meio do qual devesse ser implantado, mas ainda assim o ensino da Matemática Moderna foi amplamente divulgado e adotado em todo o país (VALENTE, 2008).

A nota redigida pelos autores no início de um dos livros desse período parece resumir os propósitos da nova abordagem: “concisão, rigor, modernismo sem exageros” (COSTA, CALLIOLI e CAROLI, 1971, p. 5). Ao analisar a obra, um livro destinado à 2ª série do curso ginasial, frequentado por alunos com idade em torno dos 12 anos, é preciso destacar a atenção dispensada pelos autores quanto à precisão e quanto ao rigor das definições que se antecedem à apresentação das técnicas de resolução, como por exemplo, ao apresentarem propriedades das desigualdade, conforme reproduzimos na Figura 37.

Figura 37. Propriedades das desigualdades

1. Transitiva

Se $x < y$ e $y < z$, então $x < z$

2. Tricotomia

Vale uma e uma só das alternativas

$x = y$, $x < y$, $x > y$

3. Monotônica da adição

Se $x < y$, então $x + z < y + z$

Em palavras: somando aos dois lados de uma desigualdade um mesmo número, a desigualdade permanece.

4. Monotônica da multiplicação

Se $x < y$ e se $z > 0$, então $xz < yz$

Em palavras: multiplicando os dois lados de uma desigualdade por um mesmo número positivo, a desigualdade permanece.

O que acontece com uma desigualdade quando multiplicamos os dois lados por um número negativo? É fácil ver que ela muda de sentido.

Se $x < y$ e se $z < 0$, então $xz > yz$

Demonstração: suponhamos $x < y$ e que $z < 0$. Então $-z > 0$. Multiplicando por $-z$ (que é positivo), temos pela propriedade 4:

$$x(-z) < y(-z), \text{ isto é, } -xz < -yz.$$

Somando $xz + yz$ aos dois lados (propriedade 3), temos:

$$-xz + xz + yz < -yz + xz + yz$$

Usando a propriedade do oposto:

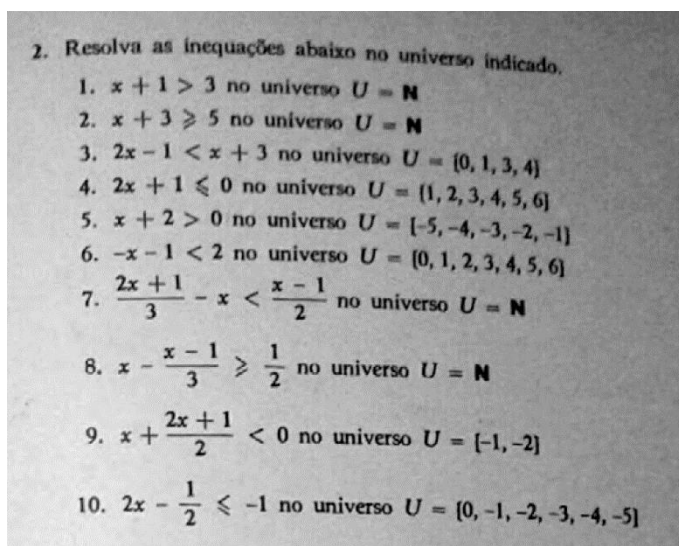
$$yz < xz, \text{ que pode ser escrito}$$

$$xz > yz$$

Fonte: Costa, Callioli e Caroli (1971, p.165)

Um outro aspecto, que a nosso ver merece ser destacado, refere-se à onipresença dos conceitos que se apoiam na teoria dos conjuntos, nesse caso, dos conjuntos numéricos. Podemos observar que em todos os exercícios propostos, o universo das possíveis resoluções não é implicitamente aceito como o conjunto dos números reais, mas definido de forma explícita como o conjunto dos números naturais, inteiros, racionais, ou definidos arbitrariamente, conforme se observa na Figura 38.

Figura 38. Resolução de inequações



Fonte: Costa, Callioli e Caroli (1971, p.169)

Quanto aos conteúdos abordados, não observamos diferenças entre os que eram contemplados antes e depois da adoção da Matemática Moderna, mas é notável a mudança de contexto. O que queremos dizer, por exemplo, é que as inequações do 1º grau continuam sendo tratadas na 2ª série do curso ginasial, como acontecia antes, entretanto, observa-se a ênfase na apresentação das estruturas que dão sentido aos algoritmos de resolução dos problemas apresentados. Alguns exercícios chegam a enumerar, ao lado da resolução, as propriedades que permitem que se escrevam inequações equivalentes à inicial, em cada um dos passos, que a nosso ver, favorece a coexistência dos modelos M_4 (em que as tarefas relacionam-se à processos de demonstração, apoiados pelas desigualdades) e M_5 (caracterizado por tarefas que envolvem a busca pelo intervalo que corresponde à solução de uma inequação).

Com a promulgação da constituição de 1988, concebida no processo de redemocratização do Brasil que teve início com o fim da ditadura militar, a LDB de 1961 foi considerada obsoleta. Mesmo assim, somente em 1996, depois de quase 10 anos tramitando no Congresso Nacional, seria sancionada pelo então presidente Fernando Henrique Cardoso, a atual Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB, Lei nº 9.394/1996), que traz como principais características o ensino obrigatório e gratuito para crianças a partir dos 4 anos de idade, a definição de Ensino Básico (antiga pré-escola), Ensino Fundamental (1ª a 8ª séries, para alunos com idade entre 7 e 14 anos), e Ensino Médio (antigo segundo grau, para alunos com idades entre 15

e 18 anos), profissionalizante e superior, além da determinação de criação dos Parâmetros Curriculares Nacionais e a previsão de criação do Plano Nacional de Educação (BRASIL, 1996).

Prevista pela constituição de 1988, pela LDB de 1996 e pelo Plano Nacional de Educação, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento que define quais são as aprendizagens fundamentais que os alunos devem desenvolver ao longo de seu percurso pela Educação Básica, ou seja, define um currículo com os conteúdos mínimos de aprendizagem, que de acordo com a LDB, deve ser complementado em cada um dos estados, levando em consideração as características culturais, sociais e econômicas, próprias de cada região. A versão com o detalhamento das aprendizagens previstas para o Ensino Infantil e para o Ensino Fundamental foi publicada em dezembro de 2017 e a proposta para o Ensino Médio foi publicada um ano mais tarde, em dezembro de 2018, após processo de discussão e aprovação pelo Conselho Nacional de Educação (CNE) e pelo MEC.

No que se refere ao ensino da matemática, de acordo com a BNCC, tanto para o Ensino Fundamental como para o Ensino Médio, são propostas cinco unidades temáticas, segundo unidades de conhecimento da própria matemática que se relacionam entre si: números, álgebra, geometria, grandezas e medidas, probabilidade e estatística.

Ao examinar o documento em busca de referências sobre *desigualdades* e *inequações* observamos poucas menções sobre o tema nas considerações acerca de aspectos genéricos do documento e nenhuma referência direta no detalhamento das unidades temáticas, embora sejam observadas referências diretas sobre *equações* como objetos do conhecimento nos anos finais do Ensino Fundamental (7º, 8º e 9º anos).

Para o Ensino Médio são previstas unidades temáticas para o estudo de pontos de máximo e de mínimo de funções quadráticas e para o estudo da imagem e domínio de funções (que podem ser desenvolvidos por meio de inequações), entretanto não há nenhuma referência direta às inequações como objeto de estudo.

A fim de obter uma amostra sobre como as desigualdades e inequações passaram a ser abordadas na Educação Básica, de acordo com as novas diretrizes

da BNCC, fomos verificar como isso ocorre em um dos livros que foi aprovado pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), destinado aos alunos do 9º ano do Ensino Fundamental.

Ao consultar o capítulo em que são apresentados os números irracionais, é possível verificar que o autor se apoia na noção de desigualdade para determinar o intervalo correspondente ao valor aproximado de $\sqrt{2}$, conforme reproduzimos na Figura 39.

Figura 39. Aproximação da raiz quadrada de dois

Quando uma raiz é um número irracional, podemos obter **parte** da representação decimal do valor dela fazendo **aproximações sucessivas**. Acompanhe o exemplo para $\sqrt{2}$.

$$\begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} 1^2 = 1 \text{ (menor do que 2)} \\ 2^2 = 4 \text{ (maior do que 2)} \end{array} \right\} \text{Então, } \sqrt{2} \text{ está entre 1 e 2.} \\ \left. \begin{array}{l} (1,4)^2 = 1,96 \text{ (menor do que 2)} \\ (1,5)^2 = 2,25 \text{ (maior do que 2)} \end{array} \right\} \text{Então, } \sqrt{2} \text{ está entre 1,4 e 1,5.} \\ \left. \begin{array}{l} (1,41)^2 = 1,9881 \text{ (menor do que 2)} \\ (1,42)^2 = 2,0164 \text{ (maior do que 2)} \end{array} \right\} \text{Então, } \sqrt{2} \text{ está entre 1,41 e 1,42.} \end{array}$$

Fonte: Dante (2018, p.14)

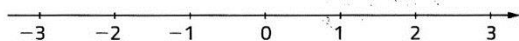
Vale observar que as noções de desigualdade e de intervalo numérico ainda não foram apresentadas sistematicamente (como serão um pouco mais à frente no mesmo livro), mas parecem já ter uma razão de ser, que nesse caso é demandada a partir da tarefa que consiste em encontrar valores aproximados de números irracionais, nos moldes do modelo M_3 de nosso MER.

Ao apresentar as desigualdades, de forma explícita, conforme reproduzimos na Figura 40, observamos que o autor (DANTE, 2018) se apoia no conceito de reta real a fim de introduzir a noção de intervalo numérico e de desigualdade entre dois números.

Figura 40. Desigualdades na reta real

Desigualdades em $\mathbb{R}$

Considere esta reta real.



Banco de imagens/
Arquivo da editora

Dados 2 números reais quaisquer a e b , ocorre uma, e somente uma, das seguintes possibilidades: $a < b$ ou $a = b$ ou $a > b$.

Geometricamente, a desigualdade $a < b$ significa que a está à esquerda de b nesta reta real. Da mesma maneira, a desigualdade $a > b$ significa que a está à direita de b nesta reta real.

Aritmeticamente, vamos analisar alguns exemplos.

- $2,195... < 3,189...$, pois $2 < 3$.
- $4,128... < 4,236...$, pois $4 = 4$ e $0,1 < 0,2$.
- $3,267... < 3,289...$, pois $3 = 3$; $0,2 = 0,2$ e $0,06 < 0,08$.
- $5,672... < 5,673...$, pois $5 = 5$; $0,6 = 0,6$; $0,07 = 0,07$ e $0,002 < 0,003$.

Ordenar os números reais aritmeticamente é como ordenar as palavras em um dicionário.



Thiago Moura/
Arquivo da editora

Algebricamente, $a < b$ se, e somente se, a diferença $d = b - a$ é um número positivo, ou seja, vale $a < b$ se, e somente se, existe um número real positivo d tal que $b = a + d$.

Uma vez definida essa relação de ordem dos números reais, dizemos que eles estão **ordenados**.

Fonte: Dante (2018, p.20)

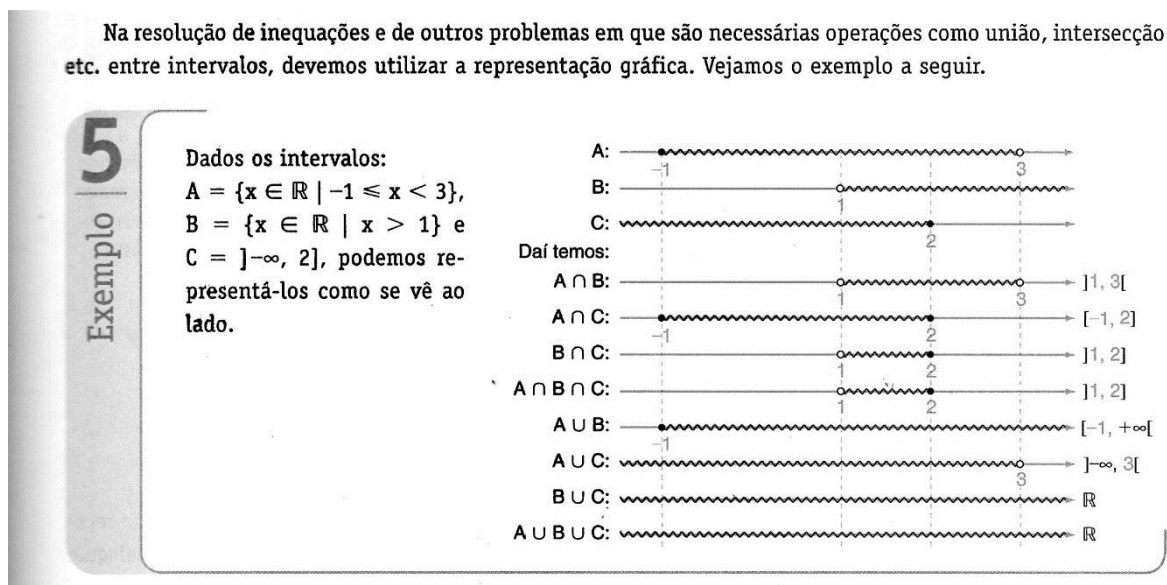
Ao verificar as publicações desse mesmo autor destinadas ao 6º, 7º e 8º anos, vemos que a noção de reta numérica vem sendo construída na medida em que os alunos vão se apropriando de cada um dos conjuntos numéricos. Nesse sentido, após aprenderem a sequência dos números naturais ele têm contato com a reta numerada subdividida em números naturais (6º ano), após aprenderem o conjunto dos números inteiros eles têm contato com a reta numerada com os números naturais positivos e negativos (7º ano), e assim por diante, passando pelos números racionais e a reta numérica correspondente no 8º ano, e finalmente, pelos números irracionais no 9º ano, quando se consolida o conceito de reta real, no qual o autor se apoia, como vimos, para apresentar as noções de intervalo numérico e de desigualdade entre dois números.

Vale observar que, além da interpretação geométrica, com base nas propriedades da reta real, as desigualdades são apresentadas por meio de sua interpretação aritmética (ao estabelecer a relação de ordem entre dois números por meio da comparação entre os algarismos que formam esses números e que ocupam a mesma ordem posicional) e algébrica (por meio da generalização da relação entre as grandezas representadas por a e b).

Em virtude da recente divulgação dos documentos que estabelecem a BNCC para o Ensino Médio, que como vimos são do final de 2018, não houve tempo para que autores de livros didáticos e editoras se adequassem às novas diretrizes. De acordo com as informações do Portal do Ministério da Educação²⁸, os novos livros para o Ensino Médio, já em concordância com a BNCC, devem chegar às escolas no começo de 2021. Sendo assim, as recomendações mais atuais continuam sendo os livros que foram aprovados pelo PNLD em 2017, anterior, portanto, às novas diretrizes para o Ensino Médio.

Ao consultar alguns desses livros, como Dante (2011) e Iezzi *et al* (2014), a fim de verificar como se desenvolvem as propostas para o estudo das desigualdades e das inequações no Ensino Médio, pudemos observar, conforme representado na Figura 41, que as praxeologias reúnem as características que constituem o modelo M_5 de nosso MER, ao constatar que as tarefas se resumem à busca por um intervalo desconhecido de valores, levadas a cabo por técnicas que se apoiam tanto em manipulações algébricas como em diagramas e representações gráficas, ora justificadas pelas propriedades algébricas das operações com desigualdades no campo da álgebra, ora justificadas por propriedades da geometria analítica.

Figura 41. Intervalos numéricos e operações com conjuntos em Iezzi *et al* (2014)



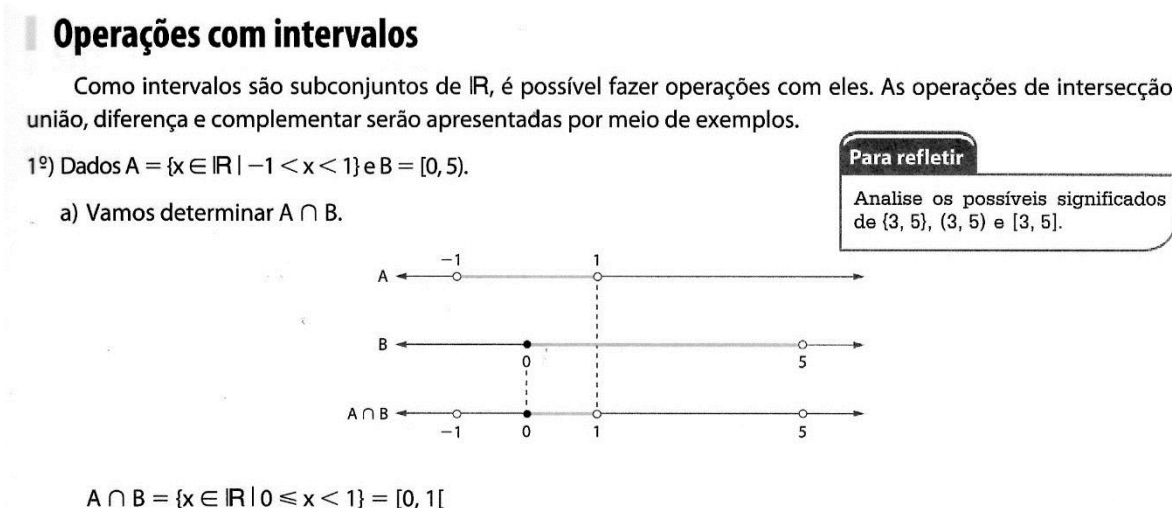
Fonte: Iezzi *et al* (2014, p.41)

²⁸ Disponível em <<http://portal.mec.gov.br/ultimas-noticias/12-acoes-programas-e-projetos-637152388/72211-livro-didatico-2021-comeca-a-ser-planejado-de-acordo-com-a-bncc>>

Ao tratar dos intervalos numéricos lezzi *et al* (2014) associa cada um dos intervalos reais $[-1,3[$, $]-\infty,1[$ e $]-\infty,2]$ aos conjuntos numéricos A , B e C , respectivamente, para depois mostrar a correspondência entre o resultado das operações de união e de intersecção de conjuntos e os intervalos numéricos correspondentes, representados tanto por meio da notação algébrica como pela representação gráfica do intervalo correspondente.

Ao verificar como os intervalos numéricos são tratados em Dante (2011), é possível verificar, conforme representado na Figura 42, que, de forma similar à lezzi *et al* (2014), a abordagem se apoia na correspondência entre intervalos numéricos e operações com conjuntos numéricos, representados tanto algebricamente como graficamente. Como veremos, essa correspondência servirá de justificativa para a técnica de resolução que se apoia no quadro de sinais.

Figura 42. Intervalos numéricos e operações com conjuntos em Dante (2011)



Fonte: Dante (2011, p. 45)

As inequações que resultam da multiplicação ou da divisão entre monômios (inequações-produto e inequações-quociente) são abordadas logo após o estudo das funções afim. O que se observa, tanto em Dante (2011) como em lezzi *et al* (2014), é que os distintos termos das inequações passam a ser considerados como funções e a técnica que leva a resolução consiste em avaliar individualmente o sinal de cada uma dessas funções para depois considerar as eventuais possibilidades de união e intersecção entre elas. O que se verifica nesses casos é que a pura manipulação algébrica parece ser insuficiente, ou pelo menos trabalhosa, e que o auxílio do quadro,

de acordo com a técnica que havia sido classificada por Assude (1997) como Técnica Algébrica com Quadro de Sinais (TAS), pode tornar menos custosa a resolução.

Conforme representado na Figura 43, em Dante (2011) para resolver a inequação $(x - 2)(1 - 2x) \leq 0$, o que se propõe é que o sinal dos fatores $(x - 2)$ e $(1 - 2x)$ seja estudado separadamente, associando-os respectivamente à $f(x)$ e à $g(x)$. Ao representar o sinal dessas funções com auxílio do quadro, a solução é determinada pelos intervalos em que a linha final do quadro é igual ou menor do que zero, ou seja, quando o sinal correspondente ao produto entre os termos atende a inequação.

Figura 43. Inequações-produto e inequações-quociente em Dante (2014)

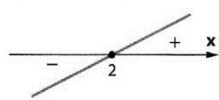
Inequações-produto e inequações-quociente

1^a) Vamos resolver a inequação-produto $(x - 2)(1 - 2x) \leq 0$, para $x \in \mathbb{R}$.

Primeiro, estudamos os sinais das funções separadamente. Então, se $(x - 2)$ for positivo, $(1 - 2x)$ deverá ser negativo. Se $(x - 2)$ for negativo, $(1 - 2x)$ deverá ser positivo.

Podemos verificar isso estudando os sinais de cada função separadamente:

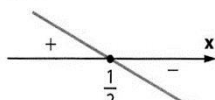
$$f(x) = x - 2$$



$$f(x) \geq 0 \text{ para } x \geq 2$$

precisam ocorrer simultaneamente

$$g(x) = 1 - 2x$$



$$g(x) \leq 0 \text{ para } x \geq \frac{1}{2}$$

$$f(x) \leq 0 \text{ para } x \leq 2$$

precisam ocorrer simultaneamente

$$g(x) \geq 0 \text{ para } x \leq \frac{1}{2}$$

Assim, para ocorrer $x - 2 \geq 0$ e $1 - 2x \leq 0$, devemos ter $x \geq 2$. Para ocorrer $x - 2 \leq 0$ e $1 - 2x \geq 0$, devemos ter $x \leq \frac{1}{2}$. Portanto, $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{1}{2} \text{ ou } x \geq 2 \right\}$.

Podemos determinar o conjunto solução usando um quadro dos sinais. Veja:

	$\frac{1}{2}$		2	
$f(x)$	-	-	+	
$g(x)$	+	-	-	
$f(x) \cdot g(x)$	$\ominus$	$\oplus$	$\ominus$	
	$\frac{1}{2}$		2	

$$\text{Logo, } S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{1}{2} \text{ ou } x \geq 2 \right\}.$$

Fonte: Dante (2011, p. 134)

Em Iezzi *et al* (2014) se verifica praticamente o mesmo procedimento, conforme representado na Figura 44. Os sinais dos fatores da inequação-produto

$(4 - 3x)(2x - 7) > 0$ são estudados separadamente, associados respectivamente à y_1 e y_2 . A resolução é apresentada na última linha do quadro de sinais, no intervalo em que o produto entre os fatores é positivo.

Figura 44. Inequações-produto e inequações-quociente em lezzi *et al* (2014)

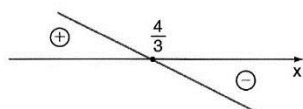
Inequação-produto. Inequação-quociente

Exercícios resolvidos

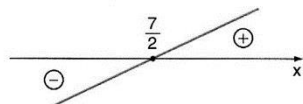
9. Resolver a inequação-produto $(4 - 3x)(2x - 7) > 0$.

Solução:

Façamos $y_1 = 4 - 3x$ e estudemos o sinal de y_1 . Temos $a = -3 < 0$ e raiz $x = \frac{4}{3}$. Então:



Vamos determinar o sinal de $y_2 = 2x - 7$. Temos $a = 2 > 0$ e raiz $x = \frac{7}{2}$. Então:



Estudemos agora o sinal do produto $y_1 \cdot y_2$.

	$\frac{4}{3}$	$\frac{7}{2}$	x
y_1	+	-	-
y_2	-	-	+
$y_1 \cdot y_2$	-	+	-

A inequação pergunta: "Para que valores de x temos $y_1 \cdot y_2 > 0$?"

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{4}{3} < x < \frac{7}{2} \right\}$$

Pense nisto: Tome um número real que pertença ao conjunto solução e substitua na inequação inicial. A desigualdade obtida é verdadeira? Repita a experiência com um número real que **não** pertença ao conjunto solução. A desigualdade obtida é verdadeira?



Fonte: lezzi *et al* (2014, p. 87)

O estudo dos outros tipos de inequações, tais como inequações quadráticas, inequações logarítmicas, inequações exponenciais e inequações modulares irá se desenvolver no âmbito do estudo das funções, ou seja, as inequações quadráticas serão estudadas logo após o estudo das funções quadráticas (conforme representado na Figura 45), as inequações logarítmicas serão estudadas logo após o estudo das funções logarítmicas, e assim consecutivamente.

De forma análoga ao que vimos no estudo das inequações-quociente e inequações-produto, os tipos de tarefa consistem em descobrir um intervalo desconhecido de valores, resolvidas por técnicas que envolvem tanto o cálculo algébrico como o estudo do sinal da função associada, com eventual auxílio do quadro

de sinais, possibilitadas pelas propriedades das operações algébricas e da geometria analítica, de acordo com as características que compoem o modelo M_5 do MER.

Figura 45. Estudo das inequações quadráticas em Iezzi *et al* (2014)

Inequações

Vamos voltar à introdução deste capítulo.

Vimos que a lei que expressa o número de jogos do campeonato (y) em função do número de clubes (x) é:

$$y = x^2 - x$$

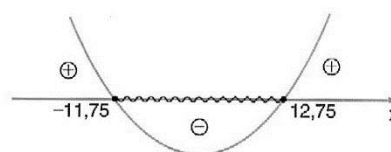
Suponhamos que a Confederação Brasileira de Futebol (CBF), ao organizar o campeonato, perceba que só há datas disponíveis para a realização de no máximo 150 jogos. Quantos clubes poderão participar?

Para responder a essa questão, temos de resolver a **inequação**:

$$x^2 - x \leq 150$$

Daí, vem: $x^2 - x - 150 \leq 0$

As raízes do trinômio $x^2 - x - 150$ são $\frac{1 \pm \sqrt{601}}{2}$ e dão aproximadamente $-11,75$ e $12,75$. Como desejamos $x^2 - x - 150 < 0$, devemos ter $-11,75 \leq x \leq 12,75$. Mas x (número de clubes) deve ser o maior número inteiro possível; então, $x = 12$. Conclusão: o campeonato deverá ser disputado por 12 clubes e terá $12 \cdot 11 = 132$ jogos.



Alguns problemas práticos exigem a resolução de inequações do 2º grau.

Vamos aplicar o estudo do sinal da função quadrática na resolução de inequações.

Fonte: Iezzi *et al* (2014, p. 109)

Ao investigar algumas das propostas curriculares e livros didáticos em distintos períodos de nossa recente história, pudemos verificar, de acordo com a época e de acordo com o nível de ensino, distintas formas de interpretação das desigualdades e das inequações, que se resumem em distintos MEDs e em distintos MDDs.

Conforme se observa ao longo desse capítulo, procuramos nos referenciar pelos principais livros didáticos de cada período, a fim de verificar como se desenvolviam as praxeologias para o estudo de desigualdades e inequações em cada uma das obras. Ainda assim, embora possamos inferir, não temos como afirmar de forma categórica que as características de um dado modelo epistemológico do MER não estejam presentes em dado período, pelo fato de não termos encontrado esse modelo nos livros que analisamos. Para afirmar isso, seria necessário ir além do escopo desse trabalho, em busca de todos os livros que eram utilizados desse período, e não de apenas algumas referências, como fizemos.

Nesse sentido, conforme representamos no Quadro 8, procuramos organizar, de acordo com os principais eventos históricos e o período aproximado

correspondente, quais foram os modelos epistemológicos que encontrarmos em cada época, de acordo com o nosso MER.

Quadro 8. Resumo das características do MED em épocas distintas

Evento	Período aproximado	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
Primeiras escolas militares.	De 1808 a 1920.	✓	✓			✓
Reforma Francisco Campos.	De 1920 a 1940.				✓	✓
Reforma Capanema.	De 1940 a 1960				✓	✓
LDB 1961, MMM.	De 1960 a 1990				✓	✓
LDB 1996, PCN, BNCC.	A partir de 1990			✓		✓

Fonte: elaborado pelo autor

Com base nos livros e propostas curriculares analisadas, buscamos compreender em que consiste o MED, e ao confrontá-lo criticamente com o nosso MER, podemos inferir que as praxeologias que se desenvolvem de acordo com o modelo M_5 (em que os tipos de tarefa implicam a busca por intervalos desconhecidos de valores, levadas à cabo por técnicas que se apoiam em propriedades algébricas, justificadas pela álgebra e pela geometria analítica) são privilegiadas, em qualquer época, como se vê no quadro com o resumo das características do MED.

A nossa crítica, entretanto, não é pelo fato da onipresença dessa abordagem, mas principalmente a partir do que se verifica em boa parte dos livros, no que se refere às justificativas para o estudo de inequações representam um fim em si mesmo. Dito de uma outra forma, é como se as razões de ser das inequações consistissem em desenvolver aprendizagem sobre inequações para ... resolver inequações.

Praxeologias que se desenvolvem de acordo com o modelo M_4 (em que os tipos de tarefa demandam o encadeamento lógico de asserções em processos de demonstração matemática) parecem ter perdido a importância nas publicações que se sucedem à implementação dos PCN para o terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental (BRASIL, 1998), para o Ensino Médio (BRASIL, 1999), além das orientações complementares aos PCN (BRASIL, 2002a). Isso nos parece um tanto mais estranho ao constatar que esse aspecto é um dos que, de acordo com as diretrizes nacionais, deveria ser enfatizado ao afirmar que “é desejável que no terceiro ciclo se trabalhe para *desenvolver a argumentação*, de modo que os alunos não se satisfaçam apenas com a produção de respostas a afirmações” (BRASIL, 1998, p.71, grifo nosso). Nesse sentido, parece haver uma falta de sintonia entre o que os

documentos oficiais propõem e o que realmente se apresenta em livros didáticos, com consequente reflexo sobre a dinâmica que se desenvolve em sala de aula.

Sobre a utilização de desigualdades na determinação de intervalos numéricos correspondentes ao valor aproximado de números irracionais, nos moldes de M_3 , é curioso notar que apesar de historicamente ter desencadeado demandas presentes na gênese e no desenvolvimento das noções de intervalo numérico e de desigualdade, conforme aponta nosso MER, praticamente não se observam praxeologias com características desse modelo, como aquelas utilizadas pelos babilônios ou chineses para o cálculo do valor aproximado da raiz quadrada de um número.

Esse nos parece ser um dos casos em que as razões de ser deixam de existir, fazendo com que as praxeologias a elas ligadas pereçam, ao não encontrarem condições de sobrevivência.

Sobre praxeologias que constituem os modelos M_1 e M_2 , conforme se pode observar nas publicações analisadas, não são contempladas pelo MED, embora constituam, de acordo com o nosso MER, as praxeologias que lançam os alicerces para a constituição dos saberes que se desenvolveriam a partir das noções de desigualdade, e mais tarde, de inequação. A busca por livros de geometria, em cada um dos períodos analisados, nos mostrou que os processos de demonstração e prova nos moldes da geometria sintética, dissociadas na noção de medida e sem o uso de coordenadas são observáveis, mas não de forma relacionadas às desigualdades, como se verifica na construção do M_1 de nosso MER.

Da mesma forma que o modelo M_2 , que como vimos, se desenvolve a partir da necessidade de estabelecer razão e proporção entre grandezas, independentemente do tipo de grandeza, racional ou irracional. Ao consultar os livros atuais sobre o mesmo tema, ligado às questões que envolvem os conceitos de razão e proporção, com exceção das traduções de livros franceses usados nas primeiras escolas militares, não se observa o recurso às desigualdades.

Ao analisarmos a abordagem proposta para o ensino de inequações em alguns dos atuais livros didáticos do Ensino Fundamental e do Ensino Médio, verificamos que há uma tendência para o tratamento das inequações de forma associada ao estudo das equações (no Ensino Fundamental) e ao estudo de funções (no Ensino Médio).

Há pelo menos dois aspectos nesses tipos de abordagem que a nosso ver merecem ser considerados.

O primeiro deles, que se observa no Ensino Fundamental, é que o estudo das inequações como uma extensão do conceito de equação parece criar um campo aberto para o uso de técnicas próprias para a resolução de equações na resolução de inequações, sem considerar a especificidade dos saberes próprios à essas, conforme aponta, por exemplo, De Souza (2007), ao constatar que mais da metade dos alunos que responderam a um questionário apontaram $x \leq \pm 5$ como a resolução da inequação $x^2 \leq 25$.

O segundo dos aspectos refere-se ao tratamento funcional usado no estudo das inequações quadráticas, exponenciais e logarítmicas, que da forma como se apresentam, parecem tornar o estudo das funções como um pré-requisito. Nossa defesa não é no sentido de que as inequações deixem de ser abordadas pelo viés funcional, com auxílio das representações gráficas, mas que esse seja uma das abordagens, e não a única. Em um nível escolar em que já se desenvolveu a aprendizagem sobre fatoração e sobre equações do 2º grau, até mesmo alunos que não foram introduzidos ao estudo das funções reúnem condições de resolver inequações como as do tipo $ax^2 + bx + c > 0$, ou como as do tipo $(a + bx)(c + dx) > 0$.

Uma das técnicas, à disposição de alunos do final do ciclo fundamental, poderia ser a de usar técnicas de fatoração, já disponíveis nesse nível de ensino, e estudar cada um dos fatores do termo da esquerda da inequação de forma separada, considerando os casos em que ambos os fatores sejam positivos, ou em que ambos sejam negativos.

Em nossa análise podemos observar que a estratégia empregada para o ensino de inequações consiste, na maior parte das vezes, na exposição do objeto matemático, na apresentação de métodos de resolução e na proposição de exercícios em aplicações que são, algumas vezes, relacionadas ao cotidiano dos alunos. Nesse tipo de abordagem, que chamaremos de clássica, a ordem das atividades é importante: em primeiro lugar o conteúdo e em seguida, a aplicação. Parece haver uma relação intrínseca entre o saber matemático associado às inequações e sua aplicação, como se uma coisa não pudesse viver sem a outra, como se a aplicação

que se segue ao contato com o conteúdo, justificasse os motivos pelos quais as inequações devam ser estudadas nesse nível escolar. Dito de uma outra forma, é como se fossem apresentadas as respostas (as inequações) para depois se postularem as perguntas (as aplicações). É como se a tarefa associada à resolução de um problema, cuja resolução se dê por meio de inequações, seja ela própria, a razão para justificar a existência desse objeto matemático.

Devemos nos perguntar então, o que ocorre nos casos em que os problemas que se apresentam, dentro ou fora do contexto escolar, tenham padrão diferente daquele em que foi feita a aplicação em sala de aula. Ou o que ocorre com o estudo das inequações se a resolução de uma aplicação já não é problemática, ou porque sua solução é banal, ou porque já é conhecida, ou ainda, porque pode ser encontrada por meio de outras ferramentas, não associadas às inequações.

As atuais propostas de ensino, tanto as de abrangência nacional como as regionais, parecem atribuir uma importância especial às competências relacionadas à resolução de problemas e à elaboração de modelos que tornem possível ao aluno tanto compreender a realidade sobre o mundo em que vive, como fazer inferências e simulações que o permitam interferir nessa realidade. No entanto, embora a responsabilidade pelo desenvolvimento de ditas competências recaia sobre as instituições de ensino, não são claros os meios pelos quais essas instituições possam realizar isso.

Talvez devamos nos perguntar, nesse ponto, se a abordagem que se preconiza sobre o rótulo de “inequações” é suficiente para que se desenvolvam essas competências, ou se esse estudo, tanto no que se refere ao conteúdo quanto às suas razões de ser, deva ser reformulado.

No capítulo seguinte passamos a apresentar o resultado de nosso estudo ecológico, acerca das condições e restrições que em diferentes níveis da escala de codeterminação didática (CHEVALLARD, 2001) afetam o estudo de inequações na Educação Básica, a fim de compreender de que forma essas condições e restrições podem ser modificadas, seja no mesmo nível em que se encontra o professor, seja em níveis hierarquicamente superiores.

5 ESTUDO ECOLÓGICO DAS INEQUAÇÕES

Historicamente as primeiras análises ecológicas originaram-se a partir da investigação dos fenômenos didáticos observáveis nos processos de transposição didática do saber desenvolvido pelos matemáticos em saber a ser ensinado nas escolas, nos termos propostos por Chevallard (1997).

Em trabalhos mais recentes, como os de Bosch e Gascón (2010) e de Barquero, Bosch e Gascón (2014), os estudos que se concentram na dimensão ecológica de um problema didático de investigação têm sido caracterizados tanto pela análise das condições necessárias para que um saber exista, ou ao usar um termo próprio da ecologia, para que esse saber *sobreviva* em uma dada instituição, como pela investigação das limitações e restrições que dificultam e eventualmente impedem que esse dito saber se desenvolva nessas instituições.

Ao debruçar-se sobre as condições, limitações e restrições que afetam o desenvolvimento de um saber matemático em uma instituição, conforme defendemos ao apresentar o referencial teórico, não é suficiente que se observem exclusivamente as situações que se desenvolvem na aula. A nosso ver, isso é mais ou menos como o proceder de um navegante inexperiente, que ao estimar o risco representado por um *iceberg* se paute pelo que vê, sem considerar a parte submersa, oculta e bem maior do que a que é possível observar da superfície.

O que queremos dizer, é que além da relação entre professor, alunos e o objeto de estudo, é necessário se situar em diferentes níveis hierárquicos de uma escala de codeterminação didática, proposta por Chevallard (2001), a fim de verificar que condições, limitações e restrições ao desenvolvimento de um saber se apresentam em cada um dos níveis dessa escala.

Ao procurar identificar que condições e restrições regulam as praxeologias para o estudo de inequações na Educação Básica, de acordo com que nos propomos em nosso quarto objetivo específico, é preciso considerar, conforme apontam Barquero, Bosch e Gascón (2014), que restrições e condições situadas em níveis genéricos da escala de codeterminação (civilização, sociedade, escola e pedagogia) têm influência direta nos níveis mais específicos. Nesses sentido, muitas restrições que se apresentam em um tema da matemática (desigualdades entre grandezas dissociadas

da noção de medida, desigualdades entre grandezas justificada pela medição e pela contagem, inequações afim, inequações quadráticas, inequações-produto, inequações-quociente, etc.), pertencentes a um setor (o estudo das desigualdades e inequações), e que pertencem por fim a uma área (geometria, álgebra, geometria analítica, etc.) da disciplina matemática, podem ser explicadas pela investigação de restrições e condições que se apresentam nos níveis superiores.

Ao desviarmos o olhar para os níveis específicos da escala, embora seja difícil estabelecermos a perfeita delimitação entre uma restrição e outra, visto que se relacionam, identificamos pelo menos quatro restrições ao desenvolvimento das praxeologias para o estudo das desigualdades e inequações nesses níveis, enumeradas a seguir:

1) A ênfase ao bloco prático e relativa indiferença em relação ao bloco tecnológico-teórico. Essa restrição é apontada por Assude (1997), ao identificar as *techniques faibles* (técnicas fracas) como aquelas que estão presentes em um dado nível de ensino, mas que não podem ser justificadas, pois as tecnologias que poderiam fazer esse papel não estão presentes nesse mesmo nível. É igualmente apontada tanto por Boero (1998) como por Borello (2007), ao constatarem que boa parte dos alunos que conseguem resolver inequações não conseguem explicar os motivos que permitem a resolução.

A nosso ver, essa restrição reforça a impressão de que é suficiente saber resolver inequações, mesmo que isso não implique saber justificar as técnicas utilizadas na resolução.

2) A crença de que as técnicas de resolução de equações são sempre eficazes para a resolução de inequações, sem considerar a significativa diferença entre o significado dos sinais “<”, “>”, e “=”. Essa restrição é apontada tanto por Boero e Bazzini (2004), como por De Souza (2007), ao verificar em sua pesquisa que boa parte dos participantes, ao utilizar procedimentos de resolução de equações na resolução da inequação $x^2 \leq 25$ apresenta a equivocada solução $x \leq \pm 5$.

3) A concepção parcial que alunos têm a respeito do conceito de desigualdade, ao definirem esse conceito como a relação que existe entre coisas que não são iguais, mas que ao serem solicitados a definir o significado de um tipo de inequação, limitam-

se a apresentar os procedimentos de resolução, conforme apontam Arévalo e Rojas (2015) em sua pesquisa.

4) A predominância de técnicas de resolução apoiadas em manipulações algébricas, a despeito de outras possibilidades. Essa restrição é apontada tanto por Assude (1997), como por Boero (1998) e por De Souza (2007).

Entretanto, concordamos com Barquero, Bosch e Gascón (2014), no sentido de que as condições e restrições nos níveis mais específicos da escala de codeterminação, como essas quatro que apresentamos, são influenciadas por condições e restrições presentes em níveis mais elevados. Nesse sentido, entre tantas outras possíveis, fomos em busca de condições e restrições presentes nas diretrizes curriculares para a Educação Básica e na formação inicial de professores para esse nível de ensino.

Ao considerar que as propostas curriculares que orientam a prática pedagógica e que servem de base para a seleção dos conteúdos a serem estudados representam uma das restrições institucionais, recorreremos às propostas curriculares mais recentes a fim de compreendermos como as desigualdades e inequações devem ser estudadas na Educação Básica de acordo com essas propostas.

Como já nos referimos em nosso estudo econômico-institucional, prevista pela LDB de 1996, a BNCC é o documento que deve servir como norte para as propostas curriculares de cada uma das Unidades Federativas do país, ao estabelecer um currículo mínimo, com objetivos essenciais de aprendizagem que se espera que os alunos do ciclo básico da educação desenvolvam.

Publicada ao final de 2017, apresenta o detalhamento das aprendizagens previstas para o Ensino Infantil e Fundamental, e em sua versão de 2018, para o Ensino Médio.

Ao analisarmos o documento em procura de referências ao estudo de desigualdades e inequações, os únicos registros encontrados a respeito do termo “desigualdade” se referem às desigualdades sociais, desigualdade de oportunidades, e desigualdades regionais, com sentido e significado diferente do que estávamos buscando.

Ao consultarmos o termo “inequação”, tanto em sua forma no singular como no plural, encontramos quatro referências, e todas as quatro trazendo na mesma frase

os termos “resolver” (ou “resolução”), “equação” e “inequação”, como por exemplo, ao apontar a necessidade de que os alunos sejam capazes de “interpretar e transitar entre as diversas representações gráficas e simbólicas, para *resolver* problemas por meio de *equações* e *inequações*” (BRASIL, 2018, p. 270, grifo nosso).

Essa constatação parece reforçar pelo menos duas das restrições que se observam nos níveis específicos: a primeira em relação à concepção de que as técnicas usadas para a resolução de *equações* sejam adequadas para a resolução de *inequações*, e que como vimos, pode estar na origem de boa parte dos problemas que se referem às falhas de compreensão quanto às inequações. A segunda, em relação à ênfase dada aos processos de resolução (saber fazer), em detrimento das justificativas que permitem que se leve à resolução à termo.

Por outro lado, concordamos com o que se propõe na BNCC quanto ao estatuto que deve ser atribuído às técnicas de resolução de equações e inequações, no sentido de que “devem ser desenvolvidas como uma maneira de representar e resolver determinados tipos de problema, e não como objetos de estudo em si mesmos” (BRASIL, 2018, p. 271). De fato, como inferimos ao desenvolver o MER, parece haver na própria gênese do conhecimento, uma distinção entre as desigualdades (sobre as quais os matemáticos se debruçam a fim de demonstrar propriedades e teoremas) e as inequações, que surgem a partir das desigualdades, mas que tem um papel distinto, voltado principalmente à aspectos pragmáticos que se observam na resolução de problemas. A compreensão de que as inequações devam ter o estatuto de ferramenta, representa, a nosso ver, uma condição que se observa nos níveis genéricos da escala de codeterminação, que pode vir a influenciar os níveis mais específicos, embora falte no documento, ao nosso ver, menção às desigualdades como objeto de estudo.

Como havíamos citado anteriormente, a LDB de 1996 prevê a complementação da base nacional comum em cada sistema de ensino e estabelecimento escolar, de acordo com suas particularidades. Dessa forma, fomos em busca da possível complementação nas propostas curriculares de cada um dos 27 estados da união, a fim de verificarmos se os conteúdos associados ao estudo das desigualdades e inequações estavam presentes de forma explícita.

Conforme o resumo que pode ser visto no Quadro 9, de acordo com o nível de ensino e de acordo com o tipo de inequação prevista, é possível verificar que nem

todos os Estados possuem propostas curriculares (como por exemplo, o Amazonas, Bahia, Mato Grosso e Pará), que alguns possuem, mas o documento é inacessível ao público (como por exemplo, a proposta do Acre) e que em alguns estados foram desenvolvidas propostas para um nível de ensino e não para outro (como por exemplo, o estado de Roraima, que tem proposta para o Ensino Médio, mas não tem para o Ensino Fundamental).

Quadro 9. O estudo de inequações nas propostas curriculares estaduais

Unidade Federativa		Ensino Fundamental (anos finais)		Ensino Médio	
		Estudo Previsto	Ano da Proposta Curricular	Estudo Previsto	Ano da Proposta Curricular
Acre		*	-	*	-
Alagoas		I1G	2014	SR	2014
Amapá		I1G	2009	I1G, I2G, IEX, ILG	2009
Amazonas		*	-	*	-
Bahia		*	-	*	-
Ceará		*	-	SR	2009
Distrito Federal		I1G	2018	I2G, IEX, ILG	2018
Espírito Santo		SR	2009	IEX, ITG	2009
Goiás		I1G, I2G	2012	SR	2012
Maranhão		SR	2014	SR	2014
Mato Grosso		*	-	*	-
Mato Grosso do Sul		I1G	2012	I2G, IEX, ILG, ITG	2012
Minas Gerais		SR	2006	I1G, I2G	2006
Pará		*	-	*	-
Paraíba		I1G	2010	*	-
Paraná		I1G	2008	I1G, I2G, IEX, ILG, IMD	2008
Pernambuco		I1G	2012	I1G	2012
Piauí		I1G	2013	SR	2013
Rio de Janeiro		I1G	2012	SR	2012
Rio Grande do Norte		SR	2017	SR	2017
Rio Grande do Sul		SR	2016	SR	2016
Rondônia		I1G	2013	I2G, IEX, ILG, ITG	2013
Roraima		*	-	I1G, I2G, IEX, ILG, IMD	2012
Santa Catarina		SR	2014	SR	2014
São Paulo		I1G	2012	IEX, ILG, ITG	2012
Sergipe		I1G, I2G	2011	SR	2011
Tocantins		I1G	2008	SR	2010

Legendas: I1G - Inequações do 1º Grau, I2G - Inequações do 2º Grau, IEX - Inequações Exponenciais, ILG - Inequações Logarítmicas, IMD - Inequações Modulares, ITG - Inequações Trigonométricas, SR - Sem referências, * - Proposta curricular não encontrada

Fonte: elaborado pelo autor.

Também verificamos nas propostas às quais tivemos acesso que não há referências ao estudo de inequações no Ensino Fundamental em 6 estados, e que não há referências sobre inequações no Ensino Médio em 11 estados.

Nas propostas que traziam referências às inequações, verificamos que em 12 estados é previsto o estudo de inequações do 1º grau nos anos finais do Ensino Fundamental, no contexto do estudo das equações de 1º grau, e que em apenas dois estados está previsto o estudo de inequações de 2º grau nesse nível de ensino.

Ao examinarmos as propostas do Ensino Médio que continham referências ao estudo de inequações, verificamos que em 8 estados, além das inequações de 1º e 2º graus, estão previstas as inequações exponenciais, logarítmicas e trigonométricas e que as inequações modulares são previstas nas propostas de apenas dois desses estados. Em todos esses casos, para o Ensino Médio o estudo de inequações é previsto no âmbito do estudo das funções, ou seja, inequações exponenciais são abordadas logo após o estudo das funções exponenciais, inequações trigonométricas são abordadas logo após o estudo das funções trigonométricas, e assim por diante.

Ao examinar a BNCC, no capítulo correspondente à área de matemática, podemos encontrar referências ao *letramento matemático*, que no documento é definido como

[...] competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas. (BRASIL, 2018, p. 264).

Entretanto, ao notar a quase completa ausência de referências ao estudo de inequações, tanto nos PCN quanto na BNCC, ou seja, nos documentos que definem “o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica” (BRASIL, 2018, p.7), inferimos que, pelo menos no âmbito nacional, e em boa parte dos estados, de acordo com as políticas oficiais de ensino, essa parece não ser uma aprendizagem considerada essencial, apesar de, a nosso ver, ser fundamental para o desenvolvimento do dito letramento matemático, particularmente no que se refere à formulação e resolução de problemas, pertencentes não somente à área de matemática, mas também à outras áreas, como à física, à biologia e à geografia, por exemplo.

A falta de importância que se dá ao estudo das desigualdades e das inequações que se observa nos documentos oficiais que regulam o ensino no Brasil, contribui, a nosso ver, com a restrição que se apresenta nos níveis específicos e que se refere à concepção parcial que os alunos têm a respeito do significado desse tema.

Ao nos debruçarmos sobre aspectos da restrição associada à formação do professor, e de forma mais particular, à formação inicial de professores que lecionam matemática Educação Básica procuramos em uma primeira sondagem verificar como estão organizados, em nível nacional, os cursos de Licenciatura em Matemática.

A promulgação da LDB (BRASIL, 1996), determinou que o curso de licenciatura deveria ser obrigatório para todos os professores da Educação Básica e assegurou às Instituições de Ensino Superior (IES), no exercício de sua autonomia, fixar os currículos dos seus cursos e programas, em consonância com as diretrizes gerais.

Três anos depois da LDB, o Fórum Nacional de Pró-Reitores de Graduação das Universidades Brasileiras (ForGrad), que reúne todos os Pró-Reitores de Graduação (ou ocupantes de cargos equivalentes) das IES, públicas e privadas, redigiu um documento chamado Plano Nacional de Graduação (FORGRAD, 1999), que trazia, entre outras coisas, propostas de diretrizes gerais para a elaboração de currículos para os cursos de graduação no ensino superior. Entre as metas e parâmetros estabelecidos pelo fórum, no que se refere às licenciaturas, propunha-se, de forma genérica, a reorganização dos currículos dos cursos de formação de professores, com vistas a superação da forma de organização curricular e a fragmentação entre as licenciaturas que se verificava na época, de acordo com o fórum.

Essa necessidade de revisão das licenciaturas já havia sido apontada nos PCN de 1998, em que se afirmava que

A formação de professores de quinta a oitava séries também precisa ser revista; feita em nível superior nos cursos de licenciatura, em geral não tem dado conta de uma formação profissional adequada; formam especialistas em áreas do conhecimento, sem reflexões e informações que deem sustentação à sua prática pedagógica, ao seu envolvimento no projeto educativo da escola, ao trabalho com outros professores, com pais e em especial, com seus alunos (BRASIL, 1998, p. 35)

Três anos depois, em 2002, o Conselho Nacional de Educação divulga um parecer com as Diretrizes Curriculares para os cursos de bacharelado e licenciatura em matemática (BRASIL, 2002b), em que são descritos conteúdos comuns a esses

cursos. No caso das licenciaturas, são previstos ao longo do curso, de acordo com o currículo proposto pela IES, o estudo de Cálculo Diferencial e Integral, Álgebra Linear, Fundamentos de Análise, Fundamentos de Álgebra, Fundamentos de Geometria, Geometria Analítica, Ciência da Educação, História e Filosofia das Ciências e da Matemática, além de conteúdos matemáticos presentes na Educação Básica.

Em 2015, uma nova resolução do Conselho Nacional de Educação (BRASIL, 2015) determina que a formação de professores deve assegurar, em todas as licenciaturas, a base nacional comum, que viria a ser aprovada três anos depois, com o nome de Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

Ao consultar ementas e planos de ensino recentes de alguns cursos de licenciatura em matemática disponíveis na internet, pudemos verificar que apesar de serem bastante distintos uns dos outros, de acordo com a autonomia garantida às IES pela LDB, parece haver um consenso no que se refere ao estudo das inequações pelos futuros professores no sentido de que, ou não há referências a esse respeito, ou aparecem uma única vez atreladas a alguma disciplina introdutória, como em Fundamentos de Matemática ou na Introdução ao Cálculo.

Não é possível, apesar disso, afirmar que o estudo de inequações seja negligenciado, mesmo que fizéssemos o levantamento de todos os planos de ensino de todas as universidades brasileiras e não encontrássemos referências às inequações, visto que poderiam estar sendo tratadas como ferramentas em áreas afins da matemática, em diferentes contextos, e não como objetos de estudo em si.

Por outro lado, também não se encontram referências às desigualdades nas ementas que tivemos acesso, o que a nosso ver, pode representar uma restrição nesse nível genérico, se considerarmos as desigualdades como objeto de estudo, como sugere nosso MER.

Debruçar-se sobre a formação de professores exige um esforço de reflexão e um empenho em considerar diversas perspectivas que vai além do escopo de nosso trabalho, entretanto, ao apoiarmo-nos em trabalhos já realizados nesse sentido podemos constatar que se trata de uma área problemática, como se observam, por exemplo, nos trabalhos de Guerra (2013), Villani (2009) e Manrique (2009).

Empenhado em verificar a adequação das licenciaturas em matemática dos Institutos Federais de Educação de Minas Gerais às atuais diretrizes propostas pelo Conselho Nacional de Educação, Guerra (2013) analisou os projetos pedagógicos desses cursos e organizou uma série de entrevistas com os coordenadores responsáveis.

Fundamentado pelos trabalhos de Shulman (1986, 1987 apud Guerra, 2013) e Ball et. al (2008 apud Guerra, 2013) com relação aos conhecimentos que devem ser de domínio do professor e em Perrenoud (2000 apud Guerra, 2013), quanto às competências profissionais, o autor afirma que em dois dos quatro institutos analisados se observa que o perfil do egresso é o de um professor com pleno domínio dos conteúdos matemáticos “bem além do que vai ensinar nas escolas de Educação Básica, em *detrimento de uma formação pedagógica adequada*, levando em conta princípios da Educação Matemática” (GUERRA, 2013, p. 206, grifo nosso).

Villani (2009), incomodado com a aparente falta de aderência entre as competências que se esperam que sejam desenvolvidas pelos alunos da Educação Básica e o que se propõe como objeto de estudo nos cursos de licenciatura em matemática, desenvolveu uma pesquisa em nível de mestrado como forma de verificar se as atuais diretrizes propostas pelo Conselho Nacional de Educação favorecem a construção de uma base de conhecimentos necessária aos professores de matemática no sentido de atender as recomendações dos currículos para a Educação Básica, tais como os PCN e a atual proposta curricular do Estado de São Paulo (a proposta da BNCC ainda não havia sido feita).

Amparado pelos princípios da Educação Matemática Escolar como processo de “enculturação”, conforme proposto por Bishop (1997 apud Villani, 2009) e na construção de uma base de conhecimento para a docência, de acordo com o referencial teórico proposto por Shulman (1986 apud Villani, 2009), o autor realizou uma pesquisa bibliográfica, referenciado por documentos históricos e legais, a fim de analisar as mudanças históricas sofridas no processo de formação de professores, as transformações das concepções sobre o ensino de matemática expressas na evolução dos currículos escolares e os documentos oficiais que regulam as propostas pedagógico-curriculares das atuais licenciaturas.

Baseado nas análises que realizou, Villani (2009, p. 201) afirma que

[...] há, de fato, problemas na aderência dos projetos de cursos de licenciatura em relação aos pressupostos usados na concepção do currículo da Escola Básica. Esta falta de aderência se evidencia na constatação de que os conhecimentos que as diretrizes atuais – para os cursos de bacharelado e licenciatura em Matemática – requerem do futuro professor não propiciam, obrigatoriamente, uma base de saberes que o capacitem a trabalhar adequadamente com a concepção atual de currículo escolar. Esta conclusão, novamente, deriva do nosso entendimento de que a base de conhecimentos fortalecida pelos princípios da enculturação não fica minimamente garantida nos pressupostos legais.

Manrique (2009) fez a análise dos dados obtidos a partir de uma pesquisa de projetos pedagógicos de cursos de licenciatura em matemática, a fim de verificar de que forma as propostas contidas nesses projetos podem favorecer a prática pedagógica e a construção do conhecimento docente.

Com base na pesquisa Os Novos Rumos da Licenciatura (Candau, 1988 apud Manrique, 2009) a autora destaca o papel secundário que os cursos de formação de professores ocupam nas universidades brasileiras, a perda de prestígio acadêmico que recai sobre aqueles que a isso se dedicam e o distanciamento da realidade escolar que caracteriza os professores formadores, normalmente sem qualquer vivência na Educação Básica.

Se por um lado Guerra (2013) aponta o pleno domínio dos conteúdos matemáticos por parte dos egressos das licenciaturas em universidades públicas, o que se observa em Manrique (2009) é que a maioria dos professores que atuam no Ensino Básico da rede pública é egresso de universidades particulares, que normalmente já trabalhavam durante a graduação, dispondo de poucos recursos e de pouco tempo para dedicarem-se aos estudos.

Nesse sentido, nos parece que falamos de países diferentes, embora estejamos nos referindo ao Brasil. De um lado as licenciaturas em universidades públicas, com formação apoiada fortemente no conhecimento do conteúdo, mas com formadores distantes da realidade escolar, e de outro lado as universidades particulares, amparadas em currículos mínimos, tentando suprir na graduação as carências de formação que acompanham seus ingressantes desde a Educação Básica.

Lima e Silva (2015) apontam para um potencial círculo vicioso gerado e realimentado a partir das limitações que se observam na formação inicial de professores,

[...] afinal, são os professores formados pelos cursos de Licenciatura quem atuarão na formação dos estudantes que, posteriormente, ingressarão nos cursos de Licenciatura e depois de formados reiniciarão o ciclo. Se um ingressante em um curso de Licenciatura em Matemática não teve uma formação adequada e, conseqüentemente, não desenvolveu os conhecimentos básicos dessa disciplina que deveriam ser de domínio de todo egresso dos ensinos fundamental e médio, certamente terá dificuldades de desenvolvê-los durante a graduação, porque têm que ampliá-los com outros conteúdos que fazem parte da formação inicial. E o futuro professor que, durante a Licenciatura, não conseguiu sequer desenvolver satisfatoriamente os conhecimentos básicos da área em que lecionará, muito provavelmente contribuirá para uma formação matemática insatisfatória de seus alunos, dentre os quais aqueles que, posteriormente, ingressarão nos cursos de formação de professores e realimentarão o já citado círculo vicioso (LIMA e SILVA, 2015, p. 174).

Embora tivéssemos encontrado estudos voltados à investigação de uma base de conhecimentos para o ensino de diversos conteúdos (geometria, taxa de variação, trigonometria, estatística, números decimais, números racionais, área e perímetro de figuras planas) não encontramos referências sobre uma base de conhecimentos para o ensino de inequações. Como dissemos, isso foge ao escopo desse trabalho, mas a nosso ver trata-se de um campo problemático, ainda não explorado e que pode contribuir com a compreensão das restrições institucionais que são abrangidas pela atuação do professor.

Da mesma forma, apesar de encontrarmos diversos estudos em Educação Matemática voltados à investigação das concepções de professores a respeito dos mais diversos temas da matemática, não se encontram trabalhos que tenham se proposto a investigar que concepções professores que ensinam matemática têm a respeito das desigualdades e das inequações. Baseados em nossa própria experiência, gostaríamos de ver em trabalhos futuros, se as concepções se parecem com as que tinham os nossos professores dos anos iniciais, que como citamos nas justificativas desse trabalho, nos orientavam a “resolver como se fossem equações”, bastando inverter o sinal de igualdade pelo de desigualdade.

Embora exista uma quantidade considerável de trabalhos que apontem a formação inicial de professores como problemática e apesar de nossa experiência, primeiramente como alunos da Educação Básica e depois como licenciandos, nos impelir a afirmar que a formação inicial representa uma restrição ao estudo das

desigualdades e inequações, concordamos que asserções nesse sentido podem ser prematuras, se não são respaldadas pelo devido aprofundamento de pesquisa. Conforme nos referimos nos últimos parágrafos, acreditamos esses aprofundamentos, que se referem tanto à base de conhecimentos, como os que se referem às crenças e concepções dos professores, sejam necessários e podem contribuir de forma significativa com a nossa área de pesquisa.

Sendo assim, ao considerar:

- Aspectos presentes na gênese e no desenvolvimento do saber associado às inequações, como fizemos por meio do estudo epistemológico, em que nos referenciamos para conceber um MER.
- Características do MED e do subjacente MDD, por meio do confronto crítico desses modelos como o nosso MER, como fizemos ao desenvolver o estudo econômico-institucional.
- Condições e restrições que em diferentes níveis de uma escala de codeterminação didática afetam as praxeologias que se desenvolvem para o estudo de inequações na Educação Básica, como fizemos em nosso estudo ecológico.

Passamos a apresentar as características que consideramos fundamentais em um MDR para o ensino de inequações, que como veremos, serviu de norte para a concepção dos PEPs.

6 UM MODELO DIDÁTICO DE REFERÊNCIA PARA O ENSINO DE INEQUAÇÕES

6.1 CARACTERÍSTICAS DE UM MDR PARA O ENSINO DE INEQUAÇÕES

De acordo com a TAD, a relação pessoal entre o indivíduo e o saber, ou em outros termos, entre o indivíduo e as praxeologias que vivem em uma instituição e que o colocam em contato com o dito saber, apesar de sua importância, “não é considerada como fundamental ou básica em um problema didático” (GASCÓN, 2011, p. 215, tradução nossa), visto que essa relação sofre influência direta das praxeologias que vivem na instituição considerada. Nesse contexto, o objeto primário de investigação são as praxeologias, como são criadas, como vivem, como se desenvolvem, como migram a partir de outras instituições, e eventualmente como desaparecem institucionalmente.

Toda forma de organização de ensino de matemática se apoia em um modo de interpretar a matemática (em um modelo epistemológico) e em um entendimento sobre o que significa ensinar e aprender matemática (um modelo didático). Por vezes, esses modelos didáticos são implícitos, não problematizados, sem questionamentos, como se o que está a ser ensinado não necessitasse nem de fundamentação, nem de justificativas, além de critérios vagos apoiados no senso comum. Temos, nesses casos, o que Bosch e Gascón (2010, p. 56, tradução nossa) chamam de “modelos didáticos espontâneos”.

Outras vezes, temos um MDD, cujas características se observam nas propostas curriculares oficiais, livros e manuais didáticos, que tanto sustentam quanto condicionam, de acordo com a instituição, as praxeologias que se desenvolvem para o estudo de um objeto matemático.

O entendimento de que o que está posto a ser ensinado não é isento de questionamento e que existe uma problemática relacionada a “o que ensinar”, “como ensinar” e “porque ensinar”, torna necessária a construção de um MDR como uma alternativa ao modelo dominante.

Fundamentados por essas considerações, inferimos que a construção de um MDR para o estudo das inequações deva reunir as seguintes características:

a) O estudo de desigualdades e inequações deve ser desenvolvido por meio de atividades que se apoiem no saber matemático em busca de respostas a questões que se impõem a uma pessoa ou a uma instituição, libertando-se do paradigma monumentalista, que trata os saberes como monumentos a serem visitados pelos alunos. Nesse contexto, o saber não é apresentado *a priori*, mas aparece com a função de trazer respostas a questões e situações que demandam esse saber.

b) A comparação entre grandezas parece ter surgido de forma simultânea ao próprio conceito de grandeza, sendo uma das principais razões para que se desenvolvessem as primeiras noções elementares sobre desigualdades. Defendemos, em concordância com isso, que o início do estudo das desigualdades se dê por meio de praxeologias geradas a partir de comparação entre grandezas, associadas à noção de medida e desenvolvida por técnicas que se apoiam tanto na contagem como na medição, de acordo com as características de nosso modelo M_1 .

c) Diferentemente de uma equação, em que a busca se dá por um valor desconhecido, o que se busca em uma inequação é um intervalo numérico desconhecido. Nesse sentido, torna-se fundamental que se desenvolvam praxeologias voltadas ao estudo das noções de intervalo numérico e de valor aproximado, de forma prévia ao estudo das inequações.

d) O que observa ao analisar as praxeologias que se desenvolvem de acordo com o MDD é que os saberes relativos às inequações parecem apresentar-se como um campo de conhecimento subordinado ao conceito de equação. Ao levar em conta que o conjunto solução de uma inequação corresponde quase sempre a um intervalo de valores, em alguns casos basta que se determine os limites desse intervalo, por meio do recurso às equações, substituindo o sinal “=” pelos sinais de “<” ou “>” para que se chegue à solução. De fato, a solução da inequação $a + x > b$ pode ser encontrada pela determinação do limite do intervalo do conjunto solução, por meio da resolução da equação $a + x = b$. Por outro lado, nem todos os tipos de inequações podem ser resolvidos por meio de técnicas de resolução de equações, e essa parece ser a origem de grande parte dos problemas associados às falhas de compreensão daquilo se refere às inequações.

Contrapondo-se a essa visão, que parece não considerar as especificidades dos saberes associados às inequações, torna-se fundamental pensar em praxeologias

que tornem evidente essa limitação, ou seja, praxeologias em que as inequações demandem outras técnicas de resolução, distintas das que são usadas na resolução de equações.

e) Apesar do tratamento puramente algébrico mostrar-se eficiente para justificar algumas técnicas de resolução, apresenta limitações ao líder com outras situações, como por exemplo, as que envolvem inequações-produto, inequações-quociente, sistemas de inequações ou comparação entre funções. Nesse sentido, devem-se prever atividades que contemplem tanto situações em que o tratamento algébrico seja eficiente, como outras em que não seja, para que se desenvolvam novas praxeologias e a demanda por novas técnicas, como as que se apoiam na geometria analítica, que podem apresentar-se como um caminho menos custoso e trazer mais sentido ao estudo em algumas situações.

De acordo com essas premissas, que caracterizam uma forma de compreender o que se entende por estudar e ensinar inequações na Educação Básica, ou em outros termos, que caracterizam um MDR, passamos a apresentar percursos de estudo e pesquisa para o ensino de inequações na Educação Básica.

6.2 PERCURSOS DE ESTUDO E PESQUISA PARA O ENSINO DE INEQUAÇÕES

No que segue, apresentaremos propostas de percursos de estudo e pesquisa para o ensino de inequações na Educação Básica, organizados de acordo com as aprendizagens que se espera que sejam desenvolvidas nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio.

A quantidade de atividades que compõem os percursos depende tanto da complexidade das praxeologias que podem ser desenvolvidas quanto de suas possíveis ramificações e conexões com distintas áreas. Sendo assim, há alguns percursos formados por mais atividades (como é o caso do percurso para o 9º ano, que prevê 5 atividades) e outros formados por menos (como ocorre com o percurso proposto para o 7º ano, composto por uma única atividade).

6.2.1 UM PERCURSO PARA O 7º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Ao considerar restrições institucionais, que nesse caso são representadas pelas propostas da BNCC quanto aos objetos de conhecimento, competências e habilidades a serem desenvolvidas pelos alunos desse ciclo escolar, podemos observar que tarefas relacionadas à comparação são propostas desde o 1º ano do Ensino Fundamental, em um primeiro momento restritas aos números e que se desenvolvem a partir do 2º ano, em unidades temáticas associadas a grandezas e medidas e na comparação entre figuras planas e espaciais no campo da geometria.

A partir do 5º ano é previsto o desenvolvimento de habilidades voltadas à planificação de superfícies de figuras espaciais²⁹ e à compreensão do significado e medição de volume de sólidos geométricos³⁰, que serão retomadas e ampliadas no 7º ano, por meio da realização de tarefas que implicam o cálculo da capacidade dos sólidos³¹.

Nesse sentido, o percurso que propomos para os alunos do 7º ano (alunos com idade próxima dos 12 anos) é composto de uma atividade de estudo e pesquisa que reúne características do modelo epistemológico que chamamos de M_1 , em que as tarefas consistem em comparar grandezas associadas às unidades de medida.

Essa AEP se desenvolve a partir de uma questão inicial que relaciona a capacidade de um cubo com a restrição que se impõe quanto às dimensões limitadas da cartolina que será utilizada para a planificação de sua superfície.

6.2.1.1 Planificação da superfície de um cubo

Q0. Como construir o modelo de um cubo a partir da planificação de sua superfície em uma cartolina que tem 96 cm^2 de medida de área?

²⁹ (EF05MA16) Associar figuras espaciais a suas planificações (prismas, pirâmides, cilindros e cones) e analisar, nomear e comparar seus atributos. (BRASIL, 2018, p. 297)

³⁰ (EF05MA21) Reconhecer volume como grandeza associada a sólidos geométricos e medir volumes por meio de empilhamento de cubos, utilizando, preferencialmente, objetos concretos. (BRASIL, 2018, p. 297)

³¹ (EF07MA30) Resolver e elaborar problemas de cálculo de medida do volume de blocos retangulares, envolvendo as unidades usuais (metro cúbico, decímetro cúbico e centímetro cúbico). (BRASIL, 2018, p. 309)

A tarefa consiste na planificação da superfície de um cubo, no entanto, o enunciado aponta uma restrição, que se refere à medida da área da cartolina a ser utilizada. Posto dessa forma, é natural que surjam outros questionamentos, acerca das dimensões que a cartolina pode ter e acerca das formas que permitem a planificação.

Q1. *Quais as possíveis formas e medidas dos lados dessa cartolina?*

Apesar da restrição quanto à medida de área da cartolina, não há informações no enunciado que nos permitam inferir sobre a sua forma ou sobre as suas medidas. Nesses termos, há uma infinidade de opções tanto quanto à forma (quadrada, retangular, triangular, hexagonal, entre tantas outras, sem contar as formas poligonais côncavas) como às suas medidas (qualquer combinação de lados com comprimentos a e b tal que $a \times b = 96$, se considerássemos somente as formas retangulares). A nosso ver essa é uma discussão bastante proveitosa, ao permitir que os alunos comparem e façam estimativas de medidas de área de figuras planas e que percebam que duas figuras planas diferentes podem ter a mesma medida de área. Por outro lado, a fim de que a atividade avance, julgamos importante propor o refinamento da questão delimitando o campo de possibilidades.

Q1.1. *Quais as possíveis formas retangulares e medidas inteiras dos lados dessa cartolina?*

A tarefa que permite responder à questão demanda a decomposição do número 96 em fatores primos e a escolha das combinações que resultem na área com a medida dada. Isso permite verificar que 96×1 ; 32×3 ; 16×6 ; 8×12 ; 4×24 ; 2×48 são as possíveis medidas em centímetros dos lados da cartolina retangular.

Q2. *Todas essas formas permitem a planificação solicitada?*

Para responder a essa questão pode ser necessário retomar os conhecimentos prévios que os alunos têm a respeito da associação entre figuras espaciais (e de forma particular o cubo) a suas planificações.

Q2.1. *Quantas faces tem um cubo?*

Q2.2. *Que forma tem a face um cubo?*

Os alunos podem concluir que todas as formas de cartolina permitem a planificação da superfície de um cubo, mas que em algumas delas as faces do cubo são maiores do que em outras.

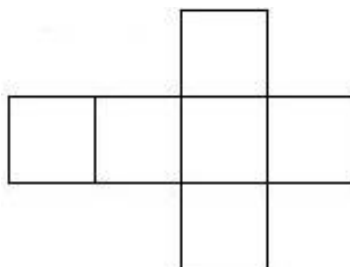
Q_{2.3}. *Será que quaisquer seis quadrados podem representar a planificação da superfície de um cubo?*

Essa questão nos leva à busca do que se entende por planificação. A concepção mais comum é aquela que define a planificação como um arranjo de polígonos com arestas comuns que ao serem dobrados, ao longo dessas arestas, formam o poliedro que origina a planificação dada. Sendo assim, não bastam seis quadrados quaisquer. É necessário que esses quadrados formem um cubo ao serem dobrados ao longo das arestas, como ocorre, por exemplo, com a planificação mais comumente utilizada, representada na Figura 46.

Uma nova pergunta a ser colocada, nesse caso, é a respeito das outras possíveis formas de planificação da superfície de um cubo.

Q_{2.4}. *De quantas formas diferentes é possível dispor os quadrados para a planificação da superfície de um cubo? Quais são essas formas?*

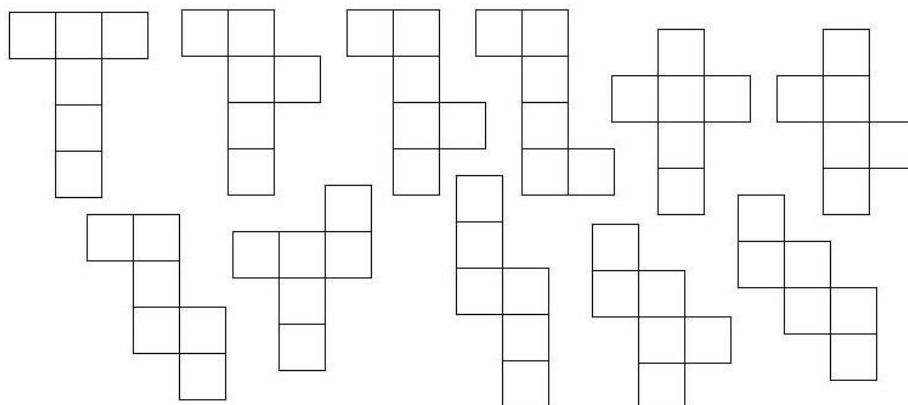
Figura 46. Um modelo para a planificação da superfície de um cubo



Fonte: elaborado pelo autor

A pesquisa em torno dessa questão revela que além da forma clássica é possível construir a planificação da superfície de um cubo de outras 10 formas diferentes, ou seja, são possíveis 11 planificações ao todo, conforme representamos na Figura 47.

Figura 47. Possíveis modelos para planificação da superfície de um cubo



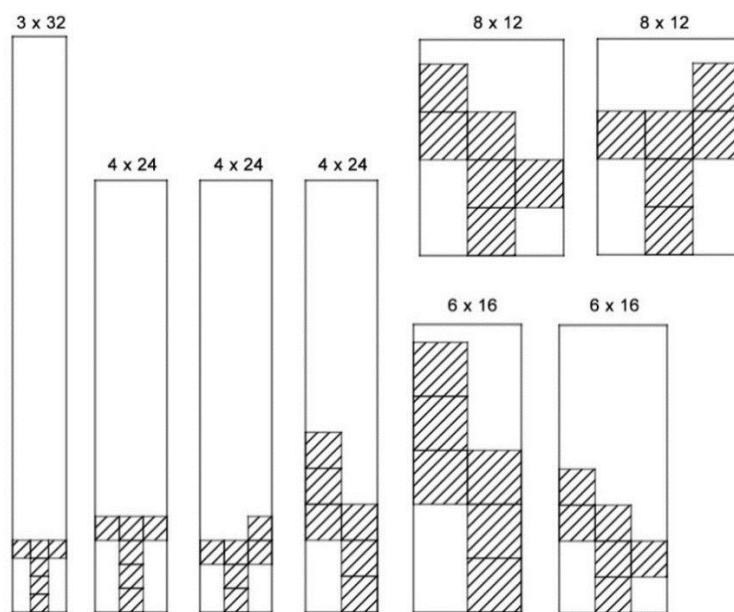
Fonte: elaborado pelo autor

Q_{2.5}. *Quais dessas planificações podem ser construídas com as cartolinas obtidas?*

A tarefa associada à comparação entre as medidas das cartolinas e a quantidade de quadrados de largura e de comprimento que compõem as planificações permite verificar que todas as planificações podem ser construídas em qualquer uma das possíveis cartolinas obtidas, embora algumas aproveitem mais a cartolina disponível do que as outras, conforme se observa em algumas das possíveis planificações reproduzidas na Figura 48.

Na primeira configuração à esquerda verificamos que a cartolina tem 3 cm de largura por 32 cm de comprimento, e que a planificação tem 3 quadrados de largura (1 cm de aresta, portanto, visto que ocupa toda a largura da cartolina) e 4 quadrados de comprimento. Na terceira configuração, da esquerda para a direita, temos uma cartolina com 4 cm de largura por 24 cm de comprimento, com uma planificação que usa 3 quadrados de largura por 4 de comprimento (aresta de $\frac{4}{3}$ cm), e assim por diante, apenas para mostrar algumas.

Figura 48. Possíveis combinações entre tipos de planificação e dimensões da cartolina



Fonte: elaborado pelo autor

Q₃. *Qual modelo teria a maior capacidade?*

A tarefa que se apresenta por meio dessa questão implica comparar as diversas possibilidades de combinação entre o tipo de planificação e as dimensões da cartolina, em busca do modelo que corresponda à maior capacidade. Implica,

igualmente, verificar a relação que se estabelece entre o comprimento dos lados do quadrado e a capacidade do cubo, ou seja, verificar que quanto maior o comprimento do lado do quadrado, maior é a capacidade do cubo.

Essa busca leva à planificação que utiliza dois quadrados de largura por cinco de comprimento, que é mais bem aproveitada na cartolina com dimensões 16 x 6, ao permitir quadrados com comprimento de 3 centímetros (a planificação fica com as dimensões 6 x 15 cm).

O Quadro 10 apresenta o resumo com a questão inicial **Q₀** e das questões que se originaram a partir dela.

Quadro 10. Um mapa de questões para a construção da planificação da superfície de um cubo

Q₀. Como construir o modelo de um cubo a partir da planificação de sua superfície em uma cartolina que tem 96 cm ² de medida de área?
Q₁. Quais as possíveis formas e medidas dos lados dessa cartolina?
Q_{1.1}. Quais as possíveis formas retangulares e medidas inteiras dos lados dessa cartolina?
Q₂. Todas essas formas permitem a planificação solicitada?
Q_{2.1}. Quantas faces tem um cubo?
Q_{2.2}. Que forma tem a face um cubo?
Q_{2.3}. Será que quaisquer seis quadrados podem representar a planificação da superfície de um quadrado?
Q_{2.4}. De quantas formas diferentes é possível dispor os quadrados para a planificação da superfície de um cubo? Quais são essas formas?
Q_{2.5}. Quais dessas planificações podem ser construídas com as cartolinas obtidas?
Q₃. Qual modelo teria a maior capacidade?

Fonte: elaborado pelo autor

Acreditamos que os saberes que podem se desenvolver a partir dessa atividade, além de mobilizar conhecimentos previstos para o 7º ano (como aqueles que se relacionam aos múltiplos e divisores de um número natural³² e às medidas de grandeza³³), podem ainda servir como base aos conteúdos que serão estudados no 8º ano (como os que envolvem áreas de figuras planas³⁴ e medidas de capacidade

³² (EF07MA01) Resolver e elaborar problemas com números naturais, envolvendo as noções de divisor e de múltiplo, podendo incluir máximo divisor comum ou mínimo múltiplo comum, por meio de estratégias diversas, sem a aplicação de algoritmos. (BRASIL, 2018, p. 307)

³³ (EF07MA29) Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de grandezas inseridos em contextos oriundos de situações cotidianas ou de outras áreas do conhecimento, reconhecendo que toda medida empírica é aproximada. (BRASIL, 2018, p. 309)

³⁴ (EF08MA19) Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como determinar medida de terrenos. (BRASIL, 2018, p. 315)

de blocos retangulares³⁵) e no 9º ano (como o estudo de vistas ortogonais de figuras espaciais³⁶).

6.2.2 UM PERCURSO PARA O 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Ao verificar os objetos de conhecimento propostos pela BNCC para os anos finais do Ensino Fundamental podemos destacar no 7º ano a introdução à linguagem algébrica, aliada ao estudo da noção de variável e de incógnita³⁷ e à distinção que deve ser feita entre uma e outra, uma primeira referência ao estudo dos processos de demonstração³⁸ como atividade matemática no 8º ano, além do estudo do Teorema de Pitágoras³⁹ e de suas consequências no 9º ano.

Sendo assim, propomos um percurso a ser desenvolvido por alunos do 9º ano (alunos com idade próxima dos 14 anos), formado por cinco atividades de estudo e pesquisa, que em seu conjunto, reúnem tanto características do modelo que chamamos de M_1 (tarefas associadas à comparação entre grandezas com apoio à noção de medida), como de M_2 (em que a comparação entre grandezas é dissociada da noção de medida), de M_4 (caracterizado pela utilização de desigualdades em processos de demonstração em áreas distintas da geometria) e de M_5 (ao buscar intervalos de valores desconhecidos a fim de determinar um campo de soluções viáveis).

6.2.2.1 Desigualdade entre dois segmentos

Seja a semicircunferência de raio $AO = OB$ e os segmentos OE e CD , perpendiculares ao segmento AB , com uma das extremidades sobre o segmento AB

³⁵ (EF08MA21) Resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo do volume de recipiente cujo formato é o de um bloco retangular. (BRASIL, 2018, p. 315)

³⁶ (EF09MA17) Reconhecer vistas ortogonais de figuras espaciais e aplicar esse conhecimento para desenhar objetos em perspectiva. (BRASIL, 2018, p. 319)

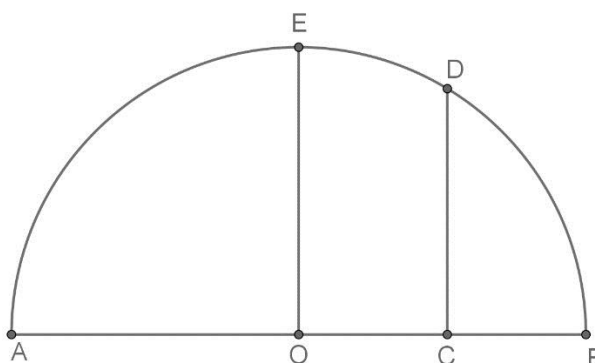
³⁷ (EF07MA13) Compreender a ideia de variável, representada por letra ou símbolo, para expressar relação entre duas grandezas, diferenciando-a da ideia de incógnita. (BRASIL, 2018, p. 307)

³⁸ (EF08MA14) Demonstrar propriedades de quadriláteros por meio da identificação da congruência de triângulos. (BRASIL, 2018, p. 315)

³⁹ (EF09MA13) Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos. (BRASIL, 2018, p. 319)

e a outra sobre a semicircunferência, de tal modo que o ponto C esteja localizado entre O e B , conforme representado na Figura 49.

Figura 49. Semicircunferência de raio $AO = OB$



Fonte: elaborado pelo autor

Q₀. Como demonstrar que $OE > CD$?

Em um primeiro momento pode ocorrer que a “demonstração” se restrinja à comparação entre os comprimentos dos segmentos da figura impressa, por meio de uma régua graduada ou de um compasso, concluindo-se assim que $OE > CD$.

Entretanto, ao considerar que o que se propõe com a atividade é desencadear um processo de raciocínio dedutivo que vai além da mera comparação, pode-se reformular a questão inicial.

Q₁. Como demonstrar que $OE > CD$ para todas as posições que o ponto C venha a ocupar entre O e B ?

A verificação de que $OE > CD$ é verdadeira para alguns casos por meio da medição, embora situe-se de forma fundamental entre os primeiros passos que levam ao processo de generalização, não tem como ser implementada para todos os casos. Essa reflexão pode permitir que se discuta com os alunos a diferença entre uma demonstração em matemática e a comprovação pontual de casos particulares.

Um dos possíveis caminhos para que se desenvolva a demonstração pode ser o que consiste em verificar quais dos segmentos representados na figura têm seu comprimento dependente da posição do ponto C e quais não têm.

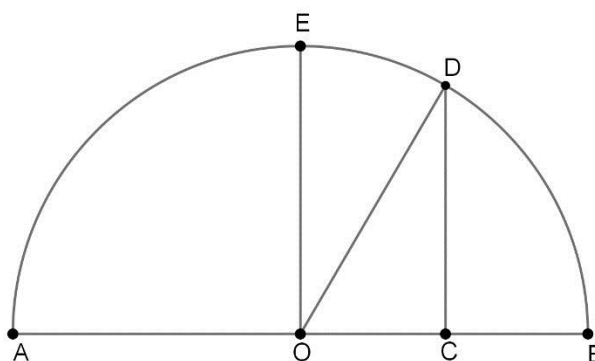
Q₂. Que segmentos representados na figura têm seu comprimento alterado de acordo com a posição do ponto C ?

É possível verificar que tanto o segmento CD como o segmento OC e CB sofrem alterações em seu comprimento de acordo com a posição do ponto C .

Q3. Que segmentos representados na figura **não têm** seu comprimento alterado de acordo com a posição do ponto C ?

O que se verifica, em um primeiro momento é que os segmentos AO e OB não são modificados, assim como o segmento OE . Um recurso heurístico nessa fase pode ser o de traçar o segmento OD , conforme representado na Figura 50 e verificar que, a exemplo de AO , OB e OE , também não é afetado pela posição de C .

Figura 50. Semicircunferência de raio OD



Fonte: elaborado pelo autor

Q3.1. Que relação se observa entre AO , OB , OE e OD ?

Uma das relações apresentada no enunciado da atividade afirma que $AO = OB$. Ao verificar que o ponto O é comum aos quatro segmentos e que os pontos que correspondem à outra extremidade (os pontos A , B , E e D) encontram-se sobre a semicircunferência, os alunos podem constatar que todos têm o mesmo comprimento, independentemente da posição ocupada pelo ponto C .

Talvez um próximo passo consista em organizar algumas asserções que estejam à mão, além de oferecer a oportunidade para que se discutam e se infiram outras, não necessariamente explícitas nesse nível, mas que passam a ser demandadas pela situação.

Q3.2. É correto afirmar que OE e OD têm o mesmo comprimento?

De fato, como os segmentos OE e OD têm um ponto em comum e a outra extremidade sobre a circunferência, então têm o mesmo comprimento. Essa asserção, que se apoia em uma das propriedades das circunferências, talvez possa contribuir para que esses saberes sejam trazidos à tona, demandados que são pela situação.

Um possível próximo passo, a partir da certeza de que OE e OD têm o mesmo comprimento consiste em comparar OD com CD . Nesse caminho, parece fundamental observar que os pontos O , D e C são vértices de um triângulo retângulo.

Q3.3. *É correto afirmar que o triângulo ODC é retângulo?*

Como, por hipótese, o segmento CD é perpendicular ao segmento AB , isso garante que o ângulo ODC seja reto, e conseqüentemente que o triângulo ODC seja triângulo.

Q3.4. *Qual é a relação entre os lados OD e CD no triângulo ODC ?*

O lado OD é oposto ao ângulo reto, logo OD é a hipotenusa do triângulo ODC e o lado CD é um dos catetos.

Q3.5. *É correto afirmar que em qualquer triângulo retângulo a hipotenusa é sempre maior do que qualquer um dos dois catetos?*

Essa pergunta permite que se discutam algumas das propriedades dos triângulos retângulos, como por exemplo, a relação que existe entre hipotenusa e catetos, servindo eventualmente de motivo para que se avance no estudo e compreensão do Teorema de Pitágoras.

Ao identificar o segmento OD como a hipotenusa e CD como um dos catetos do triângulo retângulo ODC , demonstra-se finalmente que $OD > CD$, respondendo assim à **Q0**.

Um resumo com a questão inicial **Q0** e com as questões que podem se originar a partir dessa são representados no Quadro 11.

Quadro 11. Um mapa de questões para a demonstração de desigualdade entre dois segmentos

Q0. <i>Como demonstrar que $OE > CD$?</i>
Q1. <i>Como demonstrar que $OE > CD$ para todas as posições que o ponto C venha a ocupar entre O e B?</i>
Q2. <i>Que segmentos representados na figura têm seu comprimento alterado de acordo com a posição do ponto C?</i>
Q3. <i>Que segmentos representados na figura não têm seu comprimento alterado de acordo com a posição do ponto C?</i>
Q3.1. <i>Que relação se observa entre AO, OB, OE e OD?</i>
Q3.2. <i>É correto afirmar que OE e OD têm o mesmo comprimento?</i>
Q3.3. <i>É correto afirmar que o triângulo ODC é retângulo?</i>
Q3.4. <i>Qual é a relação entre os lados OD e CD no triângulo ODC?</i>
Q3.5. <i>É correto afirmar que em qualquer triângulo retângulo a hipotenusa é sempre maior do que qualquer um dos dois catetos?</i>

Fonte: elaborado pelo autor

6.2.2.2 Desigualdade entre quadrados

Suponha dois números a e b maiores do que zero, de tal forma que o número a seja maior do que o número b .

Q₀. *É correto afirmar que $a^2 > b^2$?*

A exemplo da atividade anterior, pode ocorrer em um primeiro momento que os esforços se concentrem na verificação de que a igualdade é válida para casos particulares, como por exemplo, ao mostrar que se $4 > 3$, então $16 > 9$. No entanto, o que se espera ao propor essa atividade é que efetivamente se demonstre que a desigualdade é válida para quaisquer valores de a e b , de acordo com as condições expostas no enunciado: $a > 0$, $b > 0$ e $a > b$. O que se espera com a atividade é que, diante da impossibilidade de “testar” todos os valores de a e de b , os esforços se concentrem em busca de uma solução genérica, que seja válida sempre que se forem atendidas as restrições descritas no enunciado.

Uma saída viável, nesse caso, talvez seja o de se perguntar que outras asserções podem ser deduzidas partindo do fato de que $a > b$.

Q₁. *O que mais se pode afirmar sobre a e b , sabendo que $a > b$?*

Ou ainda:

Q_{1.1}. *Sendo $a > b$, qual o sinal da diferença entre o primeiro e o segundo termo?*

E finalmente:

Q_{1.2}. *Sendo $a > b$, é válido afirmar que $a - b > 0$?*

Q_{1.3}. *Sendo $a > 0$ e $b > 0$, é válido afirmar que $a + b > 0$?*

A partir da constatação de que $a - b > 0$ e que $a + b > 0$, pode-se questionar então o que ocorre com uma desigualdade ao multiplicarmos ambos os lados por um mesmo número. Essa talvez seja uma oportunidade para que algumas das propriedades das operações com desigualdades sejam trazidas à tona a fim de justificar tecnologicamente a possibilidade de multiplicar ambos os lados de uma desigualdade por um número positivo sem que se altere o seu sentido, ou ainda, verificar que o sentido é alterado nos casos em que o número é negativo.

Q₂. *O que ocorre com o sentido de uma desigualdade ao multiplicar ambos os lados por um número positivo?*

Q3. Qual é a desigualdade equivalente que se obtém ao multiplicar ambos os lados de $a - b > 0$ por $a + b$?

Q3.1. O sentido da desigualdade equivalente se mantém, ou deve ser alterado?

A resposta às questões **Q2** e **Q2.1** permite então que se chegue a $(a - b)(a + b) > 0(a + b)$, e consequentemente a $a^2 - b^2 > 0$.

Q4. O que mais se pode afirmar sobre a e b , sabendo que $a^2 - b^2 > 0$?

Ao questionar que outra asserção pode ser feita a partir da constatação de que $a^2 - b^2 > 0$, pode-se chegar, finalmente à resposta da questão inicial, mostrando que $a^2 > b^2$ é válida para quaisquer valores de a e b , desde que sejam ambos positivos e $a > b$.

Q5. Sendo $a^2 - b^2 > 0$, é correto afirmar que $a^2 > b^2$?

O Quadro 12 traz um resumo com a questão inicial **Q0** e com as questões que podem ser propostas para que se demonstre a desigualdade entre dois quadrados.

Quadro 12. Um mapa de questões para a demonstração da desigualdade entre dois quadrados

Q0. É correto afirmar que $a^2 > b^2$
Q1. O que mais se pode afirmar sobre a e b , sabendo que $a > b$?
Q1.1. Sendo $a > b$, qual o sinal da diferença entre o primeiro e o segundo termo?
Q1.2. Sendo $a > b$, é válido afirmar que $a - b > 0$?
Q1.3. Sendo $a > 0$ e $b > 0$, é válido afirmar que $a + b > 0$?
Q2. O que ocorre com o sentido de uma desigualdade ao multiplicar ambos os lados por um número positivo?
Q3. Qual é a desigualdade equivalente que se obtém ao multiplicar ambos os lados de $a - b > 0$ por $a + b$?
Q3.1. O sentido da desigualdade equivalente se mantém, ou deve ser alterado?
Q4. O que mais se pode afirmar sobre a e b , sabendo que $a^2 - b^2 > 0$?
Q5. Sendo $a^2 - b^2 > 0$, é correto afirmar que $a^2 > b^2$?

Fonte: elaborado pelo autor

6.2.2.3 Desigualdade entre um número e o seu quadrado

Q0. É verdade que todo número real elevado ao quadrado é maior do que ele mesmo?

Talvez a primeira tentativa que se faça no sentido de verificar se a afirmação é verdadeira consista em “testar” alguns números. Essa técnica, que pode servir de forma satisfatória como uma abordagem inicial logo se mostra limitada, diante da impossibilidade de testar todos os números.

Nesses termos, um dos caminhos à disposição e que vem ao encontro dos objetivos da atividade consiste em atribuir a um parâmetro o estatuto de número real, de forma que as conclusões obtidas a partir do estudo desse parâmetro possam ser generalizadas para qualquer número real e não apenas para alguns casos particulares.

Ao supor um parâmetro t , por exemplo, uma das questões que pode ser colocada é a que relaciona esse parâmetro com o seu quadrado.

Q₁. *Suponha um número t , tal que $t \in \mathbb{R}$. É sempre verdade que $t^2 > t$?*

Q_{1.1}. *Que outras relações podem advir da desigualdade $t^2 > t$?*

Afirmar que $t^2 > t$ implica aceitar que $t^2 - t > 0$, para qualquer $t \in \mathbb{R}$. Se essa afirmação se comprova, a afirmação anterior, da qual essa advém também se comprova. Nesse sentido, há outra pergunta a se fazer.

Q_{1.2}. *É sempre verdade que $t^2 - t > 0$?*

A resposta a questão **Q_{1.2}** demanda a resolução da inequação quadrática $t^2 - t > 0$, oferecendo a possibilidade de que amplie a discussão sobre quais são as possíveis técnicas de resolução, quais são as mais econômicas e quais são as didaticamente mais custosas.

A constatação de que a desigualdade $t^2 - t > 0$ é verdadeira apenas quando $t < 0$ ou quando $t > 1$, permite tanto que se responda negativamente a questão **Q₀**, como se reformule essa questão, ao observar que a afirmação pode ser verdadeira para alguns números reais e não para outros.

Q₂. *A afirmação de que um número real elevado ao quadrado é maior do que ele mesmo é válida para quais intervalos numéricos?*

Como vimos, a afirmação só não é válida nos casos em que o número em questão se situe no intervalo $[0,1]$.

Uma variação, ou continuação dessa atividade pode ser desenvolvida ao considerar um número e o seu cubo, por meio de outra questão.

Q₃. *É verdade que todo número real elevado ao cubo é maior do que ele mesmo?*

Ao seguir por caminhos similares ao que se desenharam a partir da questão inicial, a tentativa de responder a essa pergunta leva à resolução da inequação $t^3 - t > 0$, oferecendo a possibilidade de que se discutam e ampliem o alcance das técnicas utilizadas para a resolução da inequação quadrática.

O Quadro 13 resume as perguntas que podem ser feitas no decorrer da atividade.

Quadro 13. Um mapa de questões para demonstrar a desigualdade entre um número e seu quadrado

<i>Q₀. É verdade que todo número real elevado ao quadrado é maior do que ele mesmo?</i>
<i>Q₁. Suponha um número t, tal que $t \in \mathbb{R}$. É sempre verdade que $t^2 > t$?</i>
<i>Q_{1.1}. Que outras relações podem advir da desigualdade $t^2 > t$?</i>
<i>Q_{1.2}. É sempre verdade que $t^2 - t > 0$?</i>
<i>Q₂. A afirmação de que um número real elevado ao quadrado é maior do que ele mesmo é válida para quais intervalos numéricos?</i>
<i>Q₃. É verdade que todo número real elevado ao cubo é maior do que ele mesmo?</i>

Fonte: elaborado pelo autor

6.2.2.4 Quociente entre dois números reais positivos

O termo “divisão” é definido em Houaiss (2001) tanto como a “operação que consiste em descobrir quantas vezes um número está contido em outro” como “cada uma das partes, porções de um todo”.

A primeira definição não parece conflitar com a compreensão que se tem a respeito do termo na atividade matemática, no sentido de que dividir um número pelo outro significa descobrir quantas vezes um contém o outro.

Por outro lado, a ideia de que o quociente da divisão é a parte de um todo, aliada à noção de que o todo é sempre maior do que cada uma de suas partes, pode contribuir com a equivocada impressão de que o quociente é sempre menor do que o dividendo. Sendo assim, podemos formular a seguinte questão inicial.

Q₀. É correto afirmar que o quociente entre dois números reais positivos é sempre menor do que o dividendo?

O teste da asserção com alguns números pode mostrar rapidamente que nem sempre o quociente é menor do que o dividendo, negando a afirmação e chegando à resposta de **Q₀**, como por exemplo ao dividir o número 4 por 0,5, obtendo o quociente 8.

A resposta negativa à questão inicial, que como se observa, pode ser encontrada pela mera verificação de um caso particular, permite concluir que em alguns casos o quociente é menor do que o dividendo, mas que isso nem sempre é verdadeiro. Essa conclusão permite então que se vá um pouco além, em busca dos divisores que levam a quocientes menores que o dividendo e de divisores que levem à quocientes maiores do que o dividendo.

Q₁. *Em que situações o quociente entre dois números reais positivos é maior do que o dividendo?*

De fato, **Q₁** poderia ser a questão inicial da atividade, porém nos parece proveitoso propor uma questão prévia **Q₀** como questão geratriz, a fim de que os alunos concluam por si mesmos que em alguns casos o quociente entre dois números positivos é maior do que o dividendo, sem que essa propriedade seja dada de antemão.

Q_{1.1}. *Como expressar a suposta relação de desigualdade entre dividendo, divisor e quociente?*

Um dos caminhos a serem tomados pode ser o que consiste em tratar os entes envolvidos na situação como parâmetros, chamando, por exemplo, o dividendo de a , o divisor de b e o quociente de $\frac{a}{b}$.

Nesse sentido, o que se procura são valores de b que tornem a desigualdade $\frac{a}{b} > a$ verdadeira.

Q_{1.2}. *Sendo $\frac{a}{b} > a$, é correto afirmar que $\frac{a}{b} - a > 0$?*

A confirmação de que $\frac{a}{b} - a > 0$ pode ser representada pela inequação equivalente $\frac{a(1-b)}{b} > 0$.

Q_{1.3}. *Em que casos é correto afirmar que $\frac{a(1-b)}{b} > 0$?*

Como, de acordo com o enunciado inicial, tanto a como b são positivos, basta que se verifique o caso em que $1 - b > 0$, que conduz a $b < 1$. Nesse sentido, não é sempre verdade que o quociente entre dois inteiros positivos seja sempre menor do que o dividendo. Conforme se pode demonstrar ao desenvolver a atividade, essa desigualdade se inverte nos casos em que o divisor é menor do que 1.

As questões que podem surgir a partir da questão inicial **Q₀** estão resumidas no Quadro 14.

Quadro 14. Um mapa de questões para a demonstração da desigualdade do quociente entre dois reais positivos

Q₀. É correto afirmar que o quociente entre dois números reais positivos é sempre menor do que o dividendo?
Q₁. Em que situações o quociente entre dois números reais positivos é maior do que o dividendo?
Q_{1.1}. Como expressar a suposta relação de desigualdade entre dividendo, divisor e quociente?
Q_{1.2}. Sendo $\frac{a}{b} > a$, é correto afirmar que $\frac{a}{b} - a > 0$?
Q_{1.3}. Em que casos é correto afirmar que $\frac{a(1-b)}{b} > 0$?

Fonte: elaborado pelo autor

6.2.2.5 A busca por um retângulo possível

Suponhamos inicialmente um retângulo, com perímetro de medida igual à 132 m. Se aumentarmos a medida do comprimento de um dos lados em 24 m e do outro em 15 m, a medida da área delimitada pelo retângulo aumentaria em 1620 m². Calcule a medida do comprimento dos lados do retângulo original.

Esse é um dos problemas que pode ser resolvido por meio de um sistema formado por duas equações e duas incógnitas (as medidas do comprimento de cada um dos dois lados do retângulo).

$$\begin{cases} 2x + 2y = 132 \\ 15x + 24y = 1260 \end{cases}$$

A primeira equação foi obtida a partir da informação a respeito do perímetro e a outra obtida a partir da informação a respeito do aumento da medida do comprimento dos lados com o consequente aumento da medida da área delimitada pela figura.

Ao ser resolvido, o sistema mostra que $x = 36$ e $y = 30$.

Suponhamos agora, as mesmas condições do enunciado original, com exceção da medida do perímetro, que deve ser, nesse segundo caso, igual à 180.

O sistema de equações seria dado por $\begin{cases} 2x + 2y = 180 \\ 15x + 24y = 1260 \end{cases}$ que ao ser resolvido apresentaria a solução $x = 100$ e $y = -10$.

O que se verifica é que, apesar da solução encontrada atender ao sistema, não pode ser tomada como uma solução efetiva do problema, ao considerarmos que as incógnitas x e y referem-se ao comprimento dos lados de um retângulo e não admitem dessa forma valores negativos.

Sendo assim, pode-se alterar o enunciado inicial, a fim de verificar para medidas do perímetro o retângulo é possível e para quais não é.

Seja um retângulo com medida do perímetro igual à p metros. Se aumentarmos a medida do comprimento de um dos lados em 24 m e do outro em 15 m, a medida da área delimitada pelo retângulo aumentaria em 1620 m². Calcule a medida do comprimento dos lados do retângulo original.

A pergunta inicial que se propõe nesse caso, deve recair sobre quais os possíveis valores de p que permitem a solução.

Q₀. *Qual é o intervalo de valores de p que permite a solução do problema?*

Em um primeiro momento, a fim de modelizar a situação, os alunos podem calcular a medida de área compreendida pelo retângulo, antes e depois do aumento da medida das dimensões laterais.

Q₁. *Como expressar a medida de área do retângulo original?*

Um recurso que pode ser colocado em jogo e que é disponível no nível em que essa atividade é proposta consiste em atribuir uma incógnita à medida do comprimento de cada um dos lados do retângulo. Se por exemplo, chamarmos a medida do comprimento de um dos lados de x e do outro de y , podemos expressar tanto uma fórmula que associe a medida do comprimento dos dois lados ao perímetro como uma outra, associando-os à medida de área.

Medida do perímetro: $p = 2x + 2y$

Medida de Área: xy

Q₂. *Como expressar a medida de área do retângulo após o aumento da medida das dimensões laterais?*

De acordo com o enunciado, um dos lados com medida que chamamos de x foi aumentado em 24 m, sendo assim, a nova medida de seu comprimento será de $x + 24$.

Da mesma forma, o outro lado, que chamamos de y , foi aumentado em 15 m, o que quer dizer que a nova medida de seu comprimento será de $y + 15$.

A informação do enunciado nos diz que a nova medida de área é 1620 m^2 maior que a medida da área anterior, ou seja, $xy + 1620$.

Ao organizar essas informações, podemos expressar a relação entre as incógnitas x e y e o parâmetro p por meio da equação:

$$(x + 24)(y + 15) = xy + 1620$$

Que ao ser simplificada, resulta em outra equivalente:

$$15x + 24y = 1260$$

Essa talvez seja uma oportunidade para que se recorram às técnicas de resolução de sistemas de equações, em busca dos valores de x e de y , desencadeada a partir da pergunta sobre qual é o valor dessas incógnitas, de acordo com o parâmetro p .

Q3. *Quais são intervalos de valores das incógnitas x e y ?*

Essa pergunta pode ser respondida ao associar em um único sistema a equação que relacionava p às medidas de comprimento dos lados, antes do aumento da medida das dimensões laterais, com a equação que se obteve ao relacionar a nova medida de comprimento dos lados com o aumento da medida da área.

$$\begin{cases} 2x + 2y = p \\ 15x + 24y = 1260 \end{cases}$$

A resolução do sistema nos mostra que x e y podem ser calculados de acordo com o parâmetro p , de tal forma que $x = \frac{4p}{3} - 140$ e $y = 140 - \frac{5p}{6}$.

Nessa etapa, os alunos podem recorrer às noções de desigualdade, em um primeiro momento para expressar a impossibilidade de que os eventuais valores a serem atribuídos às incógnitas x e y sejam negativos, e em um segundo momento, de acordo com essa condição, verificar qual é o campo de soluções viáveis em relação ao parâmetro p , respondendo assim à **Q0**.

Como $x \geq 0$, então $\frac{4p}{3} - 140 \geq 0$.

Logo, ao resolver a inequação fica determinado o limite inferior do parâmetro p , ou seja, $p \geq 105$.

Da mesma forma, como $y \geq 0$, teremos a inequação $140 - \frac{5p}{6} > 0$, que ao ser resolvida, determina o limite superior do parâmetro p , ou seja, $p \leq 168$.

O Quadro 15 resume as questões que podem se apresentar a partir da questão inicial.

Quadro 15. Um mapa de questões para a busca de um retângulo possível

Q₀. Qual é o intervalo de valores de p que permite a solução do problema?
Q₁. Como expressar a medida de área do retângulo original?
Q₂. Como expressar a medida de área do retângulo após o aumento da medida das dimensões laterais?
Q₃. Quais são os intervalos de valores das incógnitas x e y ?

Fonte: elaborado pelo autor

A nosso ver, além de mobilizar conhecimentos previstos para o 9º ano, as atividades que compõem esse percurso permitem que sejam retomados assuntos tratados em anos anteriores, como aqueles associados às operações de divisão (a partir do 3º ano) e potenciação (a partir do 6º ano), ao cálculo da medida de área de figuras planas (a partir do 5º ano), à reflexão sobre a condição de existência de polígonos (7º ano) e a resolução de sistemas de equações lineares (8º ano), além de possibilitar construção de uma base de conhecimento para os conteúdos que virão a ser tratados no Ensino Médio, como a construção de modelos empregando funções polinomiais de 1º e de 2º graus e equações lineares simultâneas para a resolução de problemas em diferentes contextos.

6.2.3 UM PERCURSO PARA O 1º ANO DO ENSINO MÉDIO

De acordo com a BNCC (BRASIL, 2018, p. 32) as habilidades a serem desenvolvidas pelos alunos durante os três anos do Ensino Médio são detalhadas, sem que se faça, contudo, a indicação da seriação, a fim de “garantir ao sistemas de ensino e às escolas a construção de currículos e propostas pedagógicas flexíveis e adequados à sua realidade”.

Sendo assim, a indicação da seriação dos percursos de estudo e pesquisa que propomos tem mais a finalidade de organizar a sequência dos percursos do que a de determinar o que se deve estudar em cada ano.

De fato, julgamos que esse primeiro percurso para o Ensino Médio seja apropriado aos alunos do 1º ano, ao considerar que parte das tarefas previstas nas duas atividades de estudo e pesquisa que o compõem (como as conversões de representação em diversos registros⁴⁰, a identificação de padrões e criação de conjecturas⁴¹) são, de acordo com a BNCC, objetos de conhecimento que se apoiam em aprendizagens anteriores, desenvolvidas nos anos finais do Ensino Fundamental, como a representação gráfica dos pontos que atendem a uma equação linear de 1º grau⁴² e a resolução de equações polinomiais de 1º grau⁴³.

A nosso ver, as praxeologias que podem se desenvolver nas atividades reúnem características tanto do modelo M_2 , ao comparar grandezas de forma dissociada da noção de medida, como do modelo M_5 , ao demandar a busca por intervalos de valores desconhecidos para a determinação de um campo de soluções viáveis.

6.2.3.1 Arrecadação com venda de doces e salgados

A arrecadação de recursos para uma festa de formatura parece ser uma preocupação natural dos alunos quando chegam aos anos finais de um ciclo escolar. Uma questão bastante ampla e genérica que se coloca nesses casos é de que modo isso pode ser feito. As respostas são diversas, de acordo com uma quantidade também grande de variáveis. O que se percebe, de forma mais geral, é a organização de festa beneficentes, bingos, campanhas de arrecadação de donativos, venda de produtos, entre tantas outras possibilidades.

⁴⁰ (EM13MAT401) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica. (BRASIL, 2018, p. 539)

⁴¹ (EM13MAT501) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau. (BRASIL, 2018, p. 543)

⁴² (EF08MA07) Associar uma equação linear de 1º grau com duas incógnitas a uma reta no plano cartesiano. (BRASIL, 2018, p. 313)

⁴³ (EF08MA08) Resolver e elaborar problemas relacionados ao seu contexto próximo, que possam ser representados por sistemas de equações de 1º grau com duas incógnitas e interpretá-los, utilizando, inclusive, o plano cartesiano como recurso. (BRASIL, 2018, p. 313)

A fim de delimitar o campo de atuação dos alunos, mas ainda assim deixar um espaço para a reflexão com o objetivo de provocar o surgimento de noções associadas às inequações, propomos a seguinte questão geratriz como pergunta inicial dessa AEP.

***Q₀.** Qual o valor máximo que se pode arrecadar com a venda de doces e salgados?*

A fim de responder essa questão torna-se necessário que se considerem alguns aspectos não claros à princípio, associados à quantidade estimada de unidades a serem vendidas, aos recursos disponíveis para a compra ou confecção dos produtos, ao custo envolvido na compra ou na produção desses produtos e ao possível preço de venda. Nesse sentido, é natural que a questão inicial desencadeie o surgimento de novas questões.

***Q₁.** Qual é a quantidade estimada de venda de doces e de salgados?*

***Q₂.** Quanto podemos gastar para comprar ou produzir os doces a serem vendidos?*

***Q₃.** Qual é o preço de venda de cada um dos produtos?*

***Q₄.** Que quantidade de doces e de salgados contribui para a máxima arrecadação?*

No contexto dessa atividade, ao considerar que não se trata efetivamente de uma situação real, mas da simulação de uma situação, criada com a intenção de fazer despontar saberes relacionados às inequações e sua utilização como uma ferramenta matemática, é necessário que o professor forneça algumas das respostas, sem as quais a atividade não tem como avançar.

Nesse sentido, a resposta que propomos à questão **Q₁** é que, de acordo com o número de alunos matriculados, a quantidade máxima estimada de venda é de 250 unidades, entre doces e salgados.

De posse dessa informação, podem ser propostas tarefas intermediárias, desencadeadas por perguntas derivadas de **Q₁**, como por exemplo:

***Q_{1.1}.** Como representar a máxima quantidade estimada da venda de doces e salgados?*

A tarefa demandada por essa pergunta implica na utilização de uma inequação que possa abarcar as variáveis representadas pela quantidade de doces, de salgados e a quantidade máxima imposta pela restrição da situação. Dessa forma, ao considerar que a soma das duas quantidades deve ser no máximo de 250, uma representação possível é por meio da expressão $x + y \leq 250$.

Uma outra forma, considerando que se atinja a quantidade máxima de vendas, é por meio de uma tabela com quantidades de doces e salgados, conforme apresentamos no Quadro 16, que em outros termos implica verificar valores de x e de y que atendam à equação $x + y = 250$.

Q1.2. *Como representar graficamente a máxima quantidade estimada da venda de doces e salgados?*

A tarefa que se apresenta é a de representação gráfica dos pontos que atendem à equação $x + y = 250$. Ao considerar que essa é uma das habilidades previstas para os anos finais do Ensino Fundamental, a realização da tarefa pode demandar a representação gráfica como uma necessidade ao desenvolvimento da atividade.

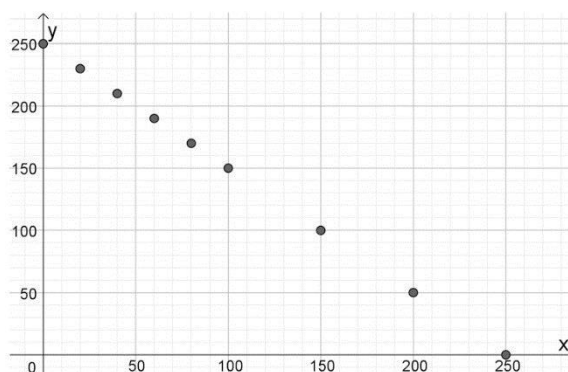
Quadro 16. Uma representação de quantidades máximas de doces e salgados

Doces (x)	Salgados (y)
0	250
1	249
2	248
...	...
10	240
20	230
30	220
...	...
90	160
...	...
250	0

Fonte: elaborado pelo autor

Ao atribuir ao eixo das abscissas valores correspondentes à quantidade de doces e ao eixo das ordenadas valores correspondentes à quantidade de salgados, é possível fazer a plotagem de alguns desses pontos, conforme se observa na Figura 51.

Figura 51. Uma representação gráfica de quantidades máximas de doces e salgados



Fonte: elaborado pelo autor

Os pontos plotados no gráfico correspondem a algumas quantidades inteiras de unidades considerando a estimativa máxima de vendas. Nesse sentido, podem surgir outros questionamentos.

Q1.2.1. *Podemos ligar os pontos por meio de uma linha reta?*

A resposta a essa pergunta, no contexto em que a tarefa se desenvolve e ao considerar quantidades inteiras de doces e salgados, é que não é possível. Entretanto, essa pergunta pode oferecer a possibilidade de que se amplie a discussão sobre grandezas discretas e contínuas.

Q1.2.2. *Além dos pontos que estão alinhados no gráfico, existem outros pontos, correspondentes à quantidade de doces e salgados, que atendam a quantidade máxima?*

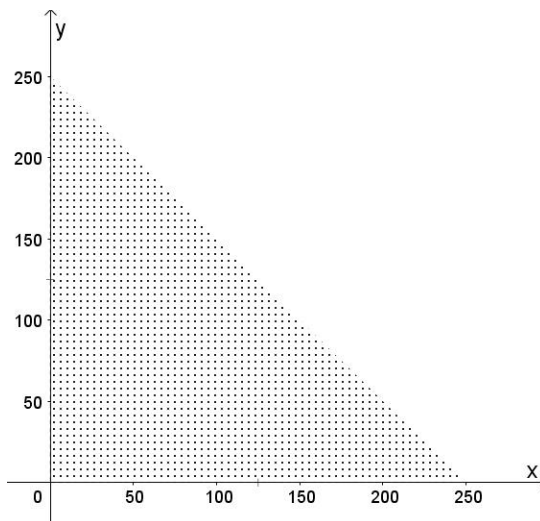
A resposta a essa questão implica considerar se a quantidade de doces e de salgados atribuída a um ponto em questão supera as 250 unidades. Se supera então o ponto não deve ser considerado como uma possibilidade, no entanto, se não supera a estimativa máxima, o ponto deve ser considerado.

Q1.2.3. *É possível delimitar uma parte do plano que contenha apenas pontos que atendam à restrição dada?*

A tarefa que torna possível responder a essa questão consiste na representação gráfica da solução da inequação $x + y \leq 250$. O teste de alguns pontos mostra que existem três regiões distintas no plano: a região cuja soma da quantidade de doces e de salgados é igual à 250, a região em que a soma é inferior à 250 e a região em que a soma excede 250. Sendo assim, tanto os pontos que satisfazem à equação $x + y = 250$, como aqueles localizados sob a reta formada por esses pontos,

atendem à restrição dada, conforme representamos na Figura 52. Se considerarmos apenas valores inteiros, teremos uma malha de pontos, cada um dos quais correspondente a uma solução viável. Se estivéssemos considerando grandezas contínuas teríamos um polígono de possibilidades.

Figura 52. Representação da área de soluções viáveis (quantidade máxima)



Fonte: elaborado pelo autor

Definida a área de soluções viáveis referente à quantidade estimada máxima, passemos à questão **Q₂**, sobre a quantidade de recursos disponíveis para que se invista na compra ou na confecção dos doces e salgados, seguida de **Q_{2.1}**, sobre o custo de compra/confecção que corresponde a cada produto.

Q_{2.1}. *Qual é o custo de produção ou compra dos doces e salgados?*

A fim de trazer a situação para o campo das possibilidades concretas, propomos que o valor máximo disponível para investimento seja de R\$ 300,00 e que se considere o custo estimado do doce em R\$ 1,00 e do salgado em R\$ 2,00. Ao estabelecermos esses valores, é natural que se questione acerca da quantidade máxima de doces e salgados que é possível comprar/confeccionar com o investimento disponível.

Q_{2.2}. *Quantos doces e salgados podem ser colocados à venda?*

Q_{2.3}. *Como representar a quantidade máxima de doces e salgados que podem ser colocados à venda?*

Q_{2.4}. *Como representar graficamente a quantidade máxima de doces e salgados que podem ser colocados à venda?*

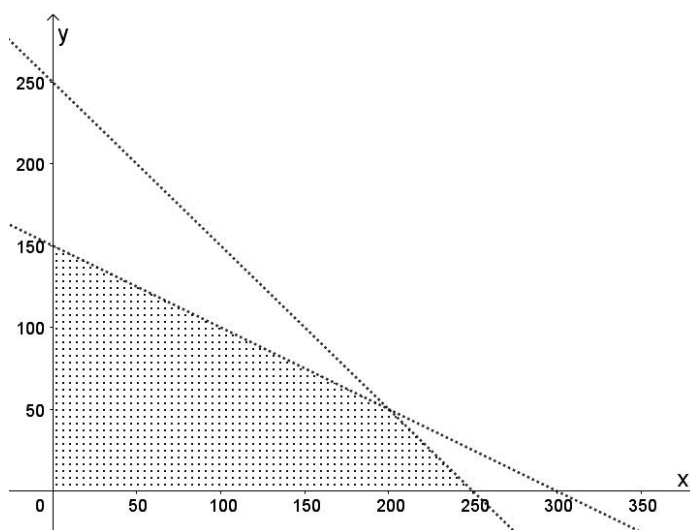
As respostas para as questões **Q_{2.2}**, **Q_{2.3}** e **Q_{2.4}** podem ser encontradas de forma análoga ao que foi feito para responder as questões que giraram em torno da quantidade máxima estimada de vendas. Nesse sentido, a quantidade máxima de doces que podem ser colocados à venda é dada pela inequação $x + 2y \leq 300$ e a área de soluções viáveis corresponde à malha de pontos que se situam abaixo da reta formada pelos pontos que satisfazem a equação $x + 2y = 300$.

A representação das duas restrições em um mesmo plano permite que se defina uma nova malha (ou polígono, se fossem consideradas quantidades contínuas) de possibilidades, conforme a Figura 53.

Q₃. Qual é o preço de venda de cada um dos produtos?

Ao levar em conta as diferentes possibilidades de combinações de venda de doces e salgados, de acordo com as restrições impostas, falta-nos avaliar qual dessas combinações contribui para a maior receita. Em uma situação real seria necessário avaliar aspectos bem práticos, acerca de qual é o preço normalmente cobrado por esses produtos no comércio da região, além de sondar eventuais compradores sobre o valor que estão dispostos a pagar. No contexto em que a essa atividade pode se desenvolver, sugerimos como resposta que o preço de venda de cada doce seja de R\$ 2,00 e de cada salgado seja R\$ 3,00.

Figura 53. Representação gráfica da área de soluções viáveis



Fonte: elaborado pelo autor

A definição de preço permite então que se avance em direção **Q₄**, sobre a quantidade de doces e salgados que contribui para a máxima arrecadação, estabelecendo questões derivadas.

Q4.1. *Como calcular a arrecadação (receita)?*

Q4.2. *Como representar a receita partir de quantidades genéricas de doces e salgados por meio das variáveis x e y ?*

Para calcular a arrecadação basta que se escolha uma quantidade de doces e de salgados dentro do campo das soluções viáveis, atribuindo-lhes os respectivos preços, que pode ser feito, por exemplo, por meio de uma tabela com dupla entrada, conforme representamos no Quadro 17.

Quadro 17. Cálculo da receita para diferentes quantidades de doces e salgados

Quantidade de doces	Quantidade de salgados	Receita
100	50	$100 \times 2,00 + 50 \times 3,00 = 350,00$
120	40	$120 \times 2,00 + 40 \times 3,00 = 360,00$
130	60	$130 \times 2,00 + 60 \times 3,00 = 440,00$

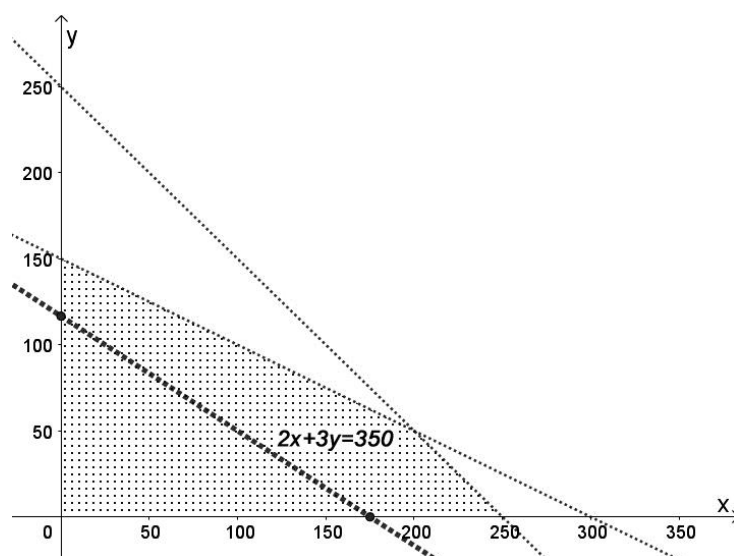
Fonte: elaborado pelo autor

Um modo de representar essa relação de forma genérica é por meio da equação $2x + 3y = r$, em que r é a receita. De forma análoga ao que fizemos para representar graficamente as restrições, podemos questionar de que modo isso pode ser feito para representar a receita.

Q4.3. *Como representar graficamente a receita partir de quantidades genéricas de doces e salgados por meio das variáveis x e y ?*

A tarefa que permite responder à questão implica fazer a representação gráfica dos pontos que satisfazem à equação da receita $2x + 3y = r$. Isso pode ser feito desde que se defina um valor para a receita. Por exemplo, ao supor a receita de R\$ 350,00 teríamos a expressão $2x + 3y = 350$. A análise da intersecção entre a representação gráfica das soluções dessa equação com o polígono de soluções viáveis nos mostra, conforme se observa na Figura 54, que para qualquer um dos pontos dessa intersecção as quantidades correspondentes de doces e salgados vendidos corresponde à receita de R\$ 350,00.

Figura 54. Uma representação dos pontos que satisfazem a equação da receita



Fonte: elaborado pelo autor

Ao desenvolver a representação dos pontos que satisfazem à equação da receita para outros valores de receita podemos propor uma nova questão.

Q_{4.4}. *O que há de comum entre as diferentes retas formadas pelos pontos que satisfazem à equação da receita, para diferentes valores de receita?*

A tarefa consiste nesse caso em realizar o estudo do coeficiente angular da reta formada pelos pontos que satisfazem a equação $2x + 3y = 350$. O estudo de diferentes retas, correspondentes à diferentes receitas, nos mostra que independentemente do valor da receita, as retas são sempre paralelas umas às outras. Isso pode ser comprovado algebricamente, ao verificar que o coeficiente angular de qualquer uma das retas é sempre igual à $-\frac{2}{3}$.

Q_{4.5}. *O que acontece com a equação da reta ao aumentarmos o valor da receita? E ao diminuirmos?*

O que se observa ao aumentarmos o valor da receita é que a reta se posiciona acima da anterior, e mais abaixo se diminuirmos o valor da receita. Nesse sentido, a questão que se coloca agora é quão grande pode ser o valor da receita de forma que ainda se observe alguma intersecção entre a reta que corresponde à equação da receita e o polígono das soluções viáveis. Isso nos encaminha à última questão, antes de respondermos à questão inicial **Q₀**, que se refere à determinação da quantidade de salgados e doces que contribui para a receita máxima.

O que se observa, ao aumentar gradativamente o valor da receita é que o último ponto em que ainda existe alguma intersecção entre a reta formada pelos pontos que satisfazer a equação da receita e o polígono das soluções viáveis é no ponto de intersecção entre as retas $x + y = 250$ e $x + 2y = 300$. A resolução desse sistema nos leva ao valor de x igual a 200 e y igual a 50, que em outros termos quer dizer que a receita máxima a ser obtida, de acordo com as restrições da situação é de $200 \times 2,00 + 50 \times 3,00 = 550,00$.

O Quadro 18 apresenta o resumo com a questão inicial Q_0 e das questões que se originaram a partir dela.

Quadro 18. Um mapa de questões para a determinação da receita máxima

Q ₀ . Qual o valor máximo que se pode arrecadar com a venda de doces e salgados?
Q ₁ . Qual é a quantidade estimada de venda de doces e de salgados?
Q _{1.1} . Como representar a máxima quantidade estimada da venda de doces e salgados?
Q _{1.2} . Como representar <i>graficamente</i> a máxima quantidade estimada da venda de doces e salgados?
Q _{1.2.1} . Podemos ligar os pontos por meio de uma linha reta?
Q _{1.2.2} . Além dos pontos que estão alinhados no gráfico, existem outros pontos, correspondentes à quantidade de doces e salgados, que atendam a quantidade máxima?
Q _{1.2.3} . É possível delimitar uma parte do plano que contenha apenas pontos que atendam à restrição dada?
Q ₂ . Quanto podemos gastar para comprar ou produzir os doces a serem vendidos?
Q _{2.1} . Qual é o custo de produção ou compra dos doces e salgados?
Q _{2.2} . Quantos doces e salgados podem ser colocados à venda?
Q _{2.3} . Como representar a quantidade máxima de doces e salgados que podem ser colocados à venda?
Q _{2.4} . Como representar <i>graficamente</i> a quantidade máxima de doces e salgados que podem ser colocados à venda?
Q ₃ . Qual é o preço de venda de cada um dos produtos?
Q ₄ . Que quantidade de doces e de salgados contribui para a máxima arrecadação?
Q _{4.1} . Como calcular a arrecadação (receita)?
Q _{4.2} . Como representar a receita partir de quantidades genéricas de doces e salgados por meio das variáveis x e y ?
Q _{4.3} . Como representar <i>graficamente</i> a receita partir de quantidades genéricas de doces e salgados por meio das variáveis x e y ?
Q _{4.4} . O que há de comum entre a representação gráfica da equação da receita para valores diferentes de receita?
Q _{4.5} . O que acontece com a equação da reta ao aumentarmos o valor da receita? E ao diminuirmos?

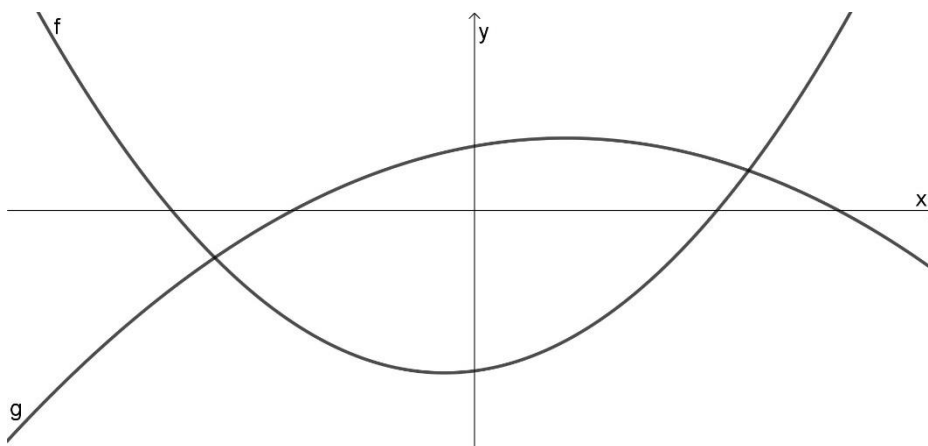
Fonte: elaborado pelo autor

6.2.3.2 Um possível estudo do sinal de uma função

Considere f a curva representativa da função $f(x)$ e g a curva representativa da função $g(x)$, conforme se observa na Figura 55.

Q0. Em qual(is) intervalo(s) de x a função $h(x) = f(x) + g(x) > 0$?

Figura 55. Curva representativa de $f(x)$ e de $g(x)$



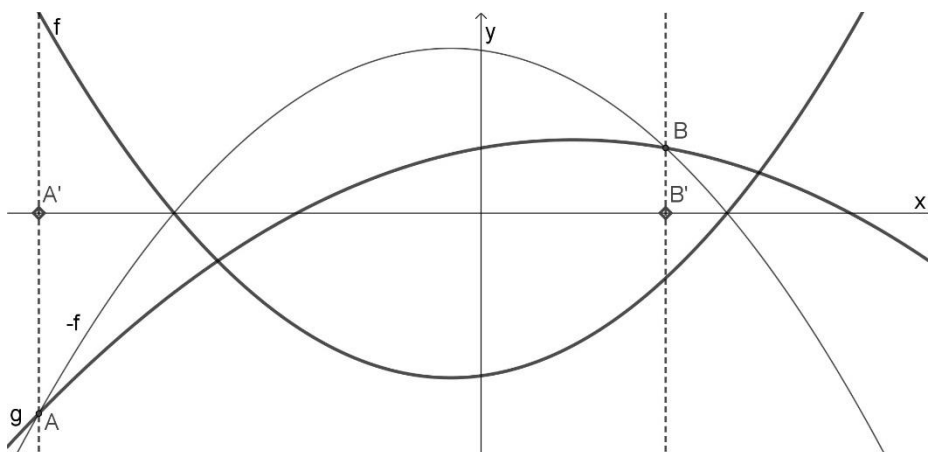
Fonte: elaborado pelo autor

Q1. Para quais valores de x temos $h(x) = 0$?

O valor de $h(x)$ será nulo quando os valores de $f(x)$ e $g(x)$, ao serem somados, se anularem. Encontrar os pontos em que $f(x)$ e $g(x)$ se anulam implica procurar por um valor de $x = a$, tal que $f(a) = -g(a)$ ou que $g(a) = -f(a)$.

Ao fazer a reflexão de f em relação ao eixo das abscissas, obtemos a curva $-f$, correspondente à representação da função $-f(x)$, que ao interseccionar a curva g determina os pontos A e B , com abscissas que chamamos respectivamente de A' e B' , ambas correspondentes à $h(x) = 0$, conforme representamos na Figura 56.

Figura 56. Curva representativa de $-f(x)$



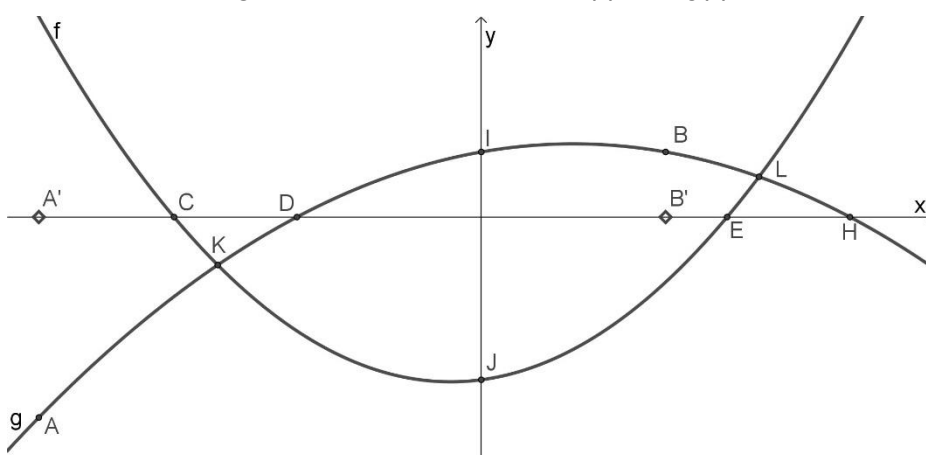
Fonte: elaborado pelo autor

Q2. Que outros pontos da representação podem ser destacados?

Independentemente da ausência de referências numéricas, a representação permite que se destaquem alguns pontos. Alguns podem oferecer um caminho para que se responda à questão inicial, outros não.

Entre os pontos notáveis, podemos destacar os que correspondem às intersecções das curvas f e g com o eixo das abscissas (que chamaremos respectivamente de C e E , e de D e H), às intersecções de f e g com o eixo das ordenadas (que chamaremos respectivamente de J e I), além das intersecções entre f e g (que chamaremos de K e L), conforme representado na Figura 57.

Figura 57. Pontos notáveis de $f(x)$ e de $g(x)$



Fonte: elaborado pelo autor

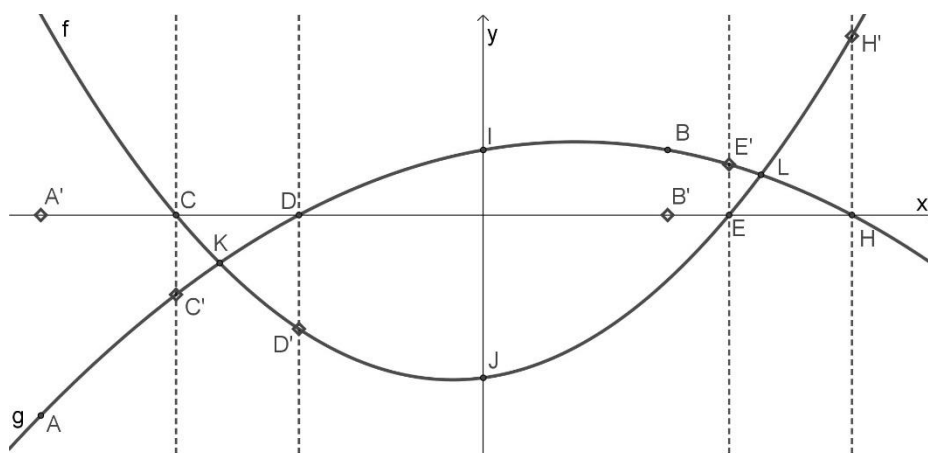
Q2.1. *Quais dos pontos marcados contribuem para o estudo do sinal de $h(x) = f(x) + g(x)$?*

Os pontos C e E correspondem aos valores de x para os quais a $f(x)$ é nula, da mesma forma que D e H em relação à $g(x)$.

A implicação disso é que a $h(x) = g(x)$ para os valores de x correspondentes aos pontos C e E , da mesma forma que $h(x) = f(x)$ para os valores de x correspondentes aos pontos D e H .

Ao traçarmos uma reta perpendicular ao eixo das abscissas, passando por C , sua intersecção com a curva g irá determinar o ponto C' , que pertence à representação da função h . De forma similar podemos encontrar E' em g , além de D' e H' em f , conforme representamos na Figura 58.

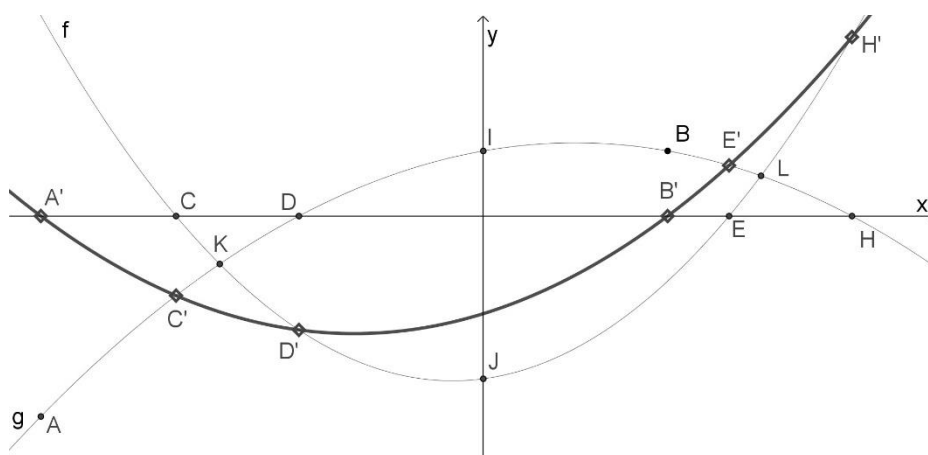
Os pontos I , J , K e L não oferecem auxílio ao estudo do sinal de $h(x)$.

Figura 58. Pontos para o estudo do sinal de $h(x)$ 

Fonte: elaborado pelo autor

Q_{2.2}. É possível fazer o estudo do sinal da função com base nos pontos encontrados?

De fato, os pontos A' , B' , C' , D' , E' e H' pertencem todos à curva representativa de $h(x)$. Ao fazer o esboço da curva correspondente é possível verificar que $h(x)$ tem sinal negativo no intervalo $]A', B'[,$ conforme representamos na Figura 59.

Figura 59. Curva representativa de $h(x)$ 

Fonte: elaborado pelo autor

Quadro 19 resume algumas das questões que podem surgir a partir da questão inicial **Q₀**, em relação ao estudo do sinal de uma função.

Quadro 19. Um mapa de questões para o estudo do sinal de uma função

Q₀. Em qual(is) intervalo(s) de x a função $h(x) = f(x) + g(x) > 0$?
Q₁. Para quais valores de x temos $h(x) = 0$?
Q₂. Que outros pontos da representação podem ser destacados?
Q_{2.1}. Quais dos pontos marcados contribuem para o estudo do sinal de $h(x) = f(x) + g(x)$?
Q_{2.2}. É possível fazer o estudo do sinal da função com base nos pontos encontrados?

Fonte: elaborado pelo autor

6.2.4 UM PERCURSO PARA O 2º ANO DO ENSINO MÉDIO

De acordo com a BNCC, a resolução algébrica de sistemas de equações polinomiais de 1º grau com duas incógnitas está entre as habilidades que devem ser desenvolvidas a partir do 8º ano do Ensino Fundamental. Mais tarde, no Ensino Médio, esses saberes serão retomados, por meio da resolução e discussão de sistemas de equações lineares até a 4ª ordem.

Ao considerar que o percurso para o estudo de inequações que estamos propondo se apoia em duas atividades de estudo e pesquisa que se desenvolvem por meio de resolução de sistemas lineares, acreditamos que seja adequado para alunos do 2º ano do Ensino Médio.

Como veremos ao inferir sobre as eventuais praxeologias que podem se desenvolver a partir desse tipo de situação, a utilização de um parâmetro e as considerações acerca das restrições de não negatividade, encontram apoio nas inequações, seja ao possibilitarem a solução exata (nos casos de grandezas discretas), seja ao possibilitarem a determinação de um campo de soluções viáveis (nos casos de grandezas contínuas). De acordo com a nossa análise, essas praxeologias apresentam características tanto do modelo M_1 , ao propor a comparação entre grandezas associadas com recurso à contagem e à medição, como do modelo M_5 , na busca por intervalos numéricos desconhecidos e na determinação de um campo de soluções viáveis.

6.2.4.1 O desafio do armazém

Nessa AEP, que chamamos de “O desafio do armazém”, é proposta uma situação que ao ser modelizada algebricamente resulta em um sistema com duas

equações e três incógnitas, que pode levar a um uma infinidade de soluções, caso não se levem em conta as restrições impostas aos possíveis valores das incógnitas, que estão implicitamente presentes no enunciado.

Suponhamos que um negociante trabalhe com as mercadorias A , B e C . Se vender cada unidade de A por R\$ 2,00, cada unidade de B por R\$ 3,00 e cada de C por R\$ 4,00, obtém uma receita de R\$ 50,00. No entanto, se vender cada unidade respectivamente por R\$ 2,00, R\$ 6,00 e R\$ 3,00 a receita será de R\$ 60,00.

Q₀. Qual é a quantidade de unidades que o comerciante possui de cada mercadoria?

Ao modelizar a situação, supondo que a seja a quantidade de mercadorias A , b a quantidade de mercadorias B e c a quantidade de mercadorias C , chegamos a um sistema de equações com duas equações e três incógnitas.

$$\begin{cases} 2a + 3b + 4c = 50 \\ 2a + 6b + 3c = 60 \end{cases}$$

Q₁. As grandezas são discretas ou contínuas?

Ao referir-se a quantidades de unidades, o enunciado indica que se tratam de grandezas discretas, estabelecendo assim um campo de soluções viáveis que não admite soluções não inteiras e tampouco negativas.

Por outro lado, uma mudança no enunciado poderia levar a discussão para outro caminho, ao considerar grandezas que podem ser tanto discretas como contínuas, como por exemplo ao supor que as mercadorias A , B e C sejam vendidas em medidas, e não em quantidades. Nesse caso, supondo por exemplo que a mercadoria A seja vendida por peso, teríamos valores inteiros e não inteiros de a , sendo mantida apenas a restrição de não negatividade.

Senso assim, vamos supor duas respostas ***R₁*** para a questão ***Q₁***. Em um primeiro momento, a resposta corresponderá à ***R_{1.1}***, supondo que as grandezas sejam contínuas e a seguir, ***R_{1.2}***, supondo que sejam discretas.

R_{1.1}. As grandezas são contínuas.

Ao recorrer ao sistema inicial e constatar que se trata de um sistema com três incógnitas e duas equações, é preciso verificar se possui infinitas soluções, ou nenhuma. Uma das estratégias a ser utilizada, nesse caso, consiste em utilizar um

parâmetro no lugar de uma das incógnitas, encontrando uma solução geral para o sistema, em função do parâmetro escolhido.

Sendo assim, podemos por exemplo, atribuir à incógnita c o parâmetro t , de tal forma que $c = t$.

Ao isolar a incógnita a na primeira equação, teríamos $a = \frac{50-3b-4t}{2}$.

Ao isolar a incógnita b na segunda equação, teríamos $b = \frac{60-2a-3t}{6}$.

Por fim, ao substituir o valor de a na equação que corresponde à b e vice-versa, teríamos a seguinte solução geral: $a = \frac{40-5t}{2}$, $b = \frac{10+t}{3}$ e $c = t$.

Entretanto, ao considerar a restrição de não negatividade, é possível propor uma outra questão, quanto ao intervalo das soluções viáveis.

Q2. *Quais os possíveis valores das incógnitas a , b e c , ao considerar que não podem ser valores negativos.*

Para responder a essa questão, nos apoiamos nas noções de desigualdade a fim de estabelecer um intervalo de possibilidades. Sendo assim, como $c \geq 0$, teremos consequentemente que $t \geq 0$.

Como $t \geq 0$, é preciso analisar que valores poderia assumir a incógnita a .

Vejamos que ao substituir qualquer valor de $t \geq 0$ na equação $b = \frac{10+t}{3}$, podemos observar que o mínimo valor que o lado direito da equação pode alcançar é igual à $\frac{10}{3} = 3,33 \dots$, ou seja, $b \geq 3,33$.

Para encontrar o limite superior do intervalo que corresponde aos possíveis valores de b , torna-se necessário encontrar uma equação em que o parâmetro $t = c$, ou que a incógnita a , ambos com restrição de não negatividade, sejam subtraídos do lado direito da equação, e não adicionados, como ocorreu no último caso com o parâmetro t .

Uma das estratégias que pode ser colocada em jogo nesse caso consiste em efetuar certas operações com as equações do sistema original a fim de eliminar algumas incógnitas.

Nesse sentido, os alunos poderiam, por exemplo, eliminar a incógnita c , ao multiplicar a primeira equação por 3, a segunda por 4, para depois subtrair a primeira equação da segunda.

$$\begin{cases} 3(2a + 3b + 4c) = 3(50) \\ 4(2a + 6b + 3c) = 4(60) \end{cases}$$

Essa operação resulta na equação $2a + 15b = 90$, que equivale a $b = \frac{90-2a}{15}$.

Ao considerar que a incógnita a não pode ter um valor negativo, se a tratarmos como um parâmetro, é possível verificar que o valor máximo que o lado direito da equação pode ter é igual à 6, ou seja, $b \leq 6$, delimitando assim os possíveis valores da incógnita como $3,33... \leq b \leq 6$.

Em busca dos valores possíveis da incógnita c , pode-se por exemplo, recorrer ao sistema original e subtrair a primeira equação da segunda, chegando à equação $3b - c = 10$, que é equivalente a $c = 3b - 10$. Considerando os valores possíveis de b , conclui-se que c deve ser um valor tal que $0 \leq c \leq 8$.

De forma similar, ao considerar os possíveis valores de a , é suficiente considerar os possíveis valores de $c = t$ na equação $a = \frac{40-5t}{2}$, concluindo assim que a deve ter um valor tal que $0 \leq a \leq 20$.

R1.2. As grandezas são discretas.

Nesse caso, a solução pode ser levada a cabo ao considerar os valores discretos pertencentes aos intervalos determinados nos passos anteriores. Como a incógnita b é a mais restritiva, talvez seja mais simples considerá-la, antes das demais.

Nesse sentido, como $3,33... \leq b \leq 6$, a quantidade de mercadoria do tipo B pode ser 4, 5 ou 6. Substituindo esses valores nas equações encontradas, teremos as três seguintes possibilidades:

$$b = 4, a = 15 \text{ e } c = 4$$

$$b = 5, a = 7,5 \text{ e } c = 5$$

$$b = 6, a = 0 \text{ e } c = 8$$

O enunciado parece fazer restrições quanto a solução nula para a quantidade de mercadorias, ao afirmar que o comerciante trabalha com as três mercadorias. Se tomarmos isso como certo, devemos descartar tanto a solução para $b = 6$, que leva a

uma quantidade nula de a , como a solução para $b = 5$, que leva a uma quantidade não inteira de a , restando então apenas a solução que corresponde a $b = 4$, $a = 15$ e $c = 4$.

O Quadro 20 resume algumas das perguntas que podem surgir no decorrer da atividade.

Quadro 20. Um mapa de questões para o desafio do armazém

Q₀. Qual é a quantidade de unidades que o comerciante possui de cada mercadoria?
Q₁. As grandezas são discretas ou contínuas?
Q₂. Quais os possíveis valores das incógnitas a , b e c , ao considerar que não podem ser valores negativos.

Fonte: elaborado pelo autor

6.2.4.2 A mistura dos vinhos

Um comerciante misturou dois vinhos de qualidades diferentes. Sabe-se que 1 litro do vinho de primeira qualidade e 1 litro do vinho de qualidade inferior valem juntos R\$ 8,00 e que m litros de primeira qualidade e $(2m - 5)$ litros do vinho de qualidade inferior valem R\$ 80,00.

Q₀. Qual é o preço de cada litro do vinho de primeira qualidade e de qualidade inferior?

Este é um problema literal de modelização algébrica. Representando o preço do vinho de primeira qualidade por x e o de segunda qualidade por y , podemos modelizar o problema pelo seguinte sistema de equações lineares, com duas incógnitas e duas equações, além de um parâmetro m , que corresponde à uma determinada quantidade de litros de vinho de primeira qualidade.

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ mx + (2m - 5)y = 80 \end{cases}$$

Caso o valor de m fosse conhecido o sistema não apresentaria maiores dificuldades, podendo ser resolvido por substituição de variáveis, por eliminação, ou ainda com recurso às técnicas de escalonamento, justificadas pela álgebra linear. Sendo assim, uma nova pergunta que pode ser feita é quanto aos valores que o parâmetro m pode assumir.

Q₁. Quais valores m pode assumir?

Com o objetivo de eliminar a incógnita x do sistema de equações, para criar um sistema equivalente que conte apenas com as incógnitas y e m , podemos multiplicar ambos os lados da primeira equação por m e depois subtrair a primeira equação da segunda. Após as eliminações e ajustes, ao isolar y em um dos lados da equação, teremos $y = \frac{80-8m}{m-5}$.

Ao considerar que y corresponde ao preço que se cobra por um litro de vinho de qualidade inferior, há que se levar em conta que não pode assumir um valor negativo e nem igual à zero, afinal de contas, não há sentido cobrar um preço negativo ou igual à zero por uma mercadoria.

Nesse sentido, é possível fazer uma nova estimativa dos possíveis valores de m , representada pela inequação-quociente $\frac{80-8m}{m-5} > 0$, que ao ser resolvida por uma das técnicas já discutidas, nos mostra que o valor de m está compreendido pelo intervalo aberto $]5,10[$.

De forma análoga, a fim de criar um sistema equivalente que conte apenas com a incógnita x e o parâmetro m , podem-se multiplicar ambos os termos da primeira equação por $(2m - 5)$ para depois subtrair a primeira equação da segunda. Após as eliminações e ajustes, ao isolar x do lado esquerdo da equação teremos $x = \frac{120-16m}{5-m}$.

Da mesma forma que ocorre com a incógnita y , a incógnita x também tem uma restrição implícita quanto ao valor nulo e a valores negativos, representada pela inequação quociente $\frac{120-16m}{5-m} > 0$, cuja resolução corresponde aos intervalos $m < 5$ ou $m \geq 7,5$.

Ao considerar o intervalo para os valores de m que havíamos obtido ao isolar a variável y , além desse último intervalo, obtido ao isolar a variável x , é possível observar a determinação de um novo intervalo para os valores de m , que corresponde a $7,5 < m < 10$.

Se formos considerar apenas valores inteiros de m , como o enunciado sugere, ao associá-lo à quantidade de litros vendidos por um preço x , então esse parâmetro pode assumir basicamente dois valores: $m = 8$ ou $m = 9$, sendo necessário verificar se ambas as respostas são possíveis.

Por outro lado, desde que sejam feitas mudanças no enunciado, a situação oferece a oportunidade para que discuta o valor de m inteiro ou contínuo. Sendo assim, a exemplo da AEP anterior, podemos perguntar se a incógnita m deve ser discreta, ou se pode ser contínua, obtendo um caminho para cada resposta.

Q₂. *A incógnita m corresponde a um valor discreto ou contínuo?*

R_{2.1}. *O valor da incógnita m é discreto.*

Como vimos, nesse caso m pode ser tanto igual à 8 como igual à 9.

Se considerarmos $m = 8$, o sistema modelizado originalmente, com duas equações e duas incógnitas será representado por $\begin{cases} x + y = 8 \\ 8x + 11y = 80 \end{cases}$, que ao ser resolvido nos mostra valores aproximados de $x = 2,67$ e $y = 5,33$.

Por outro lado, se considerarmos $m = 9$, o sistema será representado por $\begin{cases} x + y = 8 \\ 9x + 13y = 80 \end{cases}$, que ao ser resolvido nos dá os valores aproximados de $x = 6$ e $y = 2$.

Uma questão adicional pode ser colocada, no sentido de que se retome o problema original que está sendo modelizado e se avalie as respostas encontradas.

Q₃. *Os valores que foram encontrados das incógnitas x e y , nos casos em que $m = 8$ e $m = 9$ satisfazem plenamente o problema?*

Ao considerar que as incógnitas x e y correspondem respectivamente ao preço do vinho de primeira qualidade e ao preço do vinho de qualidade inferior, não parece razoável a solução que se encontra ao supor $m = 8$, ou seja, a que atribui um preço menor (R\$ 2,67) ao vinho de primeira qualidade e um preço maior (R\$ 5,33) ao vinho de qualidade inferior. Sendo assim, a única solução é a que se encontra ao supor $m = 9$, ou seja, a que corresponde ao preço de R\$ 6,00 por um litro de vinho de primeira qualidade e R\$ 2,00 por um litro de vinho de qualidade inferior.

Supondo, por outro lado, um enunciado que permitisse valores contínuos para o parâmetro m , poderíamos dar outra resposta à questão **Q₂** e traçar outro caminho em busca da solução.

R_{2.2}. *O valor de m é contínuo.*

Se considerarmos que m pode assumir valores discretos, tais que $7,5 < m < 10$, como a resposta **R2.2** sugere, teremos um valor de x e um valor de y para cada um dos valores arbitrários de m no intervalo considerado.

Por outro lado, nem todos os valores de m nesse intervalo correspondem a respostas que podem ser aceitas de acordo com o enunciado, como por exemplo ao supor que um vinho de primeira qualidade seja mais barato do que um vinho de qualidade inferior.

Nesse sentido, há que se considerar uma condição extra, em concordância com o enunciado do problema, em só aceitar soluções para valores de x maiores que os valores de y . Como $x = \frac{120-16m}{5-m}$ e $y = \frac{80-8m}{m-5}$, a condição de que $x > y$ pode ser representada pela inequação $\frac{120-16m}{5-m} > \frac{80-8m}{m-5}$, que após manipulações algébricas pode ser transformada na inequação quadrática equivalente $40m - 3m^2 - 125 < 0$.

Ao resolver essa última inequação, chegamos a dois intervalos: $m < 5$ e $m > \frac{25}{4}$, e finalmente ao considerar essa resolução com o intervalo de m previamente determinado, chegamos a um intervalo ainda mais restrito: $\frac{25}{3} \cong 8,33 < m < 10$.

Ao substituir os extremos do intervalo que corresponde à m , é possível determinar os intervalos de soluções viáveis de x e y . Isso nos mostra que o preço do vinho de primeira qualidade pode variar no intervalo aberto $]4,10[$ e que o preço do vinho de qualidade inferior pode variar no intervalo aberto $]0,4[$.

Algumas das questões que podem se apresentar na atividade a partir da questão inicial estão resumidas no Quadro 21.

Quadro 21. Um mapa de questões para a determinação do preço dos vinhos

Q0. Qual é o preço de cada litro do vinho de primeira qualidade e de qualidade inferior?
Q1. Quais valores m pode assumir?
Q2. A incógnita m corresponde a um valor discreto ou contínuo?
Q3. Os valores que foram encontrados das incógnitas x e y , nos casos em que $m = 8$ e $m = 9$ satisfazem plenamente o problema?

Fonte: elaborado pelo autor

A nosso ver, os percursos propostos para o ensino de inequações no Ensino Médio, além de mobilizarem conhecimentos já desenvolvidos nos ciclos de aprendizagem anteriores, relacionam-se à diversas habilidades previstas para o ciclo em questão, como aquelas associadas à aplicação de conceitos matemáticos no planejamento, execução e análise de decisões, na interpretação crítica de situações

por meio da análise de gráficos, na construção de modelos matemáticos na resolução de problemas em diversos contextos, na conversão de representações em diferentes registros, no estudo da relação entre variáveis numéricas, no estudo da relação entre números expressos em tabelas, na investigação de pontos de máximo e de mínimo e na utilização de transformações isométricas, entre outras.

Nesse sentido, embora nosso objetivo tenha sido o de apresentar percursos para o estudo de inequações, com as características de um modelo didático de referência que fosse capaz de abranger as aprendizagens de inequações previstas para a Educação Básica, entendemos que, de fato, os percursos têm condições de mobilizar conhecimentos não relacionados diretamente às inequações, mas de boa parte da matemática escolar que se estuda na Educação Básica.

Acreditamos, ao elencar as características do MDR e ao terminar a proposição dos PEPs para o ensino de inequações, tenhamos atingido o quinto e último de nossos objetivos específicos. Sendo assim, passamos a apresentar nossas considerações finais.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo de nossa pesquisa consistia em realizar estudos que nos permitissem compreender de que forma aspectos ligados às dimensões epistemológica, econômico-institucional e ecológica do problema didático associado às inequações podem contribuir com o desenvolvimento de um MDR que sirva de base para a criação de PEPs voltados ao ensino de inequações na Educação Básica.

Ao levar em conta a amplitude dos estudos necessários ao cumprimento desse objetivo geral, consideramos a necessidade de enumerar cinco objetivos específicos intermediários ao objetivo geral e direcionamos nossos esforços nesse sentido.

O primeiro dos objetivos específicos consistia em identificar os saberes e as razões que, em um dado tempo, tornaram respectivamente possível e necessário o desenvolvimento do conceito de inequação.

Atingimos esse primeiro objetivo por meio das considerações que podem ser feitas a partir do estudo epistemológico que desenvolvemos, ao investigar em distintas épocas históricas as questões e demandas que levaram à gênese e ao desenvolvimento dos saberes relativos às inequações.

Com base nesse estudo, podemos afirmar que as desigualdades se desenvolvem em um primeiro momento a partir de situações práticas, ligadas à necessidade de comparação entre grandezas por meio da contagem e da medição.

Em um segundo momento, diferentes demandas ligadas a questões internas da matemática, como aquelas relacionadas à demonstração de propriedades de figuras geométricas e de teoremas, no âmbito da geometria sintética, se apoiaram nas possibilidades permitidas pelas desigualdades, como observamos, por exemplo, nos trabalhos de Eudoxo, que supera a controversa discussão a respeito das grandezas incomensuráveis ao fundamentar sua teoria das proporções no conceito de desigualdade, lançando as sementes que tempos depois se manifestariam no trabalho de matemáticos como Dedekind e Weierstrass, ao formalizarem o conceito de número real, no Século XIX.

A busca por intervalos desconhecidos de valores, como a que se desenvolve pela busca de um valor aproximado para o número π , ou pelo valor aproximado da raiz quadrada irracional de alguns números, como $\sqrt{2}$, mostra uma diferente utilização

do conceito de desigualdade nos processos de comparação entre grandezas, não observada até então.

É preciso considerar, entretanto, que para efeitos práticos os babilônios tomavam o comprimento da circunferência igual à 3 vezes o diâmetro da circunferência e que utilizavam em seus cálculos o valor de $\frac{17}{12}$ como sendo correspondente ao comprimento da diagonal de um quadrado de lado unitário ($\sqrt{2}$). Sendo assim, nos parece que o esforço na obtenção de aproximações cada vez mais precisas desses números esteja muito mais ligado a questões internas da matemática do que demandado por necessidades práticas.

Por outro lado, observamos que a busca por intervalos desconhecidos de valores pode inserir-se em outros tipos de necessidade, como aquela que se refere à solução de uma desigualdade condicional, ou em outros termos, a procura por um intervalo de valores que torne uma desigualdade condicional verdadeira, como se observa nos processos de resolução de inequações.

Nesses termos, de acordo com o estudo que realizamos, o conceito de inequação desenvolve-se como consequência dos saberes associados às desigualdades, a partir da noção de intervalo numérico e desigualdade condicional, e que se torna necessário, inicialmente, em situações ligadas à justificativas tecnológicas na utilização de algoritmos e mais tarde, na determinação do campo de soluções viáveis ao tratar das restrições que se apresentam em problemas de otimização, como se observa por exemplo, na resolução de problemas de programação linear.

É necessário observar, no entanto, que em problemas de otimização as inequações não são usadas para que se encontre a solução, ou o valor ótimo. Isso é feito por outros meios, que podem tanto se apoiar em algoritmos como o *Simplex*, como em simulações feitas por meio de computadores. O que se nota, de fato, é que ao modelizar esses tipos de problema, a contribuição que se obtém com o recurso às inequações está associada à delimitação da área das soluções possíveis, à determinação do campo de soluções viáveis.

O segundo de nossos objetivos específicos relacionava-se à criação de um MER associado às inequações.

Ao apoiar-se na história da matemática em busca das questões que contribuíram para a gênese e desenvolvimento dos saberes associados às inequações conseguimos observar não apenas um, mas cinco distintos modos de interpretar os saberes que levaram em um primeiro momento ao desenvolvimento do conceito de desigualdade e depois ao conceito de inequação, ou em outros termos, cinco diferentes modelos epistemológicos específicos, que se compõem de diferentes tipos de tarefa e diferentes meios de resolver essas tarefas, que se apoiam por sua vez em diferentes justificativas tecnológico-teóricas.

Em um primeiro modelo específico, que chamamos de M_1 , e que parece ter se desenvolvido de forma simultânea à própria noção de grandeza, os tipos de tarefa caracterizam-se pela comparação entre grandezas por meio de técnicas associadas à medição e à contagem, apoiadas pela noção de medida e de proporcionalidade, pela noção de número e de forma, no âmbito da aritmética e da geometria.

No segundo modelo que identificamos, e que chamamos de M_2 , os tipos de tarefa relacionam-se, como no modelo anterior, à comparação entre grandezas, mas desta feita, de forma dissociada da noção de medida, como ocorre com as praxeologias que tem o aporte teórico da geometria sintética. Os tipos de tarefa relacionam-se à demonstração de teoremas da geometria sintética e de propriedades de figuras geométricas, levados à cabo por meio do encadeamento lógico de asserções que se refletem em construções geométricas, apoiadas de forma axiomática por definições, postulados proposições e noções comuns.

O terceiro modelo, que chamamos de M_3 , comporta tipos de tarefa relacionados à busca por intervalos numéricos correspondentes ao valor aproximado de números irracionais, como o que se observa por exemplo na tentativa de determinar um intervalo numérico que compreenda o número π , ou o valor correspondente à $\sqrt{2}$, por exemplo. Nesse modelo, as tarefas são desenvolvidas por meio de operações aritméticas, apoiadas pelas propriedades aritméticas dessas operações, no âmbito da aritmética e da geometria.

Em um quarto modelo, que chamamos de M_4 , observamos que os tipos de tarefa se resumem à demonstração de teoremas em diferentes áreas da matemática distintas da geometria. As técnicas de demonstração consistem no encadeamento lógico de proposições, por meio de tratamentos dentro do registro discursivo com o

uso da notação algébrica. Essas técnicas se apoiam em propriedades e teoremas de distintas áreas da matemática, como da álgebra, da análise numérica, do cálculo, da geometria analítica e da álgebra linear, entre outras.

No quinto e último modelo específico, que escolhemos chamar de M_5 , os tipos de tarefa relacionam-se à busca por intervalos desconhecidos de valores, entretanto, diferentemente do modelo M_3 , nesse modelo a busca se dá no sentido de encontrar intervalos numéricos que tornem verdadeiras desigualdades condicionais, ou em situações em que seja necessário determinar um campo de soluções viáveis, como ocorre em problemas de otimização. Nesse modelo as técnicas consistem basicamente na resolução de inequações, que se apoiam tanto nas propriedades das operações algébricas, no campo da álgebra, como nas propriedades da geometria analítica e da álgebra linear, entre outras.

Nesse sentido, o modelo epistemológico que desenvolvemos é composto de praxeologias que comportam tipos de tarefa, técnicas, tecnologias e teorias observadas nos cinco modelos específicos que identificamos.

O terceiro de nossos objetivos específicos consistia em identificar, por meio da análise das propostas curriculares oficiais, de manuais e de livros didáticos, o MED que orienta o estudo de inequações na Educação Básica e o MDD que subjaz a esse modelo epistemológico, avaliando seu alcance e seu limite quanto a possíveis articulações com outros ramos da matemática.

Apoiados pelas leituras que fizemos, constatamos, em concordância com uma das hipóteses que enunciamos na delimitação de nosso problema de pesquisa, que as razões de ser das inequações na Educação Básica resumem-se à resolução de inequações, como um fim em si mesmo, na busca por respostas à questões que já estão ultrapassadas, ou que já foram respondidas, ou que simplesmente não existem mais.

Verificamos, da mesma forma, que as inequações se apresentam como uma extensão dos saberes associados às equações no Ensino Fundamental e como uma extensão do estudo das funções no Ensino Médio, de uma forma fundamentalmente distinta da que observamos ao estudar a gênese do saber associado às desigualdades e inequações. Além disso, as praxeologias que se desenvolvem são

preponderantemente pontuais, com ênfase ao estudo de técnicas de resolução, dissociadas do bloco tecnológico-teórico.

No quarto de nossos objetivos específicos buscamos identificar que condições e restrições regulam as praxeologias para o estudo de inequações na Educação Básica. Ao notar a falta de referências ao estudo de inequações nos principais parâmetros nacionais para a educação, tanto nos PCN quanto na BNCC, constatamos que em nível nacional e em boa parte dos estados, o estudo de desigualdades e inequações parece ser relegado a um segundo plano. A nosso ver esse posicionamento dos órgãos governamentais conflita com que se estabelece nas diretrizes das próprias orientações curriculares, no sentido de contribuir com o letramento matemático dos alunos, fundamental à compreensão do mundo e de seu papel na sociedade.

Ao atingir o quinto e último de nossos objetivos, que consistia na criação de um MDR capaz de sustentar o desenvolvimento de PEPs para o ensino de desigualdades e inequações na Educação Básica, conseguimos por fim, responder a nossa questão de pesquisa, a respeito de quais são as contribuições que podem advir dos estudos que desenvolvemos, ao defender e propor que:

- Os saberes relativos às desigualdades e inequações devem desenvolver-se como respostas a questões que precisam ser respondidas, afastando-se do paradigma monumentalista.
- Em concordância com os processos que se observam na gênese do saber associado às desigualdades, as praxeologias que se desenvolvem em um primeiro contato com esse saber devem prever tarefas de comparação entre grandezas que sejam levadas à cabo por técnicas que se apoiem tanto na contagem como na medição.
- As noções de intervalo numérico e de valor aproximado devem antecipar-se ao estudo das inequações.
- A crença de que técnicas utilizadas na resolução de equações sejam sempre eficazes para a resolução de inequações parece estar na raiz de grande parte dos problemas associados à falta de compreensão a respeito das inequações.

- O tratamento algébrico não é sempre eficiente para a resolução de inequações. Em alguns casos, técnicas que se apoiam na geometria analítica, na álgebra linear e na própria geometria, entre outras, podem tanto apresentar-se como um caminho didaticamente mais econômico como trazer mais sentido ao estudo de algumas situações.

Ao finalizar, apesar de acreditar que tenhamos de alguma forma contribuído com a área de pesquisa em Educação Matemática e de forma mais particular com as pesquisas, que como a nossa, se inserem nas discussões relacionadas ao ensino e à aprendizagem de matemática, observamos que há vários pontos e questões que a nosso ver merecem aprofundamentos que não foram contemplados nesse trabalho.

Conforme apontamos no estudo ecológico, em concordância com diversos pesquisadores, a formação de professores parece representar um ponto chave para a compreensão de boa parte dos problemas que se relacionam à aprendizagem de matemática. Professores com formação deficitária formam alunos, que eventualmente irão tornar-se professores, com formação igualmente deficitária, em um círculo vicioso que parece não ter fim.

Nesse sentido, ao voltar os olhos em direção ao ensino e à aprendizagem de inequações, parece-nos relevante pensar em pesquisas que se preocupem em investigar qual deve ser a base de conhecimentos necessária para o ensino desse tema, ou ainda, em pesquisas que se dediquem a investigar quais são as concepções que professores da Educação Básica têm a respeito de desigualdades e inequações. A nosso ver esse é um campo ainda não explorado e que merece ser estudado.

Um outro ponto, também não contemplado nessa pesquisa, refere-se à experimentação e validação dos PEPs propostos. Conforme apontamos ao longo de desse texto, as AEPs que compõem esses PEPs resumem-se em propostas, fundamentadas por um MER provisório, que preferimos definir como “em evolução”, mas que, no entanto, não foram colocadas à prova.

Com exceção das questões geratrizes Q_0 , todas as outras que foram apresentadas são supostas questões que podem surgir durante o desenvolvimento da atividade, mas que de fato, podem também não surgir. A experimentação em situações reais pode permitir essa verificação, além de contribuir com outras

questões, inicialmente não previstas, mas que podem levar a atividade por outros caminhos, conduzindo os alunos a outras aprendizagens.

Sendo assim, acreditamos que uma futura experimentação pode resultar na evolução do MER, tanto ao sublinhar pontos que favorecem a aprendizagem como para destacar outros, que apesar da nossa convicção, não foram capazes de gerar praxeologias além das pontuais.

Um último ponto, não contemplado nesse trabalho, mas que pode ser avaliado e eventualmente implementado em futuras pesquisas relacionadas ao tema, refere-se ao desenvolvimento de AEPs que de alguma forma reúnam características do modelo que chamamos de M_3 , cujas tarefas consistem na busca por intervalos numéricos correspondentes ao valor aproximado de números irracionais, desenvolvidas por meio de operações aritméticas.

Embora tenhamos observado esses tipos de tarefa na gênese e no desenvolvimento das desigualdades, como nos referimos no capítulo que dedicamos ao estudo epistemológico, esse parece ser um dos casos em que as razões de ser tenham deixado de existir com o tempo, pois não conseguimos vislumbrar atividades que reunissem características desse modelo sem esbarrar no paradigma monumentalista. De um modo diferente de nossos antepassados, pelo menos em nível escolar, não parece fazer sentido nos dias atuais a utilização de algoritmos para o cálculo de valores aproximados de raízes quadradas, ou de aproximações de π além da segunda ou terceira casa decimal.

REFERÊNCIAS

ABREU, A. F. **Apontamentos de Geometria**. Rio de Janeiro: Grande Livraria Leite Ribeiro, 1921.

ALAGOAS (Estado). Secretaria de Estado da Educação e do Esporte. **Referencial Curricular da Educação Básica da Rede Estadual de Ensino do Estado de Alagoas**. Maceió, 2014.

ALVARENGA, K. B. **O que dizem as pesquisas sobre o ensino e a aprendizagem de inequações**. 2013. Tese (Doutorado em Educação Matemática). PUC/SP, São Paulo, 2013.

AMAPÁ (Estado). Secretaria de Estado da Educação. **Plano Curricular da Educação Básica do Estado do Amapá**. Macapá, 2009.

ARÉVALO, B. ROJAS, T. Un estudio de las inecuaciones lineales desde el Espacio de Trabajo Matemático. *In: Jornadas Nacionales de Educación Matemática*, XIX, 2015, Villarrica, SOCHIM, p. 254-261, 2015.

ASSUDE, T. De l'usage de "techniques faibles" et "techniques fortes" dans l'organisation du curriculum. *In : Actes des Séminaires SFIDA IX*, p.IX9-IX14, Nice, 1997.

BAGNI, G. T. Inequalities and equations: History and Didactics. *In : Anais do CERME 4*, p. 652-661, Sant Feliu de Guíxols, 2005

BARACHET, F.; DEMICHEL, Y.; NOIRFALISE, R. **Activités d'étude et de recherche (ERA) pour dynamiser l'étude de la géométrie dans l'espace en classe de seconde**. Petit x, Grenoble, n. 75, p. 34-49, 2007.

BARQUERO, B. **Ecología de la Modelización Matemática en la enseñanza universitaria de las Matemáticas**. 2009. Tese (Doutorado). Universitat Autònoma de Barcelona, Barcelona, 2009.

BARQUERO, B., BOSCH, M. y GASCÓN, J. (2014). Incidencia del "aplicacionismo" en la integración de la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las ciencias experimentales. **Enseñanza de las Ciencias**, 32 (1), p. 83-100, Barcelona: 2014.

BECKENBACH, E.; BELLMAN, R. **An introduction to Inequalities**. 1. ed. New York: Random House, 1961a.

BECKENBACH, E.; BELLMAN, R. **Inequalities**. Berlin: Springer-Verlag, 1961b.

BÉZOUT, E. **Elementos de arithmetica**. Coimbra: Real Officina da Universidade, 1784.

BOERO, P.; BAZZINI, L. Inequalities in mathematics education: the need for complementary perspectives. *In: Proceedings of PME-XXVIII*, p. 139-143, Mérida, 2004.

BOERO, P. Inéquations: aspects didactiques, épistémologiques et cognitifs. *In: Actes des Séminaires SFIDA X*, p. X3-X7, Genova, 1998.

BORELLO, M. **Relación entre las concepciones del maestro y el caso de los alumnos en el caso de las desigualdades. Un estado del arte.**2013. Dissertação (Mestrado). Instituto Politécnico Nacional, México, 2007.

BOSCH, M.; GASCÓN, J. Fundamentación antropológica de las organizaciones didácticas: de los "talleres de prácticas matemáticas" a los "recorridos de estudio e investigación". *In: BRONNER, A.; et al. (Ed.). Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action.* Montpellier: Université de Montpellier, 2010. p. 55-91.

_____. Introduction to the Anthropological Theory of the Didactic (ATD). *In: BIKNER-AHSBAHS, A.; PREDIGER, S. (Eds.) Networking of Theories as a Research Practice in Mathematics Education.* Switzerland: Springer, 2014, p.67-83.

BOYER, C. B. ; MERZBACH, U. C. **History of mathematics.** 2. ed. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1991.

BRASIL. Decreto nº 21.241, de 4 de abril de 1932. Consolida as disposições sobre a organização do ensino secundário e deliberou outras providências. **Diário Oficial [da] República Federativa do Brasil**, Poder Executivo, Rio de Janeiro, RJ, 19 abr. 1932.

_____. Lei nº 4.024, de 20 de dezembro de 1961. Fixa as Diretrizes e Bases da Educação Nacional. **Diário Oficial [da] República Federativa do Brasil**, Poder Executivo, Brasília, DF, 27 dez. 1961. Seção 1, p. 11429.

_____. Lei nº 5.692. Brasília, de 11 de agosto de 1971. Fixa Diretrizes e Bases para o ensino de 1º e 2º graus, e dá outras providências. **Diário Oficial [da] República Federativa do Brasil**, Poder Executivo, Brasília, DF, 12 ago. 1971. Seção 1, p. 6377.

_____. Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. **Diário Oficial [da] República Federativa do Brasil**, Poder Executivo, Brasília, DF, 23 dez. 1996. Seção 1, p. 27833.

_____. **Parâmetros Curriculares Nacionais. Ensino Fundamental: terceiro e quarto ciclos**, Brasília: MEC/SE, 1998.

_____. **Parâmetros Curriculares Nacionais. Ensino Médio**, Brasília: MEC/SE, 1999.

_____. **PCNs + Ensino Médio: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais**, Brasília: MEC/SE, 2002a. 144 p.

_____. CNE. Parecer CNE/CES 1.302/2001. Diretrizes curriculares nacionais para os cursos de matemática, bacharelado e licenciatura. **Diário Oficial da União**, Brasília, 05 mar. 2002b, Seção 1, p. 15.

_____. CNE. Resolução nº 02/2015 de 1º de julho de 2015. Define as Diretrizes Curriculares Nacionais para a formação inicial em nível superior e para a formação continuada. **Diário Oficial [da] República Federativa do Brasil**, Brasília, DF, 02 jul. 2015. Seção 1, p. 8-12.

_____. **Base Nacional Comum Curricular – BNCC**. Brasília: MEC, 2018.

BROUSSEAU, Guy. **Theory of didactical situations in mathematics**: didactique des mathematiques, 1970-1990. Traduction: Nicolas Balacheff. Dordrecht: Kluwer Academic, 1997.

CAMPOS, F. *In*: BRASIL. **Ministério da Educação e Saúde Pública**. Organização do Ensino Secundário. Porto Alegre: Livraria Globo, 1933. p. 5-10.

CARVALHO, T. M. **Matemática**. Primeira série. Clássico e Científico. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1943.

CAUCHY, A. L. **Cours d'analyse de l'École Royale Polytechnique**. I^{re} partie. Analyse algébrique. Paris, 1821.

CEARÁ (Estado). SEDUC. **Coleção Escola Aprendente: matrizes curriculares para o ensino médio**. Fortaleza, 2009. 1 v.

CHEVALLARD, Y.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. **Estudiar matemáticas**: el eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje. Barcelona: Editorial Trillas, 1997.

CHEVALLARD, Y. **Pourquoi la transposition didactique?** Communication au Séminaire de didactique et de pédagogie des mathématiques, p.1981-1982, 1982.

_____. **La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado**. Aique, Buenos Aires, 1997.

_____. L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 19/2, p. 221-266, 1999.

_____. Aspectos problemáticos de la formación docente. Conferencia impartida en las XVI Jornadas del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas, Huesca, España, 2001.

_____. Steps towards a new epistemology in mathematics education. *In*: M. Bosch (Ed.), **Proceedings of the IV Congress of the European Society for Research in Mathematics Education**, p. 21–30, Barcelona, 2006.

_____. Le développement actuel de la TAD: pistes et jalons. *In*: **Ile Congrès International sur la Théorie Anthropologique du Didactique**. Uzès, 2007.

_____. Enseñar Matemáticas en la Sociedad de Mañana: Alegato a Favor de un Contraparadigma Emergente. **Journal of Research in Mathematics Education**, v. 2, n. 2, p. 161-182, 2013.

COURANT, R.; ROBBINS, H. **What is mathematics? An elementary approach to ideas and methods**. 2. ed. New York: Oxford University Press, 1996.

COSTA, R. F.; CALLIOLI, R. A.; CAROLI, A. **Matemática para Ginásio Moderno**. São Paulo: Companhia Editora Nacional, v.2, 1971.

DANTE, L. R. **Matemática: contexto e aplicações**. v. 1, 15. ed. São Paulo: Ática, 2011.

_____. **Teláris matemática, 9º ano: ensino fundamental**. 3. ed. São Paulo: Ática, 2018.

DE SOUZA, V. H. G. **O uso de vários registros na resolução de inequações: uma abordagem funcional gráfica**. 2007. Tese (Doutorado em Educação Matemática). PUC/SP, São Paulo, 2007.

DOUADY, R. **Jeux de cadres et dialectiques outil-objet dans l'enseignement des Mathématiques** - une réalisation dans tout le cursus primaire. 1984. These de Doctorat d'Etat. Université Paris VII, Paris, 1984.

DISTRITO FEDERAL (Estado). SEE. **Currículo em Movimento da Educação Básica: ensino médio**. Brasília, 2018.

ESPÍRITO SANTO (Estado). SEDU. **Currículo Básico Escola Estadual: ensino médio (área de ciências da natureza)**. Vitória , 2009. 2 v.

EUCLIDES. **Elements of Geometry**. Translation: Richard Fitzpatrick. Lulu Press, 2007.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Campinas: Unicamp, 2004.

FINK, A. M. An essay on the history of inequalities. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, v.1, p.118–134, 2000.

FONSECA, C. **Discontinuidades Matemáticas y Didácticas entre la Secundaria y la Universidad**. 2004. Tese (Doutorado). Universidad de Vigo. Vigo, 2004.

FORGRAD. Fórum de Pró-Reitores de Graduação das Universidades Brasileiras.1999.

FOWLER, D.; ROBSON, E. Square Root Approximations in Old Babylonian Mathematics: YBC 7289 in context. **Historia Mathematica**, v. 14, n. 14, p. 366-378, 1998.

FREIRE, O. **Noções de Geometria Prática**. 38. ed. Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves, 1937.

GASCÓN, J. Fenómenos y problemas en didáctica de las matemáticas. *In: Actas del III Simposio de la SEIEM*, p. 129-150, Valladolid. 1999.

_____. Las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico. El caso del álgebra elemental. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, v. 14, n. 2, p. 203 – 231, 2011.

GOIÁS (Estado). Secretaria de Estado da Educação. **Currículo Referência da Rede Estadual de Educação de Goiás**. Goiânia, 2012.

GUERRA, M. F. O. **A licenciatura em matemática nos Institutos Federais do Estado de Minas Gerais**. 2013. (Doutorado em Educação Matemática). Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2013.

HARDY, G.H.; LITTLEWOOD, J.E.; POLYA, G. **Inequalities**. Cambridge: Cambridge University Press, 1934.

HARRIOT, T. **Artis analyticae praxis**. London. 1631.

HEATH, T. L. **Diophantus of Alexandria**. A Study in the History of Greek Algebra. London, Cambridge University Press, 1910.

HOUAISS, A. **Dicionário eletrônico Houaiss da língua portuguesa**. Rio de Janeiro: Objetiva. Versão 1.0. 1 [CD-ROM]. 2001.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; DEGENSZAJN, D.; PÉRIGO, R. ALMEIDA, NILZE DE. **Matemática: ciência e aplicações**. v. 1, 8. ed. São Paulo: Atual, 2014.

IMENES, L. M. P.; LELLIS, M. **Microdicionário de Matemática**. São Paulo: Scipione, 1999.

KLINE, M. **Mathematical Thought from Ancient to Modern Time**. New York: Oxford University Press, 1972. 1 v.

KOROVKIN, P. P. **Inequalities**. Moskow, Mir Publishers, 1975.

KOTHARI, C.R. **Research Methodology. Methods and Techniques**. New Delhi, New Age International (P) Ltd., Publishers, 2004.

LACROIX, S. F. **Éléments de Géometrie a l'usage de l'École Centrale des Quatre Nations**. 7. ed. Paris: Coucier, 1808.

_____. **Elements of Algebra**. 14. ed. Calcutta: Baptist Mission Press, 1838.

LEWIS, C.I. **A survey of symbolic logic**. Berkeley: University of California Press, 1918.

LIMA, G. L.; SILVA, M. J. F. Conhecimentos docentes para o ensino de geometria em um curso de licenciatura em matemática. **VIDYA**, Santa Maria, v. 35, n. 2, p. 159-177, 2015.

LUCAS, C. O. **Una posible “razón de ser” del cálculo diferencial elemental en el ámbito de la modelización funcional**. 2015. Tese (Doutorado). Universidad de Vigo.Vigo, 2015.

LÜDKE, M.; ANDRE, M. E. D. A. **Pesquisa em educação: abordagens qualitativas**. 2. ed. Rio de Janeiro: E.P.U., 2013.

MAEDER, A. M. **Curso de Matemática**. São Paulo: Melhoramentos, 1946. 1 v.

MANRIQUE, A. L. Licenciatura em matemática: formação para a docência x formação específica. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v.11, n.3, p .515-534, 2009.

MARANHÃO (Estado). Secretaria de Educação. **Diretrizes Curriculares**. 3. ed. São Luís, 2014.

MATO GROSSO DO SUL (Estado). Secretaria de Educação. **Referencial Curricular da Rede Estadual de Ensino de Mato Grosso do Sul**. Ensino Fundamental. Campo Grande, 2012.

MATO GROSSO DO SUL (Estado). Secretaria de Educação. **Referencial Curricular da Rede Estadual de Ensino de Mato Grosso do Sul**. Ensino Médio. Campo Grande, 2012.

MIGUEL, A. ; MIORIM, M. A. **História na educação matemática**. Propostas e desafios. Belo Horizonte: Autêntica, 2019.

MINAS GERAIS (Estado). Secretaria de Educação. **Currículo Referência de Minas Gerais**. Belo Horizonte, 2018.

MITRINOVIC, D. S. **Analytic Inequalities**. Berlin: Springer-Verlag,1970.

NEWTON, I. **Arithmetica Universalis**: sive de compositione et resolutione arithmetica, v.1. Amsterdam: 1761.

PALMA FILHO, J. C. (Org.). **Pedagogia Cidadã**. Cadernos de Formação. História da Educação. 3. ed. São Paulo: PROGRAD/UNESP, Santa Clara Editora, 2005.

PARAÍBA (Estado). Secretaria de Educação e Cultura. **Referenciais Curriculares do Ensino**. João Pessoa, 2010.

PARANÁ (Estado). Secretaria de Educação. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica**. Matemática. Curitiba, 2008.

PERNAMBUCO (Estado). Secretaria da Educação. **Parâmetros para a Educação Básica do Estado de Pernambuco**. Recife, 2012.

PIAUÍ (Estado). SEDUC. **Diretrizes Curriculares da Rede Pública Estadual de Ensino do Piauí**. Teresina, 2013.

QUINTELLA, A. **Matemática para a segunda série ginasial**. 87. ed. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1965.

RIO DE JANEIRO (Estado). Secretaria de Estado da Educação. **Currículo Mínimo**. Rio de Janeiro, 2012.

RIO GRANDE DO NORTE (Estado). Secretaria de Estado da Educação e da Cultura. **Ensino Médio. Estrutura Curricular**. Natal, 2017.

RIO GRANDE DO NORTE (Estado). Secretaria de Estado da Educação e da Cultura. **Ensino Fundamental. Estrutura Curricular**. Natal, 2017.

RIO GRANDE DO SUL (Estado). Secretaria de Educação. **Reestruturação Curricular. Ensino Fundamental e Médio**. Documento Orientador. Porto Alegre, 2016.

RONDÔNIA (Estado). Secretaria de Estado da Educação. **Ensino Fundamental**. Referencial Curricular de Rondônia. Porto Velho, 2013.

RONDÔNIA (Estado). Secretaria de Estado da Educação. **Ensino Médio**. Referencial Curricular de Rondônia. Porto Velho, 2013.

ROQUE, T. **História da Matemática: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

RORAIMA (Estado). Secretaria de Estado da Educação e Desportos. **Referencial Curricular do Ensino Médio**. Matemática. Boa Vista, 2012.

ROXO, E.; CUNHA, H. L.; PEIXOTO, R.; NETTO, C. D. **Matemática – 2º ciclo**. 2. ed. Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves, 1944.

SANGIORGI, O. **Matemática para a segunda série ginasial**. 106. ed. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1963.

SANTA CATARINA (Estado). Secretaria de Estado da Educação. **Proposta Curricular do Estado de Santa Catarina**. Florianópolis, 2014.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria de Educação. **Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas tecnologias**. São Paulo, 2012.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria de Educação. **Caderno do Aluno: 3ª série do Ensino Médio**. São Paulo, 2014.

SELTMAN, M.; GOULDING, R. **Thomas Harriot's Artis Analyticae Praxis: An English translation with commentary**. New York: Springer, 2007.

SERGIPE (Estado). Secretaria de Estado da Educação. **Referencial Curricular**. Rede Estadual de Ensino de Sergipe. Aracaju, 2011.

THIRÉ, C. **Manual de Matemática**. 4. ed. Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves, 1947. 4 v.

TOCANTINS (Estado). Secretaria de Estado da Educação e Cultura. **Referencial Curricular do Ensino Fundamental das escolas públicas do Estado do Tocantins: Ensino Fundamental do 1º ao 9º ano**. Palmas, 2008.

TOCANTINS (Estado). Secretaria de Estado da Educação e Cultura. **Proposta Curricular Ensino Médio**. Palmas, 2010.

TSAMIR, P.; BAZZINI, L. Can $x=3$ be the solution of an inequality? A study of Italian and Israeli students. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v.3, n.1, p. 57-67, 2001.

VALENTE, W. R. **Uma história da matemática escolar no Brasil, 1730-1930**. 2. ed. São Paulo: Annablume/Fapesp, 2002.

VALENTE, W. R. Osvaldo Sangiorgi e o Movimento da Matemática Moderna no Brasil. In: **Revista Diálogo Educacional**, v. 8, n. 25, p. 583-613, 2008.

VILLANI, M. K. **Um estudo das atuais diretrizes para os cursos de licenciatura em Matemática, sob a perspectiva de sua aderência aos projetos curriculares de Matemática para a Educação Básica brasileira**. 2009. Dissertação (Mestrado). Universidade Bandeirante de São Paulo. São Paulo, 2009.

VOGEL, K. **Neun Bücher Arithmetischer Technik**. Ein chinesisches Rechenbuch für den praktischen Gebrauch aus der frühen Hanzeit. Springer Fachrnedien, Wiesbaden, 1968.