PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO

PUC/SP

ANA CAROLINA SERRATA MALFITANO

Conversão de registros mobilizados por alunos de sexto ano em sequência para o ensino de operações com fracionários

ESPECIALIZAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

SÃO PAULO
2011

ANA CAROLINA SERRATA MALFITANO

Conversão de registros mobilizados por alunos de sexto ano em sequência para o ensino de operações com fracionários

Monografia apresentada a Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de **ESPECIALISTA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA,** sob orientação da **Professora Doutora Maria José Ferreira da Silva.**

PUC-SP
2011

BANCA EXAMINADORA

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Há uma preocupação maior hoje em dia com a disciplina de matemática nos diversos âmbitos escolares, devido à grande dificuldade dos alunos em conseguir êxito nesta disciplina nos sistemas externos de avaliações.

Segundo resultados de avaliações oficiais, tais como, Sistema de Avaliação e Rendimento Escolar do Estado de São Paulo, SARESP (SÃO PAULO, 2009) evidencia-se uma média de quarenta por cento dos alunos do sétimo ano da rede estadual estar no nível abaixo do básico para a disciplina de matemática. Se analisarmos especificamente o conteúdo dos números fracionários identificaremos que o insucesso dos alunos é freqüente e com alto índice de erros.

Constatamos no relatório do SARESP (SÃO PAULO, 2009) alguns exemplos de questões que abordam o conteúdo dos números fracionários. Analisando as mesmas, identificamos que foi avaliado se os alunos tinham compreensão de representação de medidas não inteiras utilizando números fracionários e cálculos envolvendo adição, subtração de frações. Houve alto índice de erros nos conteúdos avaliados, de modo que esta avaliação nos mostra que há pouca compreensão deste conteúdo pelo aluno.

Em geral este conteúdo é marcado pela ausência de entendimento e consequentemente de significado, simplesmente “passando” na vida escolar dos alunos. Um dos fatores que possivelmente geram a falta de significação deste conteúdo é o recurso metodológico-didático escolhido pelo professor para o desenvolvimento do trabalho deste conteúdo em sala de aula.

Desta forma, cabe ao professor, buscar alternativas que trabalhem com este conteúdo de outra forma do que o aluno esteja acostumado, pois sabemos que a abordagem que tem sido realizada em sala de aula não está gerando resultados significativos, como o próprio SARESP constata a cada ano.

Buscamos então, com este trabalho, analisar os registros de representação da aplicação de uma sequencia de um grupo de alunos do sexto ano para compreender como os alunos mobilizam os conhecimentos que possuem e como compreendem tais conteúdos.

Este trabalho foi dividido em três capítulos. O capítulo 1 apresenta a problemática: a revisão bibliográfica, o quadro teórico, a justificativa do trabalho desenvolvido, a delimitação do problema, a metodologia e os procedimentos utilizados na pesquisa. No capítulo 2 são realizados estudos preliminares do objeto matemático, além dos Números Fracionários pelo PCN. E o capítulo 3 apresenta todo o dispositivo experimental: a análise da sequência didática proposta para as operações de multiplicação e divisão dos números fracionários, as questões envolvidas na aplicação da pesquisa, além dos sujeitos e descrição da aplicação da sequência.

1 PROBLEMÁTICA

Neste capítulo apresentamos a revisão bibliográfica, o quadro teórico bem como a justificativa do trabalho desenvolvido, pois juntos definem a delimitação do problema que buscamos estudar. Apresentamos também, a metodologia e os procedimentos utilizados na pesquisa.

1.1 Revisão bibliográfica

O ensino dos números fracionários tem sido foco de estudo de inúmeros pesquisadores devido a grande dificuldade que muitos profissionais da educação encontram ao tratar esse conteúdo com os alunos.

Bezerra (2001) realizou uma investigação sobre os números fracionários com alunos da 3ª série do Ensino Fundamental em uma escola pública. Buscou uma abordagem que trabalhasse com situações-problema e que permitisse ao aluno atribuir significado ao conceito trabalhado.

Objetivou que os alunos compreendessem o conceito do número fracionário, bem como a relação entre a sua representação e o número, através de situações-problema desafiadoras e reflexivas para que o aluno adquirisse uma autonomia intelectual.

Para elaboração das situações-problema Bezerra (2001) partiu da divisão dos números naturais e problematizou um tipo de representação para o resto da divisão desses, o que consequentemente facilita a compreensão dos números fracionários e sua representação.

Fundamentou sua pesquisa em pressupostos sócio-construtivistas, focando-se nos autores Nunes e Bryant (1997 apud BEZERRA, 2001), os quais defendem uma aprendizagem matemática vinculada às questões sociais, ultrapassando as questões meramente cognitivas e fundamentou-se em Vergnaud (1990 apud BEZERRA, 2001) que acredita que um trabalho de sala de aula baseado em situações-problema possibilita a ampliação do campo conceitual multiplicativo, o qual se faz presente os números fracionários.

Bezerra (2001) trabalhou com dois grupos, um chamado de Grupo Experimental e outro chamado de Grupo de Controle. Foram aplicados pré-teste e pós-teste nos dois grupos.

No Grupo Experimental houve o desenvolvimento de um trabalho com o pesquisador o qual aplicou uma sequência didática, totalizando doze encontros. Nesses, a professora da sala atuou como observadora. Já o Grupo de Controle não obteve nenhum contato com o tema.

Concluiu-se que o Grupo Experimental apresentou um desempenho satisfatório, pois os alunos desenvolveram habilidades que não possuíam anteriormente, além de realizar estratégias inovadoras possibilitadas pelo trabalho da evolução histórica do conhecimento matemático que foi proposto. Em contrapartida o Grupo de Controle não alterou seu desempenho do início ao fim do trabalho.

Outra pesquisadora que investigou os números fracionários com alunos do ensino fundamental foi Merlini (2005).

Esta, fez uma pesquisa com alunos da 5ª e 6ª série, objetivando identificar qual competência os alunos possuem para resolver questões que abordam o conceito de fração, envolvendo os diferentes significados do mesmo, tais como: número, parte-todo, quociente, medida e operador multiplicativo.

Os referenciais teóricos orientadores desta pesquisa são: Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1990 apud MERLINI, 2005) e Nunes et al. (2003 apud MERLINI, 2005).

A pesquisa constou de dois momentos. Em um primeiro os alunos responderam a um questionário e em um segundo houve uma entrevista com 12% dos participantes inicialmente.

Participaram da pesquisa no primeiro momento 120 alunos, sendo 60 alunos de uma escola e 60 alunos de outra, ambos de escolas estaduais.

Merlini (2005) identifica que os alunos participantes não possuem a noção Parte-Todo, pois os mesmos ignoram o todo. Apresentaram melhor desempenho nas questões que envolviam quantidades discretas. Já o melhor desempenho apresentado nas quantidades contínuas foram aquelas questões não icônicas.

Para o significado de Número foram obtidos os piores resultados com uma média de 2,9% de acertos entre as duas séries, havendo diferença entre as questões com representação icônicas e não icônicas. Para o significado de Medida foram obtidos o segundo pior desempenho, apresentando maior sucesso nas quantidades contínuas. Nas resoluções Parte-Todo, Número e Medida houve uma homogeneidade entre as duas séries, porém para Quociente e Operador Multiplicativo este quadro não se repetiu. Quanto ao significado de Operador Multiplicativo foram obtidos os melhores desempenhos dos alunos da 6ª série, de modo que as questões envolventes com quantidades contínuas icônicas tiveram melhores resultados. Para o significado de Quociente foram obtidos melhores desempenhos para os alunos da 5ª série.

As pesquisas de Bezerra (2001) e Merlini (2005) apontam questões importantes, discussões e algumas dificuldades encontradas pelos alunos nas resoluções das questões propostas, o que nos ajuda a compreender as dificuldades que os alunos encontram quando vão resolver operações com números fracionários.

A pesquisadora Silva (2005) trabalhou com as concepções de Números Fracionários com um grupo de professores em uma formação continuada. Objetivando analisar e compreender os resultados obtidos, a autora analisa especificamente a Organização Didática que os professores constroem para o ensino de Números Fracionários para a quinta série do Ensino Fundamental durante a formação. Busca, também, refletir sobre a possibilidade que esses professores possuem de permitir uma mudança do olhar das concepções que eles possuem dos seus alunos, além de identificar se há a possibilidade do desenvolvimento de ações desses professores participantes da formação continuada em prol de uma mudança em sua prática de ensino dos Números Fracionários.

Silva (2005) utilizou como metodologia de pesquisa a Pesquisa-Ação, ou seja, uma investigação colaborativa que propicia a interação entre o pesquisador e os participantes da pesquisa. Além de possuir um caráter social, pois esta metodologia objetiva a reflexão, o encaminhamento, ou a resolução de um problema social. O fundamento teórico que orientou a Organização Matemática e a Organização Didática propostas foi a Teoria Antropológica do Didático de Chevallard (1999 apud Silva 2005).

Como resultados Silva (2005) identificou que os professores constroem Organizações Matemáticas e Didáticas rígidas voltadas para a concepção Parte-Todo, técnicas de dupla contagem além da concepção de razão, o que dificulta a construção deste conhecimento por parte do aluno. Observou ainda grande incômodo e insatisfação no sentimento dos professores quando os mesmos perceberam que não possuíam os conhecimentos que os mesmos achavam que possuíam sobre os Números Fracionários, pois os mesmos não conseguiam mobilizar os conhecimentos necessários para resolver situações problemas matemáticas e/ou propor situações diferenciadas em suas práticas de ensino.

A formação mostrou alguns indícios de mudança das práticas docentes, além da necessidade dos professores desenvolverem autonomia e refletirem a respeito dos Números Fracionários e de suas práticas.

Os professores precisam se apropriar de resultados de pesquisas e de novos enfoques para o ensino. Sabe-se que tais necessidades não ocorrem instantaneamente, sendo assim, faz-se necessário que haja formações que propiciem e supram essa necessidade docente, para que seja possível a construção desses novos conhecimentos. Há na tese de Silva (2005) uma proposta de trabalho para o desenvolvimento do Número Fracionário com alunos da quinta série que foi o produto da formação continuada realizada com os professores. Esta, aborda todos os significados do Número Fracionário: parte-todo, medida, quociente, razão e operador multiplicativo.

Identificamos poucos trabalhos de pesquisa com foco nas operações dos números fracionários e, sabemos, que grande parte dos professores da rede estadual baseiam o planejamento de suas aulas em livros didáticos. Desta forma apresentaremos outra autora, Catto (2000) que visou analisar livros didáticos em sua dissertação.

Catto (2000) objetivou analisar os números fracionários de dois livros didáticos do ensino fundamental sob a luz da teoria dos registros de representação. Uma das coleções era: de 1ª a 8ª série, “A conquista da matemática” dos autores José Ruy Giovanni e José Ruy Giovanni Jr. da editora FTD e a outra coleção também do ensino fundamental dos autores Luiz Márcio Imenes e Marcelo Lellis, “Novo caminho – Matemática” de 1ª a 4ª série e “Matemática” de 5ª a 8ª série da editora Scipione.

Segundo a autora, os registros de representação possuem papel importante no ensino de matemática, uma vez que os conceitos serão formados a partir de registros semióticos de representação, tais como, o registro simbólico, figural e a língua natural. Buscou, então, analisar se as duas coleções de livros didáticos permitiam em suas atividades que o aluno realizasse tratamento (transformações no interior de um mesmo registro) e conversão (transformações de um registro à outro).

A metodologia utilizada para análise das coleções dos livros didáticos foi uma pré-análise comparativa dos conteúdos abordados, os quais se pretendiam, especificamente, identificar quais registros eram mobilizados na apresentação dos conteúdos, como se procediam os tratamentos dentro de um mesmo registro, como ocorriam as articulações entre os distintos registros e se as conversões ocorriam em um único sentido.

Catto (2000) percebeu que foram mobilizados todos os registros na introdução dos números racionais, com algumas distinções de enfoque. Na coleção “A conquista da matemática” para as séries iniciais foram articulados os registros figural e simbólico, priorizando o registro numérico na forma fracionária. Com freqüência apareceram conversões entre registro fracionário e língua natural. Na 5ª série iniciam-se regras e definições sob a forma de articulação entre a língua natural e o registro algébrico. Para esta coleção os tratamentos são realizados priorizando os algoritmos e as conversões essencialmente entre registro figural e numérico. Já na outra coleção “Novo caminho – Matemática” e “Matemática” o registro figural não se restringe a figuras geométricas, há a preocupação em contextualizar as situações estudadas, utilizando recortes de jornais, revistas que retratam as situações matemáticas estudadas. São realizadas articulações entre o registro figural e o registro fracionário. Nas séries iniciais os alunos utilizam materiais concretos constituintes no próprio livro. Os tratamentos utilizados fixam-se no registro figural e as conversões priorizadas são entre o registro figural e numérico.

Com diferentes abordagens e enfoques os autores apresentados contribuíram para compreensão das dificuldades que permeiam o processo educativo do conteúdo dos números racionais e alguns propuseram alternativas para o desenvolvimento de um trabalho que ultrapasse o senso comum. Bezerra (2001) colaborou com um trabalho com situações-problema e que permitisse ao aluno atribuir significado ao conceito trabalhado. Merlini (2005) buscando pontuar os conhecimentos que os alunos possuem para resolver questões que abordam o conceito de fração, envolvendo os diferentes significados do mesmo. Silva (2005) com as concepções de Números Fracionários de um grupo de professores em uma formação continuada. E Catto (2000) com a análise, deste conteúdo, em duas coleções de livros didáticos, que são normalmente base para planejamento de aula dos professores em geral.

Com base no estudo realizado e nas dificuldades identificadas que permeiam o ensino do conteúdo dos números fracionários buscaremos analisar a aplicação de uma sequencia didática sob a luz teórica dos registros de representação semiótica de Duval (1999 apud ALMOULOUD, 2007).

1.2 Quadro Teórico

Na aquisição de conceitos em geral faz-se necessário acontecer dois processos de conhecimento, um é parte do conhecimento específico, neste caso o conhecimento matemático e outro são os conhecimentos cognitivos.

Cada um na sua especificidade possui sua importância e juntos, tratam dos aspectos cognitivos para a formação da construção dos conhecimentos matemáticos. Desta forma, formam-se representações mentais e semióticas.

As representações mentais são imagens que possuímos de um objeto ou uma situação. Já as representações semióticas são as produções constituídas por símbolos que fazem parte de um sistema de representação que possui um significado e funcionamento específico.

Segundo Duval (1999 apud ALMOULOUD, 2007) o desenvolvimento das representações mentais ocorre a partir de uma interiorização e entendimento das representações semióticas. Para que as representações semióticas se tornem um registro é preciso que acontecer uma representação identificável pelo indivíduo, além de tratamento e conversão.

Em outras palavras pode-se entender os registros de representação semiótica como sendo registros realizados em atividades intelectuais que possuem funções cognitivas buscando, produzir um sentido, por meio de signos, e um caráter instrumental, por sua capacidade de integrar as diversas etapas da praxeologia.

Para que o sujeito aprenda é necessário considerar seu modo de funcionamento cognitivo por meio da coordenação de registros semióticos e trabalhar com diferentes formas de transformação da representação, ou seja, realizar tratamento e conversão.

Segundo Duval (1999 apud ALMOULOUD, 2007, p. 720), temos:

> Um tratamento é a transformação de uma representação em uma representação outra do mesmo registro, isto é, uma transformação estritamente interna a um registro. Existem tratamentos que são específicos a cada registro e que não precisam de nenhuma contribuição externa para serem feitos ou justificados.
> Uma conversão é a transformação de uma representação de um registro D em uma outra representação de um registro A, conservando, pelo menos, a referência ao mesmo objeto ou à mesma situação representada, mas mudando, de fato, o conteúdo da representação.

Ou seja, tratamento são as operações realizadas a partir de uma representação em outra representação do mesmo registro, sendo, por este motivo interna ao registro. Por exemplo: trabalhar com figuras geométricas, gráficos, além de raciocínio dedutivo na língua natural e a argumentação envolvente na análise de determinado registro.

A conversão é a mudança de registro, de tal forma a não modificar o objeto do registro, ou seja, muda apenas a forma como tratá-lo. Por exemplo: quando estamos trabalhando entre registros, da língua materna e modificamos para uma equação ou um gráfico, pode-se encontrar uma regra de codificação ou uma maneira especifica de tratar aquele novo registro. Quando utilizamos registro da língua natural não há regras, apenas as funções discursivas direcionam a mudança de registro a partir da análise dos gráficos, tabelas, enunciados.

Um registro possui variações estruturas internas a ele, sendo assim deve-se realizar simultaneamente a conversão de dois registros de representação, para que se possa compreender a estrutura subjacente a cada registro e, consequentemente conseguir relacionar o objeto trabalhado com o cognitivo de modo a propiciar uma significação ao objeto trabalhado, além de estabelecer uma relação entre o todo e a parte.

As variações cognitivas estão ligadas ao entendimento do funcionamento representacional e não a uma mera aplicação de regras. Quando se realiza conversões de registro de representação é possível perceber a importância de cada uma delas e identificar qual representação é pertinente a determinado objetivo, pois as relações do objeto com o registro são internas ao mesmo e, essas relações podem ser interiorizadas no momento que o objeto tiver significado.

Dada a importância da conversão de registros não se pode priorizar um registro no processo ensino-aprendizagem, pois cada um possui, intrinsecamente, sua maneira especifica de tratar e possui problemas específicos de aprendizagem, além de ser imprescindível o trabalho com a mudança de registros, uma vez que a mesma exige do aluno o desenvolvimento de uma habilidade de coordenação da mudança de registros.

A atividade de conversão pode ser observada em algumas situações, segundo Duval (IREM 1992 apud CATTO, 2000, p. 29):

> a ilustração é a conversação lingüística em uma representação figural; a tradução é a conversão de uma representação lingüística de uma língua dada em uma representação lingüística de uma outra ou de um outro tipo de linguagem; a descrição é a conversão de uma representação não-verbal (esquema, figura, gráfico) em uma representação lingüística.

Desta forma há duas atividades próximas a atividade de conversão: códigos e interpretação. Os códigos representam algo através de símbolos e para serem compreendidos necessitam ser decodificados. E a interpretação necessita de uma mudança de quadro teórico para que seja efetivada.

Essas ações juntamente com os tratamentos e conversões compõem o quadro de aprendizagem de um indivíduo, que necessita de no mínimo duas representações distintas de um mesmo objeto. Porém a aprendizagem só se efetivará se o indivíduo conseguir mobilizar os conhecimentos necessários para tratar os códigos interpretados e posteriormente realizar conversão entre os diferentes registros semióticos de representação.

Ao trabalhar com números fracionários identificamos a importância desta teoria, pois segundo o exposto, para que o aluno atribua significado ao conceito matemático será necessário o desenvolvimento de um trabalho que propicie ao aluno condições de realizar tratamento e conversão de registro. Utilizaremos, então a teoria dos Registros de Representação de Duval (1999 apud ALMOULOUD, 2007) para analisar se os alunos realizaram, na aplicação da sequência didática proposta, tratamento e conversão, no desenvolvimento das atividades que foram propostas.

1.3 Justificativa

Ao buscarmos pesquisas sobre operações de números fracionários identificamos uma escassez de trabalhos com o tema, como Silva (2005) identificou.

Fundamentando-se nos estudos anteriormente explicitados: Bezerra (2001), Merlini (2005), Catto (2000), Silva (2005), nas avaliações externas SARESP (2009) desenvolvidas a cada ano, nas propostas curriculares existentes: Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997) e nos fundamentos teóricos de Duval (1999 apud ALMOULOUD, 2007) sobre Registro de Representação Semiótica e Mentais, identifica-se a necessidade de desenvolver um trabalho didático-pedagógico para o ensino dos Números Fracionários para alunos do Ensino Fundamental.

As pesquisas realizadas permitiram identificar que a realização de tratamentos em um mesmo registro para este conteúdo é pouco realizado, o que limita o conhecimento matemático e não permite, em geral, a realização de conversão. Adquire-se como conseqüência um trabalho desconexo ausente de significação e compreensão entre os processos intrínsecos aos conhecimentos matemáticos. Porém sabemos que o conteúdo dos números fracionários são extremamente importante para formação e desenvolvimento das estruturas mentais necessárias ao desenvolvimento intelectual do indivíduo.

Por entender a importância do trabalho com o número fracionário e identificar, através das pesquisas realizadas, as dificuldades que permeiam o ensino deste, pretende-se analisar a aplicação de uma sequência didática sob a luz teórica dos Registros de Representação Semiótica de Duval (1999 apud ALMOULOUD, 2007) buscando identificar, compreender se os alunos realizam tratamento e conversão no momento que precisam responder uma atividade de operações dos números fracionários e se mobilizam, para isso, seus conhecimentos anteriores. Com esta análise conseguiremos contribuir com o ensino do conteúdo das operações de multiplicação e divisão do número fracionário, uma vez que serão identificados, através dos registros de representação dos alunos produzidos no momento da aplicação das atividades, elementos constituintes de suas estruturas intelectuais e mentais, podendo, inclusive, dar indicativos de pontos necessários para melhoria da prática docente, além de auxiliar o professor a direcionar as atividades propostas para a ultrapassagem das dificuldades normalmente encontradas neste conteúdo.

1.4 Delimitação do problema

A partir do exposto e dos estudos realizados pretende-se analisar a aplicação de uma sequência didática sobre as operações de multiplicação e divisão dos números fracionários com os alunos da 5ª série.

A sequência didática foi retirada do artigo "As Operações com Números Racionais e seus Significados a partir da Concepção Parte-todo" de Almouloud e Siva, e, posteriormente adaptada.

Objetivamos, então, fazer uma análise da resolução das atividades propostas, sob à luz da teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval (1999 apud ALMOULOUD, 2007); além de refletir sobre uma maneira diferenciada de tratar os conhecimentos dos números fracionários, uma vez que identificamos tal necessidade.

Pretendemos responder a seguinte questão com o desenvolvimento deste trabalho: **Os alunos da 5ª série/ 6° ano do Ensino Fundamental, realizam tratamento e conversão no desenvolvimento de atividades que envolvem operações de Multiplicação e Divisão com números fracionários?**

Este trabalho objetiva analisar as resoluções que os alunos irão desenvolver, a partir dos Registros de Representação Semiótica, para que segundo esses registros seja possível analisarmos quais representações mentais os participantes possuem dos Números Fracionários, além de identificar se os mesmos mobilizam os conhecimentos anteriores relacionando o objeto trabalhado com o cognitivo de modo a propiciar uma significação ao objeto trabalhado.

Para responder a questão proposta utilizaremos os fundamentos da teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval (1999 apud ALMOULOUD, 2007), os estudos realizados anteriormente e o artigo "As Operações com Números

Racionais e seus Significados a partir da Concepção Parte-todo” de Almouloud e Siva.

1.5 Metodologia e procedimentos

Os fundamentos metodológicos que nortearão este trabalho será a engenharia didática, pois esta possui um caráter experimental e permite a realização de análise didática, através de observações, construções e experimentos de sequências de ensino.

Segundo Aumouloud (2007, p. 171):

> A engenharia didática pode ser utilizada em pesquisas que estudam os processos de ensino e aprendizagem de um dado objeto matemático e, em particular, a elaboração de gêneses artificiais para um dado conceito. Esse tipo de pesquisa difere daqueles que são transversais aos conteúdos, mesmo que o suporte seja o ensino de um certo objeto matemático (um saber ou um saber-fazer).

A engenharia didática caracteriza-se pela análise e comparação do processo como um todo, visando identificar as mudanças ocorridas através das análises a priori e a posteriori.

A sequência de ensino deve partir dos conhecimentos que o aluno já possui para que a partir destes possa desenvolver competências e habilidades ao resolver a situação-problema proposta. O pesquisador neste processo possui o papel de mediador, o qual realiza intervenções quando necessário.

Deve conter, também, uma análise matemática, que permita identificar as possíveis estratégias de resolução das situações-problema que o aluno possa escolher, evidenciando os saberes envolvidos e, uma análise didática, que deve analisar as variáveis em cada situação, a pertinência e adequação das situações propostas, além de analisar as possíveis dificuldades que podem ser encontradas.

No momento da aplicação o pesquisador deve acompanhar o processo e avaliar continuamente se a sequência proposta atende às necessidades, questões e hipóteses levantadas.

Ao coletar os dados o pesquisador deve confrontar os dados adquiridos com os dados que o mesmo possuía previamente para que a partir desses possa retomar a questão de pesquisa, identificando os produtos finais, as sínteses, conclusões e avaliações que foram possíveis de se desenvolver.

Portanto a Engenharia Didática foi escolhida por permitir a aplicação e consequentemente a análise da sequência de ensino, sob à luz teórica dos Registros de Representação Semiótica de Duval (1999 apud ALMOULOUD, 2007), buscando identificar, especificamente, se os alunos realizam tratamento e conversão nas soluções das questões propostas.

2 ESTUDOS PRELIMINARES

Neste capítulo apresentaremos os estudos preliminares do objeto matemático, além de como é proposto o ensino do conteúdo dos Números Fracionários pelo PCN.

2.1 Estudo do objeto matemático

Os campos numéricos foram construídos a partir de necessidades históricas que surgiram ao longo do tempo. Baseando-se nas ideias de Caraça (1998) apresentaremos o conjunto dos números racionais.

Partindo da ideia de “medir” sentiu-se a necessidade de realizar a medição em situações onde não era possível exprimir uma medida exata, por exemplo, de cálculos de áreas de terrenos, trocas dos mesmos, impostos ou outras situações do dia-a-dia que existiam.

Caraça (1998) coloca a seguinte questão para pensarmos na problemática da medição. Há dois segmentos diferentes, sabe-se que não há valores inteiros que exprimem suas medidas com precisão, como fazemos para medir?

Nas diferentes situações históricas que surgiram, percebeu-se uma limitação no campo dos números existentes até então, pois se dividirmos uma medida *M* em partes iguais, podemos escrever essa da seguinte maneira: $M=\frac{M.n}{n}$, ou seja, é o número de vezes que a nova medida cabe no tamanho *M* que possuíamos. Tal limitação ocorreu, no momento que os números que se desejavam medir não eram divisíveis, uma vez que o campo dos números inteiros era insuficiente para essa questão.

Para resolver o problema das divisões do segmento foi criado um novo campo numérico, definindo que se os números da divisão a ser realizada forem divisíveis então o resultado da divisão será o número correspondente ao quociente, agora se os números não forem divisíveis o resultado será um número fracionário, escrito da forma: $\frac{m}{n}$.

Segundo Caraça (1998, p.36) temos:

> Encontramo-nos com um novo conjunto numérico – o conjunto dos números racionais, ou *campo racional* – que compreende o conjunto dos números *inteiros* e mais o formado pelos números *fraccionários*; estes são, de facto, os números novos.

Com as definições anteriores podemos sempre exprimir a medida de um segmento em relação á outro, pensando no número de vezes que um cabe no outro, além de, agora, ser possível que este valor seja um número fracionário.

Após as definições do número racional Caraça (1998) segue com o estudo das propriedades. Para essas, duas ideias são importantes: o significado dos números racionais como expressão de uma medição e o princípio da economia, que se baseia nas definições dadas dos números inteiros e nas leis de operação desses.

Complementando-se as duas ideias acima embasam as propriedades do número racional. Iniciando-se pela ordenação, ou seja, definição de igualdade e de desigualdade, para posteriormente definir as operações.

A definição da operação da **adição**: “dados dois números racionais r e s medindo, com a mesma unidade, dois segmentos, chama-se soma r+s ao número racional que mede, ainda com a mesma unidade o segmento soma dos dois” (Caraça 1998, p. 41). Há duas situações: quando os números possuem o mesmo denominador: se $r = \frac{m}{n}$ e $s = \frac{p}{n}$ então $\frac{m}{n} + \frac{p}{n} = \frac{m+p}{n}$. E quando eles possuem denominadores diferentes, se buscamos frações equivalentes de mesmo denominador, temos: se $r = \frac{m}{n}$ e $s = \frac{p}{q}$; $r = \frac{m.q}{n.q}$ e $s = \frac{n.p}{n.q}$ logo, $r + s = \frac{m.q+n.p}{n.q}$.

Ou seja, $\frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{m.q+n.p}{n.q}$.

A **subtracção** é definida como sendo operação inversa da adição: “dados dois números racionais $r = \frac{m}{n}$ e $s = \frac{p}{q}$, chama-se diferença r-s a um terceiro número racional d, tal quê s+d=r” (Caraça 1998, p. 42). Assim, temos: $\frac{m}{n} - \frac{p}{q} = \frac{m.q-n.p}{n.q}$.

A definição da operação da **multiplicação**: a)Multiplicador inteiro: $\frac{p}{q}.n = \frac{n.p}{q}$. b)Multiplicador fracionário: $\frac{p}{q}.\frac{r}{s} = \frac{p.\frac{r}{s}}{q} = \frac{\frac{p.r}{s}}{q}$.

A **divisão** é definida pela operação inversa da multiplicação: a)Divisor não inteiro: $\frac{p}{q} \div n = \frac{p}{q.n}$. Assim, para dividir um número racional por um inteiro é preciso multiplicar o denominador por este inteiro. b)Divisor fracionário: $\frac{p}{q} \div \frac{r}{s} = \frac{p.s}{q.r} = \frac{p}{q}.\frac{s}{r}$ ou $\frac{p \div r}{q \div s} = \frac{p}{r} \div \frac{q}{s} = \frac{p.s}{r.q} = \frac{p}{r}.\frac{s}{q}$.

Verificou-se que as propriedades dos números inteiros para a operação da adição, subtração, multiplicação e divisão também se mantêm para os números racionais.

Gostaríamos de ressaltar que este tópico teve como objetivo definir o objeto de estudo matemático do presente trabalho, ou seja, definir as operações de multiplicação e divisão do número fracionário.

2.2 As frações nos PCN

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997) explicitam a necessidade de se desenvolver um trabalho didático-pedagógico com o conteúdo dos números racionais, através de um reconhecimento diário, ou seja, há a sugestão de que este conteúdo, inicialmente, seja abordado baseando-se no número decimal, pois na vida cotidiana há uma freqüência maior deste tipo de representação do que a representação fracionária.

Destaca também que é comum o desenvolvimento de um trabalho com base na significação parte-todo quando se pensa no número fracionário, ou seja, normalmente os professores fixam-se na fração utilizando o significado da representação de um número de partes dentro de um total. Outro significado do número fracionário muito utilizado é o quociente, baseando-se na divisão entre o numerador e o denominador.

Segundo PCN (BRASIL, 1997) desenvolver um trabalho didático-pedagógico baseado em apenas alguns significados do conhecimento em estudo, desconsiderando a sua totalidade, faz com que o aluno não possua uma visão ampla do conhecimento, além do mesmo possuir condições limitadas nos momentos de utilizar este conhecimento.

Sendo assim, é de suma importância desenvolver um trabalho que aborde todos os significados do número fracionário: parte-todo, quociente, razão e operador multiplicativo, pois segundo Duval (1999 apud ALMOULOUD, 2007) para que o aluno utilize um conhecimento, este deve ter significação para o mesmo e esse processo só ocorrerá se o aluno estender o significado do que está sendo trabalhado, compreender os tratamentos realizados em um mesmo registro, bem como compreender e saber realizar diferentes conversões.

Buscando-se os outros significados do número fracionário pode-se abordar a fração como índice comparativo, no caso da razão, temos como exemplo, a escala utilizada em mapas. Outro significado que o PCN (BRASIL, 1997) sugere é o operador multiplicativo, exemplo disso, é quando atua sobre uma situação e transforma-a. Sugere ainda que o professor utilize recursos do processo histórico, como Caraça (1998) explicita, fundamentando-se em situações-problemas que envolvam medições.

Há outras sugestões, nesse documento, como: o número racional como probabilidades, em situações um pouco mais específicas da matemática. Além de sugerir que aprofunde os conhecimentos de porcentagem, desenvolvendo situações-problema em que o aluno possa ser o agente do seu processo de aquisição do conhecimento, desenvolvendo uma habilidade maior com o conhecimento matemático.

Busca-se hoje em dia situações que auxiliem o processo educativo e possam cada vez mais potencializar os recursos que a escola possui para que se atinjam os objetivos com mais precisões.

Nesse sentido o professor deve inovar e buscar o desenvolvimento de práticas didático-pedagógicas diferenciadas para que hajam transformações efetivas no ensino e podermos futuramente obter frutos de um trabalho que ajuda o aluno a pensar e melhorar as situações que o mesmo faz parte.

Sob o ponto de vista do conceito do número fracionário, o PCN (BRASIL, 1997) sugere inovações no processo de construção didático-pedagógico para este conceito, pois entende-se que apenas dessa maneira o aluno irá possuir condições de realizar todos os tratamentos e conversões possíveis e necessários para seu desenvolvimento dentro deste tema de estudo.

3 O DISPOSITIVO EXPERIMENTAL

Neste capítulo analisaremos a sequência didática proposta para as operações de multiplicação e divisão dos números fracionários, bem como, todas as questões envolventes na aplicação da pesquisa: sujeitos da pesquisa, descrição da aplicação da sequência, a sequência didática e sua análise a priori e a posteriori.

3.1 Os sujeitos da pesquisa

Participou da aplicação um total de seis alunos com idade entre 10 e 11 anos. Estes, cursam a 5ª série do Ensino Fundamental II em uma escola estadual em Mauá.

A professora de matemática da 5ª série inicialmente conversou com os alunos e havia nove alunos interessados, porém como as atividades de pesquisa seriam realizadas fora do horário de aula dos alunos, então restaram apenas seis alunos interessados. Desses alunos, a professora identificou que os mesmos possuíam graus de dificuldade variados, o que para a pesquisa seria interessante.

Vale ressaltar, que os seis alunos possuíam noções de adição e subtração de números fracionários e uma noção consistente de frações equivalentes, o que identificamos ser importante, pois esses conceitos serão base para que os alunos construam os conhecimentos das operações de multiplicação e divisão que estaremos propondo.

Após autorização da escola e dos pais, iniciamos os trabalhos.

3.2 Descrição da aplicação da sequência

A sequência didática foi aplicada em uma escola estadual de Mauá no mês de agosto e setembro, com seis alunos, formamos dois grupos igualmente divididos. As atividades de aplicação da sequência foram realizadas no período da manhã como explicitado anteriormente. Iniciamos os trabalhos logo após a definição dos alunos que participariam. Foram realizados, ao total, sete encontros, com duração de aulas de cinqüenta minutos.

Como havia seis alunos ao total e os mesmos foram divididos em dois grupos, então chamaremos de Grupo 1 e Grupo 2. Os integrantes do Grupo 1 serão denominados A, B, C e os integrantes do Grupo 2 serão denominados D, E, F, para que os mesmos não sejam identificados.

Os alunos receberam orientações para que desenvolvessem tudo em grupo e para que discutissem a resolução do que estava sendo proposto no grupo, pois desta forma todos poderiam explicitar suas ideias, avaliar, testar se seria possível resolver os problemas daquela maneira, além de socializar os raciocínios.

Distribuímos as atividades uma a uma, para que os alunos se preocupassem unicamente com a atividade que estava em mãos naquele momento. As atividades anteriormente respondidas ficavam com os alunos para que os mesmos consultassem se julgasse necessário. Disponibilizamos em todos os momentos régua, lápis, borracha e lápis de colorir.

Havia duas pessoas aplicando a sequência: uma era a Formadora e a outra era a Observadora. A Formadora foi a pessoa que realizou intervenções quando necessário durante o desenvolvimento das atividades dos grupos e a Observadora foi uma pessoa que constantemente acompanhou as atividades e realizou anotações sobre os grupos. Vale ressaltar que tanto a Formadora quanto a Observadora participaram do Curso de Especialização de Educação Matemática nos anos: 2010/2011.

Os motivos e objetivos desta aplicação foram explicitados aos alunos para que os mesmos entendessem que o importante era o processo de construção do conhecimento e não apenas a resolução do exercício. Além de conscientizá-los de que seria de suma importância o trabalho em grupo, pois a Formadora e a Observadora não “ensinariam” o conteúdo, como os mesmos estão acostumados.

Os registros das atividades foram realizados através de observações realizadas pela Formadora e pela Observadora, além de filmagem.

No primeiro dia de aplicação iniciamos a sequência didática e foram aplicadas as atividades da operação da multiplicação dos números fracionários de 1 à 3. No segundo dia foram aplicadas as atividades de 4 à 6. No terceiro dia foram aplicadas as atividades de 7 e 8 da operação da multiplicação dos números fracionários, além da atividade 1 da divisão, operação inversa da multiplicação. No quarto continuando as atividades da divisão dos números fracionários foram aplicadas as atividades de 2 à 4. No quinto dia foram aplicadas as atividades 5 e 6. No sexto dia foi aplicada última atividade (atividade 7) sobre a divisão dos números fracionários e a atividade 8 que continha questões sobre a operação de multiplicação dos números fracionários e sobre sua operação inversa, objetivando realizar uma análise de todo o processo. O sétimo dia foi o dia da institucionalização realizada pela Formadora.

Devemos ressaltar que no segundo e sétimo dia de aplicação a Observadora não estava presente, havia apenas a Formadora e os alunos. Deste modo os registros foram realizados através de gravação. Lembrando que as gravações aconteceram apenas do segundo ao sexto dia.

3.3 A Sequência Didática

Buscando desenvolver um trabalho com a teoria dos Registros de Representação de Duval (1999 apud ALMOULOUD, 2007), propusemos uma sequência didática que acreditávamos propiciar ao aluno uma situação de aprendizagem significativa em que o aluno teria a oportunidade de ser o agente principal do seu processo de construção de conhecimento.

Esta sequência didática contempla as operações de multiplicação e divisão dos números fracionários e, possui um total de dezesseis atividades, sendo oito atividades para a operação de multiplicação dos números fracionários e sete atividades para a operação inversa da multiplicação, a operação da divisão dos números fracionários. Além de mais uma atividade que contempla as duas operações (multiplicação e divisão) para que a mesma seja aplicada no final do processo e, nos permita, através dela, verificar quais conceitos foram apreendidos.

A sequência aplicada e proposta neste trabalho (anexo A) foi adaptada do artigo publicado na revista Bolema de Almouloud e Silva (2008): “As Operações com Números Racionais e seus Significados a partir da Concepção Parte-todo”.

Neste artigo os autores desenvolvem reflexões sobre o conceito dos números fracionários e propõe atividades tanto para as operações de adição e subtração dos números fracionários, quanto para as operações de multiplicação e divisão dos números fracionários que podem ser desenvolvidas com os alunos. Vale ressaltar que este artigo foi resultado de um trabalho desenvolvido pelos autores com formações de professores.

A partir das atividades propostas no artigo, focamos o presente trabalho para as operações de multiplicação e divisão dos números fracionários e, nos embasamos nas atividades propostas para o desenvolvimento da sequência que propomos. Realizamos duas modificações, acrescentando duas atividades que julgamos ser importantes: uma para a regra operatória da divisão dos números fracionários, e outra possui o objetivo de validar o trabalho desenvolvido e verificar quais conceitos foram apreendidos pelos alunos, pois são exercícios referente às duas operações de multiplicação e divisão dos números fracionários.

3.4 Análise da produção dos alunos

Atividade 1

Represente por uma figura a expressão $2 \times \frac{1}{5}$ e o seu resultado.

Analise a priori

Objetiva-se que o aluno realize conversão entre o registro numérico apresentado no exercício e o registro figural. Para resolver a questão os alunos podem se basear na multiplicação de números naturais, pois os mesmos estão acostumados a trabalhar com este campo numérico. Como a questão solicita que se represente a multiplicação dos números fracionários através de uma figura, o aluno terá que mobilizar os conhecimentos de parte-todo e de medida associados com os conhecimentos de multiplicação do campo dos números naturais, para que se possa representar a quantidade solicitada na figura.

Análise a posteriori

Após discussões, os Grupos 1 e 2 concluíram que a resposta solicitada era $\frac{2}{10}$, pois, a princípio, realizaram a multiplicação do número inteiro pelo numerador e denominador.

A Formadora interferiu, solicitando que representassem a fração que o exercício estava solicitando $\frac{1}{5}$ e a resposta que eles julgavam correta $\frac{2}{10}$ por meio de uma figura.

Ao representar as duas frações no desenho, como mostra a figura 1 e 2, os dois grupos perceberam que a resposta estava incorreta, uma vez que as duas estavam representando a mesma quantidade e neste caso, seria impossível que $\frac{2}{10}$ representasse o dobro de $\frac{1}{5}$.

Os grupos inicialmente não se preocuparam em representar figuras congruentes para realizar a comparação entre as figuras. Apesar de oralmente dizerem que $\frac{1}{5} = \frac{2}{10}$ e explicarem com base nas figuras que desenharam.

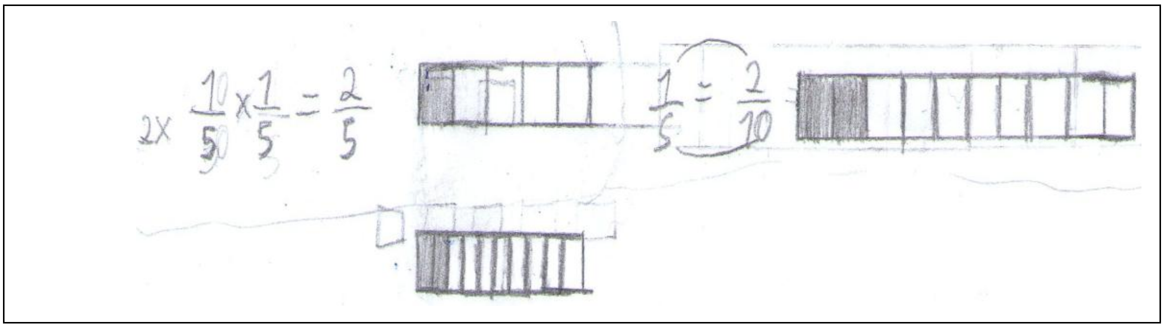


Figura 1 - Resolução da atividade 1 realizada pelo aluno B do Grupo 1

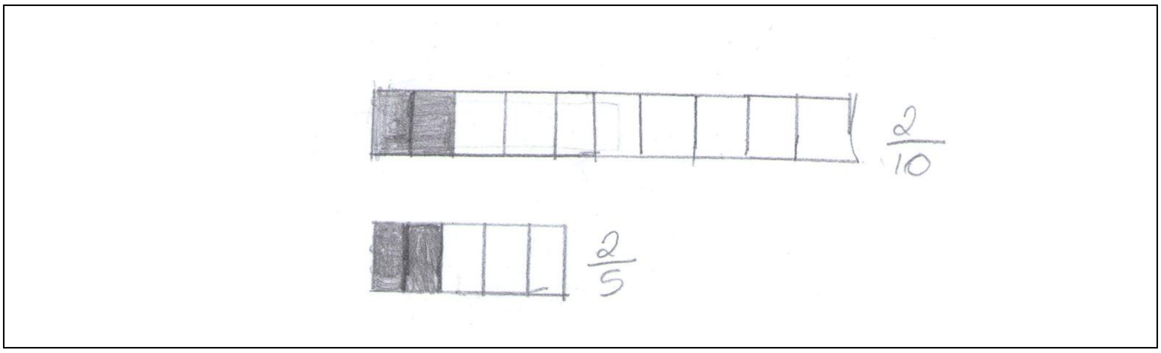


Figura 2 - Resolução da atividade 1 realizada pelo aluno F do Grupo 2

Apenas o aluno C do Grupo 2 se preocupou em representar os inteiros como figuras congruentes para comparar ambas, como mostra a figura 3, porém o mesmo fez tal representação após a Formadora questionar se havia importância na congruência entre figuras que os dois grupos estavam representando para realizar a comparação entre elas.

Como o aluno C não havia realizado representação alguma então o mesmo fez o retângulos congruentes, porém um grudado no outro, para representar em um deles $\frac{1}{5}$ e no outro para representar $\frac{2}{10}$.

Devemos ressaltar que o aluno C foi o único que se preocupou em representar os dois retângulos que estavam comparando congruentes, porém este, ainda não representou as partes desse inteiro em unidades de mesma área.

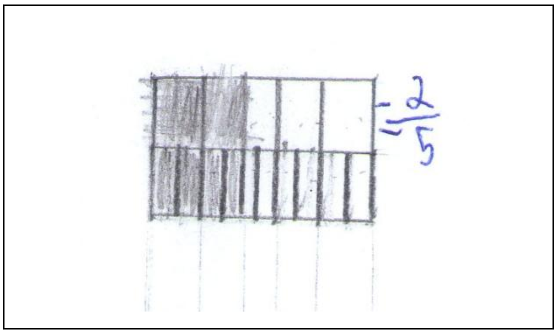


Figura 3 - Resolução da atividade 1 realizada pelo aluno C do Grupo 1

Após as intervenções, o aluno C do Grupo 1 percebeu que o dobro solicitado seria o equivalente a representar no desenho a parte pintada duas vezes, ou seja, os mesmos deveriam pintar $\frac{1}{5}$ duas vezes.

Os alunos do Grupo 1 concordaram e cada um fez a sua representação.

Se retomarmos a Figura 3, do aluno C e verificarmos a Figura 4 (abaixo) do aluno A, ambos do mesmo grupo, vamos identificar que os alunos representaram que um número fracionário é igual a figura desenhada.

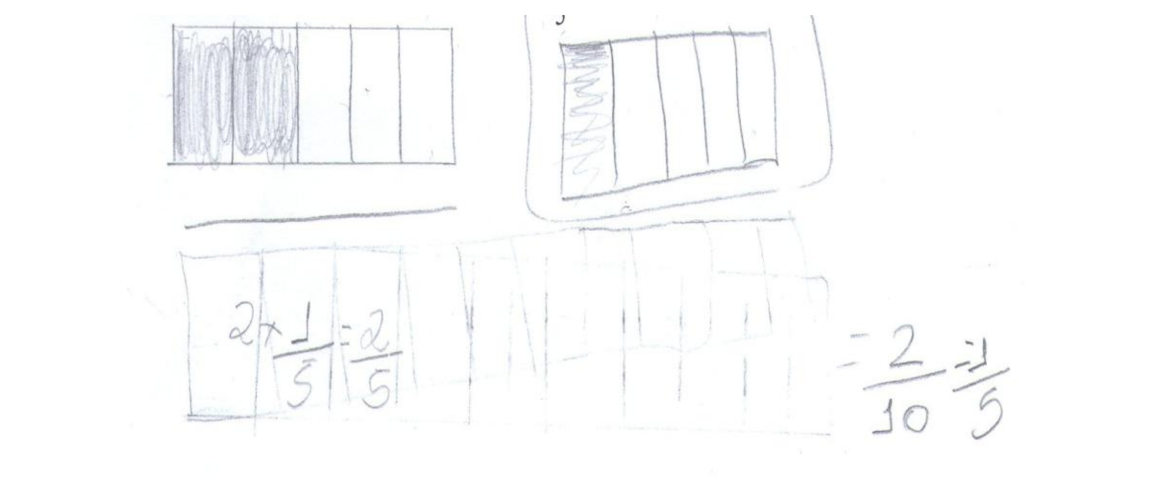


Figura 4 - Resolução da atividade 1 realizada pelo aluno A do Grupo 1

Os alunos do Grupo 2 discutiram pouco esta atividade. Devemos destacar que as alunas E e F estavam com receio de tentar, julgando ser por este motivo, identificamos que os registros desse grupo foram todos iguais, como na Figura 2 mostrada anteriormente.

Ao término da atividade 1 podemos dizer que os alunos realizaram tratamento, pois segundo Duval (1999 apud AUMOULOUD, 2007), tratamento é a transformação de uma representação em outra do mesmo registro e esta acontece internamente ao registro.

No momento que os alunos estavam representando o inteiro, discutindo a possível solução os mesmos estavam realizando tratamento. Focaram as discussões no registro figural, pois foi solicitado pelo exercício. Já a conversão não aconteceu para todos, pois para alguns a representação do registro figural é equivalente a representação do registro numérico.

<u>Atividade 2</u>

Dê a expressão matemática e calcule:

a) o dobro de $\frac{2}{3}$

b) o triplo de $\frac{2}{5}$

c) o quádruplo de $\frac{1}{5}$

d) o quíntuplo de $\frac{3}{7}$

Analise a priori

Objetiva-se que o aluno realize conversão entre a língua materna e o registro numérico. Para resolver a questão o aluno deve recorrer aos conhecimentos que já possui do campo dos números naturais. Considerando que o mesmo realizou a representação figural na atividade anterior, espera-se que não haja dificuldades na realização desta.

Análise a posteriori

Os alunos do Grupo 1 resolveram a atividade 2 sem problemas, utilizando apenas o registro numérico, como mostra a Figura 5.

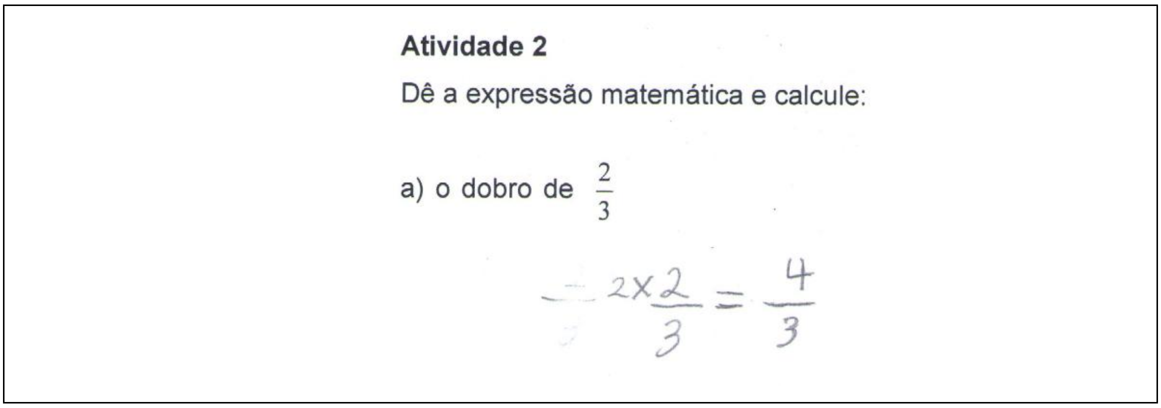


Figura 5 - Resolução da atividade 2 realizada pelo aluno B do Grupo 1

O aluno D do Grupo 2 respondeu que o dobro de $\frac{2}{3}$ seria $\frac{4}{6}$. Então a Formadora solicitou que os outros alunos do Grupo ajudassem o mesmo. A Formadora deixou que os alunos pensassem. Como o Grupo não dizia nada e estavam trocando poucas ideias, então a Formadora solicitou que os alunos do Grupo 1 ajudassem os alunos do outro Grupo sem dar a resposta.

A aluna B se dispôs a explicar para o grupo. Ela pediu para que o aluno D representasse a resposta que ele julgava ser correta através de um desenho. Como já havia sido discutida a questão da fração equivalente na atividade anterior então entendemos que a representação ajudaria o aluno.

O aluno representou $\frac{2}{3}$ e $\frac{4}{6}$ separadamente, como mostra a figura 6, identificando que as representações possuíam a mesma área, o que significava a resposta estava incorreta. Então o aluno D foi questionado pela aluna B sobre o que seria o dobro de um número e o que havia sido feito anteriormente. Apenas pelo questionamento e por esta fala da aluna B, o aluno D compreendeu e representou através do registro numérico.

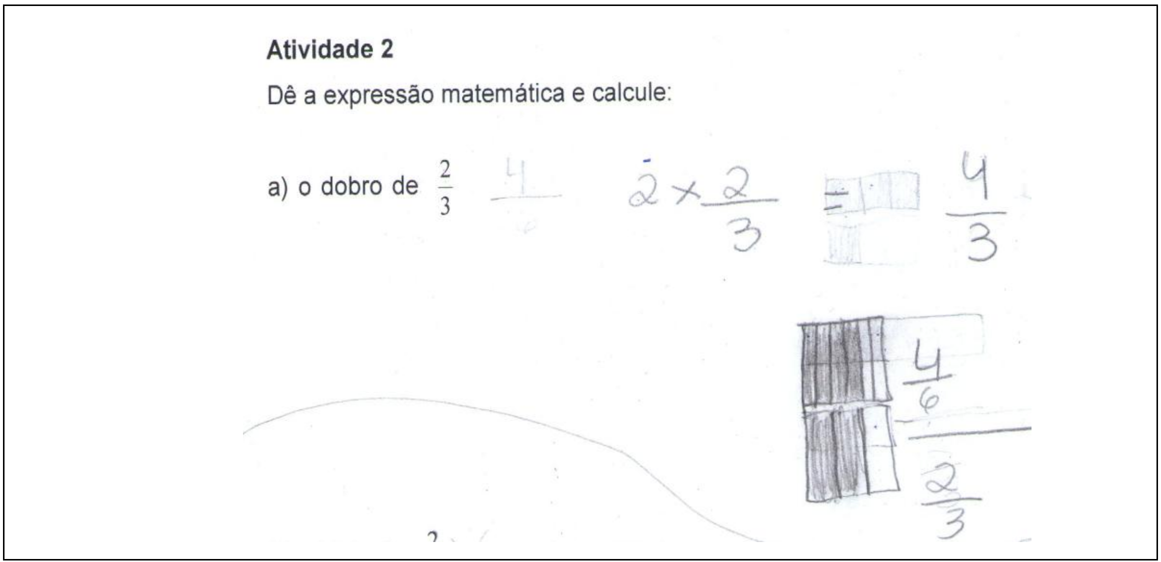


Figura 6 - Resolução da atividade 2 realizada pelo aluno D do Grupo 2

A aluna E sem nada escrever, acompanhou a explicação, compreendeu e fez a sua atividade com base unicamente no registro numérico, esta ficou similar à Figura 5 do Grupo1 mostrada anteriormente.

Porém a aluna F do mesmo grupo que o aluno D (Grupo 2) continuou não compreendendo então a aluna B explicou novamente, utilizando os mesmos recursos, porém solicitando que a mesma fizesse o que ela estava dizendo, pois segundo a aluna B apenas olhando ela não entenderia.

A aluna F foi acompanhando, fez a alternativa “a” com ajuda, veja abaixo na Figura 7.

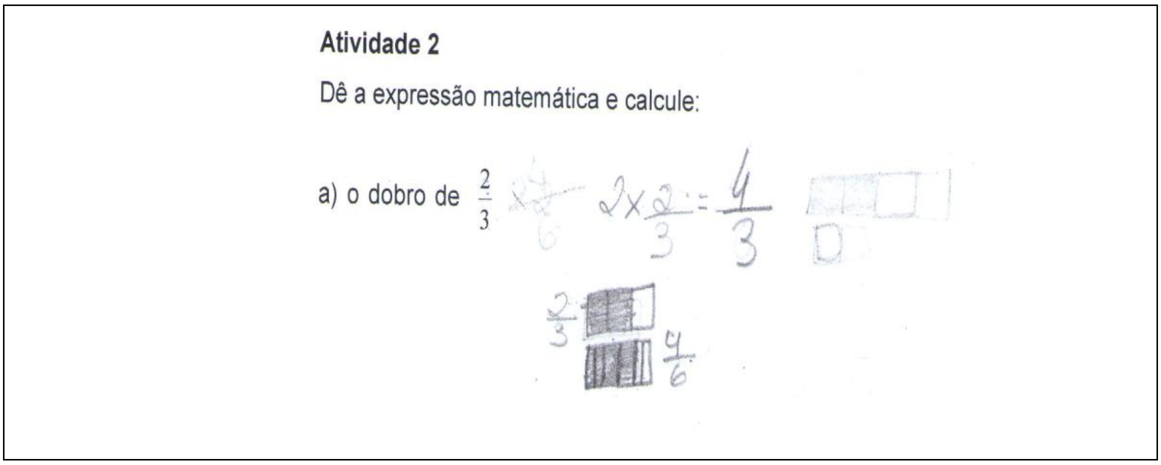


Figura 7 - Resolução da atividade 2 realizada pelo aluno F do Grupo 2

Em seguida aluna F tentou representar a quantidade $\frac{4}{3}$ por meio de uma figura e a mesma se confundiu, pois desenhou um inteiro, dividiu o mesmo em três partes e no momento de pintar, como necessitava pintar quatro partes, então a mesma desenhou um quadradinho pequeno para representar o pedaço que faltava. O problema é que, aparentemente, este pedaço pequeno não fazia parte de um todo.

A aluna B pediu para que a aluna F terminasse o restante das alternativas para ver se surgiriam dúvidas.

Na alternativa "b" aconteceu a mesma coisa, a aluna respondeu a questão de modo que o número inteiro multiplicasse o numerador e o denominador, ao mesmo tempo. Veja a representação realizada pela aluna na Figura 8:

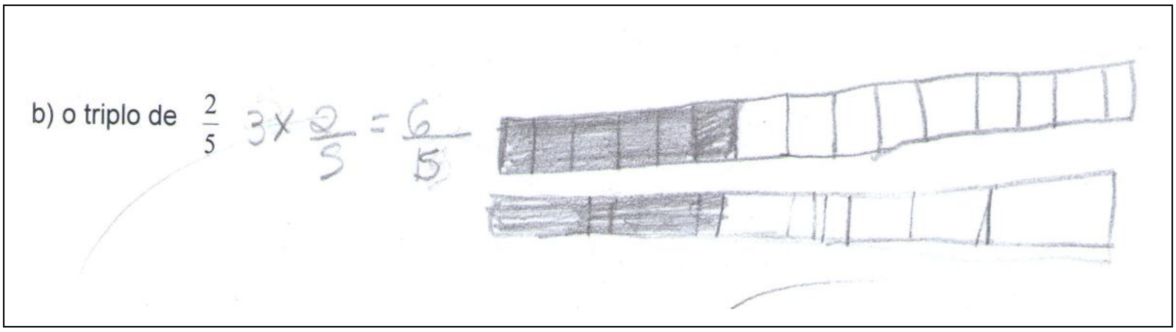


Figura 8 - Resolução da atividade 2 realizada pelo aluno F do Grupo 2

Acompanhando a situação o aluno C perguntou para a aluna F:

> Aluno C: "Se multiplicar denominador também a figura fica igual?"
> Aluna F: "Sim"

Aluno C: “Se ficou igual você multiplicou?”

Aluna F: “Não”

Após essa conversa a aluna disse que entendeu e faz a alternativa c, como mostra a Figura 9:

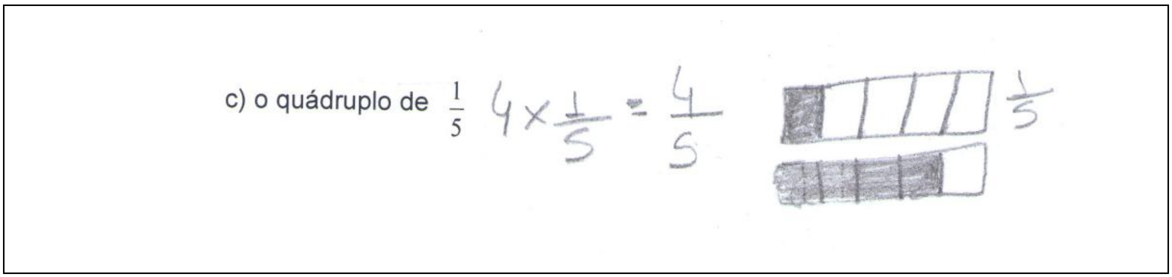


Figura 9 - Resolução da atividade 2 realizada pelo aluno F do Grupo 2

E a aluna F termina fazendo na alternativa D apenas o registro numérico, como mostra a Figura 10:

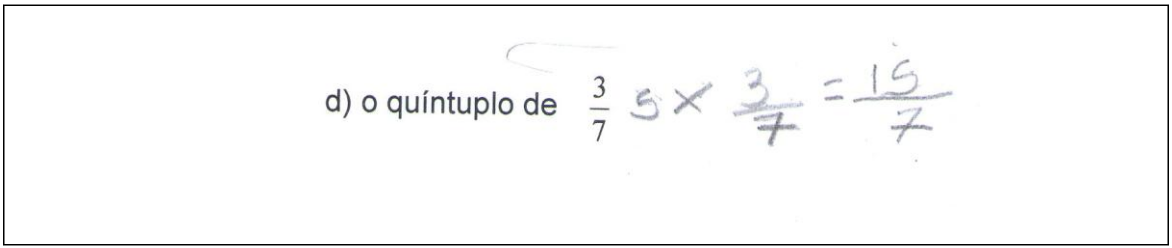


Figura 10 - Resolução da atividade 2 realizada pelo aluno F do Grupo 2

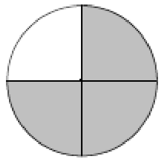
Terminada a atividade 2 identificamos que a aluna F e o aluno D conseguiram realizar tratamento e conversão, no momento em que modificam o registro que estava sendo utilizado por uma escolha pessoal. A diferença é que o aluno D o faz a partir da alternativa “b” e a aluna F precisou treinar mais para utilizar apenas o registro numérico.

Os alunos A, B, C e E realizaram a mudança de registro na atividade 2 sem dificuldades, pois se basearam na atividade anterior, que colaborou para que não precisassem mais do registro figural nesta atividade.

Gostaríamos de destacar que foi pedido à todos os alunos para que não apagassem tudo que escreviam, identificamos um medo de errar tão grande que qualquer coisa que a Formadora olhasse os alunos já pegavam a borracha para apagar.

Atividade 3

Pinte a metade ($\frac{1}{2}$) da parte colorida do disco. Que fração do disco você pintou?



Analise a priori

Objetiva-se inicialmente que o aluno trabalhe com o registro figural identificando a metade da parte colorida e em seguida, realize conversão de registro, do figural para o numérico. Para resolver a questão o aluno deve mobilizar os conhecimentos de parte-todo, pois na divisão solicitada o mesmo deverá perceber que foi pintado $\frac{3}{8}$ do disco. Tendo como registro $\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{8}$. Dessa forma, a dificuldade que pode surgir é o aluno fazer, inicialmente, a divisão apenas da parte pintada $\frac{3}{4}$ e desconsiderar o $\frac{1}{4}$ não pintado, porém, entendemos que se os alunos mobilizarem os conceitos de parte-todo, eles perceberão qual é a resolução correta.

Análise a posteriori

Os dois Grupos inicialmente responderam a questão dando a resposta $\frac{3}{6}$ sem considerar o todo, porém logo a Formadora questionou nos dois Grupos se teria que acontecer ou considerar alguma situação específica para responder a questão.

Foi então que os dois Grupos repensaram e rapidamente responderam: $\frac{3}{8}$, como mostra a Figura 11 abaixo:

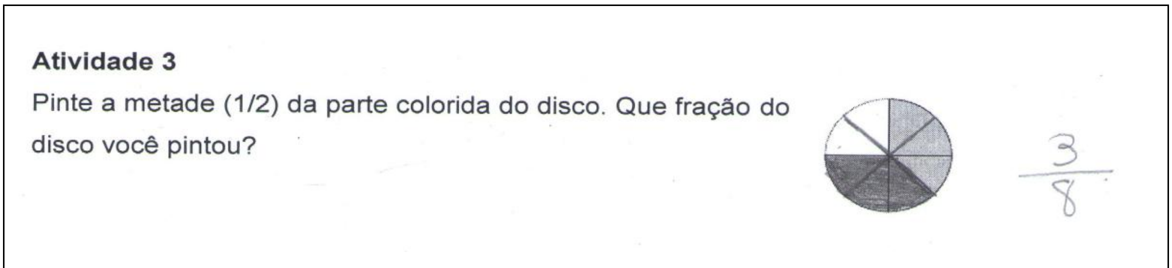

Atividade 3
Pinte a metade (1/2) da parte colorida do disco. Que fração do disco você pintou?
$\frac{3}{8}$

Figura 11 - Resolução da atividade 3 realizada pelo aluno E do Grupo 2

Os alunos realizaram tratamento no momento em que trabalharam com o registro figural e conseguiram perceber que era necessário considerar a figura toda (concepção parte-todo), após sem dificuldades realizaram conversão de registro no momento que representaram a resposta $\frac{3}{8}$, mudando do registro figural para o numérico. Como Merlini (2005) constata a significação parte-todo do número fracionário é muito trabalhado em sala de aula, o que implica em uma facilidade maior do aluno também ao tratar deste conteúdo. Gostaríamos de destacar que nenhum integrante dos Grupos registrou a operação realizada através do registro numérico: $\frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$.

Atividade 4

Pinte a metade de um quinto do segmento abaixo e determine a fração que representa a parte pintada do segmento.

Analise a priori

Objetiva-se que o aluno trabalhe associe a concepção parte-todo à de medida, dividindo o segmento em cinco partes iguais, para que posteriormente identifique metade de uma das partes que o mesmo representou. Em seguida perceber que esta parte dividida representa: $\frac{1}{10}$. Pode ser que o aluno mobilize os conhecimentos produzidos nas atividades anteriores e perceba que resultado $\frac{1}{10}$ provém do operador $\frac{1}{2}$ com o $\frac{1}{5}$, gerando o registro: $\frac{1}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{10}$. Finalizando com a conversão, ao mudar do registro figural para o registro numérico. De um modo geral espera-se que os alunos realizem esta atividade sem muitas dificuldades.

Análise a posteriori

Ao resolver a atividade 4 destacamos que nenhum aluno utilizou o segmento para resolver a questão, ou seja, nenhum dos alunos conseguem associar o conceito do número fracionário com uma unidade de comprimento. Todos desenharam um retângulo e dividiram o mesmo em cinco partes. Porém a Formadora solicitou que os alunos utilizassem o segmento.

Daí então, todos alunos utilizaram o segmento para desenhar um retângulo, como mostra a figura 12. Após, dividiram o todo que possuíam em cinco partes e dividiram cada uma das partes ao meio. Finalizando, responderam $\frac{1}{10}$ através do registro numérico.

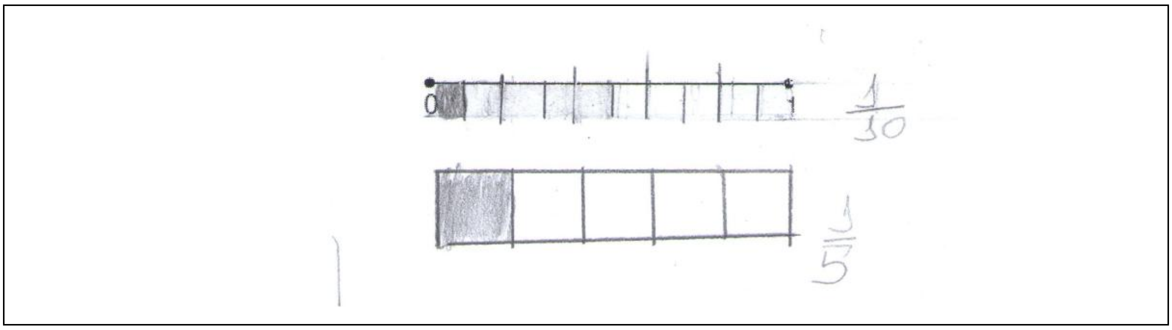


Figura 12 - Resolução da atividade 4 realizada pelo aluno D do Grupo 2

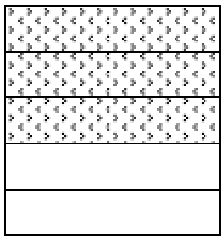
O objetivo desta atividade não foi atingido, pois nenhum dos alunos associou a concepção parte-todo com a de medida e, utilizou o segmento para resolução da atividade proposta. Percebemos que para os alunos a concepção de número fracionário está associada a área e não a uma unidade de comprimento. A Formadora finalizou com uma intervenção, mostrando aos alunos a relação existente entre as diferentes representações e a resolução que estava sendo solicitada.

Atividade 5

Pinte três quartos da parte que está hachurada na figura ao lado.

Que parte da figura você pintou?

Qual a sentença matemática que representa essa situação?



Analise a priori

Objetiva-se que o aluno utilize o conceito de medida e divida a figura em quatro partes e pinte $\frac{3}{4}$ da parte que foi dividida. Como a área de um retângulo é a multiplicação dos lados da figura teríamos, considerando a parte pintada, em um dos lados $\frac{3}{4}$ e em outro $\frac{3}{5}$, o que gera $\frac{3}{4} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{20}$. Espera-se que não haja dificuldades para resolução da atividade. Além de mobilizar os conhecimentos de parte-todo para compreensão da figura representada é necessário a identificação do número fracionário correspondente à parte pintada.

Análise a posteriori

Inicialmente os grupos perguntaram para a Formadora o significado da palavra hachurada.

Após, o Grupo 1 reproduziu o desenho abaixo da questão, porém não conseguiram mobilizar os conhecimentos anteriores, a Formadora então solicitou que resgatassem as ideias da concepção de medida discutidas na atividade anterior, então os Grupos associaram ao conceito de área.

O Grupo 1 dividiu a figura em quatro partes, representou através do número fracionário a quantidade pintada de cada lado, ou seja, $\frac{3}{4}$ e $\frac{3}{5}$, como mostra as figuras 13 e 14.

Para a representação da sentença o Grupo 1 mobilizou os conhecimentos de área discutindo o que seria a área de um retângulo. Identificaram os números fracionários correspondentes ao lado da parte pintada do retângulo e escreveram sua multiplicação. Em seguida representaram a sentença $\frac{3}{4} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{15}$.

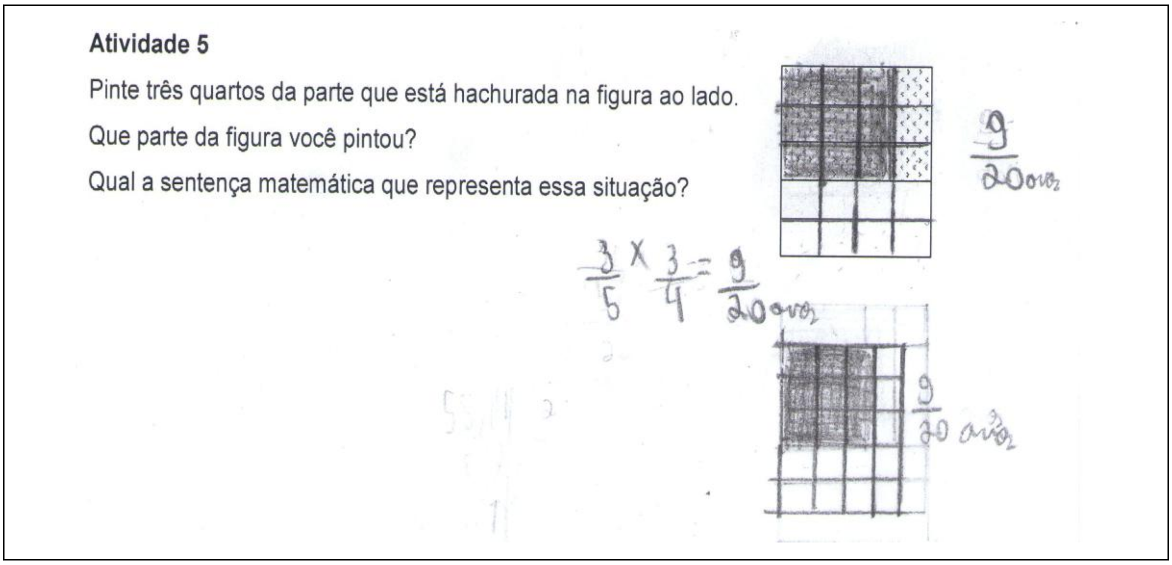


Figura 13 - Resolução da atividade 5 realizada pelo aluno C do Grupo 1

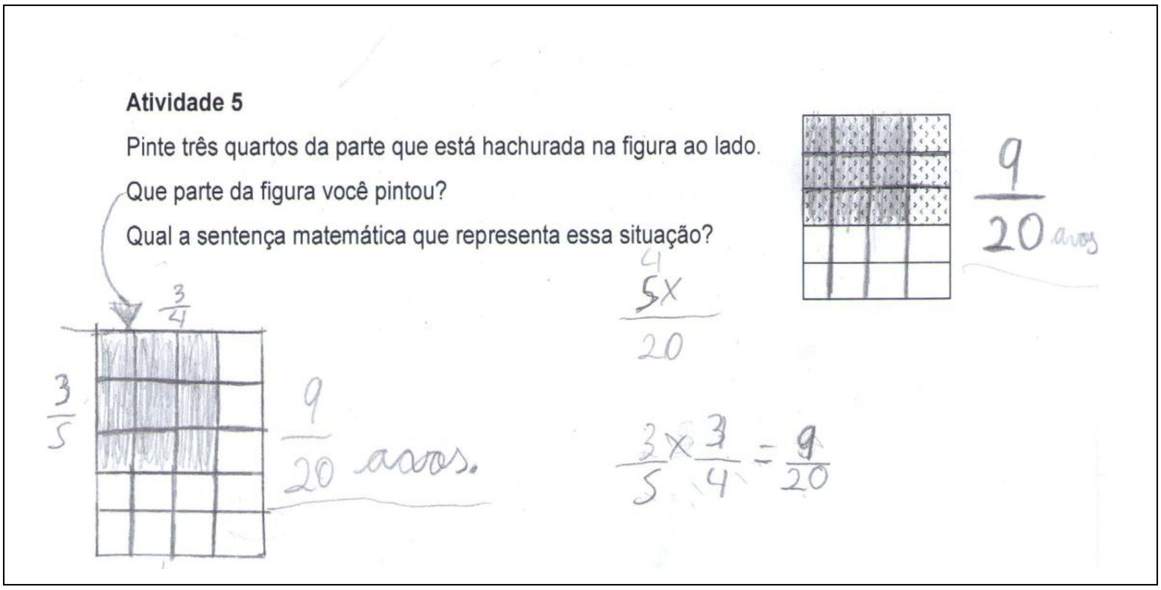
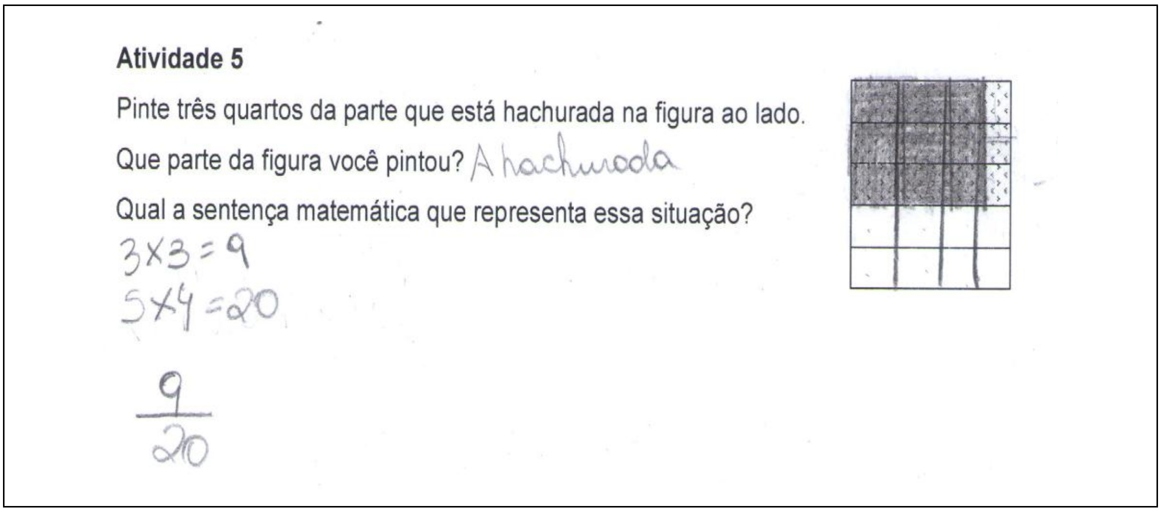


Figura 14 - Resolução da atividade 5 realizada pelo aluno B do Grupo 1

Destacamos que o Grupo 1representou a língua materna juntamente com a representação figural, como se ambas se correspondessem.

O Grupo 2 também dividiu a figura em quatro partes, porém ao pensar na área correspondente à parte pintada da figura, os mesmos não pensaram na fração, como mostra a figura 15. Fizeram a área da parte pintada, identificando a quantidade correspondente de cada lado, de um lado três quadradinhos pintados e de outro também, então a área da parte pintada seria 3 x 3 = 9. Após identificaram a área total do quadrado, de modo que havia 4 quadradinhos de um lado e cinco quadradinhos de outro, então a área seria 5 x 4 = 20. Para que posteriormente juntassem os resultados dizendo que a parte pintada é representada por $\frac{9}{20}$.



Atividade 5

Pinte três quartos da parte que está hachurada na figura ao lado.

Que parte da figura você pintou? A hachurada

Qual a sentença matemática que representa essa situação?

3x3 = 9

5x4 = 20

$\frac{9}{20}$

Figura 15 - Resolução da atividade 5 realizada pelo aluno F do Grupo 2

No Grupo 2 apenas o aluno D registrou a sentença matemática, os outros alunos apenas falaram.

Identificamos que os alunos não possuem a concepção de medida ligada ao número fracionário, pois novamente os alunos precisavam mobilizar tal conhecimento e sentiram dificuldade. Após com a ajuda da Formadora desenvolveram a atividade.

Os Grupos realizaram tratamento ao trabalhar com a figura no momento de dividir a mesma e analisar as quantidades correspondentes aos lados do retângulo. Após, conversão para escreverem a sentença matemática correspondente a área pintada encontrada: $\frac{3}{4} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{20}$. Podemos afirmar que apenas o Grupo 1 atingiu os objetivos da atividade, pois o Grupo 2 não pensou na fração inicialmente para dar a resposta da área correspondente à parte pintada, além de não realizar conversão de registro na representação da sentença.

<u>Atividade 6</u>

Pinte três quartos de quatro quintos do retângulo desenhado abaixo. Que parte do retângulo você pintou?

Dê a sentença matemática que representa a operação que você efetuou.

Analise a priori

Objetiva-se que o aluno trabalhe com o registro figural, dividindo o retângulo em quatro e cinco partes, de modo que, o mesmo deverá pintar a parte correspondente de ambas as frações, pintando as “três partes de quatro quintos”. Após realize a conversão para o registro numérico e finalize colocando a sentença: $\frac{3}{4}$x$\frac{4}{5} = \frac{12}{20}$. Espera-se que os alunos não encontrem dificuldades de dividir o inteiro e, posteriormente elaborar a sentença.

Análise a posteriori

Ao iniciar a atividade os alunos sentiram dificuldade de como iriam dividir a figura, então retomaram a atividade anterior. Posteriormente, dividiram a figura em cinco partes e representaram $\frac{4}{5}$, em seguida dividiram o outro lado em quatro partes e representaram $\frac{3}{4}$. Identificando a área comum, representaram, sem dificuldades, a sentença matemática, $\frac{4}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{12}{20}$.

A representação de todos os alunos foi similar, como mostra a figura 16.

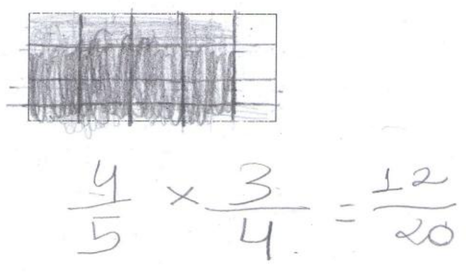


Figura 16 - Resolução da atividade 6 realizada pelo aluno E do Grupo 2

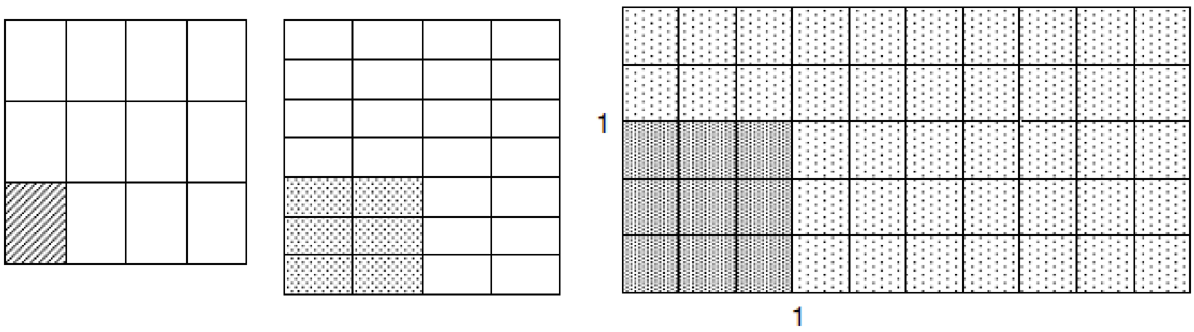
Destacamos a percepção, neste ponto do trabalho, que as representações dos alunos estavam muito similares, pois os dois Grupos estavam tão integrados nas atividades, discutindo e mobilizando o que havia sido feito anteriormente que o conteúdo da operação de multiplicação dos números fracionários estava ganhando significação mais consistente, além de uma representação mental por cada um dos integrantes. Assim, segundo CATTO (2000, p. 27): “As representações mentais são imagens ou concepções que um indivíduo tem a respeito de um objeto, uma situação ou problemática”.

Portanto, identificamos que os alunos sentiram uma facilidade maior ao realizar a atividade 6, pois já haviam discutido a concepção de medida nas atividades anteriores. A representação do registro figural, bem como seu tratamento, foi realizado sem dificuldades pelos alunos. Todos identificaram as “três partes de quatro quintos” que deveriam ser representadas. Em seguida a conversão para o registro numérico através da sentença matemática, $\frac{3}{4} \text{x} \frac{4}{5} = \frac{12}{20}$, foi também realizada com facilidade. Concluímos que os objetivos foram atingidos.

<u>Atividade 7</u>

Sabendo que a área de um retângulo é dada pela multiplicação das medidas da altura e da largura do retângulo, calcule a área da parte pintada das figuras baixo.

a) b) c)



Analise a priori

Objetiva-se que os alunos realizem conversão do registro figural para o registro numérico. Para resolver a questão da letra a) e b) o aluno pode mobilizar seus conhecimentos de parte-todo ou o mesmo pode analisar a medida através da área, identificando as quantidades correspondentes à parte pintada em cada lado do retângulo e concluindo que as áreas da letra a) e b) são correspondentes, respectivamente, à: $\frac{1}{3} \text{x} \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$ e $\frac{3}{7} \text{x} \frac{2}{4} = \frac{6}{28}$.

Para resolução da letra c) objetiva-se que o aluno realize tratamento na figura ao perceber as quantidades dos inteiros e das frações correspondentes e, posteriormente realize conversão entre o registro figural e o numérico. Para isso, espera-se que os alunos utilizem da contagem para definir a quantidade de inteiros que possui no todo e verificar quanto corresponde os quadradinhos que sobraram do total, utilizando para isso, o conceito de parte-todo. Aqui os alunos podem utilizar a notação da forma mista $5\frac{5}{9}$ ou podem pensar na notação fracionária $\frac{50}{9}$. Espera-se que as alternativas a) e b) sejam realizadas sem dificuldades, porém na alternativa c) os alunos podem sentir dificuldade em representar a quantidade não inteira de quadradinhos que sobrará ($\frac{5}{9}$).

Análise a posteriori

As alternativas a) e b) da atividade 7 foram realizadas tranquilamente por todos os alunos dos dois Grupos. Ao resolver a alternativa c) o Grupo 1 identificou o inteiro e iniciou a divisão restante dos quadrinhos para que posteriormente pudessem representar o mesmo.

Após discussão sobre como seria essa representação os alunos do Grupo 1, perceberam os cinco inteiros, dividindo- o na figura e representaram sem muitas dificuldades os $\frac{5}{9}$ restantes. Os alunos B e C do Grupo 1 misturaram a língua materna na representação numérica, como mostra a figura 17.

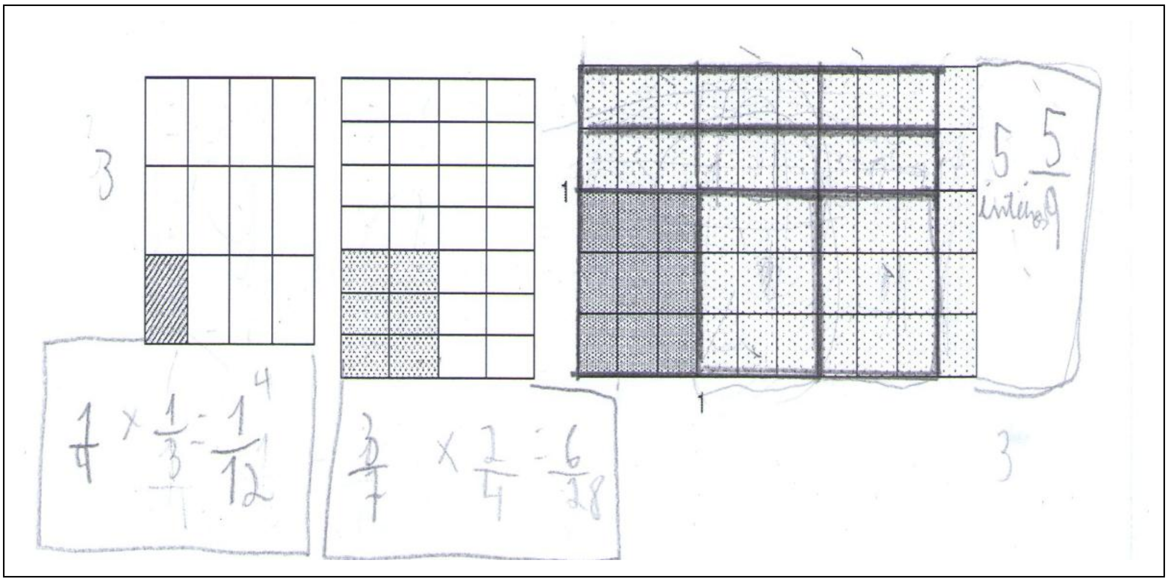


Figura 17 - Resolução da atividade 7 realizada pelo aluno C do Grupo 1

Os alunos do Grupo 2 questionaram o significado de um inteiro para a Formadora, que imediatamente, questionou como eles compreendiam o que estavam perguntando. Então, a aluna F perguntou se um inteiro seria correspondente ao desenho mais forte pintado na alternativa c), a partir daí, os alunos do Grupo 2 iniciaram a contagem da área correspondente a um inteiro e também passaram a dividir os quadrinhos que restavam.

O aluno D do Grupo 2 acompanhou o processo de discussão e participou do mesmo. Desenvolveu sem dificuldades as alternativas a) e b), porém na alternativa c) teve dificuldades para fazer a conversão entre o registro figural e o registro numérico.

O Grupo 2 discutiu com a Formadora o significado de parte-todo, e então, decidiram representar separadamente as quantidades que encontraram, como mostra a figura 18. Em seguida contaram quantos inteiros foram encontrados e quanto sobrou.

O aluno D escreveu com a língua materna que o resultado da quantidade de quadradinhos que não faziam parte de inteiros completos era “cinco partes de nove”. Posteriormente realizou a representação “5 inteiros e $\frac{5}{9}$”, porém o aluno estava misturando língua materna com a representação numérica.

A Formadora solicitou que o aluno representasse de outra maneira a mesma quantidade de quadradinhos, então o aluno D do Grupo 2 representou $\frac{45}{9}$.

Já a aluna E do Grupo 2, acompanhou toda a discussão do Grupo, especificamente do aluno D, mas representou os cinco inteiros e cinco nonos através de uma multiplicação de números fracionários, como mostra a figura 19.

Após, a Formadora solicitou que os grupos socializassem suas respostas para identificar as diferentes formas de representar uma mesma quantidade.

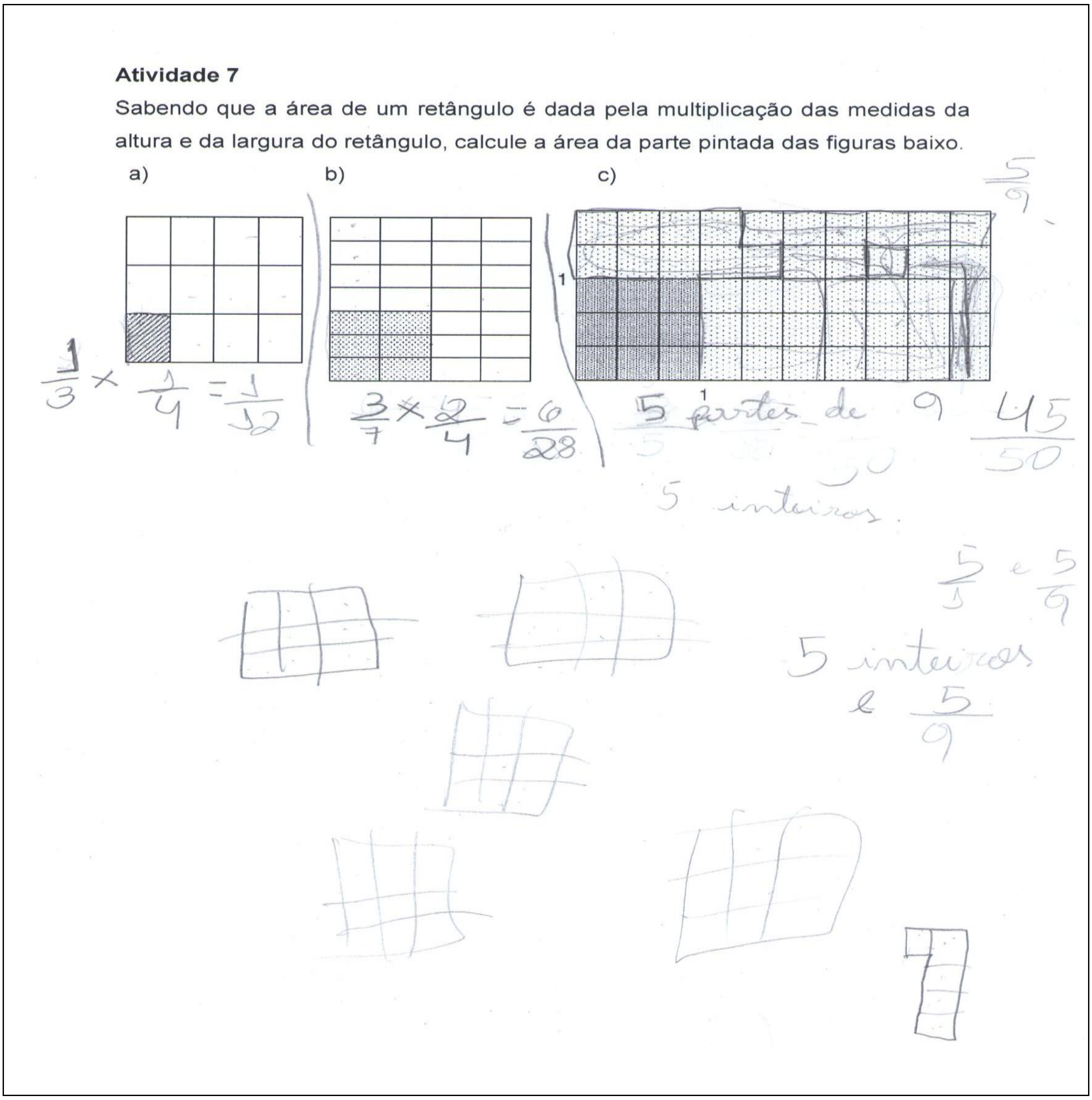


Figura 18 - Resolução da atividade 7 realizada pelo aluno D do Grupo 2

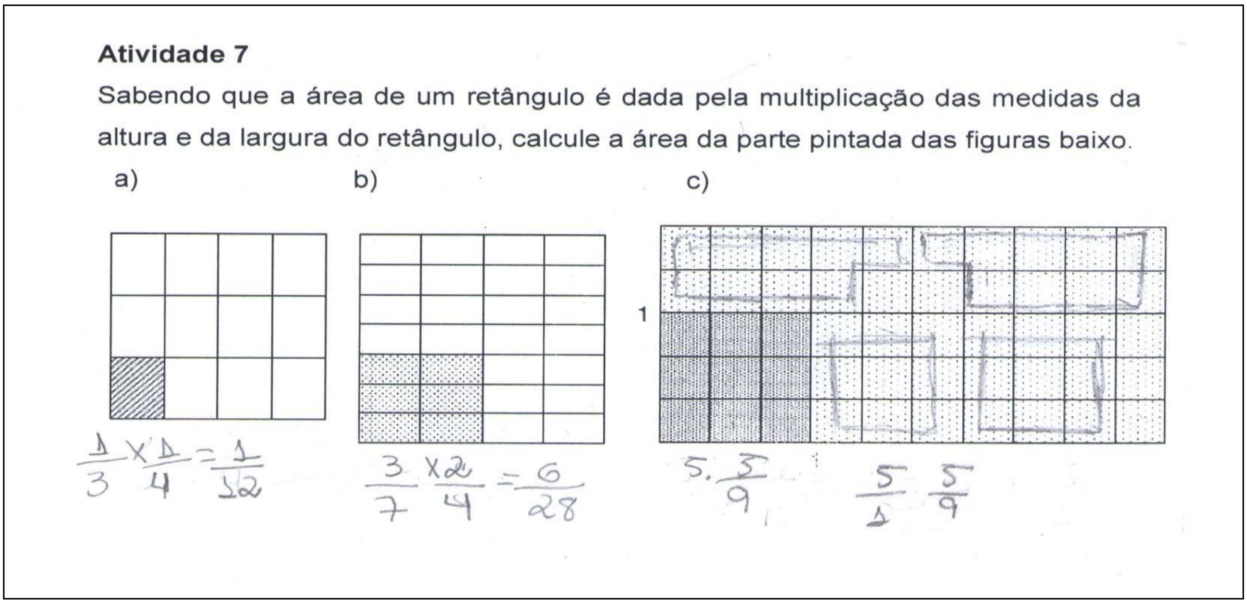


Figura 19 - Resolução da atividade 7 realizada pelo aluno E do Grupo 2

Identificamos que o objetivo da atividade foi atingido, pois todos alunos realizaram conversão do registro figural para o registro numérico nas alternativas a) e b), bem como compreenderam os tratamentos envolvidos na alternativa c) e realizaram conversão entre os registros figural e numérico.

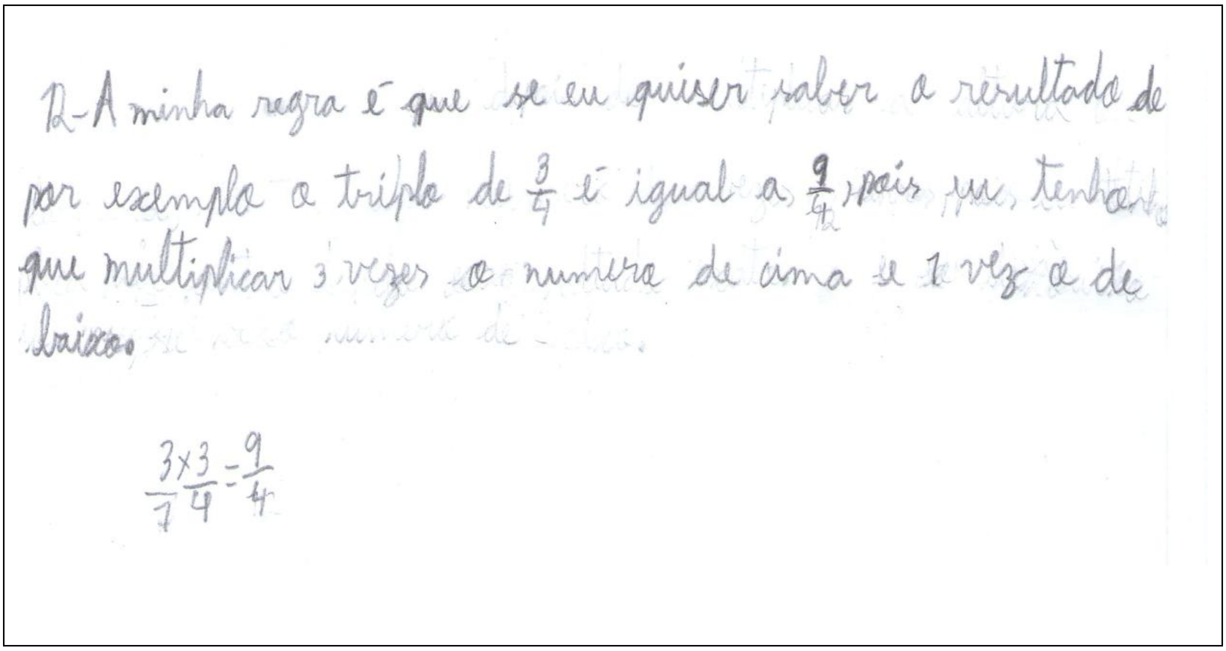
Atividade 8
Escreva uma regra para a multiplicação de números fracionários.

Analise a priori

Objetiva-se que o aluno após realizar todas essas atividades consiga descrever, seja matematicamente, seja pela língua materna, uma regra para a operação da multiplicação de números fracionários.

Análise a posteriori

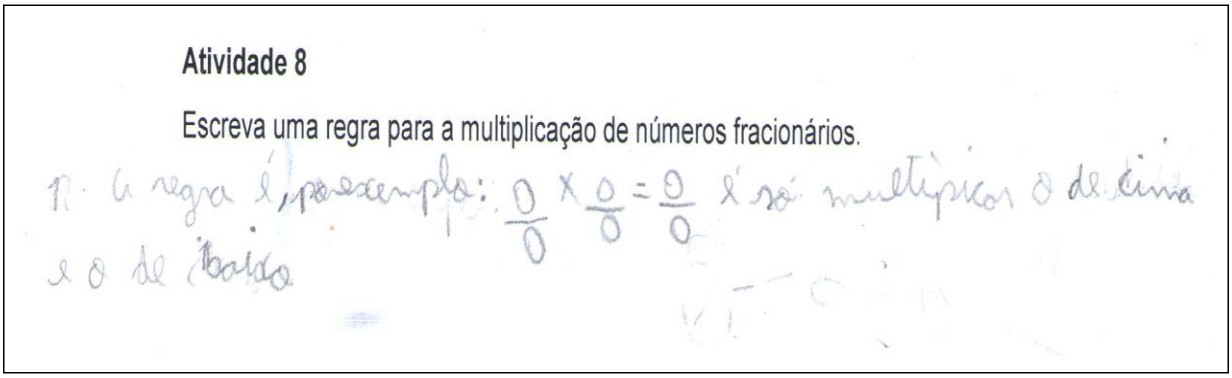
As atividades dos alunos A e B do Grupo 1 e dos alunos D, E e F do Grupo 2 se fundamentaram na língua materna para descrever uma regra para a operação da multiplicação dos números fracionários. Além de buscar exemplos numéricos para representar o que explicitaram através da língua materna. Veja um exemplo na figura 20.


R- A minha regra é que se eu quiser saber o resultado de por exemplo o triplo de $\frac{3}{4}$ é igual a $\frac{9}{4}$, pois eu tenho que multiplicar 3 vezes o numero de cima e 1 vez o de baixo.

$$\frac{3}{1}\times\frac{3}{4}=\frac{9}{4}$$

Figura 20 - Resolução da atividade 8 realizada pelo aluno B do Grupo 1

Já o aluno C do Grupo 1 buscou escrever a regra para operação da multiplicação dos números fracionários de forma distinta, como mostra a figura 21.


Atividade 8

Escreva uma regra para a multiplicação de números fracionários.

R: a regra é, por exemplo: $\frac{0}{0}\times\frac{0}{0}=\frac{0}{0}$ é só multiplicar o de cima e o de baixo

Figura 21 - Resolução da atividade 8 realizada pelo aluno C do Grupo 1

No momento em que a Formadora viu a produção do aluno C do Grupo 1, questionou o que ele havia escrito, pois a mesma ao ver a figura 21 pensou que o aluno havia representado a operação de multiplicação dos números fracionários utilizando como exemplo o número zero, porém o aluno explicou que havia utilizado bolinhas para representar números quaisquer. Entendemos que é um princípio de generalização, porém o aluno ainda, não possui elementos para compreender esse processo.

Concluímos, então, a partir das produções dos alunos e da conclusão da atividade 8 que a operação de multiplicação dos números fracionários foi finalizada com êxito.

Divisão

<u>Atividade 1</u>
a) Quantas metades cabem em um inteiro? Como você pode representar essa situação?
b) Quantos terços cabem em um inteiro? Como você pode representar essa situação?

Analise a priori

Objetiva-se que o aluno converta a língua materna para o registro figural e, mobilize os conhecimentos anteriores, para identificar que em um inteiro cabem duas metades e em um inteiro cabem três terços.

Análise a posteriori

Os alunos não sentiram dificuldades após interpretearem a pergunta na língua materna e compreenderem seu significado. Na alternativa a) os alunos A, B e C do Grupo 1 e os alunos E e F do Grupo 2 desenharam um inteiro, dividiram em dois e responderam 2 metades, como mostra a figura 22.

Figura 22 - Resolução da atividade 1 a) realizada pelo aluno C do Grupo 1

Já o aluno D do Grupo 2 representou seu inteiro com uma divisão de 64 quadradinhos e respondeu que cabiam 2 partes de 32 quadradinhos, como mostra a figura 23.

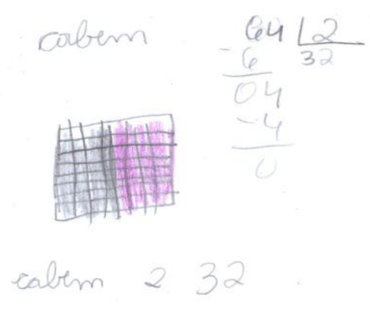


Figura 23 - Resolução da atividade 1 a) realizada pelo aluno D do Grupo 2

A alternativa b) foi realizada sem dificuldades por todos os alunos. Os alunos A, B e C do Grupo 1 e os alunos E e F do Grupo 2 desenharam um inteiro, dividiram em três e responderam 3 terços, como mostra a figura 24.

Figura 24 - Resolução da atividade 1 b) realizada pelo aluno C do Grupo 1

Já o aluno D do Grupo 2 representou seu inteiro com uma divisão de 54 quadradinhos e respondeu que cabiam 3 partes de 18 quadradinhos, como mostra a figura 25.

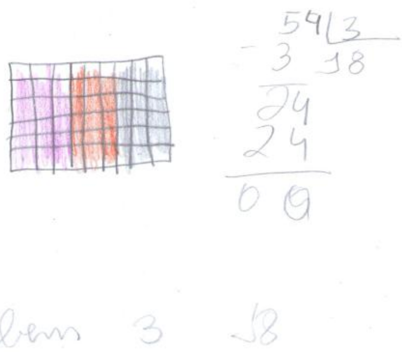


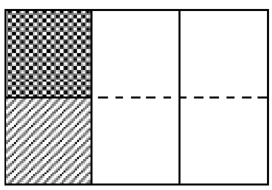
Figura 25 - Resolução da atividade 1 b) realizada pelo aluno D do Grupo 2

A atividade foi facilmente realizada e identificamos que seus objetivos foram plenamente atingidos, todos fizeram a representação figural além de realizar conversão, no momento que identificaram as quantidades solicitadas e representaram através da língua materna. Lembramos que apenas um aluno utilizou um recurso diferente do esperado, mas também realizou a mesma com êxito.

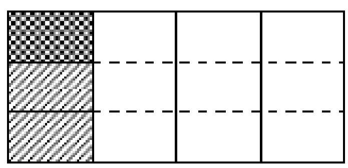
<u>Atividade 2</u>

Observe os desenhos abaixo e complete:

a) $\frac{1}{3} \div 2 =$



b) $\frac{1}{4} \div 3 =$



Analise a priori

Objetiva-se que a partir do registro numérico e do registro figural no enunciado do exercício o aluno realize a dupla contagem e consiga perceber que $\frac{1}{3} \div 2 = \frac{1}{6}$, ou seja, é o mesmo que encontrar a metade de um terço, ou seja, $\frac{1}{2} x\ \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$, assim como $\frac{1}{4} \div 3 = \frac{1}{12}$ ou seja, $\frac{1}{4} x\ \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$.

Análise a posteriori

Ao iniciar os grupos estavam com dificuldade, porém não estavam realizando muitas discussões, então a Formadora solicitou que relembrassem a atividade anterior para pensar nesta.

No Grupo 2, antes de retomar a atividade anterior o aluno D estava tentando elaborar uma regra para resolver o que estava sendo solicitado, porém sem conceito ou embasamento algum, como não funcionou, pois o mesmo percebeu que estava que não havia validade alguma e nem regularidade no que estava dizendo, pois não funcionava sempre igual, então voltaram a atividade anterior.

A aluna F do Grupo 2 assumiu as discussões conseguiu, com ajuda da Formadora, interpretar o significado da divisão, o que colaborou para compreender a figura proposta na atividade 2. A aluna questionou aos colegas o que significava dividir um terço por dois. Foi onde a aluna F percebeu que seria como se cada um ficasse com uma parte e respondeu $\frac{1}{6}$.

Os alunos D e E não entenderam, então a aluna F explicou para eles e perceberam que cada um havia ficado com uma parte de um terço, porém isso totalizavam seis partes no todo, então a resposta seria um sexto.

O Grupo 1 não compreendeu, então a Formadora solicitou que a aluna F do Grupo 2 explicasse para o outro Grupo. Iniciou explicando que dividir significava separar em partes iguais, porém eles iriam dividir apenas a parte pintada e iriam analisar o quanto cada um ganhou no total que havia.

Os alunos repetiram o mesmo processo na alternativa b.

Como inicialmente sentiram muitas dificuldades então a representação dos alunos ficou muito similar, tais como a figura 26 e 27 abaixo.

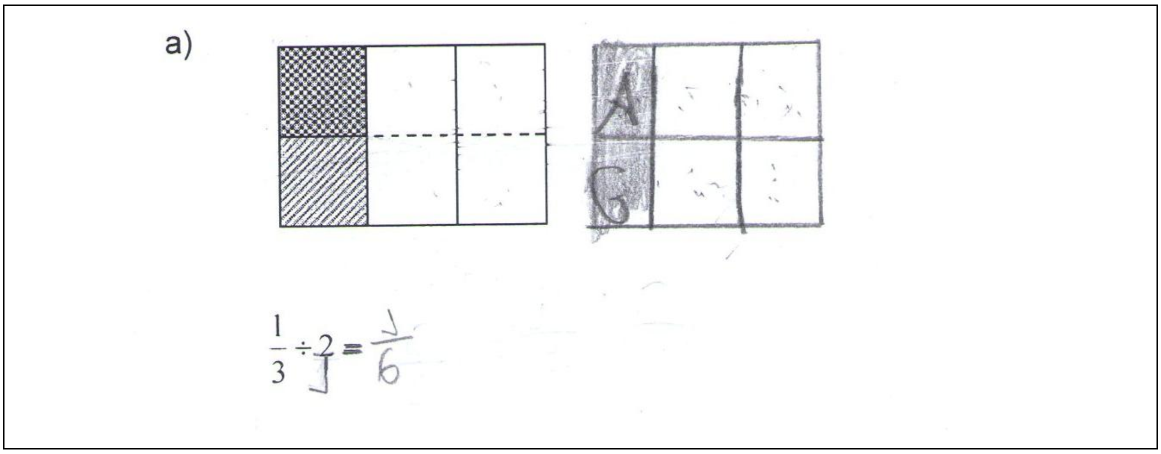


Figura 26 - Resolução da atividade 2 a) realizada pelo aluno F do Grupo 2

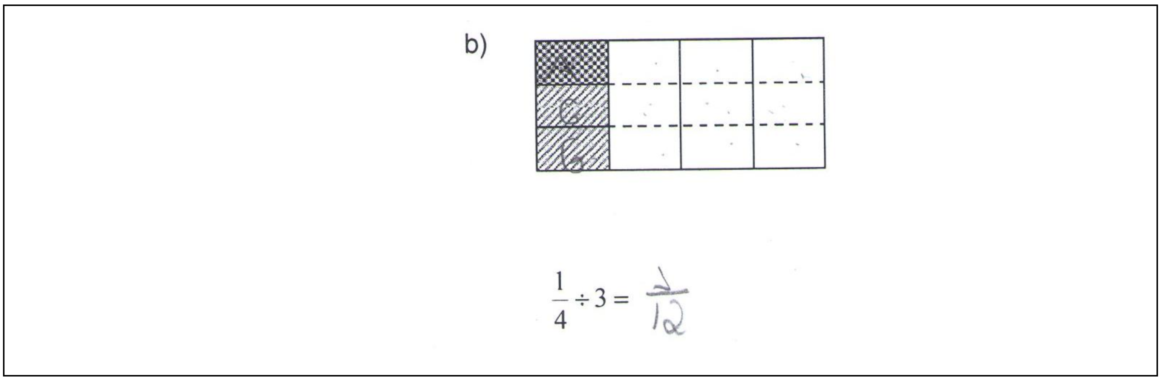
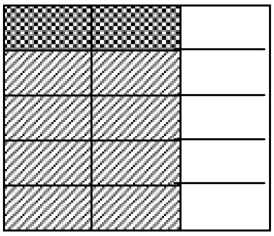


Figura 27 - Resolução da atividade 2 b) realizada pelo aluno F do Grupo 2

Identificamos que o objetivo da atividade foi atingido, pois no momento que a aluna F percebe o significado da divisão a mesma realiza tratamento no registro figural dado. Em seguida consegue converter o pensamento para o registro numérico e responder a questão. Esta realizou a dupla contagem e respondeu a questão corretamente. Finalizamos com a aluna F do Grupo 2 explicando o que compreendeu aos outros alunos e, conseqüentemente todos atingiram o objetivo da atividade.

<u>Atividade 3</u>

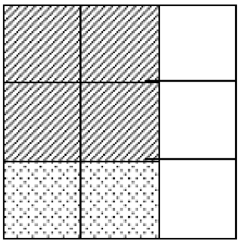
Observe os desenhos abaixo e responda:



Se um quinto de dois terços é $\frac{1}{5} \times \frac{2}{3} =$

Então podemos escrever que:

$\frac{2}{15} \div \frac{1}{5} =$ e $\frac{2}{15} \div \frac{2}{3} =$



Se um terço da metade é $\frac{1}{3} \times \frac{2}{3} =$

Então podemos escrever que:

$\frac{2}{9} \div \frac{1}{3} =$ e $\frac{2}{9} \div \frac{2}{3} =$

Analise a priori

Objetiva-se que o aluno associe a representação do registro figural e do registro numérico para responder as questões de divisão dos números fracionários propostas. Para isso, o aluno poderá mobilizar os conhecimentos do campo dos números naturais em que a divisão é a operação inversa da multiplicação e responder a questão sem dificuldades.

Análise a posteriori

Os Grupos resolveram a questão sem dificuldades. O Grupo 1 percebeu a operação inversa da multiplicação, pois quando estavam resolvendo comentaram. O Grupo 2 de forma um pouco mais mecânica também resolveu. Ambos os Grupos associaram a representação figural com a representação numérica.

Os registros de todos os alunos foi muito similar, por este motivo destacamos apenas um de cada alternativa. Na figura 28 a alternativa a) e na figura 29 a alternativa b).

$$\frac{2}{15} \div \frac{1}{5} = \frac{2}{3}$$

e

$$\frac{2}{15} \div \frac{2}{3} = \frac{1}{5}$$

Figura 28 - Resolução da atividade 3 a) realizada pelo aluno A do Grupo 1

$$\frac{2}{9} \div \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

e

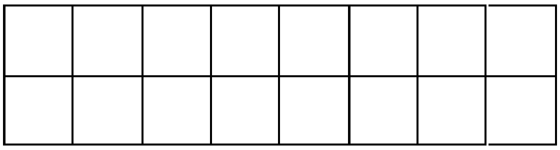
$$\frac{2}{9} \div \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

Figura 29 - Resolução da atividade 3 b) realizada pelo aluno A do Grupo 1

Os objetivos da atividade 3 foram atingidos plenamente, pois ambos os Grupos realizaram conversão entre os registros e responderam a questão na representação numérica, de modo que, o Grupo 1 destacou a divisão como operação inversa da multiplicação dos números fracionários.

<u>Atividade 4</u>

Quantos oitavos cabem em $\frac{1}{16}$? Dê a expressão matemática que representa a situação. Utilize a figura abaixo para ajudar na solução.



Analise a priori

Objetiva-se que o aluno realize conversão entre a língua materna e o registro figural. E, compreenda o significado da frase “quanto cabe” nesta representação, para que a partir desta, interpretação (perceber que em $\frac{1}{16}$ cabe a metade de $\frac{1}{8}$ e por este motivo o resultado é $\frac{1}{2}$), converta para o registro numérico. Espera-se que não haja dificuldades para resolver tal questão.

Análise a posteriori

O Grupo 2 iniciou a resolução da atividade através do desenho de $\frac{1}{16}$ e escreveram a expressão correspondente à resposta solicitada, $\frac{1}{16} \div \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$. Destacaram inclusive a fala “se é quanto cabe é como o outro”, como mostra a figura 30. Todas as representações do Grupo 2 foram similares a figura 30.

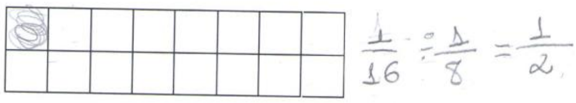


Figura 30 - Resolução da atividade 4 realizada pelo aluno E do Grupo 2

O Grupo 1 desenhou o inteiro novamente, dividindo em oito partes, representou $\frac{1}{8}$, porém não conseguia identificar a expressão.

A Formadora solicitou que retomassem as atividades anteriores, porém os alunos continuaram com dificuldades. Pediu, então, para que pensassem nos números naturais e questionou sobre o que acontecia nessas operações $8 \div 2 = 4$ e $4 \times 2 = 8$.

Os alunos do Grupo 1, escreveram as expressões $2 \div \frac{1}{16} = \frac{2}{8}$, e o aluno B escreveu a divisão da seguinte forma: $\div 2\frac{1}{16} = \frac{2}{8}$, mostrando não compreender o que estava acontecendo, como mostra a figura 31.

Em seguida, o aluno F do Grupo 2, ajudou o Grupo, dizendo que era para que considerarem o todo e pensar no quanto cabe, então os alunos reescreveram a expressão e compreenderam o que estava sendo solicitado.

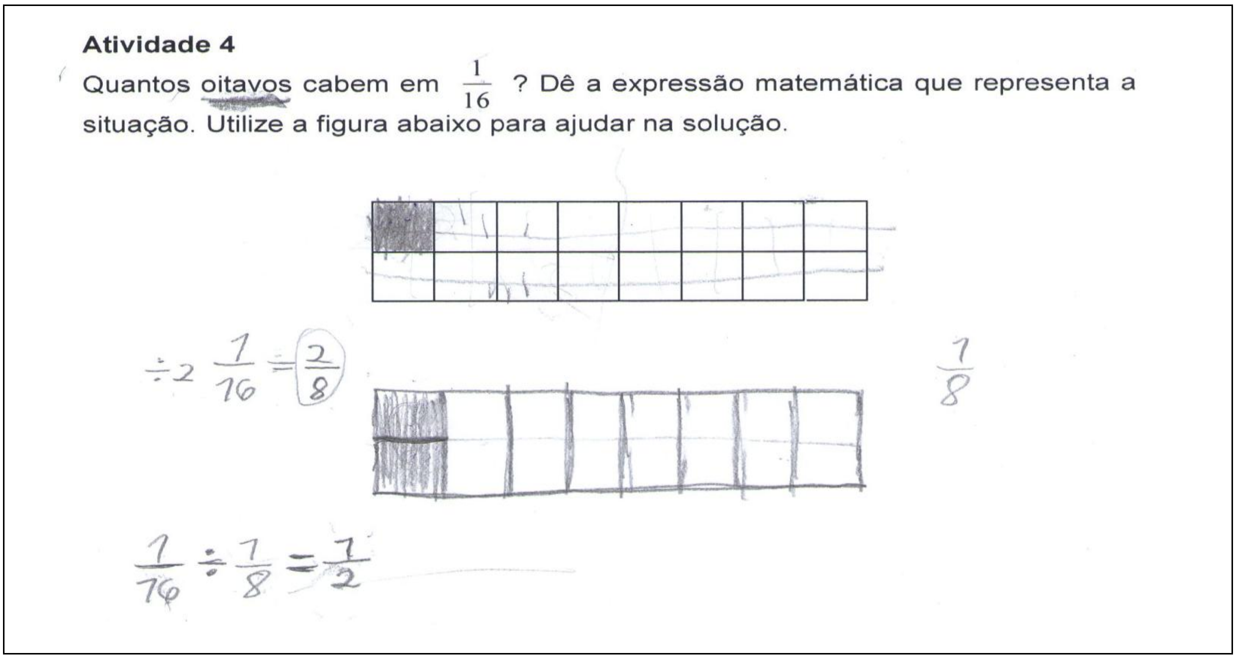


Figura 31 - Resolução da atividade 4 realizada pelo aluno B do Grupo 1

Após todo o processo identificamos que os objetivos foram atingidos, pois ao final o significado de “quanto cabe” fez sentido para todos integrantes dos grupos e todos trataram as figuras e converteram os registros.

<u>Atividade 5</u>

Quantos $\frac{1}{3}$ cabem em $\frac{1}{2}$? Utilize a figura abaixo para ajudar na solução.

$\frac{1}{2} \div \frac{1}{3} =$

Analise a priori

Objetivamos que o aluno converta língua materna para representação figural e finalizar com a conversão da representação figural em representação numérica.

Para isso, o aluno poderá representar $\frac{1}{2}$ na figura e em seguida identificar quantos $\frac{1}{3}$ cabem na parte dividida, ou seja, em metade da figura. Identifica-se uma possibilidade do aluno sentir dificuldade, pois encontraremos como resposta um inteiro e meio, ou seja, $\frac{3}{2}$. Dessa forma, podemos escrever: $\frac{1}{2} \div \frac{1}{3} = \frac{3}{2}$.

Análise a posteriori

O Grupo 1 iniciou a resolução desta atividade fazendo a multiplicação do número fracionário, $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$, como mostra a figura 32 e em seguida dividiram a figura do exercício em seis partes. Após perceberam o sinal de divisão, porém como havia sido solicitado anteriormente que não apagassem as resoluções, então os mesmos deixaram no papel e iniciaram novamente.

Desenharam, abaixo da figura proposta no exercício, dois inteiros. O primeiro foi dividido em três partes e o segundo foi dividido em duas. Após representaram $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{2}$ respectivamente em cada figura. Compararam ambas e escreveram “1 inteiro e $\frac{1}{2}$” misturando novamente o registro da língua materna e da representação numérica.

Após intervenção da Formadora, que solicitou que representassem aquela quantidade de outra maneira, escreveram a soma de frações: $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} =$, e em seguida: $\frac{2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

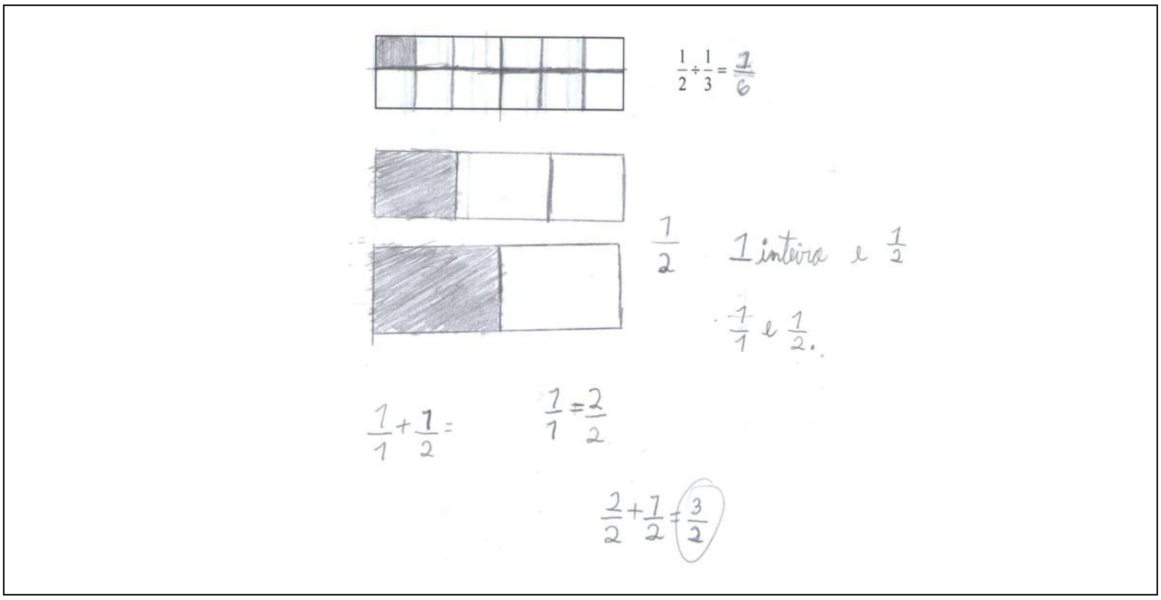


Figura 32 - Resolução da atividade 5 realizada pelo aluno B do Grupo 1

O Grupo 2 seguiu o mesmo processo do Grupo, porém com uma dificuldade maior, então a aluna B do Grupo 1 orientou o Grupo 2 no momento de interpretar a figura que eles desenharam.

O aluno D do Grupo 2 pintou sua figura, o que colaborou para que o mesmo pudesse identificar que a parte vermelha era metade da parte verde, como mostra a figura 33.

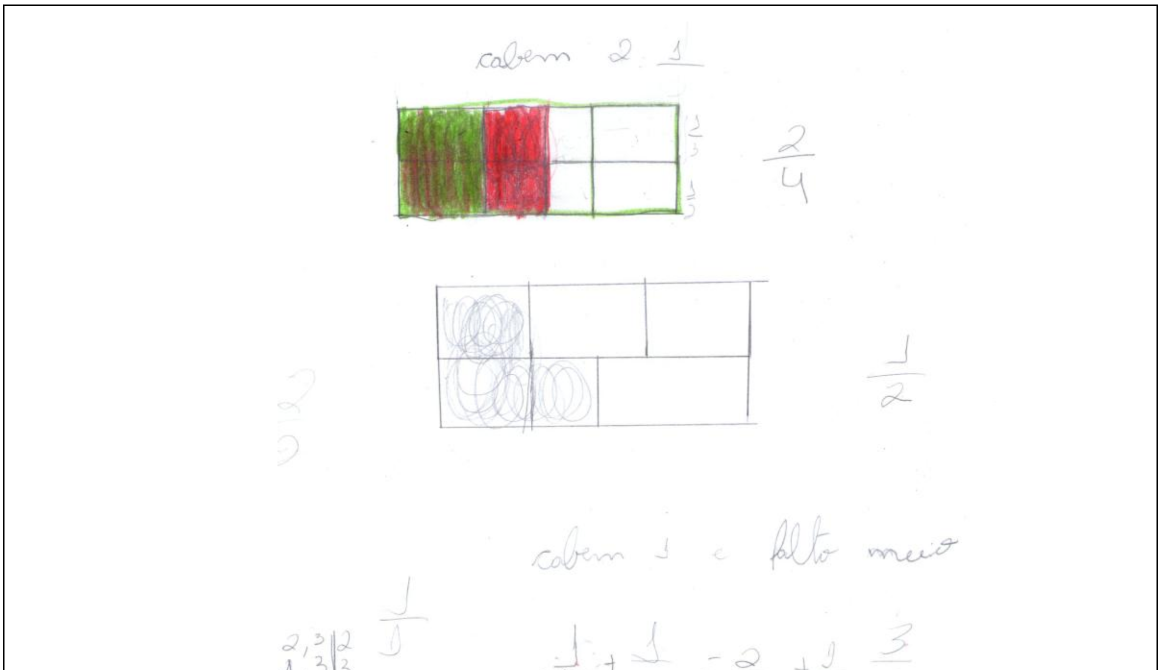


Figura 33 - Resolução da atividade 5 realizada pelo aluno D do Grupo 2

Novamente identificamos, nesta etapa do trabalho que a integração e o trabalho em grupo dos alunos estavam colaborando para que os mesmos desenvolvessem uma significação consistente com relação à operação inversa da multiplicação dos números fracionários, ou seja, a divisão dos números fracionários.

Os objetivos desta atividade foram atingidos, pois os tratamentos e as conversões foram realizados com êxito. Gostaria de ressaltar que houve uma facilidade para resolução da atividade proposta maior do que esperávamos. Analisando o processo identificamos que o modo como estão trabalhando colabora para tal.

<u>Atividade 6</u> a) Quantos quartos cabem em um quinto? Escreva a expressão. b) Quantos terços cabem em um inteiro? Escreva a expressão.

Analise a priori

Objetiva-se que os alunos resolvam operações de divisão com frações com denominadores não diviseis, mobilizando seus conhecimentos de frações equivalentes. Na alternativa a) a quantidade representada será $\frac{1}{5} \div \frac{1}{4}$ desta forma, para resolver tal questão o aluno deve trabalhar com o conceito de frações equivalentes, caso ele ainda não tenha percebido que a resposta da divisão proposta é a multiplicação da primeira fração pela inversão da segunda. Neste caso ficaria: $\frac{1}{5} \div \frac{1}{4} = \frac{4}{20} \div \frac{5}{20} = \frac{4}{5}$. Analogamente na alternativa b) teríamos: $\frac{3}{5} \div \frac{1}{3} = \frac{9}{15} \div \frac{5}{15} = \frac{9}{5}$.

Análise a posteriori

O Grupo 1 iniciou pela representação figural e em seguida perceberam que não conseguiriam comensurar através da figura, o que fizeram os mesmos tentar apagá-la. Buscaram outro tipo de registro, o registro numérico. Escreveram o mesmo, sem dificuldades, porém ao dar a resposta da divisão dos números fracionários os alunos perceberam que os números do denominador não eram divisíveis. Sentiram grande dificuldade, a Formadora solicitou que pensassem nos conhecimentos que já possuíam, então o aluno C falou da fração equivalente.

Após buscaram as frações equivalentes das frações que possuíam anteriormente, $\frac{1}{5} \div \frac{1}{4} =$, e deram a resposta: $\frac{4}{20} \div \frac{5}{20} = \frac{4}{5}$. Abaixo está a figura 34 da alternativa a) do Grupo 1, de modo que todas foram similares.

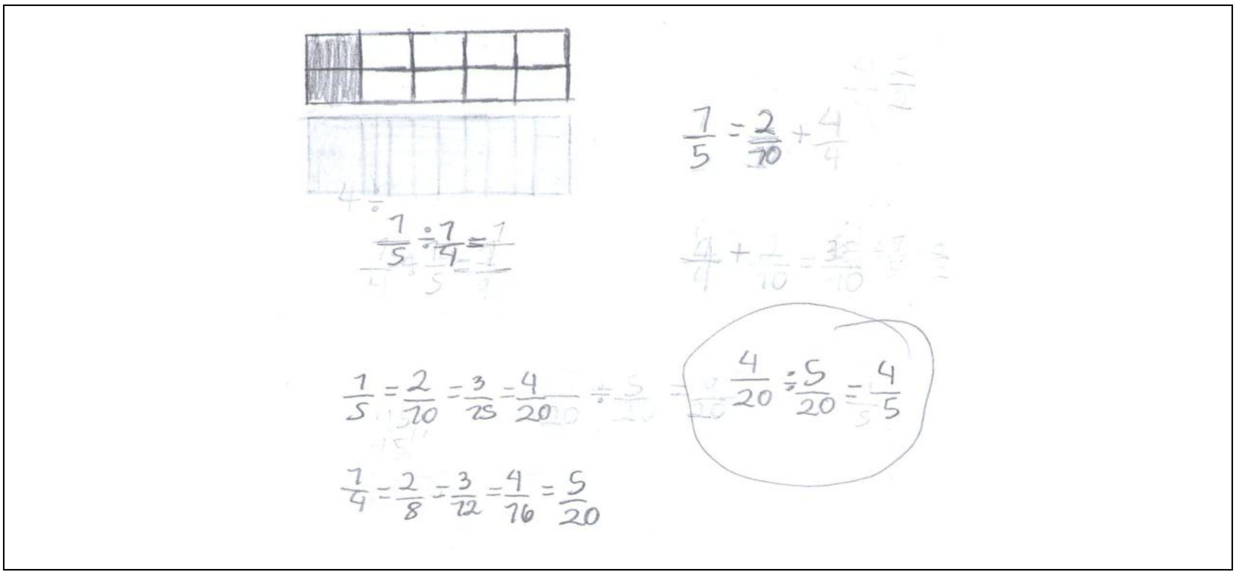


Figura 34 - Resolução da atividade 6 a) realizada pelo aluno B do Grupo 1

O Grupo 2 recebeu ajuda do Grupo 1.

Sendo assim buscaram resolver pelo mesmo processo, porém a aluna F buscou fazer como na atividade anterior realizando a representação figural o que não obteve um resultado satisfatório, pois diferentemente da atividade anterior, temos que nesta atividade a quantidade que ultrapassa a parte de um inteiro à outro não é facilmente mensurável, como mostra a figura 35. A aluna F não conseguia comparar as figuras, então a aluna B, sugeriu a modificação do registro.

Desta forma, finalizaram a atividade.

Após participar da discussão o aluno D do Grupo 2 resolveu a atividade 6 baseado apenas na representação numérica.

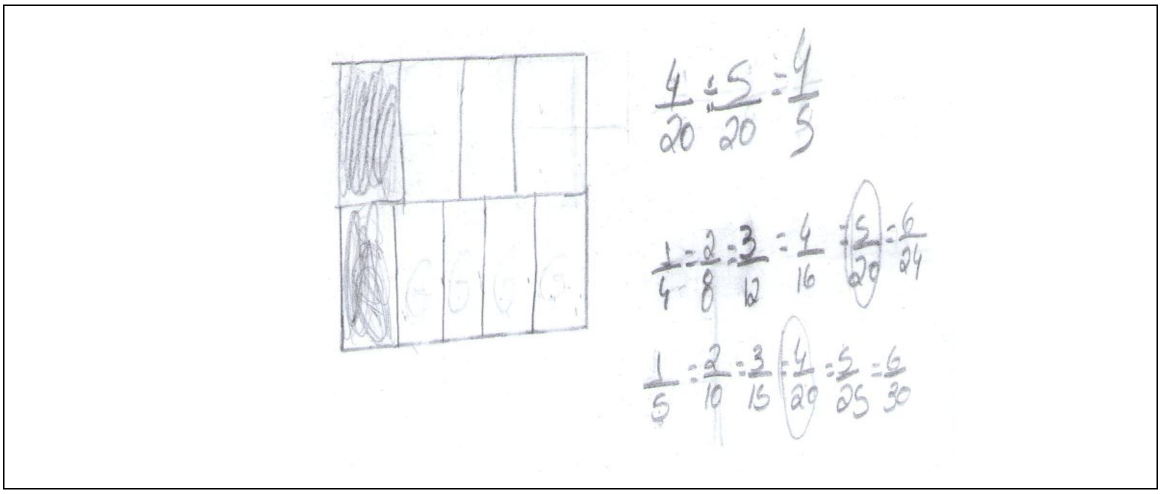


Figura 35 - Resolução da atividade 6 a) realizada pelo aluno F do Grupo 2

Identificamos que todos alunos (dos dois grupos) quando buscaram uma fração equivalente a uma fração que eles já possuíam, estes escrevem uma igualdade de frações equivalentes até encontrar o número no denominador que buscavam.

Abaixo apresentamos as figuras 36 e 37 correspondentes a resolução da alternativa b).

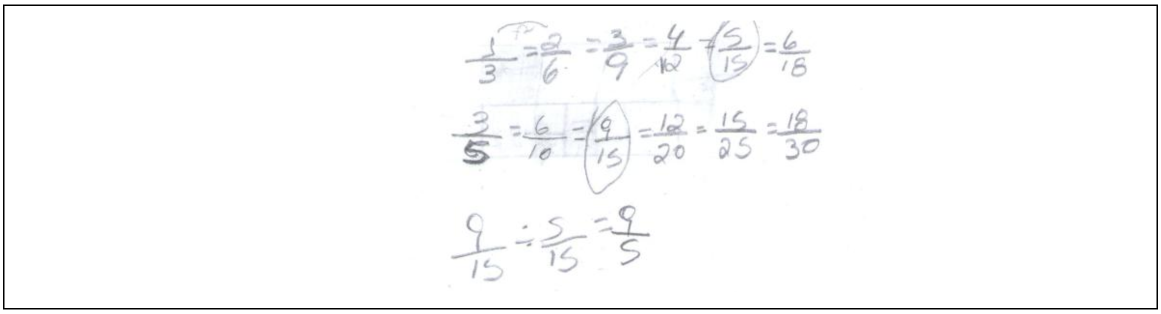


Figura 36 - Resolução da atividade 6 b) realizada pelo aluno F do Grupo 2

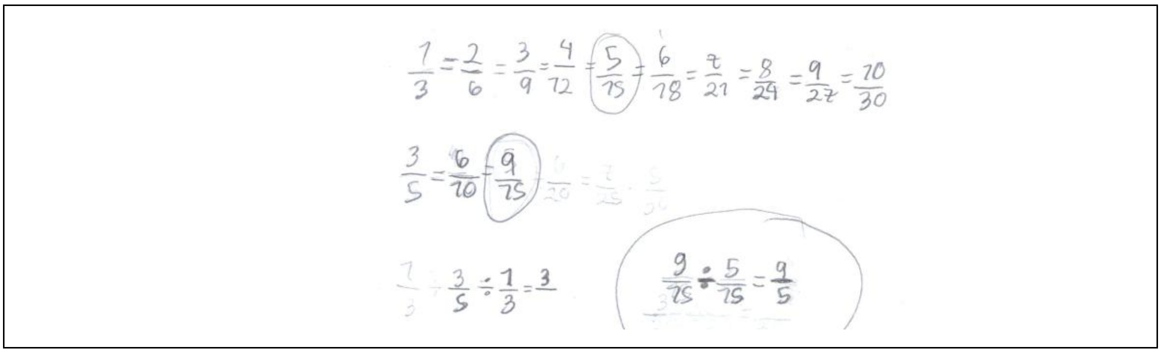


Figura 37 - Resolução da atividade 6 b) realizada pelo aluno B do Grupo 1

Concluímos que a atividade 6 teve seus objetivos atingidos, pois os alunos mobilizaram seus conhecimentos anteriores de frações equivalentes para resolução da divisão dos números fracionários não divisíveis no denominador. Além de perceberem que há momentos que um registro é mais adequado do que outro para resolução do problema proposto.

Atividade 7

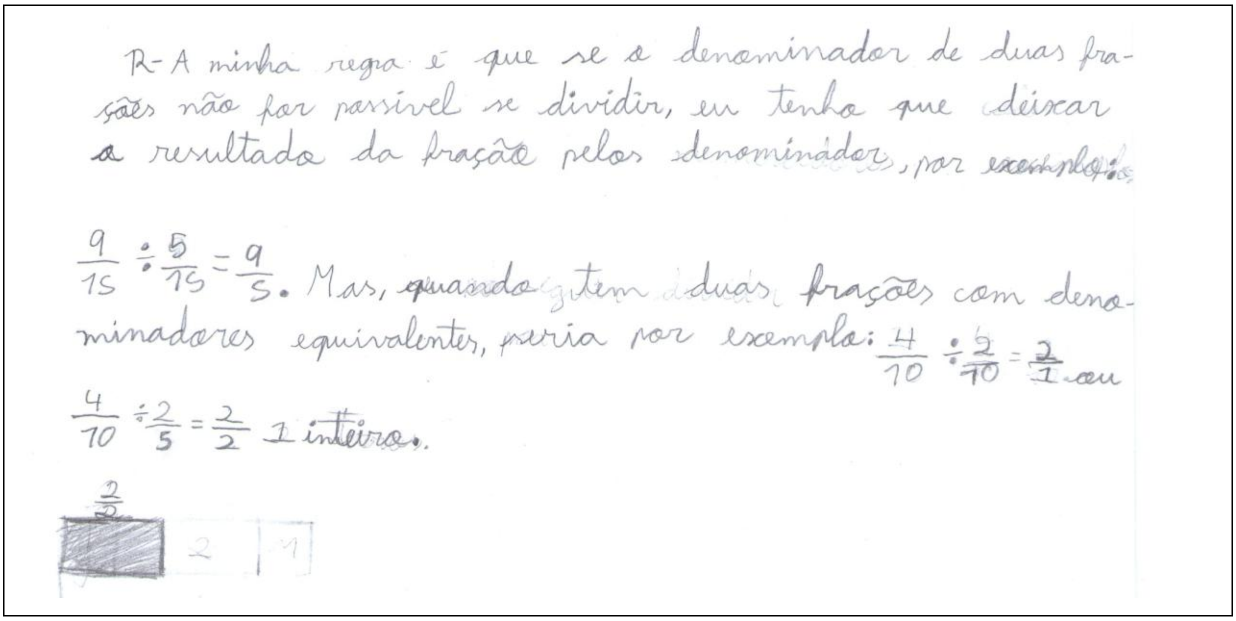
Escreva uma regra que mostre como dividir duas frações quaisquer.

Analise a priori

Objetiva-se que os alunos mobilizem os conhecimentos anteriores e elaborem uma regra para a divisão dos números fracionários. Espera-se que os alunos não tenham dificuldades em estar explicitando a regra ou pela língua materna ou por uma linguagem matemática.

Análise a posteriori

O aluno B do Grupo 1 e os alunos E e F do Grupo 2 retomaram a atividade anterior e escreveram com base na língua materna a regra para a divisão dos números fracionários. O aluno A do Grupo 1 e o aluno D do Grupo 2 escreveram a regra sem dificuldades, também, com base na língua materna. Abaixo apresentamos a figura 38 como exemplo da produção da atividade 7 da divisão dos números fracionários.



R- A minha regra é que se o denominador de duas frações não for possível se dividir, eu tenho que deixar o resultado da fração pelos denominador, por exemplo:

$\frac{9}{15} \div \frac{5}{15} = \frac{9}{5}$. Mas, quando tem duas frações com denominadores equivalentes, seria por exemplo: $\frac{4}{10} \div \frac{2}{10} = \frac{2}{1}$ ou

$\frac{4}{10} \div \frac{2}{5} = \frac{2}{2}$ 1 inteiro.

Figura 38 - Resolução da atividade 8 realizada pelo aluno B do Grupo 1

O aluno C do Grupo 1 novamente apresentou a regra a partir de símbolos, neste caso, utilizando bolinha e quadradinhos para representar os números. Veja na figura 39.

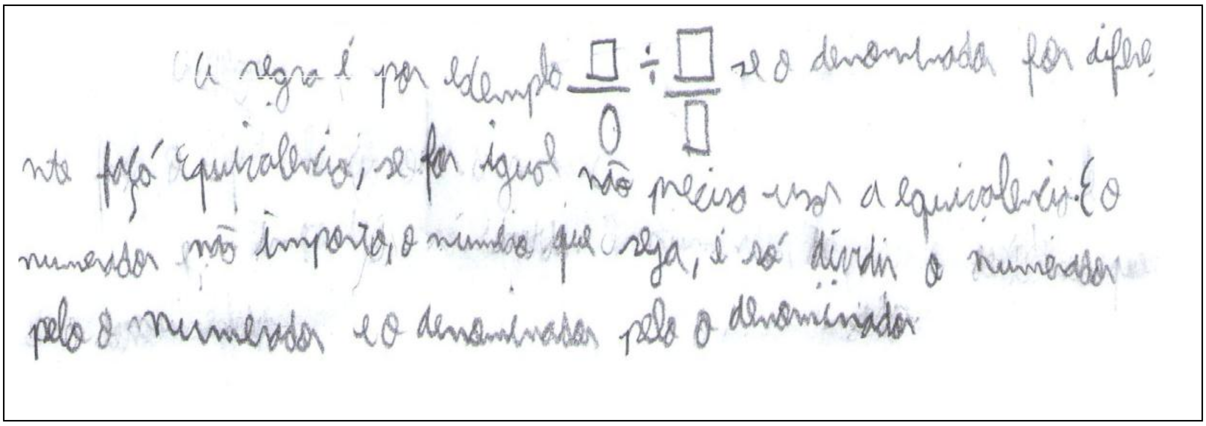

A regra é por exemplo $\frac{\square}{\bigcirc} \div \frac{\square}{\square}$ se o denominador for diferente faço equivalência, se for igual não preciso usar a equivalência. E o numerador não importa o número que seja, é só dividir o numerador pelo o numerador e o denominador pelo o denominador

Figura 39 - Resolução da atividade 8 realizada pelo aluno C do Grupo 1

Identificamos que os objetivos da atividade 7 foram atingidos, pois todos conseguiram explicitar suas regras para a divisão dos números fracionários.

<u>Atividade 8</u>

Efetue os cálculos abaixo:

a) $7 \times \frac{1}{5} =$

b) $\frac{1}{10} \times \frac{1}{6} =$

c) $\frac{2}{5} \times \frac{1}{3} =$

d) $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{5}{4} =$

e) $\frac{1}{8} \div 2 =$

f) $\frac{2}{16} \div \frac{1}{8} =$

g) $\frac{6}{16} \div \frac{1}{8} =$

h) $\frac{10}{16} \div \frac{5}{8} =$

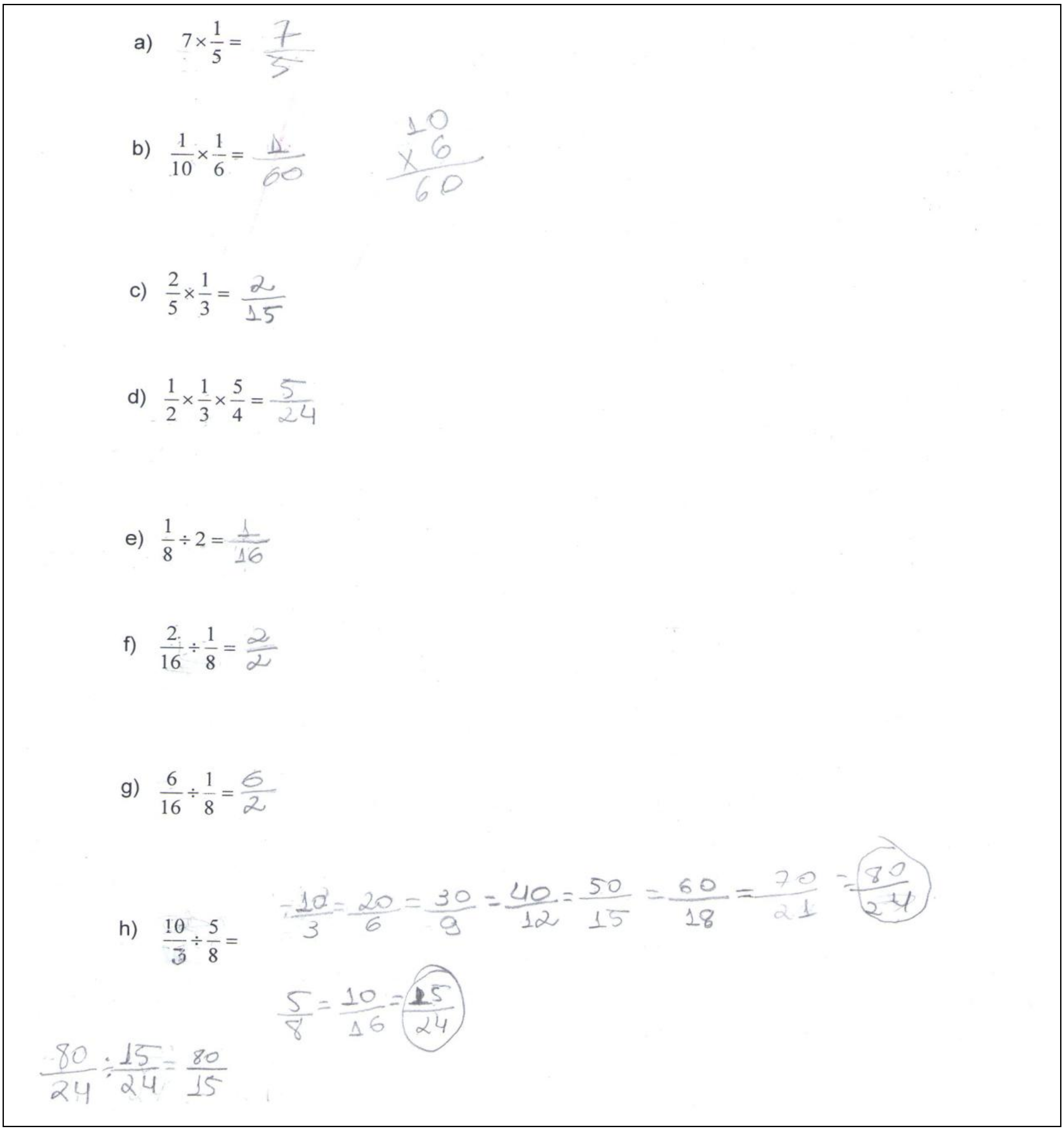
Analise a priori

Finalizamos com esta atividade, a qual objetiva identificar se ao fim da sequencia os alunos compreenderam os conceitos trabalhados e conseguem aplicar os mesmos em uma atividade. Esta será realizada individualmente.

Análise a posteriori

O aluno D do Grupo 2 realizou a atividade sem dificuldade alguma. Porém todos os outros alunos apresentaram grande dificuldade com o conceito de fração equivalente. Para resolver tal dificuldade a Formadora e a Observadora auxiliaram os alunos na resolução da atividade 8. Todas ficaram similares como da figura 40.

A Formadora e a Observadora não compreenderam o que havia acontecido, pois este era um conceito que todos os alunos participantes trabalhavam bem anteriormente e ao iniciar a aplicação da sequencia os mesmos já possuíam esses conceitos.



a) $7 \times \frac{1}{5} = \frac{7}{5}$

b) $\frac{1}{10} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{60}$ $\quad \begin{array}{r} 10 \\ \times\ 6 \\ \hline 60 \end{array}$

c) $\frac{2}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{15}$

d) $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{5}{4} = \frac{5}{24}$

e) $\frac{1}{8} \div 2 = \frac{1}{16}$

f) $\frac{2}{16} \div \frac{1}{8} = \frac{2}{2}$

g) $\frac{6}{16} \div \frac{1}{8} = \frac{6}{2}$

h) $\frac{10}{3} \div \frac{5}{8} =$ $\frac{10}{3} = \frac{20}{6} = \frac{30}{9} = \frac{40}{12} = \frac{50}{15} = \frac{60}{18} = \frac{70}{21} = \frac{80}{24}$

$\frac{5}{8} = \frac{10}{16} = \frac{15}{24}$

$\frac{80}{24} \div \frac{15}{24} = \frac{80}{15}$

Figura 40 - Resolução da atividade 8 realizada pelo aluno E do Grupo 2

Após analisar o que havia acontecido e conversar com os alunos a Formadora descobriu que houve uma substituição de aula de matemática e o professor substituto “ensinou” erroneamente o conceito de fração equivalente, o que gerou confusão para os alunos que não possuíam este conteúdo consistente ainda.

Decidimos então finalizar com mais um dia de conversa, que entendemos que seria uma institucionalização, com o objetivo de esclarecer as dúvidas que os alunos possuíam.

A atividade terminou sem seus objetivos serem atingidos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A realização desta pesquisa teve como objetivo analisar os registros de representação que um grupo de alunos da 5ª série produziu na aplicação de uma sequencia de ensino para o ensino das operações de multiplicação e divisão do número fracionário.

Buscando atingir nosso objetivo desenvolvemos um estudo para compreensão das dificuldades que permeiam o processo educativo do conteúdo dos números racionais. Além de identificar o insucesso dos alunos ao tratar deste conteúdo nas avaliações oficiais, tais como, Sistema de Avaliação e Rendimento Escolar do Estado de São Paulo, SARESP (SÃO PAULO, 2009). Sabemos que este conteúdo é marcado pela ausência de entendimento por parte dos alunos de uma maneira geral. Porém entendemos que uma alternativa de mudar este quadro é trabalhar com este conteúdo de outra forma do que o aluno não esteja acostumado.

Desta forma desenvolvemos uma pesquisa para identificar que tipo de pesquisa os autores estão desenvolvendo ao pensarmos nas operações de números fracionários, porém identificamos, e, Silva (2005) constatou que há uma escassez de trabalhos nesta área, o que dificulta a superação das dificuldades no ensino desses conteúdos.

Por entender a importância de um trabalho com as operações com o número fracionário analisamos a aplicação de uma sequência didática sob a luz teórica dos Registros de Representação Semiótica de Duval (1999 apud ALMOULOUD, 2007) e identificamos que os alunos realizam constantemente tratamento e conversão no momento que precisam responder uma atividade, além de mobilizar seus conhecimentos anteriores.

Sendo assim, retomamos a questão da pesquisa: Os alunos da 5ª série/ 6° ano do Ensino Fundamental, realizam tratamento e conversão no desenvolvimento de atividades que envolvem operações de Multiplicação e Divisão com números fracionários?

Identificamos através da aplicação das atividades que os alunos realizaram tratamento ao reconfigurar o registro que estava sendo proposto, além de realizar cálculos internamente em um mesmo registro, ou seja, foram realizadas operações realizadas a partir de uma representação em outra representação do mesmo registro. E a conversão de registros aconteceu entre língua materna, o registro figural e o registro numérico, de forma que a sequencia não priorizou nenhum sentido de conversão, ou seja, as conversões aconteceram em diferentes sentidos mudando de um registro ao outro no desenvolvimento das atividades.

Concluímos a partir da análise das atividades que os alunos tiveram um bom aproveitamento com relação à sequencia aplicada das operações de multiplicação e divisão dos números fracionários e conseguimos contribuir com o ensino dessas operações, uma vez que foram identificados, através dos registros de representação dos alunos elementos constituintes de suas estruturas intelectuais e mentais.

Acreditamos ter respondido a questão de pesquisa e gostaríamos de destacar que os alunos que participaram da pesquisa possuem diferentes dificuldades, o que permitiu que desenvolvessem discussões importantes. Mesmo dificuldades de diferentes níveis todos desenvolveram as atividades com êxito. Identificamos também que ao alunos estão acostumados a associar o número fracionário à uma área e não a uma unidade de comprimento, o que deve ser desenvolvido e trabalhado com os mesmos.

Um destaque negativo foi a interferência de uma professora que foi substituir uma aula e confundiu o conceito de frações equivalentes dos alunos. Desta forma, pudemos identificar que a atuação errônea de um profissional da educação pode gerar sérias consequencias para os alunos e muitas vezes irreversíveis.

REFERÊNCIAS

AUMOULOUD, S. A. **Fundamentos da didática da matemática**. Curitiba: Ed. UFPR, 2007

BEZERRA, F. J. **Introdução do conceito de número fracionário e suas representações:** uma abordagem criativa para sala de aula. 2001. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2001.

CARAÇA, B. J. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. Lisboa. 1951

CATTO, G. G. **Registros de representação e o número racional: uma abordagem nos livros didáticos.** 2000. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2000.

MERLINI, V. L. **O conceito de fração em seus diferentes significados:** um estudo diagnóstico com alunos de 5ª e 6ª série do ensino fundamental . 2005. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática. Brasília, DF, 1997.

SÃO PAULO, Secretaria de Educação. **SARESP 2008:** Relatório Pedagógico: Matemática. São Paulo:SEE, 2009.

SILVA, M. J. F. **Investigando Saberes de Professores do Ensino Fundamental com Enfoque em Números Fracionários para a Quinta Série**. 2005. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

ANEXO A: A SEQUÊNCIA DE ENSINO

Nome:____

Atividade 1

Represente por uma figura a expressão $2 \times \frac{1}{5}$ e o seu resultado.

Atividade 2

Dê a expressão matemática e calcule:

a) o dobro de $\frac{2}{3}$

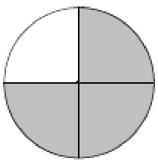
b) o triplo de $\frac{2}{5}$

c) o quádruplo de $\frac{1}{5}$

d) o quíntuplo de $\frac{3}{7}$

Atividade 3

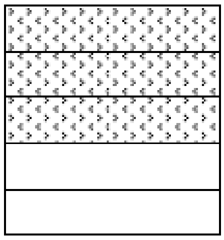
Pinte a metade ($\frac{1}{2}$) da parte colorida do disco. Que fração do disco você pintou?



Atividade 4

Pinte a metade de um quinto do segmento abaixo e determine a fração que representa a parte pintada do segmento.

Atividade 5



Pinte três quartos da parte que está hachurada na figura ao lado.

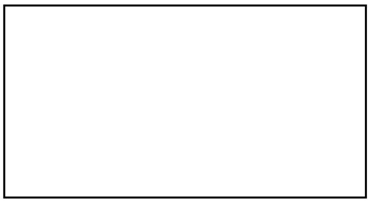
Que parte da figura você pintou?

Qual a sentença matemática que representa essa situação?

Atividade 6

Pinte três quartos de quatro quintos do retângulo desenhado abaixo. Que parte do retângulo você pintou?

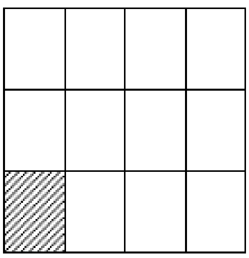
Dê a sentença matemática que representa a operação que você efetuou.

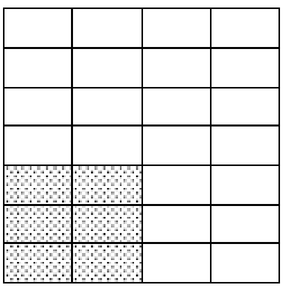


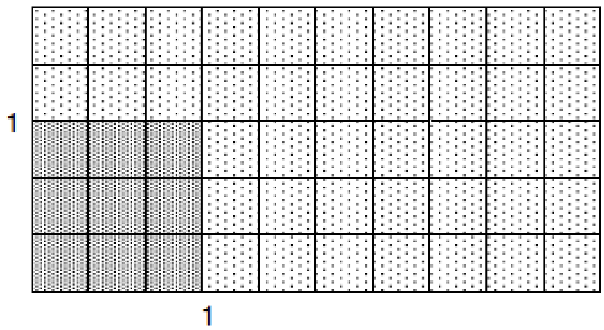
Atividade 7

Sabendo que a área de um retângulo é dada pela multiplicação das medidas da altura e da largura do retângulo, calcule a área da parte pintada das figuras baixo.

b) b) c)







Atividade 8

Escreva uma regra para a multiplicação de números fracionários.

Divisão

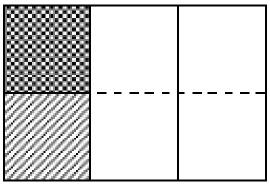
Atividade 1

a)Quantas metades cabem em um inteiro? Como você pode representar essa situação?

b)Quantos terços cabem em um inteiro? Como você pode representar essa situação?

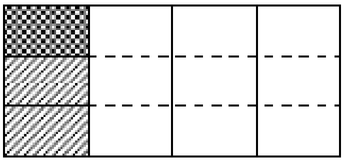
Atividade 2

Observe os desenhos abaixo e complete:

a) 

$\frac{1}{3} \div 2 =$

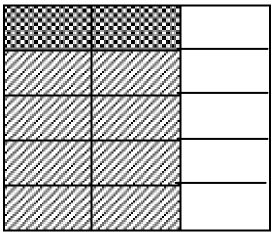
b)



$\frac{1}{4} \div 3 =$

Atividade 3

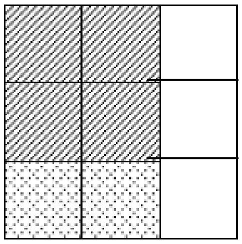
Observe os desenhos abaixo e responda:



Se um quinto de dois terços é $\frac{1}{5}\ x\ \frac{2}{3} =$

Então podemos escrever que:

$\frac{2}{15} \div \frac{1}{5} =$ e $\frac{2}{15} \div \frac{2}{3} =$



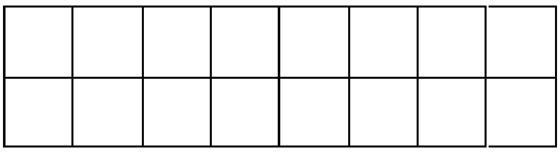
Se um terço da metade é $\frac{1}{3}\ x\ \frac{2}{3} =$

Então podemos escrever que:

$\frac{2}{9} \div \frac{1}{3} =$ e $\frac{2}{9} \div \frac{2}{3} =$

Atividade 4

Quantos oitavos cabem em $\frac{1}{16}$? Dê a expressão matemática que representa a situação. Utilize a figura abaixo para ajudar na solução.



Atividade 5

Quantos $\frac{1}{3}$ cabem em $\frac{1}{2}$? Utilize a figura abaixo para ajudar na solução.

$\frac{1}{2} \div \frac{1}{3} =$

Atividade 6

a) Quantos quartos cabem em um quinto? Escreva a expressão.

b) Quantos terços cabem em um inteiro? Escreva a expressão.

Atividade 7

Escreva uma regra que mostre como dividir duas frações quaisquer.

Atividade 8

Efetue os cálculos abaixo:

a) $7 \times \frac{1}{5} =$

b) $\frac{1}{10} \times \frac{1}{6} =$

c) $\frac{2}{5} \times \frac{1}{3} =$

d) $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{5}{4} =$

e) $\frac{1}{8} \div 2 =$

f) $\frac{2}{16} \div \frac{1}{8} =$

g) $\frac{6}{16} \div \frac{1}{8} =$

h) $\frac{10}{16} \div \frac{5}{8} =$